ВАРИАЦИОННАЯ АССИМИЛЯЦИЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКВАТОРИЙ С "ЖИДКИМИ" ГРАНИЦАМИ

Агошков В.И., Шелопут Т.О.
Институт вычислительной математики Российской академии наук, Москва, agoshkov@inm.ras.ru
Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, sheloput@phystech.edu

Настоящая работа посвящена исследованию и численному решению некоторых обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений, возникающих при моделировании гидротермодинамики в акваториях с "жидкими" границами. Под "жидкими" (открытыми) границами акватории подразумеваются границы типа "вода-вода", например, границы, проходящие по проливам, устьям рек и т. д. Проблема задания граничных условий на "жидких" границах является одной из важных проблем современной геофизики. Одним из подходов к решению данной проблемы является вариационная ассимиляция данных наблюдений, позволяющая с некоторой точностью восстановить граничные функции, рассматривая задачи как обратные.

В основе настоящей работы лежит общая методология исследования и решения обратных задач и задач оптимального управления, изложенная в [1]. В рамках работы были сформулированы обобщенные постановки задач, а также проведено теоретическое исследование разрешимости задач. Были предложены итерационные алгоритмы решения задач и проведены численные эксперименты, подтвердившие полученные теоретические результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 14-11-00609) и РФФИ (грант 16-01-00548).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агошков В.И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003. 257 с.
2. *Agoshkov V.I., Sheloput T.O.* The study and numerical solution of the problem of heat and salinity transfer assuming 'liquid' boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2016. Vol. 31, N. 2, pp. 71-80.

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИИ КОНТАКТА НА КОЛЕБАНИЯ ПУЗЫРЬКА В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Алабужев[1,2] А.А., Кашина[2] М.А.

[1] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*
[2] *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь*

Исследовано поведение газового цилиндрического пузырька в неоднородном переменном электрическом поле. Пузырек окружен несжимаемой жидкостью и ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. Скорость движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональная удвоенной частоте электрического поля [1].

В переменном электрическом поле существуют “антирезонансные” частоты, как и при обычных механических колебаниях пузырька [2]. Однако, в случаи симметричного поля (возбуждаются четные моды), неподвижная точка на боковой поверхности наблюдается только вблизи частоты объемных колебаний. Для несжимаемой капли «антирезонансные» частоты наблюдаются для всех мод [1]. Резонансная амплитуда на этой частоте имеет ярко выраженный характер по сравнению с остальными резонансами. Но с увеличением давления газа в пузырьке происходит сдвиг резонансной частоты и этот эффект исчезает. Отметим, что амплитуда объемных колебаний аналогичного пузырька в переменном поле давления растет с увеличением параметра давления газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-96017.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alabuzhev A.A., Kashina M.A.* The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 681. 012042.
2. *Alabuzhev A.A., Kaysina M.I.* The translational oscillations of a cylindrical bubble in a bounded volume of a liquid with free deformable interface // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 681. 012043.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УБЫВАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ ПАМЯТИ

Алиханов А.А.
Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, alikhanov-tom@yandex.ru

В последнее время наблюдается значительный рост внимания исследователей к дифференциальным уравнениям дробного порядка. Это вызвано многочисленными эффективными применениями дробного исчисления в различных областях науки и технике. Например, математический аппарат дробных производных незаменим для описания процесса стохастического переноса и, как известно, приводит к уравнениям диффузии дробного порядка. В предлагаемой работе рассматривается уравнение диффузии дробного порядка с убывающей функцией памяти

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda} u = \mathcal{L}u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \quad u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha,\lambda} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \frac{\lambda(t-\eta)}{(t-\eta)^\alpha} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,\eta) d\eta$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ с невозрастающей положительной функцией памяти $\lambda(t) \in C^2[0,T]$.

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u, \quad k(x,t) \ge c_1 > 0, \quad q(x,t) \ge 0.$$

Для решения задачи (1)–(2) построена разностная схема с порядком аппроксимации $\mathcal{O}(\tau^{2-\alpha} + h^2)$. Доказана безусловная устойчивость, а так же сходимость разностной схемы со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации.

Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК –3360.2015.1.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛ

Амосов А.А.

Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт", Москва, AmosovAA@mpei.ru

Рассматривается стационарная задача сложного теплообмена в системе $G = \bigcup_{j=1}^m G_j$ полупрозрачных тел, разделенных вакуумом. Каждое из тел G_j - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей,

заполненная оптически однородным материалом с значениями коэффициентов поглощения $\varkappa_\nu = \varkappa_{j,\nu} > 0$, рассеяния $s_\nu = s_{j,\nu} \geq 0$ и показателем преломления $k_\nu = k_{j,\nu} > 1$. Искомыми являются функции $u(x)$ и $I_\nu(\omega, x)$, имеющие физический смысл абсолютной температуры и интенсивности излучения, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega$, где Ω- единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

Для описания сложного теплообмена используется система, состоящая из стационарного уравнения теплопроводности и уравнения переноса излучения

$$-\mathrm{div}(\lambda(x,u)\nabla u) + 4\pi \int\limits_{\mathfrak{N}} \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u)\, \widehat{d\nu} = \int\limits_{\mathfrak{N}} \varkappa_\nu \int\limits_{\Omega} I_\nu \, d\omega \, \widehat{d\nu} + f, \ x \in G, \quad (1)$$

$$\omega \cdot \nabla I_\nu + (\varkappa_\nu + s_\nu) I_\nu = \frac{s_\nu}{4\pi} \int\limits_{\Omega} I_\nu(\omega', x) \theta(\omega' \cdot \omega)\, d\omega' + \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u),$$

$$(\omega, x) \in \Omega \times G, \quad \nu \in \mathfrak{N}. \quad (2)$$

Функция $h_\nu(u) = \dfrac{2\nu^2}{c_0^2} \dfrac{\hbar\nu}{\exp\left(\hbar\nu/(\widehat{k}u)\right) - 1} \mathrm{sign}\, u$ при $u > 0$ отвечает спектральному распределению Планка.

Система (1), (2) дополняется краевыми условиями

$$\lambda(x,u)\nabla u \cdot n_j(x) = 0, \quad x \in \partial G_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3)$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_\nu(I_\nu|_{\Gamma^+}) + \mathfrak{C}_\nu(J_{*\nu}), \quad (\omega, x) \in \Gamma^-, \quad \nu \in \mathfrak{N}. \quad (4)$$

Условие (4) описывает отражение и преломление излучения на границах тел.

Установлены существование и единственность слабого решения задачи (1) - (4). Доказана теорема сравнения. Выведены оценки слабого решения и получен результат о его регулярности.

О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Андреев В.К., Ефимова М.В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, andr@icm.krasn.ru

Точные решения уравнений гидродинамики используются для математического моделирования многих технологических процессов,

включая конвективный тепло- и массоперенос. В работе рассматривается двумерное движение несмешивающейся несжимаемой бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в плоском слое. Решение уравнений термодиффузионной конвекции описывается в специальном виде: одна из компонент скорости линейно зависит от продольной координаты, поля температур и концентрации имеют квадратичную зависимость от горизонтальной координаты. Такое поле скоростей соответствует хорошо известному решению Хименца для чисто вязкой жидкости [1]. Предполагается, что движение возникает под действием термоконцентрационных и гравитационных сил из состояния покоя. Градиенты давления являются неизвестными функциями относительно горизонтальной координаты. Именно поэтому краевая задача является нелинейной и обратной.

Для ползущего движения при малых числах Марангони получены следующие результаты:

1) построено точное решение стационарной задачи конвекции;

2) получены априорные оценки нестационарного решения. Установлены условия распределения температуры вдоль твердых стенок, при которых движение стремится к стационарному;

3) определено аналитическое решение нестационарной задачи путем преобразования Лапласа. Расчеты скорости, температуры и концентрации в различные моменты времени позволяют проследить эволюцию решения для конкретных бинарных смесей и жидкостей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00067).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hiemenz, K.* Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Dinglers Poliytech.J.,**326**(321–410),1911.

О РАЗРАБОТКЕ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК В КОНСТРУКЦИЯХ, ОБРАЗОВАННЫХ ОБЪЁМАМИ ВРАЩЕНИЯ, В ТОМ ЧИСЛЕ И ПРИ ИХ ДЕФОРМАЦИИ

Анучина А.И.[1], Артемова Н.А.[2], Бронина Т.Н.[2], Гордейчук В.А.[1], Ушакова О.В.[2]

[1] *РФЯЦ - ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина, Снежинск*

[2] *ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург*

Описано современное состояние развития алгоритмов построения сеток в конструкциях, образованных объёмами вращения. Алгорит-

мы предназначены для численного моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики [1] и разработаны в рамках подхода [2]. Алгоритмы осуществляют построение структурированных оптимальных сеток (невырожденных, близких к равномерным и ортогональным) [2], состоящих из шестигранных ячеек [1]. Программы написаны на языке C++. Первая группа разрабатываемых алгоритмов предназначена для построения сеток в деформированных объёмах вращения. Все алгоритмы данной группы (алгоритмы деформации сетки, оптимизации сетки, коррекции сетки к поверхностям вращения) реализованы в нестационарном алгоритме построения сеток в деформированных объёмах вращения. Объём вращения получается вращением на 180° плоской кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Деформированный объём вращения образуется деформацией объёма вращения (основного тела) другим объёмом вращения (вспомогательным телом). Алгоритм представляет собой итерационный процесс, состоящий на каждой итерации из двух этапов. На первом этапе (деформация) основное тело и сетка в нём деформируются вспомогательным телом. Шаг деформации выбирается так, чтобы деформированная сетка не содержала вырожденных ячеек [6]. Второй этап (оптимизация) представляет собой оптимизацию деформированной сетки вариационным методом построения оптимальных сеток [2, 4]. На этом этапе применяется специальный алгоритм коррекции [7, 8] узлов сетки к соответствующей поверхности вращения. Итерационный процесс применяется до тех пор, пока деформация основного тела не достигнет необходимой степени. Начальные сетки в основных и вспомогательных телах строятся методом [3, 4]. Вторая группа алгоритмов строит сетки в объёмах, образованных поверхностями вращения с параллельными осями вращения. Это также специализированные алгоритмы построения начальных сеток, оптимизации сеток, коррекции сеток к поверхностям вращения. Приводятся примеры сеток в описанных объёмах и результаты их тестирования согласно критериям [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04146), УрО РАН (проекты 15-7-1-13, 15-16-1-10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anuchina N.N., Volkov V.I., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Ilyutina O.S.,*

and Kozyrev O.M. Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code. Advances in Grid Generation. ed by Ushakova O.V. Novascience Publishers. 2007.
2. *Khairullina O.B., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.* Variational methods of construction of optimal grids. Handbook of Grid Generation. Thompson J.F., Soni B.K., and Weatherill N.P., eds. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 1999. P.36-1-36-25.
3. *Bronina T.N., Ushakova O.V.* Application of Optimal Grid Generation Algorithms to the Volumes of Revolution. Advances in Grid Generation. ed. by O.V. Ushakova. Novascience Publishers, 2007.
4. *Ушакова О.В.* Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // Труды института математики и механики. 2008. Т. 14. N. 1. С. 150–180.
5. *Прохорова М.Ф.* Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток // Труды института математики и механики. 2008. Т. 14. N. 1. С. 112–129.
6. *Ushakova O.V.* Nondegeneracy tests for hexahedral cells. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 200 (2011) 1649–1658.
7. *Ушакова О.В.* Алгоритм коррекции сетки к области вращения // ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 1. С. 16–27.
8. *Ушакова О.В.* Применение алгоритма коррекции сетки к области вращения // ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 2. С. 31–37.

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЕГО ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А.
Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, theory@itp.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, georkhab@ngs.ru

При моделировании распространения нелинейных волн в горизонтальном канале использованы следующее предположения: 1) жидкости являются несжимаемыми и несмешивающимися; 2) рассматриваются умеренно длинные возмущения малой, но конечной амплитуды; 3) толщины вязких пограничных слоев в возмущенном течении остаются тонкими, т. е. много меньше глубин слоев; 4) капиллярные эффекты не велики; 5) инкремент нарастания возмущений невелик. В этих допущениях, используя метод многих масштабов времени, удалось построить последовательный ряд теории возмущений для учета эффектов дисперсии и нелинейности волн, слабой диссипации в нестационарных пограничных слоях, а также накачки энергии

волн стационарным течением. Для решения задачи во втором порядке теории возмущений использован метод сопряженного оператора. В результате получено одно интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{Re}(c)\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + C_d \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} + C_n \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - C_b \int\limits_0^x \frac{\partial \eta(t,x')}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}(c)\,\hat{\eta}(k,t)\,e^{ikx} k\,dk\,.$$

Здесь η – возмущение границы раздела, t – время, x – координата, c – фазовая скорость, k – безразмерное волновое число. Константы C_d, C_n, C_b определяются как основными параметрами задачи, так и вертикальными профилями возмущенного течения. Интегралы соответствуют диссипации и накачке энергии волн. Численное решение этого уравнения выполнялось на основе спектрального метода с разложением неизвестной функции в пространственный ряд Фурье.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 14-22-00174.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД В ОБЛАСТЯХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ РАБОЧИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Ахмадиев Ф.Г.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г.Казань, Akhmadiev@ksaba.ru

Рассматриваются ламинарные осесимметрические и плоские неизотермические и установившиеся течения суспензии в проницаемых каналах, трубах различной конфигурации и по проницаемым поверхностям, которые являются рабочими узлами фильтровального оборудования. При течении вдоль рабочего элемента под действием перепада давления осуществляется фильтрование суспензии через проницаемую стенку и ее разделение с образованием осадка на поверхности фильтра или в режиме сгущения. Для описания основного потока суспензии в трубе используются уравнения сохранения механики многофазных сред, записанные в ортогональной системе координат, связанной с областью течения, для плоского или осесимметрического течений. При этом поперечные размеры области

течения считаются гораздо меньше продольных размеров. Реологическое уравнения состояния суспензии описывается степенной моделью Оствальда де Виля.

Эта система решается совместно с уравнениями одномерной фильтрации через осадок и стенку фильтровального элемента и уравнениями теплопроводности для них и основного потока.

Решение данной системы уравнений при соответствующих граничных условиях сопряжения на границах раздела и стенках канала представляет собой сложную проблему, связанную с большими математическими и вычислительными трудностями. В связи с этим, на основе обоснованных предположений, предлагается упростить математическую модель для различных режимов течения и фильтрования (течение при различных числах Рейнольдса), которые были рассмотрены по отдельности. При этом были использованы численный метод поверхностей равных расходов и метод осреднения Слезкина. Причем, решение данной задачи при малых числах Рейнольдса удается получить аналитически. Был приведен вычислительный эксперимент по построенной математической модели процесса разделения суспензии и определены характерные особенности течения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЧЕ-РАЗРЯДА В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ДАВЛЕНИЙ

Бадриев И.Б., Желтухин В.С.,Чебакова В.Ю.
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ildar.badriev1@mail.ru
Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, vzheltukhin@gmail.com
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, vchebakova@mail.ru

Для получения плазмы используются различные типы разрядов, в их числе большое место занимают высокочастотные разряды и, в частности, высокочастотные емкостные (ВЧЕ) разряды. ВЧЕ-разряды при различных диапазонах давлений отличаются как различными значениями характеристик разряда (концентрация заряженных частиц, газовая температура, энергия электронов), так и механизмами внутренних процессов. В настоящее время подробно исследованы модели ВЧЕ-разряда среднего и низкого диапазонов давлений, при этом ВЧЕ-разряды повышенного и пониженного давления практически не исследованы.

Представленные модели описывает емкостной ВЧ-разряд от пониженных и до повышенных давлений включительно между двумя плоско–параллельными электродами, один из которых заземлен, а другой соединен с ВЧЕ-генератором, расстояние между электродами меньше размеров самих электродов. В этих условиях электрическое поле близко к потенциальному и разряд однороден вдоль электродов, что позволяет применить одномерную модель. Сравнение оценок времени диссипации и длины релаксации энергии электронов с периодом поля и размерами расчетной области показывают, что при моделировании ВЧЕ-разряда при повышенных и пониженных давлениях нужно использовать различные приближения(локальное и нелокальное приближение)[1,2].

Предложены численные алгоритмы решения математических моделей ВЧЕ-разряда, основанные на конечномерной аппроксимации задачи с помощью разностных схем с последующим применением для ее реализации итерационного процесса, приведены также разностные схемы для начальных, краевых и начально–краевых задач, входящих в нелинейные системы, описывающие рассматриваемые модели ВЧЕ-разряда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-00755, 15-01-05686, 15-41-02672)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф.* Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2000. 348 с.
2. *Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А.* Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения. М: Изд-во МФТИ, 1995. 320 с.
3. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2013. Т. 155. Кн. 2. С.123–130..
4. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.

О РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П., Паймушин В.Н.
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ildar.badriev1@mail.ru

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, makarovmaksim@mail.ru
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, olka95ja@mail.ru
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, vpajmushin@mail.ru

В настоящей работе в одномерной постановке рассматривается геометрически нелинейная задача об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. По аналогии с [1] установлено, что среди перемещений точек срединной поверхности U и касательных напряжений в заполнителе q в состоянии равновесия имеют место только те, для которых функционал Лагранжа имеет стационарные значения. При этом возникает нелинейная система дифференциальных уравнений относительно U и q. Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде нелинейного операторного уравнения. Исследованы свойства оператора – псевдомонотонность, ограниченная липшиц-непрерывность, коэрцитивность и квазипотенциальность. Это дало возможность доказать теоремы существования задачи и сходимости предложенного в [2] двухслойного итерационного процесса на основе развитой в [3] техники.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-38-21099, 16-38-00788, 16-08-00316)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паймушин В.Н.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Известия АН СССР. МТТ. 1987. No 2. С. 171–180.
2. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9. No 78. P. 3887–3895.
3. *Badriev I.B., Zadvornov O.A., Saddek A.M.* Convergence Analysis of Iterative Methods for Some Variational Inequalities with Pseudomonotone Operators // Differential Equations. 2001. V. 37. No 7. P. 934–942.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Байкин А.Н.[1], Головин С.В.[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск*
[2] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Трещины гидроразрыва играют важную роль в процессах, протекающих в природе и инженерной практике. Распространение трещины гидроразрыва обусловлено закачкой в нее вязкой жидкости, которая создает давление на стенках достаточное для преодоления горного давления и разрыва горной породы. Процесс развития трещины обусловлен несколькими факторами: течением вязкой жидкости по трещине, упругой реакцией стенок трещины, фильтрацией жидкости через стенки трещины в пласт и разрывом породы.

В настоящей работе разработана модель трещины в пороупругой среде, основанная на [1] и позволяющая определить как поровое давление в пласте, так и деформацию горной породы совместно с раскрытием трещины и давлением в ней. В качестве критерия роста трещины был использован подход основанный на силах сцепления, препятствующих раскрытию трещины вблизи ее кончиков.

Численное решение задачи проводилось методом конечных элементов с помощью модификации алгоритма из [1]. Преимуществами алгоритма является отсутствие необходимости явно отслеживать кончики трещины и перестраивать сетку на каждом временном шаге. Алгоритм исследован на сходимость и проведено сравнение с известными численными и аналитическими решениями. Возможности алгоритма продемонстрированы для исследования трещины в неоднородном пласте.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–8146.2016.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shelukhini V.V., Baikov V.A., Golovin S.V., Davletbaev A.Y., Starovoitov V.N.* Fractured water injection wells: Pressure transient analysis // International Journal of Solids and Structures. 2014. Т. 51. С. 2116–2122.
2. *Barenblatt G.I.* The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Adv Appl Mech. 1962. Т. 7. С. 55–129.

СПЕКТР ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ

Бекежанова В.Б., Шефер И.А.
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, vbek@icm.krasn.ru
Сибирский федеральный университет, Красноярск, ilya.shefer@gmail.com

Теоретические результаты по исследованию двухслойных течений с поверхностями раздела часто служат основой для совершенствования существующих технологий жидкостного охлаждения, использующих в качестве рабочих сред испаряющиеся жидкости.

В настоящей работе изучается точное стационарное решение уравнений Обербека-Буссинеска, описывающее совместное течение вязкой теплопроводной жидкости и спутного потока парогазовой смеси в горизонтальном канале [1]. При этом предполагается массоперенос через межфазную границу Г за счёт испарения; на Г формулируется условие баланса массы и используется термодинамическое соотношение для определения концентрации насыщенного пара. Кроме этого, учитываются эффект диффузионной теплопроводности в парогазовом слое и заданный продольный градиент температуры на твёрдых непроницаемых границах канала. Для концентрации пара в газе используется условие отсутствия потока пара через верхнюю стенку.

Изучено влияние гравитации и тепловой нагрузки на стенках канала на топологию течения и характеристики его устойчивости. Предложена классификация типов течений в зависимости от доминирующих сил. Исследованы поведение возникающих характеристических возмущений и их свойства, выделены кризисные механизмы и получены критические значения продольных градиентов температуры, при которых течение теряет устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончарова О.Н., Резанова Е.В.* Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. 2014. N. 2. С. 68–79.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДИХОТОМИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА

Блинова М.А., Бибердорф Э.А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Исследование устойчивости — одна из наиболее актуальных задач современной физики и инженерии. Данное явление изучается как экспериментально, так и при помощи различных теоретических

подходов. Естественно, большое значение имеют и численные исследования.

Для решения задач устойчивости в работах академика С.К. Годунова и его учеников был предложен метод дихотомии матричного спектра, позволяющий с гарантированной точностью исследовать спектральные свойства несимметричных матриц [1]. Но исходная версия алгоритма дихотомии не подходит для работы с матрицами с большой нормой, которые встречаются в практических приложениях. Специальным образом модифицированный алгоритм дихотомии для комплекснозначных матриц с большой нормой был применен к известной задаче устойчивости течения несжимаемой жидкости между двумя плоскими пластинами (течение Пуазейля) [2] . С его помощью удалось повторить классические результаты, в частности, определить минимальное число Рейнольдса, при котором появляется неустойчивость по времени плоского течения Пуазейля. Результаты расчетов показали, что метод дихотомии хорошо подходит для такого круга задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. // Новосибирск, Научная книга, 1997. 416 с.
2. *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях // М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2006. 304 с.

РАСЧЁТ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Блохин А. М., Круглова Е. А., Семисалов Б. В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Конструкторско-технологический институт вычислительной техники, СО РАН
blokhin@math.nsc.ru, sl2857@mail.ru, vibis@ngs.ru

Стремительное развитие технологий 3D печати требует разработки математических моделей, описывающих с высокой степенью достоверности течения растворов и расплавов полимеров в каналах печатающих устройств. Применение мезоскопического подхода [1], представляющего разумный компромисс между микроструктурными моделями, и моделями, описывающими свойства, наблюдаемые в

эксперименте на макроуровне, позволяет описать сложную структуру полимера. В данной работе за основу берётся модификация мезоскопической реологической модели Покровского-Виноградова [2]. В работе поставлена нелинейная краевая задача для определения скорости течения жидкости в цилиндрическом канале с тонким нагревательным элементом (нитью) в центре. Приближённые решения краевой задачи найдены с помощью нелокального алгоритма, основанного на применении приближений без насыщения К.И. Бабенко [3]. Приведены результаты расчётов различных режимов течения и расчетов с контролем погрешности. Получены решения для предельно малых значений радиуса нагревательного элемента.

Работа выполнена при финансовой поддержке НГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pokrovskii V. N.* The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 2010. doi:10.1007/978-90-481-2231-8
2. *Блохин А.М., Семисалов Б.В.* Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // СибЖИМ. 2014. Т.XVII. №4(60). С. 38-47.
3. *Семисалов Б. В.* Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1110-1135.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДВУХФАЗНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ГАЗА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Блохин А.М., Голдин А.Ю.
Институт математики им. Соболева СО РАН, Новосибирск,
blokhin@math.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск,
goldinandrey@list.ru

Предложенное в работе [1] уравнение состояния обобщенного газа Ван-дер-Ваальса достаточно адекватно описывает состояния жидкостей и газов и межфазовые переходы.

$$P = \frac{RT}{V - V_0} - \frac{A}{(V + C)^k T^m}, V > V_0, \tag{1}$$

Здесь P – давление, V– удельный объем, T – температура, R – газовая постоянная, V_0, A, k, m, C – некоторые константы.

Основная цель настоящей работы заключается в том, чтобы научиться строить области двухфазных состояний, так как изотермы

для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса не отражают истинной физической картины происходящего.

В алгоритме построения активно используется правило равных площадей Максвелла (см. [2]), а также само уравнение состояния (1). В качестве иллюстрации подхода используются численные результаты из работ [3, 4] по задаче об обтекании клина обобщенным газом Ван-дер-Ваальса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фогельсон Р.Л., Лихачев Е.Р.* Уравнение состояния реального газа. // ЖТФ, 2004, Т. 74, вып. 7, стр. 129-130.
2. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика. М.: Изд-во "Оникс", "Мир и образование", 2006, 360 с.
3. *Блохин А.М., Ткачёв Д.Л.* . Анализ реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн при обтекании клина неидеальным газом. // ЖТФ, 2015, Т.85, вып.7, С. 20-30
4. *Блохин А.М., Бычков А.С., Мякишев В.О.* . О выполнении условия Лопатинского в задаче об обтекании клина нормальным газом и газом Ван-дер-Ваальса. Препринт/ Институт математики СО РАН, № 280, Новосибирск, 2012, 58 с.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

Богданов А.Н., Диесперов В.Н.

Описание невязких нестационарных течений газа гиперболическими уравнениями дает, в частности, в одномерном случае два типа волн –вверх и вниз по течению.

Классическая теория нестационарных трансзвуковых течений, базирующаяся на использовании трансзвукового асимптотического разложения [1], использует для математического моделирования течений такого рода уравнение Линя-Рейсснера-Цяня (ЛРЦ). Как показал дополнительный анализ (см., например, [2]) указанное уравнение хотя и остается гиперболическим уравнением, не позволяет в полной мере описывать реальные течения. Картина течения при моделировании оказывается не полной, в частности, для одномерных задач оказывается возможным исследовать слабые возмущения только вверх по потоку. Такое ограничение накладывается переходом в систему координат, связанную с волной, распространяющейся вверх по течению, из-за того скорость слабых возмущений вниз по потоку становится бесконечной.

Тем не менее, уравнение ЛРЦ широко использовалось для исследования задач нестационарных трансзвуковых течений, в частности, оно входило в модель нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия в трансзвуковом диапазоне скоростей (трехпалубная модель [3]), привнеся указанные выше особенности в характер результатов исследования задач вязко-невязкого взаимодействия. Для выхода из создавшегося положения было предложено [2] модифицированное уравнение ЛРЦ, сохраняющее член со второй производной по времени.

В настоящей работе проводится сравнение результатов, полученных на классических и модифицированных моделях. Обсуждаются физические эффекты, утрачиваемые для исследования при использовании классических трансзвуковых моделей. В этой связи имеются основания и к пересмотру результатов классической теории при исследовании нелинейных уединенных волн (солитонов), ранее обнаруженных в неклассических пограничных слоях для околозвукового диапазона скоростей [4]. Но к "потерянным" эффектам относятся не только явления, непосредственно связанные с существованием и поведением "потерянных" возмущений, но и вызываемые "потерянными" возмущениями процессы взаимодействия –отражение, резонансное взаимодействие и т.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.

2.*Богданов А.Н.* Высшие приближения трансзвукового разложения в задачах нестационарных трансзвуковых течений // ПММ. 1997, Т. 61, Вып. 5. С. 798-811.

3.*Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока// Докл. АН СССР. 1977. Т.236. № 5. С. 1091-1094.

4.*Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001.

МЕТОДИКА РАСЧЁТА НАГРЕВА ИЗЛУЧЕНИЕМ ОПТИЧЕСКИ ПРОЗРАЧНОГО ВЕЩЕСТВА С ПОГЛОЩАЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Болкисев А.А.

Институт механики УрО РАН, Ижевск

Применительно к задаче инертного прогрева смесевого твёрдого топлива разработана методика расчёта нагрева излучением оптически прозрачного вещества с поглощающими включениями. Её основу

составляет составление методом трассировки лучей карты поглощения излучения, определяющей, какая доля поступившей на поверхность топлива энергии будет поглощена каждым его элементом.

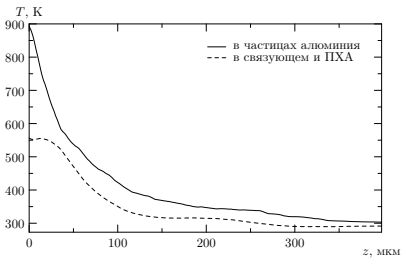


Рис. 1: Профили средней температуры вдоль оси z

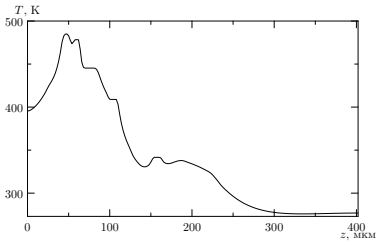


Рис. 2: Профиль температуры вдоль оси z: видна перегретая алюминиевая частица

Базовое допущение методики — незначительность переизлучения в образце, что позволяет значительно сократить затраты времени и памяти. На рис. 1 и 2 показаны результаты модельного расчёта, где виден значительный перегрев частиц алюминия по сравнению с окружающими их частицами ПХА и связующим. Это согласуется с оценками [1] и экспериментальными наблюдениями [2] (выброс поверхностного слоя топлива при воспламенении и высокая температура подповерхностных слоёв).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *M. Q. Brewster, R. Patel* Selective Radiative Preheating of Aluminum in Composite Solid Propellant Combustion // Journal of Heat Transfer. 1987. Vol. 109. P. 179–184.
2. *В. А. Архипов и др.* Влияние дисперсности порошка алюминия на характеристики зажигания смесевых композиций лазерным излучением // Химическая физика. 2011. Т. 30. N. 7. С. 68–76.

СПОСОБ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ В КОМБИНИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ГОРЕНИЯ

Болкисев А.А., Шаклеин А.А.
Институт механики УрО РАН, Ижевск

Предложен способ аналитического расчёта изменения концентраций веществ для комбинированной модели турбулентного горения

(с учётом кинетических эффектов) с брутто-реакцией “горючее” + “окислитель” $\rightarrow$ “продукты”, где скорость реакции определяется как минимум из турбулентной и кинетической скоростей горения:

$$w = \min\left(w_t, w_k\right) = \min\left(\underbrace{\rho A \frac{\varepsilon}{k}}_{A_1} \frac{Y_f}{\nu_f}, \underbrace{\rho A \frac{\varepsilon}{k}}_{A_1} \frac{Y_o}{\nu_o}, \underbrace{A \exp(-E/RT)}_{A_2} Y_f Y_o\right).$$

Способ заключается в преобразовании системы уравнений для концентраций в одно уравнение для переменной развития процесса:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \min\left[\begin{array}{lcl} A_1(Y_f^0 - \nu_f\lambda)/\nu_f & \leftrightarrow & a_0^A + a_1^A\lambda \\ A_1(Y_o^0 - \nu_o\lambda)/\nu_o & \leftrightarrow & a_0^B + a_1^B\lambda \\ A_2(Y_f^0 - \nu_f\lambda)(Y_o^0 - \nu_o\lambda) & \leftrightarrow & a_0^C + a_1^C\lambda + a_2^C\lambda \end{array}\right.$$

Для полученного уравнения и с линейной, и с для квадратичной правой частью существуют аналитические решения.

$$\frac{d\lambda}{dt} = a_0 + a_1\lambda \quad : \lambda(t) = \frac{a_0}{a_1}\left(\exp(a_1 t) - 1\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \quad : \lambda(t) = -\frac{a_0(a_1\tau + 1)(\exp(t/\tau) - 1)}{2a_0a_2\tau(\exp(t/\tau) + 1) - a_1(a_1\tau + 1)}$$

$$\tau = 1/\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}$$

Точки переключения с одной правой части на другую также легко находятся. Таким образом, можно получить точное решение подзадачи химической кинетики в контрольном объёме для любой величины шага по времени.

Модельные расчёты демонстрируют значительное ускорение сходимости численного решения задачи о распространении турбулентного диффузионного пламени вверх по вертикальной поверхности по сравнению с численным расчётом химической кинетики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-38-00543 мол_а).

БЕЗМАТРИЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ С АДАПТИВНЫМ ПОДАВЛЕНИЕМ ОШИБКИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Бондарь И.В., Фалейчик Б.В.
Белорусский государственный университет, Минск

Рассмотрим систему алгебраических уравнений в общем виде $r(x) = 0$, где $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируемая функция. Для решения данной системы применим итерационные процессы вида

$$x^{k+1} = \Phi(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{1}$$

Конкретный вид итерационного процесса в случае реализации неявных методов Рунге-Кутты для жестких систем ОДУ приведен в [1]. Дальнейшие построения проведем для линейного случая, когда $r(x) = Ax - b$, а спектр матрицы A лежит в левой комплексной полуплоскости.

Для ускорения сходимости рассматриваемых процессов в случае, когда матрица A имеет большое спектральное число обусловленности $|\lambda_{max}|/|\lambda_{\min}|$, предлагается использовать следующий способ подавления ошибки. Пусть $x^0, \dots, x^m$ – приближения, полученные при помощи (1) и $\left\{r^i = r(x^i)\right\}_{i=0}^m$ —соответствующие им невязки. Уточненное приближение будем искать в виде $\hat{x} = \sum_{i=0}^m c_i x^i$, $c_i \in \mathbb{R}$. Тогда

$$r(\hat{x}) = \sum_{i=0}^m c_i r^i + \left(\sum_{i=0}^m c_i - 1\right) b. \tag{2}$$

Минимизируя норму невязки (2), получаем следующее правило нахождения неизвестных коэффициентов $\{c_i\}$:

$$\left\| \sum_{i=0}^m c_i r^i \right\|_2 \to \min, \quad \sum_{i=0}^m c_i = 1. \tag{3}$$

В докладе обсуждаются теоретическое обоснование предложенной вычислительной схемы и результаты численных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *B. Faleichik, I. Bondar, V. Byl.* Generalized Picard iterations: A class of iterated Runge–Kutta methods for stiff problems. // J. of Comp. and App. Math., Vol. 262, 15 May 2014, P. 37-50.

СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Боронина М.А., Вшивков В.А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, boronina@ssd.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск, vsh@ssd.sscc.ru

Работа посвящена численным схемам для расчета уравнений Максвелла в применении к задаче динамики пучков заряженных частиц в ускорителях. Для достижения высокой светимости пучки фокусируются и имеют различные размеры по каждому направлению. Вследствие этого алгоритм на основе схемы Лэнгдона-Лазински требует использования мелкого временного шага из-за условия устойчивости. Предлагается использовать новую схему для вычисления уравнений Максвелла, неявную вдоль направления наименьшего размера пучка. Схема является трехслойной, обладает вторым порядком точности по времени и пространству и дает возможность проводить расчеты при более крупных временных шагах. В отличие от схемы Лэнгдона-Лазински новая схема позволяет описать продольную компоненту электрического поля внутри области в условиях ультрарелятивизма. К недостаткам новой схемы можно отнести высокий уровень погрешностей.

В работе представлены результаты сравнения работы алгоритмов и выбора оптимальных параметров для проведения математического моделирования динамики ультрарелятивистских пучков.

Разработка и реализация схем выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-31-00301. Применение схем и исследование результатов их применения было выполнено при поддержке гранта РНФ 16-11-10028.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боронина М.А., Вшивков В.А., Дудникова Г.И.* Неявная схема для решения уравнений Максвелла в областях с различными масштабами // Доклады АН ВШ РФ. 2014. №4(25). С. 39–46.
2. *Boronina M.A., Vshivkov V.A.* Development and analysis of computational algorithm of the Maxwell's equations in flat domains // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722. N. 1. P. 012006.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОРРЕКЦИИ ФОРМЫ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА ПРИ КЕРАТОКОНУСЕ

Бураго[1] Н.Г., Журавлев[1] А.Б., Никитин[1,2] И.С., Якушев[2] В.Л.
[1] *ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва*
[2] *ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

Кератоконус - заболевание глаза, при котором роговица принимает коническую форму, что приводит к ухудшению зрения. Оперативное лечение проводится фемтосекундным лазером, в рогови-

це создают два полукруглых микроканала для имплантов из полиметаметилкрилата. Эти гибкие кольцевые сегменты, вставленные в микроканалы, стремятся восстановить свою начальную форму, тем самым деформируя роговицу и устраняя кератоконус.

В работе создана конечно-элементная модель склеры глаза и роговицы с дефектом. Исследован случай осевого расположения дефекта. Численно решена контактная задача о совместном деформировании роговицы и предварительно напряженного кольцевого сегмента (импланта) треугольного сечения, используемого в медицинской практике. Учитывалось внутриглазное давление на склеру и роговицу. Исходные данные приведены в [1], где была использована приближенная методика расчета.

Развитая здесь более точная методика моделирования операции коррекции кератоконуса позволяет проводить оценку механических свойств и геометрических параметров кольцевых имплантов для разглаживания дефекта роговицы глаза.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-29-03895офи-м).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев А.Б., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Математическое моделирование биомеханического отклика при интрастромальной коррекции формы роговицы // Вестник кибернетики. 2015. N. 4(20). С. 64-68.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕКЦИИ ГАЗА В ЗАКРИТИЧЕСКУЮ ЧАСТЬ СОПЛА РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Быков Н.В., Бырдин К.А., Макаренко В.С.
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва, nik.bkv@gmail.com

Инжекция горячих или холодных газов в закритическую часть сопла ракетного двигателя является одним из способов регулирования вектора тяги по направлению [1, 2]. Инжекция производится через набор осесимметрично расположенных сопел. При этом эффективность такого способа управления существенно зависит от параметров струи вдуваемого газа. В настоящей работе проведено численное исследование процесса инжекции струи газа при различных её параметрах в закритическую часть сопла ракетного двигателя. Исследован процесс интерференции двух инжектируемых струй и

его влияние на вектор тяги. В основу расчета положены уравнения сохранения аэрогазодинамики для вязкого сжимаемого газа, при этом уравнения движения осреднялись по Рейнольдсу (модель RANS - Reynolds-averagedNavier–Stokes). Система уравнений сохранения аэрогазодинамики замкнута при помощи модели турбулентности k-ω SST, которая хорошо предсказывает отрыв и надежно работает в области больших градиентов давлений. Для проверки правильности расчета было решено несколько тестовых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калугин В.Т.* Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 688 с.
2. *Быков Н.В., Калугин В.Т.* Название статьи // Численное моделирование импульсного вдува струи в закритическую часть сопла ракетного двигателя // Комплексные проблемы развития науки, образования и экономики региона. 2015. N. 1(5). С. 64–72.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ПРОДУКТИВНОМ СЛОЕ ЗАМКНУТОЙ ГЕОТЕРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Ваганова Н.А., Филимонов М.Ю.
ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского,
Уральский Федеральный Университет
г. Екатеринбург, fmy@imm.uran.ru

Геотермальная энергия является перспективным видом возобновляемой энергии. Геотермальные месторождения имеют различные параметры, обусловленные географическими особенностями местности. Одним из распространенных способов получения геотермального тепла является замкнутая геотермальная циклическая система (ГЦС), когда добываемая вода, после отдачи тепла в теплообменнике, закачивается обратно через нагнетательную скважину в подземный продуктивный слой. Моделирование таких систем является актуальной задачей, поскольку оптимальные параметры таких систем, рассчитанные на этапе проектирования, позволяют существенно повысить эффективность ГЦС.

Представленные в докладе результаты опираются на работы [1-4] и содержат ответ о степени влияния различных краевых условий на границах продуктивного слоя на распространение фронта холодной воды из нагнетательной скважины.

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ, грант 16–01–00401 и контракта № 02.A03.21.0006 (постановление № 211 Правительства Российской федерации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башуров, Вл.В., Ваганова Н.А., Филимонов М.Ю.* Численное моделирование процессов теплообмена в грунте с учетом фильтрации жидкости // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, No 4. С. 3–18.
2. *Филимонов М.Ю., Ваганова Н.А.* Моделирования распределения температуры в пределах резервуара геотермальных вод // Труды Института механики УрО РАН "Проблемы механики и материаловедения". Материалы конференции "Актуальные проблемы математики, механики, информатики". Ижевск, 3–5 марта 2014 г. С. 219–222.
3. *Ваганова Н.А., Филимонов М.Ю.* Оптимальное проектирова-ние геотермальных циклических систем // Всероссийская конференция Экология. Экономика. Информатика. Сборник статей. Т. 1. Системный анализ и моделирование экономических и экологических систем. 2014. С. 387-–392.
4. *Vaganova N.A., Filimonov M Yu.* Computer simulation of nonstationary thermal fields in design and operation of northern oil and gas fields. // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1690. № 020016. http://dx.doi.org/10.1063/1.4936694.

ILU ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Василевский Ю.В.
Институт вычислительной математики РАН, Москва,
yuri.vassilevski@gmail.com

В докладе обсуждается метод неполной факторизации второго порядка для итерационного решения линейных систем, возникающих из конечно-элементной аппроксимации трехмерных линеаризованных уравнений Навье-Стокса, описывающих течения несжимаемой жидкости. В качестве приложения рассматривается моделирование течения крови в коронарной артерии реального пациента.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РНФ 14-31-00024.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Konshin I., Olshanskii M., Vassilevski Yu. ILU preconditioners for nonsymmetric saddle-point matrices with application to the incompressible Navier–Stokes equations// SIAM J.Sci.Comp. 2015, V.37, No.5, pp.A2171-A2197.
2. Konshin I., Olshanskii M., Vassilevski Yu. An algebraic solver for the Oseen problem with application to hemodynamics // To appear in Computational Methods in Applied Sciences, Springer, 2016

3.Konshin I., Olshanskii M., Vassilevski Yu. LU factorizations and ILU preconditioning for stabilized discretizations of incompressible Navier-Stokes equations // Submitted to Numerical Linear Algebra with Applications.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА

Власова[1] С.С., Просвиряков[2] Е.Ю.
[1] *Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, sveta040790@yandex.ru1*
[2] *Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, evgen_pros@mail.ru2*

Явление свободной конвекции очень широко распространено в природе и технике. Свободная конвекция определяет циркуляцию воздуха в атмосфере земли, циркуляцию воды в океане также конвективные потоки приводят к возникновению таких атмосферных явлений, как ветер, ураганы, циклоны.

Свободная конвекция, как и любое другое макроскопическое движение жидкости или газа описывается системой уравнений движения Навье-Стокса, общим уравнением переноса тепла и уравнением непрерывности, выражающим закон сохранения массы. Чаще всего все модельные задачи, посвященные теоретическому описанию свободной конвекции, рассматриваются с предположением об идеальном теплообмене на границах слоя жидкости, и большинство классических точных решений рассмотрены с таким предположением. Но нельзя пренебрегать теплообменом на границах при изучении краевых режимов в бесконечном слое с несжимаемой вязкой жидкостью.

Стационарное решение линеаризованной системы уравнений вычисляется в классе точных решений:

$$V_x = xu\left(z\right), \quad V_z = w\left(z\right), \tag{1}$$

$$T = T_0\left(z\right) + T_{11}\left(z\right)\frac{x^2}{2}, \quad P = P_0\left(z\right) + P_{11}\left(z\right)\frac{x^2}{2}. \tag{2}$$

Оно дополнено граничными условиями вида:

$$\text{при } z = -1\text{: } V_x = V_z = 0,\ T = 0;$$

$$\text{при } z = 0\text{: } V_z = 0,\ -\chi\tfrac{dT}{dz} = \alpha T.$$

Решение полученной системы сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений девятого порядка.

ВЛИЯНИЕ СНЕЖНОГО ПОКРОВА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Воскобойникова Г.М., Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, gulya@opg.sscc.ru

Одной из важных геоэкологических проблем является проблема изучения воздействия индустриальных (карьерных, полигонных) взрывов на окружающую среду. Известно, что на распространение сейсмических и акустических волн от взрывного источника влияют различные факторы: метеофакторы, рельеф местности, а также присутствие снежного покрова и леса. В данной работе рассматривается влияние снега на распространение сейсмических и акустических волн, используя математическое моделирование для двухслойной модели снежного покрова на упругом полупространстве, которая описывается с помощью уравнений движения и состояния. Математическое моделирование основано на теории динамической пороупругости. Снежный покров аппроксимируется как пороупругая среда, насыщенная водой или воздухом, в которой три параметра упругости выражаются через три скорости упругих волн согласно теории Био, учитывая упругие параметры снежной среды. Отмечено, что полученные решения позволяют изучить особенности распространения сейсмических волн в снежной среде. Полученные формулы позволяют моделировать скорости смещений пористого каркаса и насыщающей жидкости или газа в нем, а также порового давления и компоненты тензора напряжений, как при заданных упругих параметрах среды, так и при заданных скоростях распространений поперечных и продольных волн в пористой среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 16-07-01052.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.* Применение спектрального метода для численного моделирования сейсмических волн в пористых средах при наличии диссипации энергии // СибЖВМ, 2014, Т. 17, *No* 2, с. 139-147.

АКУСТИКА ВОЛН В МНОГОФРАКЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ ЖИДКОСТЯХ

Гафиятов Р.Н.
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук, Казань, gafiyatov@mail.ru

В настоящее время большой интерес представляют исследования волновой динамики дисперсных сред. Большое количество работ по акустике пузырьковых жидкостей посвящено теоретическому исследованию распространения гармонических возмущений в монодисперсных смесях. Различные проблемы акустики смесей жидкостей с пузырьками газа или пара рассмотрены в известных монографиях [1, 2].

В данной работе впервые исследованы акустические волны разной геометрии в многофракционных смесях жидкости с парогазовыми и газовыми пузырьками различных размеров и разного состава. Записана система дифференциальных уравнений движения смеси и выведено дисперсионное соотношение. Построены дисперсионные кривые, определяющие распространение акустических возмущений в таких смесях. С помощью метода быстрого преобразования Фурье выполнены расчеты по распространению импульсных возмущений давления. Проанализировано влияние состава дисперсной фазы на дисперсионные кривые и эволюцию импульсов давления. Установлено, что дисперсия и диссипация акустических волн может значительно зависеть от присутствия в составе дисперсной фазы пузырьков различных фракций. Различие теплофизических свойств пузырьков каждой из фракций проявляется существенно даже при небольших объемных содержаниях пузырьков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч.1,2. — М.: Наука, 1987.
2. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1990. 246 с.

О ВЫБОРЕ ФОРМЫ И ЧИСЛА ЧАСТИЦ В МЕТОДЕ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКАХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Генрих Е.А.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

В настоящий момент в лаборатории Параллельных алгоритмов решения больших задач ИВМиМГ СО РАН в рамках работ по грантам разрабатывается программный пакет для моделирования инжекции электронного пучка в плазму, основанной на методе частиц

в ячейках, ориентированный на исследование устойчивости и нагрева плазмы электронным пучком. Для изучения влияния пучковых нелинейностей на поведение неустойчивости в условиях развитой турбулентности необходимо численное моделирование, которое будет способно на больших временах отслеживать эволюцию возбуждаемой пучком турбулентности, и в то же самое время позволит обеспечить достаточно подробное описание кинетических эффектов. В связи с этим стоит вопрос выбора наиболее эффективных методов и алгоритмов решения разных частей задачи. Одним из таких вопросов для метода частиц в ячейках является выбор формы ядра модельной частицы, а также выбор алгоритма для расчета токов.

Было реализовано несколько разных алгоритмов вычисления токов и плотности для разных форм ядер частиц [1, 2] и проведено сравнение результатов, полученных по этим методам. Для дальнейшего использования выбран оптимальный с точки зрения качества получаемого результата, использования ресурсов и затрачиваемого машинного времени алгоритм.

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-00392 и № 16-01-00209.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ю.Н. Григорьев, В.А. Вшивков, М.П. Федорук* Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2004.
2. *T.Zh. Esirkepov* Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulations with an arbitrary form-factor.// Computer Physics Communications. Vol. 135. Iss. 2. 2001. P. 144–153.

ЗАДАЧА УШАКОВА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕКУРРЕНТЫ

Геут Кр.Л., Титов С.С.
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

В работе [1] поставлена задача построения нелинейного рекуррентного соотношения первого порядка для линейного рекуррентного соотношения второго порядка, решённая В.М. Ушаковым для чисел Фибоначчи. Эта задача была решена в [2]. При этом имеется в виду общая проблема для произвольной линейной рекурренты [3, 4].

В данной работе получено описание множества таких нелинейных рекуррентных соотношений первого порядка как аналогов первых интегралов [5], в частности, доказано:

Утверждение. *Для последовательностей f_m, удовлетворяющих линейному рекуррентному соотношению n-го порядка, при определённых ограничениях на порядки коэффициентов этого соотношения, существует n нелинейных рекуррентных соотношений первого порядка (в зависимости от остатка деления m на n) эквивалентных исходному.*

Таким образом, получено сведение произвольной линейной рекуррентной зависимости n-ого порядка над произвольным полем к нелинейному рекуррентному соотношению первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ушаков В.Н.* Египетские треугольники и числа Фибоначчи. // Империя математики. 2001. N. 1. С. 21–60.
2. *Геут К.Л., Титов С.С.* О задаче построения нелинейных рекуррентных соотношений // IV междисциплинарная молодежная научная конференция УрО РАН "Информационная школа молодого ученого": сб. научных трудов ЦНБ УрО РАН. Екатеринбург, 2014. С. 203–208.
3. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.:Наука, 1967. 376 с.
4. *Шеннон К.* Теория связи в секретных системах // Работы по теории информации и кибернетике. М.: Наука, 1963. С. 333–402.
5. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отдние, 1984. 272 с.

ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ФОРМАТА ХРАНЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ С УЧЕТОМ МИКРО-АРХИТЕКТУРЫ СОВРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОЙ СКОРОСТИ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Гладких В. С., Москалев А. В., Ильин В. П.

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики

В современном мире решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является одним из важных элементов при математическом моделировании физических процессов. Многие пакеты прикладных программ включают в себя процедуры решения СЛАУ, на долю которых приходится значительная часть вычислений. Для увеличения эффективности требуется убыстрять решения СЛАУ, что невозможно без параллелизации и учета микро-архитектуры современных процессоров.

Многие СЛАУ полученные из реальных задач математического моделирования являются сильно разреженными, то есть количество ненулевых элементов в строке матрице СЛАУ невелико. Для

эффективного хранения разреженных матриц используются специальные форматы данных: compress sparse row (CSR), block compress sparse row (BSR), диагональный формат (DIA), координатный формат (COO). Мы представим новый формат vector compress sparse row (VSR), позволяющий использовать возможности по векторизации, заложенные в современные процессоры.

Эффективность и ускорение полученное от использования VSR формата будут показаны на различных примерах. Мы также разработали алгоритм предсказания ускорения при переходе от CSR к VSR, основанный на учете особенностей микро-архитектуры и провели сравнение результатов замеров и предсказаний алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 15-11-10024

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОГРИДНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА

Голушко С.К., Семисалов Б.В., Алеев Н.Р.
Новосибирский государственный университет, г.Новосибирск
Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН, г.Новосибирск
Институт вычислительных технологий СО РАН, г.Новосибирск
s.k.golushko@gmail.com, ViBiS@ngs.ru, aleevnick@gmail.com

Анизогридные конструкции представляют собой сетчатые оболочки из однонаправленного углепластика, обладающие повышенными удельными характеристиками жёсткости и прочности и значительными перспективами в области конструирования ракетной и космической техники [1]. Расчет деформирования таких оболочек в данной работе основан на континуальном подходе [2]. Предложена методика, позволяющая упростить и автоматизировать процесс расчета и проектирования оболочек, и состоящая из нескольких этапов. Первый этап – вывод разрешающей системы уравнений в рамках пространственной теории упругости и постановка стационарных задач деформирования конструкции с использованием среды Wolfram Mathematica. Второй этап – написание программы синтаксического анализа (парсера) для преобразования разрешающей системы уравнений в код языка Java. Третий этап – применение нелокального алгоритма без насыщения [3] и комплекса программ АНИЗОГРИД, написанного на Java, для расчета осевого сжатия анизогридной цилиндрической оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке НГУ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. В., Барынин В. А. и др.* Анизогридные композитные сетчатые конструкции – разработка и применение к космической технике // Композиты и наноструктуры. 2009. №3. С. 38–50
2. *Голушко С. К., Семисалов Б. В.* Численное моделирование деформирования анизогридных конструкций с применением высокоточных схем без насыщения // Мат. мод. и числ. мет. 2015. № 6. 23–45.
3. *Семисалов Б. В.* Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1110–1135.

ИНТЕГРАЦИЯ МОДЕЛИ ОПУХОЛИ С МОДЕЛЬЮ МИКРОЦИРКУЛЯЦИИ КРОВИ

Городнова Н. О.

Институт Вычислительной Математики РАН, Москва
Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный

Основной задачей являлось осуществление интеграции структурно-анатомической модели микроциркуляторной сети с моделью роста опухоли. Модель роста опухоли позволяет среди прочих параметров рассчитывать концентрацию VEGF в области непораженной ткани окружающей опухоль. Распределение концентрации VEGF позволяет сделать вывод о вероятности появления новых (ангиогенных) сосудов.

На основе этого распределения структура микрососудистой сети обновляется и производится перерасчет объемного кровотока в окрестности области роста опухоли. Распределение объемного кровотока становится неоднородным по объему вследствии наличия новообразованных сосудов и асоциированного с ними локального повышения эффективной проницаемости. Оно позволяет сделать вывод об изменении притока питательных веществ, потребляемых опухолью (глюкоза и кислород). С учетом этого модель опухоли позволяет произвести расчет нового распределения VEGF и описанный выше цикл повторяется. Соотношение между предсуществующими и новообразованными капиллярами определяется величиной

$$P = 1 + \frac{N_{ang}}{N_{nat}}, \tag{1}$$

где N_{nat} — количество капилляров в здоровой сети, N_{ang} — суммарное количество капилляров новообразованных под воздействием выделенного VEGF и капилляров здоровой сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolobov, AV and Kuznetsov.* Investigation of the effects of angiogenesis on tumor growth using a mathematical model // Biophysics – 2015. Т. 60, С. 449-456.
2. *Simakov, Sergey, Ispolatov, Iaroslav, Maslov, Sergei, Nikitin, Alexander.* Algorithmic basis for pathway visualization. //Pathway analysis for drug discovery – 2008, С. 67-102.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Григорьев Ф.В.

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва
Московский физико-технический институт (ГУ), Москва

В рамках расчетного кода GeRa, разрабатываемого в ИБРАЭ РАН, реализована модель теплопереноса и тепловой конвекции в пористых средах с учетом зависимости вязкости жидкости от температуры.

Решаются уравнения фильтрации-теплопереноса [1].

Используется схема расщепления по физическим процессам: 1. Расчет плотности и вязкости по температуре с предыдущего шага по времени; 2. Решение уравнения фильтрации, нахождение напора; 3. Вычисление потоков по закону Дарси и подстановка их в уравнение теплопереноса; 4. Решение задачи теплопереноса.

Эти шаги выполняются либо один раз на шаге по времени (явное сопряжение моделей), либо за несколько итераций (неявное сопряжение). Для дискретизации используется метод контрольных объемов. Перенос тепла считается по схеме второго порядка. Для кондукции и фильтрации применяется неявная схема с дискретизацией потоков по двухточечной схеме.

На решении задачи о каверне [2] показано соответствие результатам, полученным кодом SEAWAT V4. На примере модели соляного купола продемонстрировано возможное значительное влияние диссипативности схемы на решение конвективной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diersh, H.-J. G., Kolditz, O.* Coupled groundwater flow and transport: 2. Thermohaline and 3D convection sistems // Advances in Water resources. 1998. N. 21. C. 401–425.
2. *Dausman, A.M., Langevin, C.D., Thorne Jr., D.T., Sukop, M.C.* Application of SEAWAT to Select Variable-Density and Viscosity Problems: U.S. Geological Survey, Scientific Investigations Report 2009-5028. 2010. C. 31.

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ГАЗОКАПЕЛЬНЫХ И ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕД. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Губайдуллин Д.А.
ИММ КазНЦ РАН, Казань

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований волновой динамики и акустики двухфазных сред. Проанализированы волновые процессы в парогазокапельных и пузырьковых средах. Исследовано распространения слабых волн в парогазовых полидисперсных (с произвольной функцией распределения включений по размерам) и дискретных многофракционных капельных и пузырьковых средах с фазовыми превращениями. Разработаны математические модели, получены дисперсионные соотношения, изучены высоко- и низкочастотные асимптотики коэффициента затухания, обсуждаются области применимости развитых теорий. Установлено, что наличие загрязняющих примесей существенно влияет на динамику слабых волн в воздушных туманах. Для случая смеси воды с полидисперсными паровоздушными пузырьками рассчитаны дисперсионные кривые и динамика слабых импульсов давления. Показано хорошее согласие представленных результатов с опубликованными экспериментальными данными других авторов. Экспериментально изучены нелинейные колебания газовзвесей и динамика частиц в трубах в ударно- и безударно волновом режимах. Показан резонансный характер осаждения капель от частоты акустического поля и возможность эффективного акустического осаждения наиболее проблемных субмикронных капель. Теоретически исследована динамика импульсного возмущения давления в жидкости, содержащей многослойную преграду. На основе алгоритмов быстрого преобразования Фурье выполнен расчет искажения акустического сигнала при диагностике многослойного образца, содержащего слой жидкости с полидисперсными пузырьками. Получено хорошее согласие теоретических и экспериментальных данных. Численно исследовано распространение ударных волн в газовзвесях и ударно-волновой разлет газовзвеси в двухкомпонентный газ. Представлено хорошее согласие теории и опытных данных.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20022).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В ВОСХОДЯЩЕМ ГАЗОЖИДКОСТНОМ ПОТОКЕ В ТРУБЕ

Губайдуллин Д.А., Снигерев Б.А.
ИММ КазНЦ РАН, г.Казань, Россия

Двухфазные турбулентные течения и сопутствующие им процессы встречаются во многих энергетических установках и промышленных аппаратах и поэтому являются важными объектами для исследования.

Приведены результаты численного моделирования турбулентных пузырьковых сред. Записываются уравнения сохранения массы и количества движения для обеих фаз в виде уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу. Для турбулентных напряжений записываются соотношения в предположении гипотезы Буссинеска. Турбулентная вязкость для несущей жидкой фазы определяется с использованием двухпараметрической модели турбулентности, модифицированной для двухфазных сред. Движение дисперсной фазы определяется действием сил межфазного взаимодействия. В качестве основных сил рассматриваются следующие компоненты: сила Архимеда, сила сопротивления, присоединенная сила, вращательная сила Магнуса, пристеночная сила трения. Для описания распределения пузырьков по размерам записывается уравнение для сохранения количества частиц, учитывающие процессы коагуляции и дробления. Для решения уравнения сохранения количества пузырьков применяется подход, основанный на методе фракций.

Представленные в работе расчеты разных режимов пузырьковых течений показывают всю сложность и взаимовлияние между переносом пузырьков и изменяющимся размером, эффектами коагуляции и дробления и действием межфазных сил. Межфазные силы играют определяющую роль в распределении основных параметров (концентрации пузырьков, скорости несущей и диспресной фазы, удельной площади межфазной поверхности) по сечению канала. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показало, что предложенный подход позволяет моделировать пузырьковые полидисперсные течения в широком диапазоне значений газосодержания. Продемонстрировано хорошее совпадение результатов расчетов с экспериментальными данными.

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ

Данилин А.Р., Коврижных О.О.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Исследована задача о быстродействии для сингулярно возмущенной линейной автономной системы в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon\dot{y} = Jy - Ju, & \|u\| \leqslant 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, & x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, \end{cases}$$

где матрица J удовлетворяет соотношениям

$$J^2 = -I, \quad J^{-1} = -J, \quad J^* = -J.$$

Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае собственные значения матрицы при быстрых переменных не удовлетворяют стандартному требованию отрицательности вещественной части. Получена и обоснована полная асимптотика в смысле Эрдейи по степенной асимптотической последовательности времени быстродействия, оптимального управления и компонент вектора состояния относительно малого параметра при производных в уравнениях системы. Доказательство аналогично приведенному в работе [1], где получена асимптотика решения задачи при $n = 2$ для матрицы J вида

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты № 14-01-00322, № 14-01-00155.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* Асимптотика решения одной задачи о быстродействии с малым параметром // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. N. 1. С. 61–70.

1D-3D МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В СЕТИ СОСУДОВ

Добросердова Т.К.
ФГБУН Институт вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН), Москва, DobroserdovaTK@gmail.com

В геометрически многомасштабных моделях течения крови зачастую сочетают трехмерные и одномерные модели. С одной стороны, одномерные модели позволяют наблюдать прохождение пульсовых волн по всей сосудистой системе и обеспечивают корректные граничные условия для расчета гемодинамики в трехмерной области. С другой стороны, трехмерная модель может рассчитывать течение крови в произвольной области, поэтому легко применима для учета в сосудистой сети имплантатов или патологий сложной формы.

Важным этапом построения 1D-3D моделей является постановка корректных граничных условий на стыке областей разных размерностей. На интерфейсе, как правило, требуют непрерывности каких-либо величин. При возникновении нефизичных отраженных волн могут применяться специальные поглощающие 0D модели [1].

Для расчетов двухмасштабной моделью в некоторых случаях могут использоваться схемы расщепления. Они эффективны с точки зрения трудоемкости и применимы при присоединении 1D области ниже по течению к 3D области. В остальных случаях необходимо использовать итерационные методы расчета.

Моделирование кровотока многомасштабными моделями является необходимым для некоторых приложений. Однако в настоящее время такие вычисления занимают много времени и требует существенной оптимизации алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ МК-6121.2015.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dobroserdova T., Olshanskii M., Simakov S.* Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2016. DOI:10.1002/fld.4241.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО МЕХАНИЗМА УСКОРЕНИЯ ИОНОВ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Ефимова А.А., Дудникова Г.И.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, efimova@ssd.sscc.ru

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,
dudn@ict.nsc.ru

На основе численного моделирования исследованы процессы формирования бесстолкновительной ионно-звуковой ударной волны (УВ) в плазме для широкого диапазона чисел Маха, имеющие важное значение для физики плазмы и астрофизики. Задача рассматривается в постановке распада разрыва плотности плазмы. Используемые одномерные модели основаны на кинетическом описании ионной компоненты плазмы и использовании больцмановской или адиабатической функции распределения электронов. Уравнение Власова решается с использованием метода частиц в ячейках. Найдена зависимость энергии и количества ускоренных ионов от скорости и амплитуды ударной волны, проведено сравнение полученных результатов с теоретическими оценками.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00209.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРАХ

Жигарев В.А.[1], Минаков А.В.[1,2], Платонов Д.В.[1,2], Дектерев Д.А.[2]
[1] *ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет", г. Красноярск, Россия,*
[2] *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

Перемешивание – один из наиболее распространенных способов интенсификации многих технологических процессов [1]. Аппараты с перемешивающими устройствами применяются в таких процессах, как: кристаллизация, абсорбция, экстракция, гомогенные и гетерогенные химические реакции и т.д. Наиболее эффективным способом перемешивания является создание в объеме реактора закрученных потоков. Закрутка потока создается при помощи различных перемешивающих устройств (мешалок). В рамках исследования проведен обзор и анализ существующих типов мешалок. В результате обзора и анализа для расчетных исследований выбраны несколько концепций для повышения эффективности перемешивающих устройств. На их основе разработаны геометрические модели мешалок. При помощи методов численного моделирования проведены расчеты закрученных потоков в модели химического реактора. Численный расчет процесса перемешивания реализован при помощи гидродинамического подхода, основанного на решении осредненных уравнений

Навье-Стокса с использованием модели Эйлера для гранулированных сред. Расчеты проводились с использованием 3D модели реактора. Сравнение результатов расчетов новых типов мешалок с результатами расчета мешалки стандартной геометрии проводились по нескольким параметрам таким как: M – момент на валу, v – средняя скорость в объеме реактора, k – средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций. При помощи методов численного моделирования проведено исследование эффективности предложенных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Штербачек, П. Тауск.* Перемешивание в химической промышленности. Л.,Изд-во Химической литературы, 1963.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ СЛАУ

Ильин В.П.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

Новосибирский государственный университет

Рассматриваются многообразные геометрические аспекты параллельных методов декомпозиции областей для решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными несимметричными матрицами, возникающими при конечно-элементных и конечно-объемных аппроксимациях многомерных краевых задач на неструктурированных сетках. В алгебраическом плане рассматриваемый аддитивный метод Шварца представляет собой блочный двухуровневый алгоритм Якоби в подпространствах Крылова, когда вспомогательные СЛАУ в подобластях решаются синхронно в разных MPI-процессах с помощью прямых или итерационных методов. Декомпозиция расчетной области, осуществляемая в общем случае с параметризованным пересечениями и с различными интерфейсными условиями на внутренних границах смежных подобластей, может выполняться на непрерывном уровне, т.е. на стадии геометрического моделирования исходной задачи, или на сеточном уровне, или на матричном уровне, с использованием только сформированного сжатого представления решаемой СЛАУ. Автоматизированная сбалансированная по числу узлов декомпозиция осуществляется на основе технологии разбиения неориентированных графов.

На внешнем уровне применяется мульти-предобусловленный метод полусопряженных невязок, ускорение которого осуществляется с помощью грубосеточной коррекции, или агрегации, в основе которой лежит малоранговая аппроксимация исходной матрицы с использованием базисных функций различных порядков, реализующих разложение единицы. Организация параллельных вычислений осуществляется средствами гибридного программирования путем создания MPI-процессов для соответствующих подобластей и применения многопотоковых вычислений в каждой из них. Предложенные алгоритмы реализованы в составе библиотеки KRYLOV, с помощью которой проведены численные эксперименты на представительной серии методических задач, демонстрирующие эффективность используемых подходов.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ДВОЙНОЙ ЭМУЛЬСИИ

Ильяш Ю.И.
Математический институт, университет Аугсбурга, Германия

В последние годы в фармацевтике возрос интерес к методам получения микрокапсул лекарственных веществ. Микрокапсулы позволяют эффективно решать вопрос транспортировки лекарств, увеличить время действия препаратов, они могут быть использованы для разделения реагирующих между собой лекарственных веществ внутри одного лекарственного препарата. Создание одно- или многокомпонентных двойных эмульсий при помощи капиллярных микрогидродинамических устройств — важный шаг в процессе производства некоторых видов микрокапсул.

Процесс образования двойной эмульсии включает в себя сложные явления на границах между компонентами в трехкомпонентных жидкостях. В нашем подходе используется так называемая трехкомпонентная модель с диффузионным пограничным слоем (“ternary diffuse-interface model”). В этой модели динамика процесса двойной эмульсификации в микрогидродинамическом устройстве описывается уравнением Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, совмещенного с уравнением Кана-Хилларда для концентрации компонент эмульсии, а также с уравнением конвекции-диффузии, описывающего концентрацию поверхностно активного вещества в пограничном слое между компонентами эмульсии.

В докладе представлена математическая модель процесса образования двойной эмульсии, метод дискретизации, а также результаты численных экспериментов.

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Казаков А.Л., Лемперт А.А., Орлов Св.С.
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск,
kazakov@icc.ru, lempert@icc.ru, orlov_svyatoslav@list.ru

Рассматривается параболическое уравнение

$$U_t = \operatorname{div}(k\nabla U), \quad k = U^\sigma, \tag{1}$$

описывающее процесс нелинейной фильтрации газа в пористой среде [1]. Здесь функция $U \stackrel{\text{def}}{=} U(t,\mathbf{x}) : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^3$ — плотность газа; параметр $\sigma > 0$ — показатель адиабаты.

Наличие пространственных симметрий позволяет перейти от (1) к одномерному уравнению

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + \frac{\nu}{\rho}uu_\rho, \quad \nu \in \{0,1,2\}, \tag{2}$$

где $u \stackrel{\text{def}}{=} u(t,\rho)$ — новая искомая функция, зависящая от времени $t \geqslant 0$ и скалярной переменной $\rho \stackrel{\text{def}}{=} ||\mathbf{x}|| = \left(\sum_{k=1}^{\nu+1} x_k^2\right)^{1/2}$.

Авторами получены [2] нетривиальные точные решения (волны фильтрации) уравнения (2), удовлетворяющие краевому условию

$$u|_{\rho=f(t)} = 0,$$

где $\rho = f(t)$ — некоторая функция, заданная в плоскости (t,ρ).

В докладе будут приведены результаты качественного исследования и физическая интерпретация полученных решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты № 16-01-00608, № 16-31-00291.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

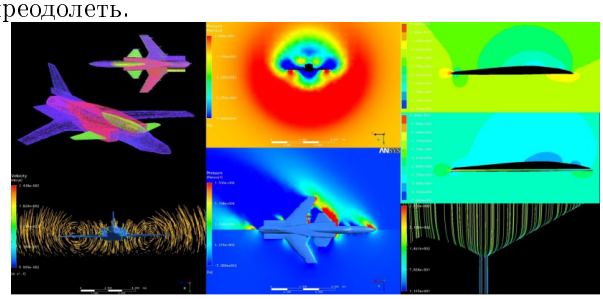
1. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

2. *Казаков А.Л., Орлов Св.С.* О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 18. № 1. С. 102–113.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДИФИКАЦИЙ КОНСТРУКЦИИ АЭРОПЛАНА С КРЫЛОМ ОБРАТНОЙ СТРЕЛОВИДНОСТИ, НАПРАВЛЕННЫХ НА ПРЕОДОЛЕНИЕ ФЛАТТЕРА

Казаков Е. А., Бондарчук А. А.
Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону, Россия

Крыло обратной стреловидности (КОС) обладает серьёзными преимуществами перед классическим крылом на большинстве режимов: сверхманёвренность на малых скоростях, повышенная надёжность на режимах взлёта и посадки, меньшая эффективная площадь рассеяния, меньшая радиолокационная заметность, большая удельная подъёмная сила. При всех этих неоспоримых достоинствах, КОС обладает существенным недостатком. Опасное явление флаттера, возникающее в момент перехода на сверхзвуковой режим, до сих пор не удалось преодолеть.



Самый простой способ сделать это – изменить конструкцию аэроплана так, чтобы исключить столкновение потоков, но это решение, однако, приведёт к непомерно высоким требованиям к жёсткости крыла. Добиться выполнения этих требований можно, используя современные композитные материалы.

Менее радикальный способ – вносить в конструкцию минорные изменения, не затрагивающие основной концепт (несмотря на малосущественность, известны исторические случаи успеха этого метода), в частности – включение в профиль продольных проточин, призванных разнести встречные потоки и не допустить их конфликта. Я занимаюсь генерацией и проверкой этих вариативных изменений,

моделируя в среде ANSYS полёты созданной мной модели аэроплана с КОС.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦА ЖИДКОСТИ С УЧЁТОМ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИЙ КОНТАКТА

Кайсина[1] М.И., Алабужев[1,2] А.А.
[1] *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь*
[2] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

В данной работе рассматриваются собственные и вынужденные колебания газового пузырька окруженного несжимаемой жидкостью конечного объёма. В равновесном состоянии пузырек имеет форму круглого цилиндра и ограничен в осевом направлении двумя параллельными твёрдыми поверхностями. Внешняя поверхность жидкости в равновесном состоянии также имеет цилиндрическую форму. Равновесные краевые углы как между боковой поверхностью пузырька (внутренней боковой поверхностью жидкости) и твёрдой пластиной, так и между внешней боковой поверхностью жидкости и твёрдой пластиной, прямые. В результате, объём жидкости имеет форму кольца. Газ внутри пузырька и снаружи жидкости считается идеальным и невесомым. Состояние газа описывается политропным процессом. Учитывается скорость движения линий контакта [1]: скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла. На систему действует внешняя вибрационная сила, направленная вдоль оси симметрии. Коэффициент пропорциональности λ, так называемый параметр смачивания (постоянная Хокинга), характеризует свойства жидкости и материала подложки.

Получены данные об отклонении поверхности и частотных характеристиках в зависимости от постоянной Хокинга λ, частоты и амплитуды внешнего вибрационного поля и геометрических параметров системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 14-01-96017.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 253-266.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Карова Ф.А.
Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик,
karova.fatimat@mail.ru

Движение влаги в капиллярно пористых средах описывается уравнением Аллера [1]. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнения Аллера дробного порядка в дифференциальной и разностной постановках. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решений дифференциальной и разностной задач.

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассматривается задача

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \quad (1)$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \quad u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \quad (2)$$

где $\partial_{0t}^{\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_0^t u_s(x,s)(t-s)^{-\gamma}\,ds$ –дробная производная Капуто порядка $\gamma, 0 < \gamma < 1; 0 < c_1 \le k(x,t), \eta(x) \le c_2, q(x,t) \ge 0$ всюду на $\overline{Q}_T$.

Пользуясь разностным аналогом повышенного порядка аппроксимации дробной производной Капуто из [2], для дифференциальной задачи (1) - (3) построена разностная схема с порядком аппроксимации $O(\tau^{2-\min\{\alpha,\beta\}} + h^2)$. Доказана безусловная устойчивость, а так же сходимость разностной схемы со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации. Проведены расчеты тестовых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 137 с.
2. *Alikhanov A.A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Comp. Physics. 2015. vol. 280. p. 424–438.
3. *Карова Ф.А.* Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для уравнения Аллера с дробной производной по времени // Известия КБНЦ РАН. 2015. N. 3(65). С. 33–40.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПЛАМЕНИ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Карпов А.И., Корепанов М.А., Шаклеин А.А.
Институт механики УрО РАН, Ижевск

Проведено численное моделирование сопряженного процесса распространения турбулентного диффузионного пламени по вертикальной поверхности твердого горючего материала. В качестве горючего материала используется полиметилметакрилат (ПММА). Размеры исследуемого образца составляют 5 м в высоту и 0.6 см в толщину. Сформулированная математическая модель позволяет учитывать турбулентный перенос (вихреразрешающая модель DDES), турбулентное горение (модифицированная модель EBU с учетом кинетических эффектов), излучение (модель P1). Скорость газификации определяется линейным интегралом от объемной скорости термического разложения твердого горючего материала.

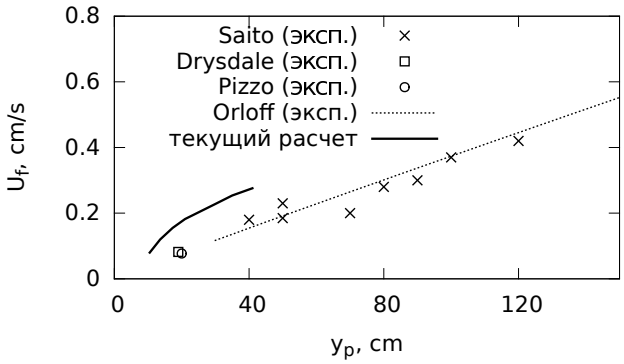


Рис. 1: Зависимость скорости распространения пламени от положения границы области пиролиза.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-08-00110 а).

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Кашина[1] М.А., Алабужев[1,2] А.А.
[1] *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь*
[2] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

В работе исследуются вынужденные колебания капли жидкости в

переменном неоднородном электрическом поле. Капля зажата между двумя параллельными твердыми поверхностями и окружена жидкостью другой плотности. В состоянии равновесия капля имеет форму кругового цилиндра, краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой пластиной прямой. Учитывается скорость движения линии контакта [1]: скорость движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональны удвоенной частоте электрического поля [2].

Получены данные об отклонении поверхности и частотных характеристиках в зависимости от постоянной Хокинга λ, частоты и амплитуды внешнего электрического поля и геометрических параметров системы. Увеличение λ соответствует уменьшению силы взаимодействия линии контакта с подложкой, что приводит к увеличению амплитуды колебаний боковой поверхности.

Наличие пространственной неоднородности электрического поля позволяет возбуждать азимутальные моды. Для рассматриваемой слабой неоднородности было показано, что основное значение имеет трансляционная мода колебаний. При сильной неоднородности возбуждаются моды с более высокими азимутальными числами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 253-266.
2. *Alabuzhev A.A., Kashina M.A.* The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 681. 012042.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОРБЦИИ ПРИМЕСИ В ПОРЕ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Клименко Л.С., Марышев Б.С.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Работа посвящена разработке макроскопической модели, описывающей процессы осаждения примеси и закупорку пор для произвольных значений концентрации примеси. Исследуется задача о дрейфе твердых взаимодействующих частиц в капилляре. Между

входом и выходом из капилляра задан постоянный перепад давления. Расположение частиц на входе в капилляр задается случайным образом по времени и пространству.

Предполагается, что в изучаемом капилляре частицы переносятся вместе с потоком, не взаимодействуя друг с другом. Учет взаимодействия частиц с потоком производится в приближении Стокса. Кроме этого, в модели учтены случайные столкновения, вызванные диффузией. Учет диффузии является необходимым, так как для рассматриваемого размера частиц число Пекле имеет порядок единицы.

Задача решена в рамках модели случайных блужданий, согласно которой положение частицы в каждый момент времени не зависит от ее положения в предыдущий момент. Если частицы приближаются к стенке на расстоянии меньше своего размера, то при столкновении со стенкой происходит слипание под действием сил Ван-дер-Ваальса. Слипание частиц со стенкой приводит к изменению формы стенок капилляра, что в свою очередь приведет к изменению течения в капилляре. Возникающие при этом на стенках капилляра вязкие напряжения могут привести к отрыву частицы. Для расчета течения на каждом шаге решается система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. В результате, получена эволюция течения жидкости в поре при ее закупорке. Проанализирована зависимость концентрации осевших частиц от времени, а также зависимость расхода через поперечное сечение поры от концентрации осевших частиц для различных начальных концентрациях. Это позволило оценить границы применимости линейного закона сорбции и формулы Козени-Кармана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-6851.2015.1).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ВЕРИФИКАЦИИ СКОРОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Ковалевский В.В., Фатьянов А.Г., Караваев Д.А.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, kovalevsky@sscc.ru

В докладе рассмотрена задача верификации скоростных моделей земной коры на основе применения математического моделирования и методов активной сейсмологии. Рассматриваются две скоростных модели земной коры, полученные для юга Байкальской рифтовой

зоны и сопредельных областей Монголии на близких профилях в экспериментах BEST (Baikal Explosion Seismic Transect) и PASSCAL (Program for the Array Seismic Study of Continental Lithosphere). Математическое моделирование полных волновых полей для этих моделей выполнено с использованием аналитического метода расчета вибрационных волновых полей для плоскослоистых 3D моделей сред и разностных методов. Программное обеспечение разработано для использования на многопроцессорных вычислительных системах, включая гибридные архитектуры Сибирского Суперкомпьютерного Центра. Приведены результаты математического моделирования и теоретические сейсмограммы. Проведено сравнение теоретических результатов и данных глубинных вибросейсмических зондирований, проведенных ИВМиМГ СО РАН и ГИН СО РАН в этом регионе, позволившее уточнить скоростные модели земной коры.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-07-06821-а, № 14-07-00832-а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Татьков Г. И., Тубанов Ц. А., Базаров А. Д., Толочко В. В., Ковалевский В.В., Брагинская Л.П., Григорюк А.П.* Вибросейсмические исследования литосферы Байкальской рифтовой зоны и сопредельных территорий // Отечественная геология. - 2013.- N 3. - С. 16-23.

АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Ковеня В.М., Бабинцев П.В.

ФГБУН Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Для численного решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса сжимаемого теплопроводного газа, записанных в интегральной форме, предложен класс конечно- объемных алгоритмов типа предиктор - корректор. На этапе предиктора введены специальные формы расщепления уравнений. При аппроксимации уравнений Эйлера вектор потоков через границы ячейки расщепляется на два вектора: первый вектор содержит только конвективные члены, а второй члены с давлением и внутренней энергией, что является аналогом расщепления по физическим процессам в дифференциальной форме. Данное расщепление эквивалентно представлению исходных уравнений в виде двух систем слабо аппроксимирующих исходные уравнения Эйлера.

После введения данного расщепления, вводится расщепление по направлениям, что позволило свести решение системы уравнений на дробных шагах к эффективным скалярным прогонкам. При аппроксимации уравнений Навье - Стокса вводится расщепление по аналогии с уравнениями Эйлера: вектор потоков представляется в виде суммы двух векторов, первый из них содержит конвективные и часть диссипативных членов уравнений, а второй члены с давлением, как и при расщеплении для уравнений Эйлера. На этапе корректора аппроксимируется полная система уравнений в консервативной форме по явной схеме.

Алгоритм протестирован на решении двух задач, имеющих точное решение: задаче о распаде произвольного разрыва и течении в канале переменного сечения. Исследованы течения газа в сужающемся канале при возникновении регулярного и нерегулярного отражения, численно подтвержден эффект существования области двойного решения в зависимости от начальных данных.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00191).

ЭВОЛЮЦИЯ СЛОЯ СМЕШЕНИЯ В ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

Ковтуненко П. В.
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Рассматривается система уравнений, описывающая течение неоднородной слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле–Шоу [1]

$$\begin{aligned} &(\rho u)_t + (\beta\rho u^2 + p)_x + (\beta\rho uv)_y = -\mu(c)u, \\ &(\rho v)_t + (\beta\rho uv)_x + (\beta\rho v^2 + p)_y = -\mu(c)v, \\ &\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0, \quad (\rho c)_t + (u\rho c)_x + (v\rho c)_y = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u, v, p и ρ компоненты вектора скорости, давление и плотность жидкости. Зависимости $p = p(\rho)$ и $\mu = \mu(c)$ считаются заданными (вязкость зависит от концентрации), $\beta = 6/5$. Основное внимание уделяется исследованию развития слоя смешения на границе двух

слоев жидкостей различных вязкостей μ_1 и μ_2, движущихся вдоль оси Ox с различными скоростями. Данные слоистые течения в рамках модели (1) рассматривались в [1, 2], но исследования влияния вязкости на эволюцию слоя смешения проведено не было. Для этого проводится построение одномерной математической модели эволюции слоя смешения на основе подхода, предложенного в [3], основанном на теории многослойной мелкой воды с массообменом. Построены стационарные решения, изучена начальная асимптотика слоя смешения. Численно получены решения нестационарной одномерной задачи, проведена верификация модели на основе численного моделирования двумерных уравнений (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00156).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chesnokov A.A., Liapidevskii V.Yu.* Viscosity-stratified flow in a Hele–Shaw cell // Arxiv.org/abs/1501.00366
2. *Chesnokov A.A., Stepanova I.V.* Stability analysis of shear flows in a Hele–Shaw cell // Appl. Math. Comput. 2015. B. 265. C. 320–328
3. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.* Слой смешения под свободной поверхностью // ПМТФ 2014. Т. 55. № 2. С. 127–140

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СТЕКЛОВА ПЕРВОГО КЛАССА

Кодзокова И.З.
Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик, innusik-kod-va@mail.ru

Нелокальные краевые условия Стеклова первого и второго классов для уравнений математической физики изучались в работе [1].

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T\}$ рассматривается нелокальная краевая задача Стеклова первого класса

$$\partial_{0t}^{\nu} u = u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) & = \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) - \mu_1(t), \\ -u_x(1,t) & = \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) - \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где

$$\partial_{0t}^{\nu} u = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^t (t-s)^{-\nu} \frac{\partial u}{\partial s}(x,s) ds$$

- дробная производная Капуто порядка ν, $0 < \nu < 1$, $f(x,t)-$ заданная функция, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2-$ известные действительные числа.

Для задачи (1) - (3) построена разностная схема с порядком аппроксимации $O(\tau^{2-\nu} + h^2)$. Получены достаточные условия на коэффициенты нелокальных граничных условий (2), при которых разностная схема является безусловно устойчивой. Доказана сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации. Приведены расчеты тестовых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК−3360.2015.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.

ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЯВНО РАЗРЕШИМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ С КОНТРОЛИРУЕМЫМ ДИСБАЛАНСОМ ЭНЕРГИИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Коновалов А.Н.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск

Для линейных задач математической физики построены и обоснованы оптимальные, явно разрешимые дискретные модели с контролируемым дисбалансом полной механической энергии и максимально возможной степенью параллелизма. Предложенная дискретная явно разрешимая модель в отличие от исходной не является равновесной. Дисбаланс полной механической энергии является неизбежным, но управляемым с помощью числа Куранта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РАН № 8 Интеллектуальные информационные технологии и системы “Математическое моделирование многомерных задач сейсмологии и сейсморазведки на многопроцессорных ЭВМ”.

ОТРЫВ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ ОТ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОДЛОЖКИ В ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ

Коновалов В.В.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Проблема отрыва газовых либо паровых пузырей от твердой подложки является весьма значимой для химической промышленности, включая те технологические приложения, где имеет место процесс пузырькового кипения.

В условиях микрогравитации, где такой важный механизм отрыва пузырей как плавучесть отсутствует, его может заменить приложенное к системе электрическое поле [1]. Другой возможной заменой фактора плавучести являются нормальные колебания подложки конечной частоты [2].

В настоящей работе рассмотрено совместное действие нормальных вибраций и электрического поля. Как и в [2], теоретический анализ выполнен здесь с использованием одномодового приближения [3], которое позволило получить систему дифференциальных уравнений, управляющих формой поверхности пузыря вблизи его вершины. В качестве критерия отрыва пузыря выбрано его достаточно большое удлинение в процессе колебаний.

Показано, что с ростом напряженности электрического поля амплитуда ускорения вибраций, необходимая для отрыва пузыря от подложки, уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ-Урал № 14-01-96017р_урал_а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Di Marco P., Grassi W., Memoli G., Takamasa T., Tomiyama A., Hosokawa S.* Influence of electric field on single gas-bubble growth and detachment in microgravity // Int. J. Multyphase Flow. 2003. Т. 29. N. 4. С. 559–578.
2. *Коновалов В.В., Любимов Д.В., Любимова Т.П.* Динамический отрыв газового пузыря от твердой плоской подложки, совершающей нормальные гармонические вибрации // ПМТФ. 2011. Т. 52. N. 5. С. 127–135.
3. *Layzer D.* On the gravitational instability of two superposed fluids in a gravitational field // Astrophys. J. 1955. Т. 122. N. 1. С. 1–12.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЕЕ ПАРАМЕТРАМ НА ЧАСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА

Короткий А.И.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Рассматриваются две взаимно связанные между собой задачи. Одна из этих задач условно называется прямой, другая - обратной. Прямая задача состоит в определении характеристик потока вязкой жидкости, протекающей в некоторой известной области. Считается, что математическая модель движения жидкости известна, известны также соответствующие исходные (граничные) данные. Искомыми характеристиками в прямой задаче являются поле температур жидкости в известной области и поле скоростей жидкости. Обратная задача состоит в определении характеристик потока жидкости по некоторым "избыточным" исходным (граничным) данным, заданным на части границы известной области. При этом математическая модель движения жидкости считается известной, а на оставшейся части границы области исходные данные заданы с "недостатком".

Неустойчивая обратная задача решается вариационным методом, который фактически сводит исходную задачу к серии устойчивых корректно поставленных прямых задач. При этом могут учитываться некоторые априорные ограничения на искомые величины [1]. Для некоторых простых моделей задача рассматривалась в [2], приложение к потокам лавы рассматривалось в [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ Наука, 1993.
2. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2015.
3. *Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I.* Data-driven numerical modelling in geodynamics: methods and applications. Berlin/Heidelberg: Springer International Publishing, 2016. DOI 10.1007/978-3-319-27801-8.

МАСШТАБИРОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БЫСТРО СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Котельникова М.С., Старченко С.В.
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
ИЗМИРАН, Москва

Для доминирующей в ядре Земли и в недрах других планет композиционной конвекции впервые предложено асимптотически оптимальное масштабирование. Оно основано на самосогласованных оценках типичных физических величин при быстром вращении и эффективно малых коэффициентах переноса. Новый коэффициент подобия $\delta << 1$ определяет насколько быстро вращение через отношение типично малого размера перпендикулярного оси вращения к внешнему радиусу сферического слоя r_o. Малую вязкость и диффузию характеризует известное число Экмана E= $\epsilon^3 << 1$. Находящаяся на грани линейной устойчивости конвекция имеет основной масштаб порядка ϵr_o. Соответственно разлагая δ по степеням ϵ и выделяя подобно методу ВКБ сингулярную составляющую, удается упростить сложную изначальную систему до двух обыкновенных дифференциальных уравнений для давления и проекции скорости на ось вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-05-00507.

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШЕЛЬФОВЫХ МОРЕЙ И ГЛУБОКОГО ОКЕАНА

Крайнева М.В. Голубева Е.Н.

ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск

В численных моделях динамики океана используется представление океана в виде слоя стратифицированной жидкости, для которой горизонтальные размеры существенно превышают вертикальные. Выбор вертикальной системы координат является одним из основных вопросов при разработке численной модели, поскольку часто представление процессов или их параметризация непосредственно связаны с выбором вертикальной координаты. Наиболее простым является выбор в качестве вертикальной координаты оси, направленной перпендикулярно поверхности океана и представляющей расстояние от невозмущенной поверхности до точки дна. Такой подход недооценивает влияние топографии на шельфовые процессы и обмен между шельфовыми и глубинными районами океана. Недостатки учета топографии в z-моделях способствовали развитию моделей в σ-системе координат. В рамках этого подхода количество вертикальных уровней одинаково для любой точки области, независимо

от глубины океана. Преимуществом σ-системы координат является гладкое представление рельефа дна океана в численной модели и концентрация координатных линий в областях шельфовой зоны, что позволяет моделировать циркуляцию шельфовых вод, в значительной степени определяемую топографией региона. Однако, такой подход не может применяться в областях, характеризующихся значительными градиентами дна. Для того, чтобы использовать преимущества σ-системы и исключить недостатки, рассматривается комбинированная система, построенная следующим образом. Шельфовая часть океана и переход на материковый склон (до 250м) решаются в σ-системе. Глубинная часть моря разрешается в рамках z-системы. С помощью данного подхода мы можем описывать: а) поверхностный слой с одинаковой степенью детализации для всех районов океана, б) шельфовые процессы, в) сток вод из шельфовой зоны в область материкового склона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16-35-00439).

АЛГОРИТМА ЗАЩИТЫ КАНАЛА СВЯЗИ

Крыжановская Ю.А., Коростелев А.А.
ФГБОУ ВО ВГУ, Воронеж, jak@mail.ru

В настоящий момент практически во всех сферах деятельности большое внимание уделяется вопросу обеспечения безопасности данных. Также актуальной представляется проблема защищенной передачи информации.

Целью данной работы является программная реализация алгоритма, который позволит предотвратить ущерб пользователю при перехвате данных по каналу связи между клиентским приложением и сервером. На основании рассмотрения некоторых протоколов можно сделать вывод о том, что предполагаемый алгоритм должен предоставлять возможность подтверждения подлинности клиента, запрашивающего данные, и применения криптостойкого шифра для сохранения конфиденциальности и целостности сообщений. При разработке алгоритма были учтены преимущества и недостатки алгоритмов, применяемых в IpSec и TSL, за счет чего он получился более простым. Используется схема шифрования, которая уменьшит шанс

нарушения целостности передаваемых данных и попадания их к лицам, не имеющим допуска к этим сведениям. Также данный алгоритм не требует дополнительного оборудования и ПО на устройствах клиента или сервера. Для асимметричного шифрования используется схема Эль-Гамаля и хеш-функция MD5. Особенность алгоритма состоит в том, что он использует один открытый ключ, для которого генерируется закрытый ключ при каждой передаче данных, что увеличивает стойкость алгоритма к взлому. Его криптостойкость примерно в два раза выше, чем у аналогов при той же длине ключа.

Для реализации были использованы Microsoft Visual Studio, СУБД Microsoft SQL Server Management Studio, Toad Data Modeler [1] – [3]. Планируется развить алгоритма до протокола сетевой безопасности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Visual Studio[Электронный ресурс] – URL: https://www.visualstudio.com/
2.Microsoft SQL Server[Электронный ресурс] – URL: https://www.microsoft.com/ru-ru/server-cloud/products/sql-server/
3.Toad Data Modeler[Электронный ресурс] – URL: http://software.dell.com/products/toad-data-modeler/

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ МОДЕЛИ ЗОНАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

Ксендзенко Л.С., Лосев А.С.
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

В задачах прогнозирования поведения дефектных сред в рамках классических моделей механики сплошной среды, особый интерес проявляется к явлениям периодичности деформирования и разрушения в разработанных математических моделях [1]. В работе [2] разработана методика определения параметра периодичности с точностью до целых значений, а для отдельных месторождений, определенина аналитическая зависимость между параметром периодичности и расстоянием от контура выработки до середины первой зоны разрушения в единицах радиуса выработки.

В настоящей работе разработан общий алгоритм поиска параметра периодичности модели зонального разрушения массива горной породы вокруг глубоких выработок круглого сечения. Алгоритм поиска основан на определении параметров функции дефектности,

при которых она достигает экстремального значения на контуре выработки. Предложенный способ, подтверждается аналитической зависимостью, полученной ранее в работе [2] и позволяет более точно определить параметр периодичности для незакрепленной выработки. В частности, относительная ошибка счета для результатов полученных ранее, исследованных месторождений, была уменьшена в некоторых случаях до $10-11\%$.

Работа выполнена при поддержке РНФ № 14-11-00079.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гузев М.А., Парошин А.А.* Неевклидова модель зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42. N. 1. С. 147–156.
2. *Makarov V.V., Guzev M.A., Odintsev V.N., Ksendzenko L.S.* Periodical zonal character of damage near the openings in highly-stressed rock mass conditions // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2015. №. 6. P. 1–6.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Кузьмин Г. А., Семисалов Б. В.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

Конструкторско-технологический институт вычислительной техники, СО РАН г. Новосибирск

kubgeom@mail.ru, vibis@ngs.ru

В настоящее время множество проблем прикладной математики и механики сводятся к численному анализу сингулярно возмущенных краевых задач для дифференциальных уравнений, [1]. В данной работе для решения таких задач построены приближения, основанные на отображении области определения ряда Фурье на отрезок $[-1,1]$:

$$f(x)\approx P_N(x)=\sum_{k=0}^{N} a_k \cos\left(k \arccos\left[\frac{\tan(x \arctan(b))}{b}\right]\right)=\sum_{k=0}^{N} a_k B(k,x),$$

где $b>0$- параметр. Для бесконечно гладких функций базис $B(k,x)$ обеспечивает экспоненциальное убывание погрешности с умеренным значением множителя при экспоненте и высокую численную устойчивость, характерную для ряда Фурье.

Проведен сравнительный анализ методов приближения в базисе $B(k,x)$, базисе Чебышёва $T(m,x)$ и модифицированном базисе $\widetilde{T}(m,x)$, полученном в [2]. Для этого с помощью метода коллокаций найдены численные решения тестовой краевой задачи

$$\varepsilon f''(x) - f(x) = -\sin \pi x(\varepsilon\pi^2 + 1), \quad f(-1) = 1, f(1) = -1$$

и краевой задачи из [2] с известным точным решением. Результаты, полученные при использовании $B(k,x)$ с умеренными значениями N ($N \approx 70 - 100$) превосходят решения, использующие $T(m,x)$ и $\widetilde{T}(m,x)$, на 10 и 7 десятичных порядков по точности при $\varepsilon = 10^{-10}$.

Работа выполнена при инансовой поддержке НГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kadalbajoo M. K., Gupta V.* A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems // Applied Mathematics and Computation. 2010. Vol. 217 No. 8. P. 3641–3716.
2. *Liu. W., Tang T.* Error analysis for a Galerkin-spectral method with coordinate transformation for solving singularly perturbed problems // Appl. Numer. Math. 2001. Vol. 38. P. 315–345.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ С ГАУССОВСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Кулешов В.С.[1], Моисеев К.В.[1,2]
[1] *Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа*
[2] *ФГБОУ ВПО Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа*

В последние годы при нефтедобыче существенно увеличился рост тяжелой, высокосернистой и аномально вязкой нефти, вязкость которой в достаточной мере чувствительна к изменению температуры. В связи с этим вопросы по уточнению закономерностей теплообменных процессов могут быть полезными при проектировании аппаратов в нефтехимической промышленности и разработке новых технологий для добычи, транспортировки, хранения и переработки высоковязкой нефти со сложными реологическими свойствами.

Авторами настоящей работы проведены численные исследования особенностей конвективных течений аномально термовязкой жидкости в квадратной полости с вертикальными адиабатическими и горизонтальными изотермическими стенками. Для проведения вычислительных экспериментов была рассмотрена модельная жидкость, в которой зависимость вязкости от температуры описывается некоторой колоколообразной функцией (гауссовская кривая). Эта функция в общих чертах аппроксимирует соответствующие зависимости высоковязкой нефти и жидкой серы.

Впервые удалось получить результаты по влиянию параметров аномалии вязкости зависящей от температуры на режимы течения и тепломассообмен. В ходе выполнения работы были установлены зоны параметров задачи, при которых гауссовская зависимость вязкости от температуры не влияет на картину течений с сохранением интегральных коэффициентов теплоотдачи. Также показано, что в ряде случаев учет зависимости вязкости от температуры приводит к существенному изменению характера процессов тепломассообмена.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-97060-р_поволжье_а) и Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН № 13 “Вихри и волны в сложных среда”.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВИХРЕВОЙ ДИФФУЗИИ ИМПУЛЬСА И ТЕПЛА В НИЖНЕЙ АТМОСФЕРЕ

Курбацкая Л.И., Курбацкий А.Ф.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

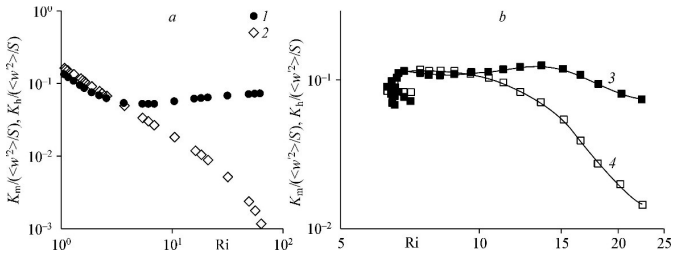


Рис. 1: Нормализованные вертикальные коэффициенты диффузии импульса Km (black symbol) и тепла Kh (open symbol) в тропосферной струе:(a) DNS-результаты [1], (b) результат вычисления по трехпараметрическому RANS-приближению моделирования турбулентности [2]; 1- Km, 2 - Kh.

Коэффициенты вихревой диффузии импульса Km и тепла Kh в тропосферной струе, вычисленные DNS-методом [1] и RANS приближением моделирования турбулентности представлены на рис.1.

Поведение вертикальных коэффициентов вихревой диффузии подтверждает концепцию поддержания импульса (но не тепла) внутренними гравитационными волнами (ВГВ) в условиях устойчивой стратификации земной тропосферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 13-05-00006а, № 14-01-00125а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahalov F.et al.* Eddy mixing in jet-stream turbulence under stronger stratification // Geophys. Research Letters. 2004. Vol. 31.
2. *Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И.* О турбулентном числе Прандтля в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 2. С.187-196.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОРОДСКОГО ОСТРОВА ТЕПЛА НА ОСНОВЕ RANS-ПРИБЛИЖЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЗАМЫКАНИЯ

Курбацкая Л.И., Курбацкий А.Ф.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск

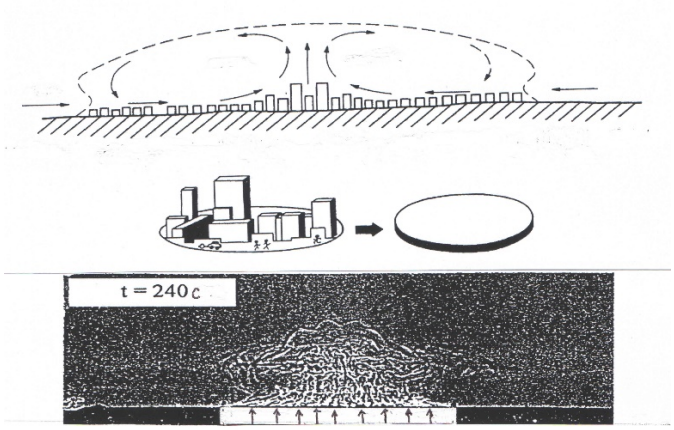


Рис. 1: Схема реализации в лабораторном эксперименте циркуляции над городским островом тепла в устойчиво стратифицированном городском пограничном слое при слабом ветре.

Сформулирована математическая модель городского острова тепла на основе RANS приближения второго порядка замыкания [1]. Структура турбулентности проникающей термической конвекции над островом тепла воспроизведена численным методом [2] и включает такие тонкие эффекты, как перекрещивание вертикальных профилей температуры теплового факела с образованием области отрицательной плавучести, свидетельствующей о развитии куполообразной формы у верхней части факела в виде "шляпы" (показано на рис. 1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 13-05-00006а, № 14-01-00125а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И.* О турбулентном числе Прандтля в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 2. С.187-196.
2. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М: Мир, 1980 г.

ОБЕРТОНЫ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

Курмаева К.В., Титов С.С.
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

В современном математическом моделировании многих природных явлений и технических задач широко применяются уравнения Навье-Стокса. Наиболее популярной областью применения этих уравнений является описание течений газа и жидкостей в гидродинамике. В [1] рассматриваются приближенные решения полной системы уравнений Навье-Стокса в случае одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа с привлечением тригонометрических рядов. В предлагаемой работе рассмотрено решение полной системы уравнений Навье-Стокса в случае одномерного течения сжимаемого газа в виде формальных рядов специального вида с кратными частотами. В рамках развития подхода специальных рядов с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами А.Ф. Сидорова [2] для коэффициентов построенных рядов получены рекуррентные цепочки уравнений. Описана постановка начально-краевой задачи для решаемой системы [3]. С помощью построенных рядов с кратными частотами доказаны теоремы об обертонах и унтертонах как обобщение результатов теорем В.Е. Замыслова [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00401_А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков С.С. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа: монография. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2014. 90 с.

2.Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его применение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.

3.Титов С.С. Решение уравнений с особенностью в аналитических шкалах банаховых пространств: Препринт. Екатеринбург: УралГАХА, 1999. 264 с.

4.Замыслов В.Е. Стоячие волны как решения полной системы уравнений Навье-Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии, 2013. Т. 18. № 2. С. 33-45.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В РЯДЕ ЗАДАЧ АСТРОФИЗИКИ

Лазарева Г.Г., Куликов И.М.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск

При изучении сложных астрофизических явлений переход к моделированию пространственных течений газа сопровождается появлением новых физических эффектов, которые в других задачах либо отсутствуют, либо не являются существенными. В ходе численной реализации гравитационная неустойчивость, как физическое свойство, приводит к влиянию координатных линий на численное решение. При численном решении астрофизических задач возникает необходимость задания областей нулевой плотности и корректного определения границ газ-вакуум. В докладе рассмотрена численная модель столкновения галактик, основанная на совместном решении системы газодинамических уравнений с уравнением Пуассона, описывающего изменение поля гравитации под влиянием динамики газа. В такой постановке задачи движение самогравитирующего газа является результатом взаимодействия сил гравитации и газового давления. Гравитационное поле определяется не только поведением газового компонента, но и движением темной материи и звездного компонента дисковых галактик. Рассматриваемая постановка задачи, характеризуется важностью вклада гравитационной энергии и отсутствием больших потоков массы через границы расчетной области. Она отличается влиянием полной консервативности схемы на

решение, как и некоторые задачи магнитной газовой динамики и физики разреженной плазмы. С целью преодоления этих проблем разработана численная модель с улучшенными вычислительными характеристиками, основанная на методе крупных частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ 15-01-00508 а.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ

Магденко Е.П.

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук, Красноярск, magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru

Рассматривается цилиндр, заполненный двумя покоящимися несмешиваемыми теплопроводными жидкостями с общей деформируемой плоской поверхностью раздела. Боковые стенки сосуда проводимые, и на них выполняется условие просачивания жидкости, при этом общий поток жидкости через всю боковую поверхность равен нулю. Цилиндр нагревают снизу, и, когда температура на нижнем основании сосуда достигает некоторого критического значения, внутри контейнера возникает движение, обусловленное градиентом поверхностного натяжения.

Задача решается в рамках линеаризованной модели Обербека-Буссинеска. Для решения задачи применяется тау-метод. В результате для конкретных жидкостей: трансформаторное масло, муравьиная кислота получена зависимость $C(\mathrm{Mn})$, где C – комплексный декремент, а Mn – число Марангони, которое прямо пропорционально температуре на нижнем основании цилиндра. Также задача была решена для монотонных возмущений. В этом случае были найдены критические значения чисел Марангони, а именнно их зависимость от безразмерных параметров жидкостей и геометрии контейнеров:

$$\mathrm{Mn} = \mathrm{Mn}(\mathrm{Ga}, \mathrm{We}, \mathrm{Pr}, h, \alpha, s, n),$$

где Ga, We, Pr – числа Галилео, Вебера и Прандтля соответственно; h – отношение высоты верхнего слоя жидкости к высоте нижнего слоя; α – отношение радиуса цилиндра к высоте нижнего слоя жидкости; s – азимутальное волновое число; n – номер корня уравнения $\mathrm{J}_s(\delta) = 0$, $\mathrm{J}_s(\delta)$ – функция Бесселя s-го порядка. Полученные

численные результаты совпадают с аналитическими, найденными ранее при решении данной задачи методом разделения переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-00067.

ОБ ИНТЕНСИФИКАЦИИ МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ВНЕДРЕНИИ В КАНАЛ НАНОНИТЕЙ

Марков А.А.
ИПМех РАН, Москва, markov.ipm@yandex.ru

Нанонити находят многочисленные применения [1]. Известны технологии получения системы до 1.e5 упорядоченных нанонитей диаметра порядка 1.e-6, длиной 1м. Столкновения молекул с границей доминируют над соударением молекул между собой. Числа Кнудсена достигают величин 10-70 [2,3]. На субмикронных масштабах условия скольжения в сочетании со скачками концентраций с учетом термодиффузии и скачка температуры газа на поверхности изолированной трубки либо в порах рассмотрены в [4]. В данной работе моделируется воздействие слоев Кнудсена на массо- и теплоперенос при течении газа в микроканалах и при обтекании ансамбля упорядоченных нанонитей в трубе. При обтекании нанонитей проводится усреднение эффекта скольжения около изолированной нити по ансамблю нитей. Величина интенсивности скольжения пропорциональна суммарной площади поверхности всех нанонитей, входящих в данный жгут (ансамбль нанонитей). Результаты расчетов указывают на возможность значительного увеличения средней по сечению трубы величины массового расхода (до 300 процентов) посредством внедрения субмикронных нитей в поток газа при заданном перепаде давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ № 14-08-00664.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aktas, Ekin O. Ozgur, Hakan Deniz, Enes Korkut, and Mehmet Bayindir.* Arrays of indefinitely long uniform nanowires and nanotubes. Nature Materials. 2011. Т. 10. С. 494–501.
2. *Jason K. Holt, et al.* Fast Mass Transport Through Sub–2-Nanometer Carbon Nanotubes. SCIENCE 19 MAY 2006. Т. 312. С. 494–500.
3. *Karnidakis G., Beskok A., Aluru N.* Microflows and nanoflows. Fundamentals and Simulation. Interdisciplinary Applied Math., 29. Springer Science+Business Media, Inc., 2005. 817 с.

4.*Markov A. A.* Jump-Slip simulation technique for combustion in submicron tubes and submicron pores. Computers and Fluids 2014. T. 99C. C. 83–92.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА

Марков С.И.
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, www.sim91@list.ru

Нефтяные месторождения имеют сложную геометрическую структуру и гетерогенную анизотропную природу свойств. Поэтому при проведении геофизических исследований необходимо использовать модели эффективной среды. Возникает за-дача гомогенизации, которая состоит в том, чтобы определить влияние микро-структуры коллектора на его макроскопическое поведение. В рамках данной работы исследуется эффективная проницаемость по нефти.

Данная задача является актуальной и достаточно хорошо освещена в современных научных публикациях. Однако авторы предлагают подходы численной гомогенизации для периодических структур микровключений. На сегодняшний день число публикаций для непериодических микроструктур весьма ограничено.

Цель научной работы состоит в том, чтобы на основе выбранной математической модели процесса просачивания нефти разработать алгоритм численного определения эффективного тензора проницаемости нефтеносного пласта с произвольной микроструктурой.

Для решения задачи просачивания нефти применяется современный математический аппарат на базе многомасштабного разрывного метода Галёркина. Для решения задачи численной гомогенизации применяются градиентный метод Флетчера-Ривса. Данные подходы являются достаточно эффективными и наилучшим образом подходят для реализации на современных параллельных компьютерных архитекту-рах.

В работе приводится сравнительный анализ результатов математического моделирования процесса просачивания нефти в анизотропной гетерогенной и эффективной среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии президента Российской Федерации.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Мартынова Т.С.
ЮФУ, ИММ и КН, Ростов-на-Дону

Рассматривается решение задач условной оптимизации с системой линейных ограничений типа равенств, которые возникают при исследовании загрязняющих веществ методами рентгеноспектрального анализа. Хотя при решении данной задачи возможно использование универсальных методов минимизации, целесообразно учитывать специфику задачи и использовать для ее решения специальные методы. Кроме того, в решаемой задаче присутствует система линейных ограничений-равенств, что делает невозможным использование методов безусловной оптимизации [1, 2].

Большинство задач с ограничениями-равенствами приводит к появлению систем уравнений с седловой точкой, которые имеют полуопределенный $(1,1)$ блок. Для улучшения обусловленности $(1,1)$ блока используется метод расширенного Лагранжиана [3]. При решении систем с седловой точкой применяется предобусловливатель, построенный на основе симметричного / кососимметричного расщепления матрицы системы [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (гос. задание ВУЗов, базовая часть), проект 1420, и РФФИ (гранты № 15-01-00441-а и № 15-51-53066GFEN-а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
2. *J. Nocedal and S.J. Wright* Numerical optimization. Springer Series in Operations Research: Springer-Verlag, New York, 1999.
3. *G.H. Golub, C. Greif* On solving block-structured indefinite linear systems // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. V. 24. P. 2076–2092.
4. *T.S. Martynova* On Augmented Lagrangian Methods for Saddle-Point Linear Systems with Singular or Semidefinite (1, 1) Blocks // Journal of Computational Mathematics. 2014. V. 32. N. 3. P. 297–305.

О ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ С УЧЕТОМ ЗАКУПОРИВАНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Марышев Б.С.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь

Рассматривается медленная фильтрация смеси состоящей из несущей жидкости и тяжелой примеси в горизонтальном канале пористой среды. На боковых стенках канала задается перепад давления, на левой стенке канала задается поток примеси. Верхняя и нижняя стенки считаются непроницаемыми. Поскольку примесь тяжелая, наблюдается гравитационное распределение концентрации. Концентрация примеси вблизи нижней стенки больше, чем вблизи верхней. Влияние тяжести описывается в рамках модели Дарси-Буссинеска, что дает управляющий параметр - число Релея-Дарси. Перенос любой нерастворимой примеси в пористой среде сопровождается процессом ее осаждения на стенки пор - иммобилизацией. Иммобилизация замедляет перенос, изымая часть примеси из потока. Осажденная примесь занимает часть объема пор, тем самым уменьшая пористость и проницаемость среды, то есть приводя к ее закупорке. Иммобилизация учтена в рамках нелинейной модели Мобильно-Немобильных сред, а зависимость проницаемости от пористости дается формулой Козени-Кармана.

Показано, что при малых числах Релея-Дарси наблюдается практически плоский диффузионный фронт, скорость распространения которого уменьшается с уменьшением перепада давления и увеличением влияния иммобилизации. Течение смеси при этом практически однородно, и довольно быстро (1-5 характерных диффузионных единиц времени) устанавливается однородное поле концентрации в области. При достаточно больших значениях числа Релея-Дарси фронт существенно искривляется значительная доля примеси собирается у нижней стенки канала. Примесь осаждается на стенки пор закупоривая пористую среду тем самым блокируя течение. В результате уменьшается поток смеси через фильтр (по сравнению с однородными случаем), и выравнивание концентрации между концами фильтра происходит намного дольше (20-50 характерных диффузионных единиц времени).

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента Российской Федерации (код проекта МК-6851.2015.1).

ОБ ОДНОРОДНЫХ МАТРОИДАХ В ИДЕАЛЬНЫХ СХЕМАХ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА

Медведев Н.В., Титов С.С.

Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург, itcrypt@gmail.com

Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург, sergey.titov@usaaa.ru

В настоящее время вопросы разграничения доступа к информации и соответствующие им математические задачи являются как никогда актуальными [1]. Одна из таких сложных задач – описание идеальных схем разделения секрета (СРС) с однородной структурой доступа [2, 3]. Под СРС понимают некую конструкцию, задача которой состоит в раздаче долей секрета участникам таким образом, чтобы заранее заданные коалиции участников могли однозначно восстановить секрет, а неразрешенные – не получали никакой дополнительной, к имеющейся априорной, информации о возможном значении секрета. Как известно, разрешенные коалиции идеальной СРС определяются циклами некоторого связного матроида [2]. Работа посвящена исследованию справедливости следующих гипотез:

Гипотеза 1. Однородные матроиды коранга больше четырех исчерпываются аффинными и проективными пространствами с естественным образом построенными СРС.

Гипотеза 2. Существуют схемы разделения секрета для матроидов, определяющихся в виде конечных плоскостей.

Таким образом, доказательство этих гипотез внесет вклад в решение общей задачи описания класса однородных матроидов [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайдамакин Н.А.* Разграничение доступа к информации в компьютерных системах. Екатеринбург: Изд. Урал. Ун-та, 2003.
2. Введение в криптографию / Под общ. ред. *В.В. Ященко*. СПб: Питер, 2001.
3. *Marti-Farre J., Padro C.* Secret sharing schemes on sparse homogeneous access structures with rank three // Electronic Journal of Combinatorics 11(1). 2004. Research Paper. 72.
4. *Медведев Н.В., Титов С.С.* Бинарные почти пороговые матроиды // Научно-технический вестник Поволжья. 2012. N. 4. С. 136–142.

О ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ СОВЕРШЕННЫХ ШИФРОВ

Медведева Н.В., Титов С.С.
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

В рамках вероятностной модели шифра [1] исследуется проблема описания совершенных по Шеннону шифров. Под *шифром* Σ_B понимается совокупность множеств правил зашифрования и правил расшифрования с заданными распределениями вероятностей на

множествах открытых текстов и ключей [2]–[3]. Шифры, для которых апостериорные вероятности открытых текстов совпадают с их априорными вероятностями, называются *совершенными*. К. Шеннон в своей фундаментальной работе [1] полностью описал эндоморфные совершенные шифры с минимально возможным числом ключей.

В работе [4] показано, что распределение вероятностей на множествах закрытых текстов и ключей, при котором максимальный неэндоморфный шифр будет совершенным, представляет собой некоторый выпуклый многогранник P^{ℓ} (полиэдр) в многомерном евклидовом пространстве.

Цель данной работы – сформулировать и доказать аналоги теоремы Шеннона для неэндоморфных совершенных по Шеннону неминимальных шифров в терминах комбинаторного анализа выпуклых множеств многомерного пространства. Наличие в работе примеров, показывающих, что даже для эндоморфных совершенных по Шеннону неминимальных шифров нет прямого аналога теоремы Шеннона, подчеркивает нетривиальность данной задачи. Изложена методика решения поставленной задачи, которая проиллюстрирована на конкретных примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шеннон К.* Теория связи в секретных системах// Работы по теории информации и кибернетике. М.: Наука, 1963. С. 333–402.
2. *Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В.* Основы криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2001.
3. *Зубов А.Ю.* Совершенные шифры. М.: Гелиос АРВ, 2003. 160 с.
4. *Медведева Н.В., Титов С.С.* Описание неэндоморфных максимальных совершенных шифров с двумя шифрвеличинами// Прикладная дискретная математика. 2015. № 4(30). С. 43–55.

СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ МАКСВЕЛЛА

Мелешко С.В.[1], Мошкин Н.П.[2,3], Пухначев В.В.[2,3]

[1] *Технический университет Суранари, г. Накхон-Ратчасима, Таиланд, sergeymv@gmail.com*

[2,3] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия, nikolay.moshkin@gmail.com*

[2,3] *Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия, pukhnachev@gmail.com*

Система уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла имеет как вещественные, так и комплексные характеристики. Поэтому вопрос о существовании разрывных решений этой

системы является нетривиальным. Такие решения появляются в гиперболических подмоделях ранга два указанной системы [1]. Природа разрывов зависит от выбора объективной производной в реологическом соотношении. При выборе вращательной производной Яуманна в слоистых течениях возможно образование сильных разрывов, а при выборе верхней или нижней конвективной производной допускаются лишь слабые разрывы. В докладе приводятся новые примеры решений системы Максвелла, не отвечающих гиперболическим подмоделям в эйлеровых координатах. Переход к лагранжевым координатам приводит редуцированную систему к виду гиперболических законов сохранения, для которых анализируется структура разрывов. Эти решения описывают нестационарные движения вблизи критической точки, которая располагается на твердой плоскости, на плоской свободной границе или внутри потока.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 16-01-00127) и грантом Президента РФ (проект НШ-8146.2016.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В.* Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Современные проблемы механики, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика А. Г. Куликовского, Тр. МИАН, 281, МАИК, М., 2013. С. 84–97.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА В НЕРВНОМ ВОЛОКНЕ

Муратова Г.В., Андреева Е.М., Бавин В.В., Белоус М.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, muratova@sfedu.ru, andreeva@sfedu.ru, winbavin@rambler.ru, barsrsind@gmail.com

В настоящее время большое внимание исследователей уделяется моделированию биологически правдоподобных нейронных сетей, в которых происходят процессы генерации и распространения нервных импульсов. Построение таких моделей начинается с выбора модели электрической активности нейронов, описывающей процессы изменения величины мембранного потенциала нейронов во времени.

На основе динамических механизмов работы нейрона составлены различные математические модели. Среди них есть относительно простые, например “Inregrate and Fire”, и более сложные, биологически правдоподобные модели, например, модель Ходжкина-Хаксли.

Пространственная геометрия нервных клеток сложна и многообразна. Поэтому моделирование нейронов с помощью точечных моделей является большим упрощением. Совершенно очевидно, что мембранный потенциал в разных частях нейрона может различаться. Отросток нейрона сегментируют на участки с приблизительно одинаковым диаметром и сопротивлением. После сегментации такой отросток можно заменить на эквивалентные цилиндры, изменением потенциала вдоль которых можно было бы пренебречь, и соответствующие им эквивалентные электрические схемы (RC-цепь).

Линейная кабельная теория свойств нейрона моделирует распространение импульса вдоль нервного волокна, составленного из эквивалентных электрических схем, с помощью параболического дифференциального уравнения в частных производных. Она позволяет представить нервную клетку в виде участка кабеля, помещенного в проводящую среду и имеющего клеточную мембрану, которая играет роль изоляции. Нелинейная кабельная теория описывает распространение потенциала по активной мембране, в которой есть ионные каналы.

Дискретизация уравнения кабельной теории приводит к большим разреженным системам линейных алгебраических уравнений, для решения которых использован алгебраический многосеточный метод. Многосеточный метод решения систем линейных алгебраических уравнений основан на использовании последовательности сеток, различных уровней дискретизации, которые разрешают конфликты между высокочастотными и низкочастотными компонентами решения, позволяя достигать высокой эффективности.

В данной работе рассмотрены различные параллельные модификации алгебраического многосеточного метода для решения уравнений кабельной теории распространения нервного импульса. Получены различные реализации параллельных алгоритмов (PMIS, CLJP) построения множеств грубой и мелкой сеток с использованием технологии GPGPU.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЛКОГО ПРОТЯЖЕННОГО И СЛАБО ИСКРИВЛЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО РУСЛОВОГО ПОТОКА

Надолин К.А., Жиляев И.В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

В работе [1] представлен подход, позволяющий конструировать математические модели русловых потоков пониженной размерности.

Для учета турбулентности в рамках рассматриваемых редуцированных гидродинамических моделей может успешно использоваться гипотеза Буссинеска, когда предполагается, что вязкость жидкости в заданной точке потока зависит не от скорости течения, а от координат, определяющих расстояние до твердого дна русла. При этом "модель турбулентности" фактически определяется выбором некоторой функции $\nu(x, y, z)$.

В простейшем случае $\nu = h^2 - \left(h - \nu_h h^{-1}\right) z$ – линейной по z функции, формула для продольной скорости имеет вид

$$u = \tilde{R}e \frac{h^2}{\nu_h - h^2} \left(\left(\frac{h^3}{\nu_h - h^2} + \xi \right) \ln \frac{\nu}{\nu_h} + (h - z) \right) + F_x (h - z). \quad (1)$$

$$\nu_h = 0.001 \left(\frac{S_x}{S_0} \right)^6 h(x, y)$$

Здесь S_0 и S_x – площадь живого сечения в начальном створе ($x = 0$) и в точке с координатой x, соответственно; функция $h(x, y)$ задает форму дна, а $\xi(x, y, t)$ форму свободной поверхности потока; $\tilde{R}e$ – модифицированное число Рейнольдса; F_x – параметр ветрового воздействия в направлении вдоль потока.

Для верификации результатов, полученных в рамках редуцированной модели было проведено прямое численное моделирование потока на основе полных моделей, реализованных в конечно-элементном программном комплексе COMSOL. Были рассмотрены как ламинарные, так и турбулентные течения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Надолин К.А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. N. 2. С. 14–28.

ТЕЧЕНИЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕРМОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.

ФГБУН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Уфа

ФГБОУ ВПО Башкирский государственный университет, Уфа

Характеристики течения во многом определяются вязкостью жидкости. Как правило, задачи гидродинамики решаются в предположении постоянства физических свойств жидкости, в то время как вязкость является тем параметром, который достаточно чувствителен к изменению температуры [1].

Большинство моделей, описывающих зависимость вязкости от температуры, имеют вид экспоненциально убывающих функций, которые называются моделями аррениусовского типа [2]. В работе [3] проведен достаточно подробный численный анализ влияния параметров температурной зависимости вязкости на режимы течения в плоских каналах. Дальнейшие усложнения моделей, включающие немонотонную зависимость вязкости от температуры, привели к еще большим отличиям параметров течения по сравнению с классическим случаем постоянной вязкости.

В данной работе рассмотрена задача о влиянии температурной зависимости вязкости жидкости на устойчивость ламинарного режима течения в плоском канале с неоднородным температурным полем. Показано, что учет температурной зависимости вязкости жидкости оказывает существенное влияние на устойчивость ламинарного течения жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 14-01-97034).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* К вопросу о теплопередаче в нефтепроводных трубах. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 250–295.
2. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Ленинград: Наука, 1975. 592 с.
3. *Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н.* О влиянии температурной зависимости вязкости на течение жидкости // Нефтегазовое дело. 2004. Т. 396. N. 2. С. 287–295.

О МОДЕЛИРОВАНИИ СКВАЖИН НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Никифоров А.И.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук, г. Казань

Сложность решении задач фильтрации в нефтяных пластах численными методами связана с трудностью определения давления в

окрестности скважин. Проблема может быть решена измельчением шага сетки вблизи скважины, однако при этом требуется и измельчение шага по времени. Такой подход оправдан при моделировании небольших объектов, когда необходимо получить детальную картину течения в прискважинной зоне, но при большем количестве скважин время решения задачи в целом становится неприемлемым. Широкое распространение получил другой метод, впервые предложенный Писманом (Peaceman D.W. - 1978,1983), в котором взаимосвязь между дебитом, забойным и сеточным давлением устанавливается введением поправочного коэффициента, вычисляемого на основе формулы Дюпюи. В настоящей работе этот подход обобщен на случай решения задач фильтрации методом контрольных (конечных) объемов на неструктурированных сетках. Сетка в плане представляет собой диаграмму Вороного, построенную на основе триангуляции Делоне. В случае прямоугольной сетки полученная зависимость совпадает с широко используемой в численных моделях формулой Писмана.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ АКТИВНОГО ВНУТРИКЛЕТОЧНОГО ТРАНСПОРТА ПО РЕАЛЬНОЙ СЕТИ МИКРОТРУБОЧЕК

Новиков К.А.
Московский государственный институт имени М.В. Ломоносова, Москва

Доклад посвящен моделированию транспорта эндосом (окруженных мембраной пузырьков с грузом) и молекулярных моторов (белков, трансформирующих энергию гидролиза АТФ в энергию движения) по микротрубочкам (тонким линейным полярным структурам) внутри клетки. Модель описывает динамику различных состояний моделируемого объекта: свободная диффузия и движение в направлении двух различных концов микротрубочек для эндосом, свободная диффузия и движения в направлении одного из концов микротрубочек для моторов. Диффузия и движения моделируются соответственно двумерными нестационарными уравнениями диффузии и переноса, дополненными слагаемыми, отвечающими переходам между состояниями.

Поле скоростей в определяется пространственным расположением микротрубочек, оцененным по фотографиям микротрубочек в клетках A431, опубликованных в “The Human Protein Atlas” [1]. Настройка параметров модели производилась по чистой скорости (net

speed), развиваемой эндосомами за различные промежутки времени наблюдения (от 5 до 100 секунд).

Данная модель, в отличие от моделей, не учитывающих пространственное расположение микротрубочек, демонстрирует падение чистой скорости эндосом с увеличением промежутка времени, которое также наблюдается в экспериментах. Однако скорость падения экспериментальной чистой скорости несколько больше полученной в результате моделирования, что может свидетельствовать о дополнительных неучтенных механизмах.

В докладе также обсуждается применение модели для анализа механизмов переноса молекулярных моторов в направлении, обратном направлению их собственного движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uhlen M. et al.* A human protein atlas for normal and cancer tissues based on antibody proteomics // Mol Cell Proteomics. 2005. v. 4. N. 12. p. 1920–1932.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛН

Орлов С.С.

Иркутский государственный университет, Иркутск

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, а $t > 0$. В цилиндре $(0; +\infty) \times \Omega$ рассмотрим систему двух уравнений из [1]

$$u_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha\Delta\theta - \int\limits_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau, x, y)d\tau = 0,$$

$$\theta_t - k\Delta\theta + \gamma\theta - \alpha\Delta u_t = 0,$$

моделирующую колебания термовязкоупругой пластины толщины h. Здесь $u = u(t, x, y)$ и $\theta = \theta(t, x, y)$ задают прогиб пластины и температуру, α, γ, k — механические и тепловые характеристики среды, а $g = g(t)$ — ее реологические свойства; $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$. Исключением θ из системы можно получить интегро-дифференциальное уравнение

$$(1-h\Delta)u_{ttt} - (k\Delta-\gamma)(1-h\Delta)u_{tt} + (\alpha^2+1)\Delta^2 u_t - (g(0)+k\Delta-\gamma)\Delta^2 u - \\ - \int\limits_0^t \Big[g'(t-\tau)\Delta^2 - g(t-\tau)(k\Delta^3 - \gamma\Delta^2)\Big]u(\tau, x, y)d\tau = 0,$$

для которого также задаются начальные и граничное условия

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y),\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x,y),\ u_{tt}\big|_{t=0} = u_2(x,y);\ u\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0.$$

Исследуется вопрос однозначной разрешимости данной начально-краевой задачи на основе ее редукции к интегро-дифференциальному уравнению в банаховых пространствах [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-31-00291 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Munoz Rivera J.E., Barreto R.K.* Decay Rates of Solutions to Thermoviscoelastic Plates with Memory // IMA J. Appl. Math. 1998. Vol. 60. P. 263–283.
2. *Орлов С.С.* Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах. Иркутск:Изд-во ИГУ, 2014. 149 с.

О ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОТЬЮ КОНВЕКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕМ РАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ

Палымский В.И., Палымский И.Б., Трилис А.В., Трифанов А.В.

В течение последних десятилетий интенсивно изучались различные режимы конвекции химически инертной среды [1]. Но конвекция химически реагирующего равновесного газа - отдельная научная проблема. Газ с химическими реакциями может рассматриваться как химически равновесный, если характерное время химической реакции много меньше характерного времени конвекции. Такая ситуация типична для конвективных процессов. Благодаря процессам рекомбинации и диссоциации для химически равновесного газа типична аномальная (отличная от $1/T$) зависимость коэффициента теплового расширения β от температуры T, что является источником конвективной неустойчивости.

В работе используется модель химического равновесия высокой точности [2], где плотность ρ химически равновесного идеального газа представлена как функция абсолютной температуры T и внешнего давления P. Последнее предполагается постоянным, поэтому плотность газа есть функция только температуры. Все численные значения констант соответствуют в стехиометрической водородо-кислородной смеси.

Конвекция водородо-кислородной смеси газов рассматривается как конвекция несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Показано, что результирующая система уравнения может быть получена из соответствующей системы [1] заменой числа Рэлея Ra на $C \cdot Ra$, где множитель $C = C(T)$ определен процессами рекомбинации и диссоциации при выбранных T и P. Управление интенсивностью конвекции при фиксированных Ra и Pr возможно через изменение давления P и температуры T и, как следствие, изменение множителя C.

Рассмотрим зависимость $C = C(T)$ при $P = 1$ атм. показанную на рис. 1. Четко видны связанные с максимальной интенсивностью конвекции локальный максимум и минимум (по T). При $T < 2000K$ и $T > 8000K$, интенсивность конвекции равна нулю. При положительных значениях C ($2000K < T < 4053K$, обл. 1) неустойчивость развивается при подогреве снизу, а при отрицательных значениях ($4053K < T < 8000K$, обл. 2) – сверху. Если $Tcr = 4053K$ (соответствует $C = 0$) лежит между температурами нагретой Th и холодной Tc горизонтальных границ, то по аналогии с проникающей конвекцией холодной воды при температуре вблизи точки инверсии плотности можно ожидать развитие неустойчивости при подогреве любой из горизонтальных границ. Величины локальных экстремумов уменьшаются до нуля как монотонные функции при увеличении давления P.

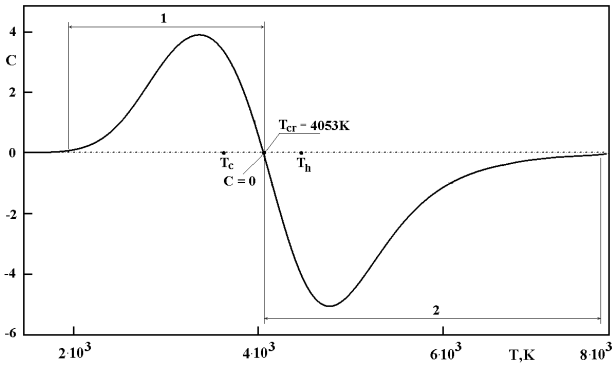


Рис. 1: Множитель C как функция температуры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, в рамках Проекта № 15-08-05166.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.- М.: Наука, 1972.

2. *Николаев Ю.А., Фомин П.А.* О расчете равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва.- 1982.- Т. 18.- № 1.- С. 66-72.

О СВЯЗИ ИНТЕНСИВНОСТИ КОНВЕКЦИИ И КОНЦЕНТРАЦИИ МИКРОЧАСТИЦ В ХИМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОМ РЕАГИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

Палымский В.И., Палымский И.Б., Фомин П.А., Трифанов А.В.

В течение последних десятилетий интенсивно изучалась конвекция химически инертной среды [1]. Однако, во многих технологических устройствах наблюдается конвекция химически реагирующего газа, который из-за малости времени химической реакции, отнесенной к характерному времени конвекции может рассматриваться как химически равновесный. Из-за непрерывно протекающих процессов рекомбинации и диссоциации для химически равновесного газа типична аномальная (отличная от $1/T$) зависимость коэффициента теплового расширения β от температуры T, что является источником конвективной неустойчивости.

Используется модель химического равновесия идеального реагирующего газа (стехиометрическая смесь водорода и кислорода) с инертными микрочастицами (Al2O3), где плотность ρ есть функция абсолютной температуры T, внешнего давления P и массовой концентрации частиц α $(0 \leq \alpha < 1)$ [2]. P предполагается постоянным.

Конвекция рассматривается в приближении Буссинеска, среда считается вязкой и несжимаемой. Считается, что микрочастицы находятся в тепловом и механическом равновесии с окружающим их газом, то есть скорости и температуры частиц и газа предполагаются равными [2].

Показано, что результирующая система уравнения может быть получена из соответствующей системы [1] заменой числа Рэлея Ra на $C \cdot Ra$, где множитель $C = C(T)$ определен процессами рекомбинации и диссоциации при выбранных T и P и дополнительными множителями порядка $1 - \alpha$ для вязкого и тепловой диффузии членов.

Последнее обстоятельство обуславливает то, что добавление инертных микрочастиц приводит к уменьшению критического значения числа Рэлея пропорционально $(1-\alpha)^2$.

При увеличении α наблюдается увеличение длины интервала волновых чисел, где наблюдается неустойчивость (точки на рис. 1, как $-(1-\alpha)^{-1/2}$) и перестройка спектральных кривых, отвечающих инкрементам развития возмущений (Рис. 1, цифрами показаны значения α). При $\alpha \approx 0$ спектральная кривая при превышении числом Рэлея его критического значения принимает отрицательные значения, что означает неустойчивость [1]. Но при повышении массовой доли микрочастиц до $\alpha \approx 1$ спектральная кривая отвечает нарастающим возмущениям уже при всех значениях числа Рэлея и волнового числа.

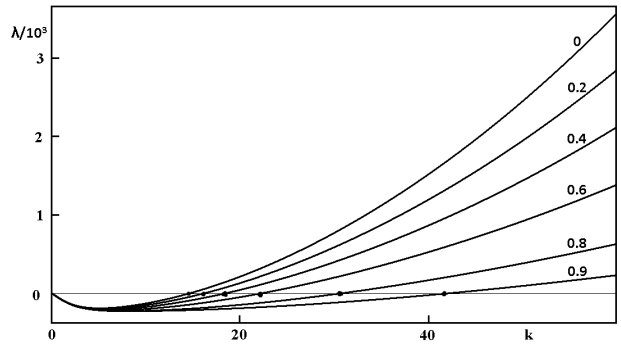


Рис. 1: Инкремент нарастания как функция волнового числа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, в рамках Проекта № 15-08-05166.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.- М.: Наука, 1972.
2. *Федоров А.В., Фомин В.М, Тропин В.А., Фомин П.А., Чен Дж.-Р.* Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц.- Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурный-строительный университет (Сибстрин), 2011.

КОНЦЕПЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ В ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пененко В.В.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, penenko@sscc.ru

Рассматриваются вариационные принципы с применением сопряженных интегрирующих множителей для построения численных методов решения прямых и обратных задач на основе уравнений математической физики. Мы развиваем концепцию моделирования в рамках методов декомпозиции и расщепления, обладающих свойствами суммарной аппроксимации, и вариационных методов конечных элементов/объемов. Конкретно, рассматриваются уравнения конвекции-диффузии-реакции. Заметим, что в классических вариационных методах конечных элементов основную проблему составляют способы построения базисных подпространств и вариационно-разностных схем, которые довольно сложны в реализации.

В этом плане, методы с сопряженными множителями не требуют конструирования базисных подпространств. С помощью вариационного принципа, действие операторов основной модели переносится на сопряженные операторы. Как следствие получается совокупность соотношений баланса, связывающих решения основной задачи с решениями соответствующих сопряженных задач на границах интервалов конечных элементов. Из этих соотношений получаются дискретно-аналитические схемы, обладающие свойствами устойчивости, аппроксимации и безусловной монотонности. При кусочно-постоянных параметрах в пределах отдельных элементов, эти схемы точны и точно учитывают краевые условия первого, второго и третьего рода [1].

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований РАН I.33П и II.2П, а также проектом РФФИ № 14-01-00125-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *V.V. Penenko, E.A. Tsvetova, A.V. Penenko* Variational approach and Euler's integrating factors for environmental studies// Computers and Mathematics with Applications, 2014, V. 67, Issue 12, P. 2240–2256.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ С РЕЗКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ РЕПРОДУКТИВНОЙ АКТИВНОСТИ

Переварюха А.Ю., Дубровская В.А.
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, temp_elf@mail.ru

Предлагается вычислительная модель популяционной динамики на основе системы ОДУ, учитывающая влияние непостоянной скорости развития особей в раннем онтогенезе.

Ранее основываясь на данных наблюдений за миграцией молоди волжских осетровых рыб в годы с различным объемом стока воды в половодье и отметив сдвиги пика прохождения мигрирующей к морю молоди мы предложили модель с двумя мгновенными коэффициентами смертности в уравнении убыли:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -(\alpha w(t) N(t) + \theta(S)\beta)\, N(t) \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{g}{N+\zeta}, \theta(S) = \dfrac{1}{1-\exp(-cS)} \\ \dfrac{dg}{dt} = rg - \dfrac{rg^2}{G} - \nu N(t), \end{cases} \tag{1}$$

Исходя из современных задач анализа искуственного воспроизводства осетровых рыб, второе уравнение для скорости размерного развития $w(t)$ из (1) заменим гибридной структурой с дважды предикативно переопределяемой правой частью:

$$\frac{dw}{dt} = \begin{cases} q, 0 < t < \tau \\ \dfrac{g}{\sqrt{N+\zeta}}, t > \tau, w(t) < w_{k1} \\ \eta w(t) - V\sqrt{w(t)}, w_{k1} < w(t) < w_k \end{cases} \tag{2}$$

где $[0, \tau)$ – длительность периода развития до резобрции желточного мешка, определяемая биологическими особенностями видов (для осетровых в среднем 8 суток) с линейным коэфицентом q; w_k – интерпретируется как уровень развития, при достижении которого изменяется характер метаболизма из-за смены характера питания.

При переходе к третьей модельной стадии развития полагается, что скорость роста свободно мигрирующей молоди не определяется более плотностью и может описываться известным уравнением Л. фон Берталанфи, [1] где коэффициенты анаболизма η и катаболизма V определись для многих видов животных. На первых стадиях жизненного цикла происходит помимо роста формирование систем жизнедеятельности организма, тогда как на последующих рост и половое сохревание. Вполне оправдано разделять анализ динамики (и соответственно уравнения) для условного размерного развития молоди на ранних стадиях онтогенеза и роста уже сформировавшихся особей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, Проект 16-37-00028.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *L. von Bertalanffy*) A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws) // Human Biology, A Record of Research. 1938. Vol. 10. N. 1. C. 181–218.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОНЕНТ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Пестренин В.М., Пестренина И.В..

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

Классические аналитические и численные методы изучения напряженно деформированного состояния (НДС) вблизи особых точек используют представление о точке сплошной среды как математической (не имеющей какого-либо линейного размера). Достоверность получаемого такими методами решения ограничена областью вне малой (измеряемой несколькими характерными размерами представительного макроскопического объема тела) окрестности особой точки, потому что внутри такой окрестности использование макроскопических уравнений становится некорректным. В ней НДС тела должно описываться уравнениями микроскопического уровня. Кроме того, для математической точки невозможно в терминах напряжения-деформации задать ограничения или сформулировать результат решения. Отмеченные факторы не возникают, если отождествить осо-

бую точку с представительным объемом материала изучаемого элемента конструкции, что, по мнению авторов, согласуется с постулатами механики сплошных сред. При этом формулировка ограничений в особой точке и их изучение становится самостоятельной задачей механики для тел с особенностями. Данный подход используется для изучения ограничений во внутренней особой точке (представительном объеме) составного клина и составного ребра. Показано, что в дополнение к ограничениям, задаваемым в классическом подходе, существуют ограничения, зависящие от материальных макроскопических параметров скрепляемых тел. Наличие дополнительных ограничений делает задачу механики деформируемого тела с внутренней особой точкой неклассической. Сочетания материальных параметров определяют и количество дополнительных ограничений, и критическое напряженное состояние в особой точке. Результаты исследования могут быть использованы в механике композитных материалов, механике разрушения, а также при изучении концентрации напряжений в составных элементах конструкций.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ВНУТРИ ТЯЖЕЛОГО ИОНА В МОДЕЛИ ТОМАСА– ФЕРМИ

Пикулин С.В.
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва

Для приближенного описания электростатического потенциала внутри атома или положительного иона химического элемента с большим атомным номером Z применяют [1] сферически симметричную модель Томаса—Ферми, приводящую к следующей сингулярной двухточечной краевой задаче:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - \frac{1}{\sqrt{r}}\Psi^{3/2}(r) = 0, \quad \lim_{r\to 0+}\Psi(r) = Z, \quad \lim_{r\to R-}\Psi(r) = 0, \qquad (1)$$

где $R \in (0, +\infty]$ — радиус иона ($R = +\infty$ соответствует нейтральному атому), $r \in (0, R)$ — безразмерное расстояние до точечного ядра, $\Psi(r)$ — искомый коэффициент экранирования, задающий внутриатомный потенциал по формуле $\Psi(r)/r$ и принимающий значения в интервале $(0, Z)$.

Ранее автором был построен [2] аналитический метод решения задачи (1) для нейтрального атома ($R = +\infty$), позволяющий эф-

фективно вычислять функцию $\Psi(r)$ и ее производную $d\Psi/dr$ в параметрическом виде во всем диапазоне значений $r \in [0, +\infty)$ с любой наперед заданной точностью. В докладе указанный метод будет распространен на случай положительных ионов ($R < +\infty$).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-01-00781 и программой фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989. 768 с.
2. *Пикулин С.В.* Об аналитической структуре решения задачи Томаса– Ферми // Сборник тезисов КРОМШ–2015. Симферополь, 2015. С. 38–39.

РАСЧЕТ ТРАНСПОРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Подрыга В.О.
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

В настоящее время особый интерес представляют исследования течений газов в микро- и наноканалах. Это связано с внедрением нанотехнологий во многих отраслях промышленности. Исследование систем микроразмеров предполагает хорошее знание свойств материалов и сред, использующихся в технологических процессах. Основное внимание в данной работе уделяется вычислению транспортных коэффициентов газовой среды. Одним из способов получения информации в этой области является молекулярное моделирование [1]. В работе представлена методика вычисления коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности реальных газов. Численная реализация выполнена на основе схемы Верле [2]. Межмолекулярные взаимодействия определяются потенциалом Ми [3], позволяющим моделировать азот, водород и их смеси в широком диапазоне температур. Программная реализация разработанного численного алгоритма ориентирована на параллельные вычисления и выполнена в рамках технологии MPI и OpenMP. В качестве примера рассмотрена задача о течении азота, в рамках которой проведен расчет транспортных коэффициентов. В работе произведены анализ методов вычисления коэффициентов и сравнение полученных численных результатов с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-37-00417-мол_а, 15-07-06082-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frenkel D., Smit B.* Understanding Molecular Simulation. From Algorithm to Applications. New York: Academic Press, 2002. 638 p.
2. *Verlet L.* Computer «experiments» on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules // Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 98–103.
3. *Фокин Л.Р., Калашников А.Н.* Транспортные свойства смеси разреженных газов N2-H2 в базе данных ЭПИДИФ // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47, N. 5. С. 675–687.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПИННИНГА АБРИКОСОВСКОГО ВИХРЯ

Поляков[1] С.В., Федирко[2,3] В.А., Другов[3] А.А.
[1] *ФГУ "ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН", Москва*
[2] *ФГБОУ ВПО Московский государственный технический университет "СТАНКИН", Москва*
[3] *ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский университет "МИЭТ", Москва*

Исследуется уравнение связанного состояния абрикосовского вихря в поле линейного дефекта в тонкой пластине сверхпроводника при наличии транспортного тока [1–3]. На основе конечно-разностной аппроксимации уравнения построен и реализован алгоритм численного решения соответствующей нелинейной краевой задачи Неймана. Проведено численное моделирование задачи при различных значениях параметров, задающих величину транспортного тока и внешнего магнитного поля, рассчитана форма вихревой нити. В численных экспериментах найдена точка бифуркации, соответствующая порогу существования устойчивого связанного состояния вихря на дефекте. Этим определяется критический транспортный ток, приводящий к депиннингу вихря и разрушению сверхпроводящего состояния. Проведено сравнение результатов с их аналогами, полученными на основе аналитического решения линеаризованной задачи. Сравнение показало хорошее согласие данных численного анализа с аналитическими оценками и имеющимися опытными данными натурных экспериментов с высокотемпературными сверхпроводниками [4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00663-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brandt E.H.* Large range of validity of linear elasticity of the vortex lattice in high-Tc superconductors // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69, N. 7. P. 1105-1108.
2. *Tsvetkovskii V., Kasatkin A., Shabatura V.* Mechanics of vortex escape from extended linear defect in 3D-anisotropic superconductor // Journal of Physics: Conf. Ser. 2006. V. 43. P. 639-642.
3. *Федирко В.А., Поляков С.В., Касаткин А.Л.* Исследование уравнения пиннинга абрикосовкого вихря на линейном дефекте в пластине сверхпроводника // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. N. 1. С. 33-41.
4. *Maiorov B., Baily S.A., Zhou H., et al.* Synergetic combination of different types of defect to optimize pinning landscape using $BaZrO_3$-doped $YBa_2Cu_3O_7$ // Nature Materials. 2009. V. 8. P. 398-404.
5. *Civale L., Maiorov B., Serquis A., et al.* Angular-dependent vortex pinning mechanisms in YBa2Cu3O7 coated conductors and thin films // Appl. Phys. Let. 2004. V. 84. N 12. P. 2121-2123.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕРМОДИФФУЗИИ ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД

Просвиряков Е. Ю.
Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Казанский государственный национальный исследовательский университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань

Интегрирование уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости остается одно из центральных задач математики, механики и физики. Особое место при вычислении различного типа решений занимают классы точных решений. Известно очень мало классов решений, поэтому задача нахождения новых функциональных соотношений, связывающих гидродинамические поля, очень актуальна.

Предлагается использовать новый класс точных решений уравнений Навье - Стокса, описывающих существенно трехмерные термодиффузионные течения вязкой несжимаемой жидкости (в том числе вертикально завихренных). Гидродинамические поля записываются в следующей форме:

$$V_i\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=U_i\left(t,x_1,x_2,x_3\right)+u_{ik}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_k,$$

$$P\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=P_0\left(t,x_1,x_2,x_3\right)+$$
$$+P_i\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_i+P_{ik}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_ix_k,$$
$$T\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=T_0\left(t,x_1,x_2,x_3\right)+$$
$$+T_i\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_i+T_{ik}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_ix_k,$$

$$C\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=C_0\left(t,x_1,x_2,x_3\right)+$$
$$+C_i\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_i+C_{ik}\left(t,x_1,x_2,x_3\right)x_ix_k.$$

Представленный класс точных решений сводит систему уравнений термодиффузии к переопределенной нелинейной системе уравнений с частными производными. Проведено исследование разрешимости системы уравнений. Найдены первые интегралы системы уравнений, обобщающие известные первые интегралы Овсянникова для задач газовой динамики. Показано, что представленные гидродинамические поля обобщают известные классы решений Сидорова и Аристова для задач конвекции.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ КОРОНАРНЫХ И ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ АРТЕРИЙ С КТ СНИМКОВ

Прямоносов Р.А.
Институт Вычислительной Математики РАН, Москва, breaksound@ya.ru
Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный

Сегментация сосудов является одной из фундаментальных задач в пациент-ориентированном моделировании. Автоматические алгоритмы сегментации позволяют сократить время обработки данных для каждого пациента, а также снизить требования к оператору или исключить его участие.

В данной работе был разработан алгоритм для автоматической сегментации церебральных артерий на основе изопериметрических деревьев расстояний [1] для сегментации аорты и фильтра сосудистости Франжи [2]. Ввиду близости церебральных сосудов к позвоночнику и черепу, важным шагом является затемнение костных тканей с использованием алгоритма multiscale matched mask bone elimination [3]. Алгоритм работает в автоматическом режиме, в случае, когда имеются два набора данных КТ для одного пациента: до введения контрастного вещества и после. В случае, когда имеются только данные с контрастном, кости затемняются в ручном режиме. Важным заключительным шагом является корректировка сегментации рядом с аортой.

Результаты обработки были использованы для моделирования кровотока в сонных артериях при наличии стенозов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grady L.* Fast, Quality, Segmentation of Large Volumes – Isoperimetric Distance Trees // Computer Vision – ECCV 2006. T. 3953, C. 449-462.

2. *Frangi A.F., Niessen W.J., Vinchen K.L., Viergeber M.A.* Multiscale Vessel Enhancement Filtering. // Medical Image Computing and Computer-Assisted Interventation – MICCAI. 1998, T. 1496, C. 130-137.
3. *Gratama van Andel H.A., Venema H.W., Streekstra G.J., van Straten M. et al.* Removal of bone in CT angiography by multiscale matched mask bone elimination // Med Phys. 2007, T. 34, N. 10, C. 3711-3723.

СЦЕНАРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕЗОКЛИМАТОВ В ЗИМНИЙ ПЕРИОД НАД ТЕРРИТОРИЯМИ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ

Пьянова Э.А., Фалейчик Л.М.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН, Чита

Географическое положение Сибири, ее огромная протяженность предопределяют большое разнообразие мезоклиматов отдельных территорий. На формирование гидротерминамического режима атмосферы над каждой из них существенное влияние оказывает рельеф местности и другие характеристики подстилающей поверхности. Однако для всей территории Сибири в зимний период характерна частая повторяемость температурных инверсий. Инверсионное распределение температуры способствует застойным условиям и накоплению загрязнений в нижних слоях атмосферы. Развитие таких неблагоприятных метеорологических сценариев необходимо учитывать при проектировании промышленных объектов и при освоении минерально-ресурсной базы территорий. Изучение особенностей возникновения и развития инверсионного слоя, его локализации и мощности, времени существования является одной из целей предлагаемого исследования.

Для решения поставленной задачи используется мезомасштабная негидростатическая модель динамики атмосферы, с помощью которой проведены численные эксперименты по моделированию зимних метеорологических сценариев для различных территорий Сибири.

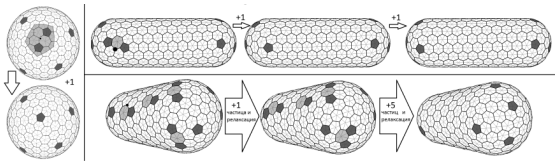
Работа выполнена при частичной поддержке проекта РФФИ № 14-01-00125-а, Программы фундаментальных исследований Президиума РАН I.33П, проекта II.2П/I.3-3 фундаментальных исследований СО РАН, проекта РГНФ № 16-02-00102а (экологические риски реиндустриализации, интерпретация результатов сценарных расчетов).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ САМОСБОРКИ 2D КРИСТАЛЛОВ НА СФЕРИЧЕСКИХ, ТРУБЧАТЫХ И КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НИХ

Рошаль Д.С., Мясникова А.Э.
Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону, Россия

Математически моделируется самосборка 2D кристаллов со сферической топологией [1-4]. Частицы удерживаются на искривленной поверхности и взаимодействуют отталкивающим потенциалом. Координаты частиц находятся минимизацией энергии методом градиентного спуска. Предложен физический механизм уменьшения степени дефектности двумерных сферических коллоидных кристаллов. Совершенствование структуры осуществляется за счет последовательных циклов имплантации частиц [4] и последующей релаксации кристалла. Механизм потенциально пригоден для получения коллоидосом [1] с близкими размерами пор, что может улучшить селективность проницаемости наноконтейнеров данного типа. Развитый подход также позволяет моделировать конические и трубчатые двумерные нанокристаллы с минимальным количеством топологических дефектов, в том числе различные возможные полиморфные формы капсида ВИЧ.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 15-12-10004)



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Рошаль Д.С. // ФТТ 2013. V 55, P.2012.
2.*Roshal D.S., Petrov K.Yu., Myasnikova A.E., Rochal S.B.* // Phys. Lett. A. 2014. V. 378, P.1548.
3.*Roshal D.S., Myasnikova A.E., Rochal S.B.* // Phys. Lett. A. 2015. V. 379, P.372.
4.*Roshal D.S., Myasnikova A.E., Rochal S.B.* // Physica E. 2016. V. 75, P.295.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Рубина Л.И.[1], Ульянов О.Н.[2]
[1] *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук,*
[2] *ФГАОУ ВПО УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина, Екатеринбург*
rli@imm.uran.ru, secretary@imm.uran.ru

В докладе для системы уравнений Навье–Стокса в безразмерном виде, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости, рассматривается начальная и краевая задачи. При применении метода характеристик [1] и геометрического метода [2], развиваемого авторами, установлено, что постановка обеих задач приводит к переопределенной системое дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Отмечается, что условия совместности каждой из таких систем при заданном давлении накладывают определенные требования на скорость движения среды. Невыполнение требований совместности соответствующих систем является первопричиной разрушения ламинарного течения и возникновения некоторых нежелательных эффектов (хаотическое движение, рассеяние). Для рассмотренного точного решения сисиемы Навье–Стокса показано, что нарушение определенных условий приводит при больших числах Рейнольдса к резкому увеличению кривизны и кручения линий тока вблизи тела, обтекаемого вязкой несжимаемой жидкостью.

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт 02.A03.21.0006)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Рубина Л.И. О распространении слабых разрывов для квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, №3. С. 435-443.
2.Л.И.Рубина, О.Н.Ульянов Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №1. С. 238-246.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИПЕРУПРУГИХ МЕМБРАН

Саламатова В.Ю.
Московский физико-технический институт (ГУ), Москва,
salamatova@gmail.com

Совершенствование медицинских и вычислительных технологий привело к развитию целого направления междисциплинарных исследований, связанных с моделированием хирургических вмешательств, и задачи моделирования деформирования мягких тканей становятся все более актуальным. Выбор методов и подходов для моделирования определяется двумя основными факторами: время вычислений и точность получаемого решения, при этом должен быть найден компромисс между точностью предсказываемых деформаций тканей и временем вычислений. Вследствие этого, задачи моделирования хирургических вмешательств, как правило, решаются в рамках линейной теории упругости [1].

Известно, что механическое поведение мягких тканей человеческого организма крайне нелинейно. Учет особенностей их поведения является важнейшим условием для корректного описания деформирования органов и тканей во время операций при обучении хирургов (учебные симуляторы) и при планировании операций методами математического моделирования. В данной работе рассматривается подход для моделирования деформирования мягких тканей, предложенный в [2] и используемый при моделировании хирургических процедур, для случая нелинейных определяющих соотношений. Выбранные нелинейные модели материалов более корректно описывают механическое поведение мягких тканей.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-31-00196 мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Delingette H., Ayache N.* Soft tissue modeling for surgery simulation // Handbook of Numerical Analysis. 2004. Т. 12. С. 453–550.
2. *Delingette H.* Triangular springs for modeling nonlinear membranes // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2008. Т. 14. N. 2. С. 329–341.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗА РАМКАМИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БУССИНЕСКА

Самойлова А.Е.
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

Рассматривается классическая задача о неустойчивости Рэлея-Бенара-Марангони в горизонтальном слое жидкости. Слой находит-

ся на твёрдой идеально теплопроводной подложке, верхняя граница - свободная и деформируемая. Традиционно используемая модель тепловой конвекции – модель Буссинеска – оказывается непригодной для исследования деформационных мод неустойчивости (см., например [1]). Настоящее исследование базируется на использовании нестандартной модели, позволяющей исследовать влияние деформируемости на тепловую конвекцию в слое изотермически несжимаемой жидкости [2]. В рамках данной модели учет плавучести производится в уравнениях конвекции не только в слагаемом с подъемной силой, но и в других слагаемых с плотностью (например, в условии непрерывности); уравнение состояния задается в экспоненциальном виде. В ходе линейного анализа колебательной моды устойчивости обнаружен интересный эффект: при определенных условиях (малой вязкости и значительном тепловом расширении) колебательный режим тепловой конвекции наблюдается в отсутствие термокапиллярного и гравитационного механизмов. Предполагается, что к развитию данной неустойчивости приводит эффект растекания жидкости от более нагретых мест к менее нагретым на деформированной из-за капиллярных волн поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-31-00086.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Непомнящий А.А.* О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей // Конвективные течения. 1983. С. 25–31.
2. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Alexander Iwan J.D. and Lobov N.I.* On the Boussinesq approximation for fluid systems with deformable interfaces // Adv. Space Res. 1998. V. 22. N. 8. P. 1159–1168.

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ С СОПРЯЖЕНИЕМ ТИПА НЕЙМАН – НЕЙМАН

Свешников В.М., Савченко А.О., Петухов А.В.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: victor@lapasrv.sscc.ru
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, e-mail: savch@ommfaol.sscc.ru
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, e-mail: petukhov@lapasrv.sscc.ru

Предложен и экспериментально исследован новый подход к построению алгоритмов численного решения трехмерных внешних краевых задач для уравнения Лапласа, основанный на декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без пересечения с условиями типа Нейман – Нейман. Суть предложенного подхода заключается в следующем. Внешняя расчетная область сферой разделяется на две подобласти: замкнутую и открытую, что приводит к редукции исходной внешней краевой задачи на две подзадачи: внутреннюю и внешнюю на сфере. Для сшивки решений данных подзадач на интерфейсе (сфере) строится специальное операторное уравнение, следующее из условий сопряжения для искомой функции. Данное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений, которая решается итерационными методами в подпространствах Крылова. На каждой крыловской итерации решаются краевые подзадачи с условием Неймана на сфере. Для получения решения внешней краевой задачи на поверхности сферы предложен численно – аналитический метод с выделением особенностей.

Проведена серия численных экспериментов, демонстрирующих сходимость и точность предложенного подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00168).

ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ ИЗ ПЕРЕНОСОВ

Сираева Д.Т.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, sirdilara@gmail.com

Уравнения газовой динамики [1] с давлением, разделенным в сумму функций плотности и энтропии, допускают 12-и мерную алгебру Ли, для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена [2].

Двумерная подалгебра с номером 2.36 [2] имеет один базисный оператор в виде суммы переноса по аппликате и галилеевого переноса по абсциссе. Другой базисный оператор есть сумма переносов по давлению и по абсциссе.

Инвариантная подмодель в лагранжевых координатах линеаризуется. Тип системы не всегда гиперболический.

Для системы, не являющейся системой типа Коши, получены точные решения, зависящие от четырех существенных постоянных.

Для одного из решений получены мировые линии частиц, траектории, звуковые поверхности. Показано, что величина объема из одних и тех же частиц не изменяется со временем. Звуковая поверхность представляет собой две параллельные плоскости, разделяющие дозвуковую и сверхзвуковую области. Со временем плоскости схлопываются в одну плоскость, дозвуковая область исчезает. Построен звуковой коноид, задающий распространение слабого разрыва.

Решение для системы типа Коши представляется в виде ряда по одной из координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-97027 р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
2. *Сираева Д.Т.* Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов. Уфимский математический журнал. Т. 6, № 1 (2014) С. 94-107.

СХЕМЫ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ МАТРОИДОВ, НЕ ПРЕДСТАВИМЫХ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Сорокина С.В., Титов С.С.
Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург, Россия, svetlanaviktorovnasorokina@gmail.com
Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург, Россия, sergey.titov@usaaa.ru

Одним из методов защиты информации является разграничение доступа к ней путём разделения секрета и выделение каждому участнику его доли секрета так, чтобы участники из заранее определённых разрешённых групп могли вместе однозначно восстановить секрет, а ни одна из неразрешённых групп не могла получить никаких данных о секретной информации. Как известно, идеальные схемы определяют связный матроид на множестве её участников. Проблема описания таких матроидов пока не решена. Цель работы – исследовать гипотезу о том, что матрица G идеальной СРС с матроидом M определяется двойственным матроидом M^* через список его циклов (цикл – минимальное по включению зависимое множество).

Для матроидов, представимых над конечными полями, эта гипотеза равносильна двойственности порождающей и проверочной матриц G и H линейного кода над полем F.

Для матроидов, не представимых как векторные над конечными полями совпадение таблицы коциклов со строками таблицы СРС является подтверждением справедливости этой гипотезы. Построены и изучены примеры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Парватов Н.Г.* Совершенные схемы разделения секрета // Прикладная дискретная математика. – 2008. – №2(2). – С. 50-57.
2. *Сорокина С.В., Титов С.С.* Матроиды, двойственные к бинарным, и их схемы разделения секрета // Вестник УрФО. Безопасность в информационной сфере. №4(14)/2014. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С. 44-47.
3. *Сорокина С.В., Титов С.С.* Двойственные тернарные матроиды и схемы разделения секрета // Сборник научных трудов X региональной научно-практической конференции. – Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2015. – С. 75-77.

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДЛЯ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Стародубцева Ю.В.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург

В некоторой области $\Omega = (0,\, l_1)\times(0, l_2)$ с границей $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$, $\Gamma_1 = \{(x_1,\, 0) : 0 < x_1 < l_1\}$, $\Gamma_2 = \{(x_1,\, x_2) : x_1 \in \{0,\, l_1\},\, 0 < x_2 < l_2\}$, $\Gamma_3 = \{(x_1,\, l_2) : 0 < x_1 < l_1\}$ рассматривается установившееся распределение температуры, удовлетворяющее стационарному уравнению реакции-конвекции-диффузии [1]:

$$div(\, k(x)\, \nabla T(x)\,) = (\vec{u}(x),\, \nabla T(x)) + q(x)\, T(x) + f(x),\ x \in \Omega, \qquad (1)$$

$k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные функции переменной $x \in \Omega$; $\vec{u}(x)$ — заданная векторная функция переменной $x \in \Omega$, удовлетворяющая условиям $div\, \vec{u} = 0$ в Ω и $\vec{u} = 0$ на Γ. Граница Γ_2 является теплоизолированной, на границе Γ_3 задаются температура и поток тепла. Обратная задача состоит в определении температуры на границе Γ_1.

Данная обратная задача является некорректной. Для ее решения предлагается воспользоваться вариационным методом Тихонова

с регуляризующей добавкой в виде полной вариации [2]. Для ускорения счета и улучшения качества восстанавления начальное приближение находится методом квазиобращения [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 784 с.
2. *Короткий А.И, Стародубцева Ю.В.* Восстановление граничных управлений в модели реакции-конвекции-диффузии // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. N. 2 (46). С. 85–92.
3. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 280 с.
4. *Короткий А.И, Стародубцева Ю.В.* Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БЫСТРО ПЛОСКОМ СЛОЕ

Старченко С.В.
ИЗМИРАН, Калужское шоссе 4, Троицк, Москва, 142190, Россия, e-mail: sstarchenko@mail.ru

Предложено асимптотическое масштабирование комбинированной тепловой и композиционной конвекции во вращающемся быстро плоском слое для моделирования соответствующих приполярных слоев Земли, других планет, их спутников, звезд и экспериментальных объектов. Масштабирование основано на самосогласованных оценках типичных физических величин и впервые определяет коэффициенты подобия, задающие соотношение между тепловой и композиционной конвекцией. Еще один новый коэффициент подобия $\delta << 1$ определяет насколько быстро вращение через отношение типично малого размера перпендикулярного оси вращения к внешнему радиусу сферического слоя R. При этом малую вязкость, термическую и композиционную диффузию характеризует известное число Экмана $E << 1$. Исследуется наиболее типичный для рассматриваемых задач диапазон параметров, при котором возбуждающаяся конвекция имеет основной масштаб порядка $E^{1/3}R$. Разлагая δ по

степеням E и выделяя сингулярную составляющую ВКБ типа, удается упростить изначальную систему до двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые впервые решены при различных соотношениях между тепловой и композиционной конвекцией. Критические частоты, азимутальные волновые числа, размеры δ (определяющие как тепловое, так и композиционное число Рэлея) и асимптотические решения, описывающие возбуждающуюся конвекцию, получены аналитически при различных числах Прандтля и практически интересных для планет Земной группы распределениях источников тепловой и композиционной конвекцией.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 16-05-00507а.

О ДОСТИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Стрелков С.А., Сушкевич Т.А., Максакова С.В.
Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук", Москва

Поляризация — это свойство векторных электромагнитных волн. Рассматриваем перенос поляризованного света в приближении кинетического уравнения и теории переноса излучения. Если уравнения Максвелла были сформулированы в 1873 году, то векторное интегро-дифференциальное уравнение переноса поляризованного излучения было написано только в 40-ые годы XX века: 1678 — Гюйгенс открыл поляризацию света; 1808 — Малюс обнаружил поляризацию солнечного света; 1852 — вектор параметров Стокса; 1871 — закон Рэлея; 1873 — уравнения Максвелла; 1942–1946 — векторное уравнение переноса (В.В.Соболев (1943-1944, 1949), С.Чандрасекар (1946, 1950), Г.В.Розенберг (1943-1944, 1949)). В 70-ые годы впервые в мировой науке С.А.Стрелков создал "Автоматизированную программную систему расчета переноса поляризованного излучения с учетом неоднородности плоского слоя и любых законов рассеяния" [1-3]. Методом Монте-Карло подобное удалось сделать С.А.Ухинову (докт. дисс., Новосибирск, 2010). В последние годы авторы исследования создали теорию "векторного передаточного оператора" для решения задач дистанционного зондирования природных и искусственных сред. Никто в мире не превзошел эти результаты.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-01-00783, № 14-01-00197.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрелков С.А.* Численное моделирование переноса поляризованного излучения в плоском слое. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Москва, 1986.
2. *Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А.* Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 661 с.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАДИАЦИОННОГО ФОРСИНГА НА КЛИМАТ В РЕГИОНЕ АРКТИКИ

Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Максакова С.В.
Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук", Москва

В Париже с 30.11.2015 по 12.12.2015 прошел 21-й Международный климатический саммит ("Конференция сторон"), на котором приняли "Парижское соглашение согласно Рамочной конвенции Организации Объединенных Наций об изменении климата", ("Парижское соглашение"). Оно охватывает все 196 стран и все выбросы и вступит в силу вместо Киотского протокола — это четкий сигнал о готовности правительств и ученых к осуществлению Повестки дня в области устойчивого развития на период до 2030 года.

Для количественных оценок значимости разных климатообразующих факторов, зависящих от солнечного и собственного излучения, ввели специальную характеристику климатической системы Земли — радиационное воздействие (форсинг) [1] .

В 2016 году 50 лет сферической модели переноса солнечного и собственного излучения в системе "атмосфера - земная поверхность", разработанной Т.А.Сушкевич [2-4]. Это была первая в мире численная модель глобального поля яркости Земли в масштабах всей планеты и в Арктике. Никто в мире не превзошел эти результаты.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-01-00783, № 14-01-00197.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кароль И.Л., Катцов В.М., Киселев А.А., Кобышева Н.В.* Санкт-Петербург: ГГО им. А.И.Воейкова, 2008. 55 с.

2. *Сушкевич Т.А.* Осесимметричная задача о распространении излучения в сферической системе / Отчет 0-572-6. М.: ИПМ АН СССР, 1966. 180 с.
3. *Сушкевич Т.А.* Поле яркости сферической атмосферы. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Москва, 1972.
4. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 661 с.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Талышев А.А.
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

В работе [1] построен интересный класс неособых частично-инвариантных решений уравнений газовой динамики относительно группы вращений $SO(3)$. В дальнейшем этот класс решений получил название «вихрь Овсянникова».

Основываясь на результатах работы [2] можно показать, что множество частично инвариантных решений всегда является объединением нескольких классов дифференциально-инвариантных решений.

Каждое дифференциально-инвариантное решение характеризуется последовательностью размерностей орбит этого решения в продолженных пространствах.

В настоящей работе описаны все классы дифференциально-инвариантных решений относительно группы вращений $SO(3)$ для систем уравнений газовой динамики, Навье-Стокса, динамики многофазных сред, Максвелла и уравнения Шредингера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2133.2014.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Особый вихрь, ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 45–52.
2. *Талышев А. А.* Об автоморфных системах конечномерных групп Ли. Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК МАТРИЦЫ В БИЛИНЕЙНЫХ АДДИТИВНЫХ ПОТОЧНЫХ ШИФРАХ

Титов С.С., Филиппова Е.Г.
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

В работе [1] наряду с решением трёх задач блочных шифров поставлена задача описания линейных совершенных поточных шифров, решение которой связано с описанием последовательностей, в которых нет идущих подряд M нулей (M-условие) [2, 3].

В данной работе получено описание множества таких последовательностей, в частности, доказано:

Утверждение. *Количество f_n последовательностей, удовлетворяющих M-условию над полем GF(q), удовлетворяет рекуррентному соотношению*:

$$F_n = (q-1)F_{n-1} + (q-1)F_{n-2}.$$

В частности, при $M = 2$ получается над GF(2) последовательность чисел Фибоначчи [4].

Таким образом, получен класс изотопических преобразований бесконечной квазигруппы, соответствующей совершенному поточному шифру, что даёт возможность решить поставленную в работе Мэсси проблему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Massey J., Maurer U., Wang M.* Procceedings of Crypto'87; Non-expanding, key-minimal, robustly-perfect, linear and bilinear ciphers. // Advances in Cryptology - EUROCRYPT '87, Workshop on the Theory and Application of of Cryptographic Techniques. Amsterdam, 1987. С. 237–247.
2. *Титов С.С., Гутарин Д.С., Коновалова С.С. и др.* Комбинаторные проблемы существования совершенных шифров // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 13. N. 4. С. 61–73.
3. *Шеннон К.* Теория связи в секретных системах // Работы по теории информации и кибернетике. М.: Наука, 1963. С. 333–402.
4. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.:Наука, 1967. 376 с.

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МНОГОСЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ С ЭКСТРАПОЛЯЦИЕЙ РИЧАРДСОНА

Тиховская С.В.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск

Рассмотрим эллиптическую сингулярно возмущенную задачу:

$$\begin{gathered} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x,y)u = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega; \\ u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\Omega = (0,1)^2$, $a(x) \geqslant \alpha > 0, b(y) \geqslant \beta > 0, c(x,y) \geqslant 0, \varepsilon > 0$.

Предполагается, что функции a, b, c, f, g – достаточно гладкие. Тогда решение задачи (1) является равномерно ограниченным и имеет два регулярных пограничных слоя у границ $x = 0$ и $y = 0$.

Выпишем схему направленных разностей, имеющую на сетке Шишкина Ω_N погрешность $O(\ln N/N)$ равномерно по ε:

$$\varepsilon\lambda^N_{xx}u^N_{i,j} + \varepsilon\lambda^N_{yy}u^N_{i,j} + a_i\lambda^N_x u^N_{i,j} + b_j\lambda^N_y u^N_{i,j} - c_{ij}u^N_{i,j} = f_{ij}, (x_i, y_j)\in\Omega_N,$$
$$u^N_{i,j} = g(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in \Gamma_N = \Gamma \cap \Omega_N,\ v_i = v(x_i),\ v_{ij}=v(x_i, y_j)$$

где $\lambda^N_x u^N_{i,j} = \dfrac{u^N_{i+1,j} - u^N_{i,j}}{h_{i+1}}$, $\lambda^N_{xx}u^N_{i,j} = \dfrac{\lambda^N_x u^N_{i,j} - \lambda^N_x u^N_{i-1,j}}{(h_i + h_{i+1})/2}$.

Применяем многосеточный метод структуры [1], используя три сетки с числом узлов N, $N/2$ и $N/4$. Для сокращения числа итераций используем дополнительную экстраполяцию, чтобы улучшить начальное приближение на исходной сетке [2].

Проведено сравнение различных итерационных методов таких как метод Зейделя, метод верхней релаксации и их варианты.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ 15-01-06584 и 16-01-00727.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V., Zadorin N.A.* A two-grid method for elliptic problem with boundary layers // Applied Numerical Mathematics. 2015. V. 93. P. 270–278.
2. *Li M., Li C.L., Cui X., Zhao J.* Cascadic multigrid methods combined with sixth order compact scheme for Poisson equation // Numerical Algorithms, 2016, V. 71, No. 4, pp. 715-727.

РАВНОВЕСНАЯ СКОРОСТЬ ЗВУКА В ПАРОГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Федоров Ю.В., Губайдуллин Д.А
ФГБУН Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Представлено общее выражение равновесной скорости звука в жидкости с парогазовыми пузырьками и проанализировано влияние концентрации пара и объемного содержания пузырьков на полученное выражение. В частных случаях, для газожидкостной и парожидкостной смеси представлены выражения равновесной скорости и найдено удовлетворительное согласие полученных выражений с известными экспериментальными данными.

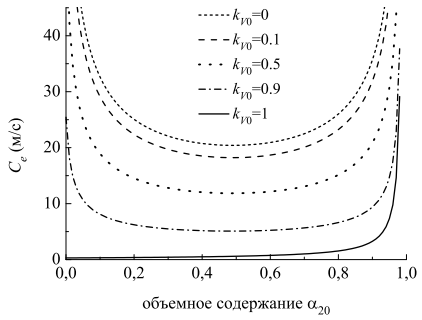


Рис. 1: Зависимости равновесной скорости звука от объемного газо- или паросодержания при различных значениях начальной концентрации пара в пузырьках

На рис. 1 приведены зависимости равновесной скорости звука от объемного содержания для смеси воды с паровоздушными пузырьками при различных значениях начальной концентрации водяного пара. Видно, что небольшое количество газа в парогазовых пузырьках оказывает влияние на характер кривой равновесной скорости. Если для газовых или парогазовых пузырьков кривые равновесной скорости немонотонные, то для чисто паровых пузырьков наблюдается монотонно возрастающая кривая. Данный факт в случаях $k_{V0} = 0$ и $k_{V0} = 1$ имеет хорошее экспериментальное подтверждение.

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ (№ 13-01-00135).

ДОЛГОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ В МНОГОЛЕТНЕМЁРЗЛОМ ГРУНТЕ ОТ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Филимонов М.Ю., Ваганова Н.А., Махнева В.В.
ИММ УрО РАН, УрФУ, г. Екатеринбург, fmy@imm.uran.ru

В соответствии с работами [1-7] моделирование процессов распространения тепла в мерзлом грунте от различных подземных инженерных объектов, имеющихся на северных нефтегазовых месторождениях, сводится к решению в заданной области трехмерного

уравнения контактной (диффузионной) теплопроводности с неоднородными коэффициентами, включающее локализованную теплоемкость фазового перехода. Этот подход, позволяющий решать задачу типа Стефана, без явного выделения границы фазового перехода, хорошо зарекомендовал себя при проведении расчетов для 11-ти северных нефтегазовых месторождений. В докладе приведены результаты численных расчетов и обсуждаются некоторые эффекты, выявленные в ходе проведения численных экспериментов для различных инженерных систем, эксплуатируемых на нефтегазовых месторождениях в зоне вечной мерзлоты.

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ, грант 16–01–00401 и контракта № 02.A03.21.0006 (постановление № 211 Правительства Российской федерации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Filimonov M.Yu, Vaganova N.A. Simulation of Thermal Fields in the Permafrost With Seasonal Cooling Devices // Proc. ASME. 45158. 2012. Vol. 4. P. 133–141. DOI:10.1115/IPC2012-90287.
2. *Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.* Simulation of thermal stabilization of soil around various technical systems operating in permafrost // Applied Mathematical Sciences. 2013. Vol. 7. № 144. P. 7151–7160. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2013.311669.
3. *Ваганова Н.А., Филимонов М.Ю.* Прогнозирование изменений в вечной мерзлоте и оптимизация эксплуатации инженерных систем // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13. № 4. С. 37–42.
4. *Filimonov M., Vaganova N.* Prediction of changes in permafrost as a result technogenic effects and climate // Academic Journal of Science. 2014. Vol. 3(1). P. 121–128.
5. *Filimonov, M.Yu., Vaganova N.A.* Simulation of Technogenic and Climatic Influences in Permafrost // Lect. Notes Comput. Sci. 2015. Vol. 9045. P. 178–185.
6. *Vaganova N.A., Filimonov M. Yu.* Computer simulation of nonstationary thermal fields in design and operation of northern oil and gas fields. // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1690. № 020016. http://dx.doi.org/10.1063/1.4936694.
7. *Vaganova N., Filimonov M.* Parallel splitting and decomposition method for computations of heat distribution in permafrost // CEUR Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1513. P. 42–49.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Хабиров С. В.
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН,

Уфимский государственный авиационный технический университет

Для модели идеального газа инвариантная подмодель двумерных установившихся течений хорошо известна [1]. Множество точных решений найдено и расчетов краевых задач проведено для безвихревых изоэнтропических течений. Для вихревых течений найдены отдельные точные решения [2]. Богатство аналитических и численных результатов обусловлено наличием интегралов у подмодели: энтропии, Бернулли, третьей компонентой скорости, вихря. Теория группового анализа позволяет систематизировать известные результаты, наметить пути конструктивного поиска новых аналитических решений и методов расчета. Элементы группового анализа приведены для плоских установившихся вихревых изоэнтропических течений газа. Решена задача групповой классификации по произвольным элементам уравнению состояния и значениям интегралов Бернулли и вихря. Построены оптимальные системы подалгебр для двух алгебр Ли, возникающих при групповой классификации. Рассмотрены инвариантные решения, и дана физическая интерпретация некоторых из них: поворот вихревого потока; вихревое течение в полосе, которое соединяет источники и стоки, двигающиеся по параллельным прямым в противоположных направлениях; растекание вихревого потока газа с окружности до вакуума на бесконечности; вихревое течение по концентрическим окружностям с конечными значениями вихря и плотности в начале, а на бесконечности - вакуум и бесконечный вихрь; вихревое течение между двумя концентрическими окружностями, которые являются источником и стоком; вихревое течение близкое к логарифмическим спиралям.

Работа поддержана РФФИ 14-01-97027-р-поволжье-а, НШ-8146.2016.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
2. *Фридман А.А.* Опыт гидродинамики сжимаемой жидкости. Л.-М.: ОНТИ ГТТИ. 1934. 368 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНОЙ, ПРОСТИМУЛИРОВАННОЙ МНОГОСТАДИЙНЫМ ГИДРОРАЗРЫВОМ ПЛАСТА

Хамидуллин М.Р.
Казанский федеральный университет, Казань

Численному моделированию двухфазной фильтрации вблизи ГС с МГРП посвящены некоторые работы. В публикации (1) авторы приводят математическую модель двухфазной фильтрации в пористых средах с трещинами. Дискретизация уравнений производится на неструктурированной гибридной сетке, с использованием неявных схем по давлению и насыщенности.

В данной работе рассмотрена задача двухфазной фильтрации в окрестности ГС, простимулированной трансверсальными трещинами МГРП в трехмерной постановке. Система уравнений для насыщенности в пласте и трещинах МГРП записывается в виде

$$m\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(f\left(S\right)\vec{u}\right) = 0, \quad m \sim 1; \tag{1}$$

$$M^f \frac{\partial S^f}{\partial t} + \bigtriangledown\left(f\left(S^f\right)\vec{w}\right) + \frac{1}{2M}\left(f\left(S\right)u_y\right)|_{F^-}^{F^+} = 0; \quad \vec{w} = -\bigtriangledown p^f. \tag{2}$$

где M – безразмерная проводимость, k_f – проницаемость, $F^{\pm}$ – берега трещины, m – пористость, $f\left(S\right)$ – функция Баклея-Леверетта.

Задача аппроксимируется по пространству методом конечных объемов, при этом для давления используется неявная схема (2) а для насыщенности – локальная явно-неявная схема.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научных проектов № 15-41-02699, № 15-41-02698.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matthai S.K., Mezentsev A., Belayneh M.* Control-Volume Finite-Element two phase flow experiments with fractured rock represented by unstructured 3D hybrid meshes // SPE 93341. 2005. С. 1–21.
2. *Хамидуллин М. Р.* Численное моделирование притока однофазной жидкости к горизонтальной скважине с трещинами многостадийного гидроразрыва пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 1-15.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ПОДО ЛЬДОМ В ОЗЕРЕ БАЙКАЛ

Цветова Е.А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, e.tsvetova@ommgp.sscc.ru

Лед достаточно прозрачен, чтобы пропускать свет и солнечную энергию. Поэтому в Байкале нагрев воды начинается задолго до того, как лед растает. Поскольку температура воды у нижней кромки льда меньше температуры максимальной плотности, тепловой поток запускает процесс естественной конвекции в верхнем слое воды. В то же время в озере может возникнуть вынужденная конвекция, происхождение которой мы связываем со случайными событиями подъема и диссоциации гидратов метана, значительные запасы которых недавно были обнаружены на дне озера.

Используя математические модели [1], мы изучаем процессы естественной и вынужденной конвекции подо льдом в глубоком озере в конкретных условиях озера. Для моделирования гидротермодинамики воды в озере, как несущей среды, используется математическая модель в негидростатическом приближении. Поведение метансодержащих компонент описывается системой уравнений типа конвекции-диффузии-реакции. В правых частях этих уравнений присутствуют члены, описывающие фазовые переходы, которые осуществляются в системе при достижении ею необходимых условий по давлению, температуре и насыщению концентраций соответствующих компонент.

Результаты численных экспериментов показали, что естественная конвекция под льдом интенсифицирует процесс вынужденной конвекции. В результате в озере происходит обновление глубинных вод.

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований РАН I.33П and II.2П, а также проектом РФФИ № 14-01-00125-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsvetova E.A* Modeling of hydrodynamics of water-methane heterogeneous system// Proc. SPIE 9680, 2015, 968075.

КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ СОЛНЕЧНОЙ РАДИАЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА

Цепелев И.А.

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

В области $\Omega \subset R^2$ исследуется течение вязкой двухфазной (воздух-жидкость) неоднородной несжимаемой теплопроводящей жидкости

в поле силы тяжести. Это движение описывается известными уравнениями Навье-Стокса, уравнением несжимаемости, уравнениями переноса температурно-независимых плотности и вязкости и уравнением теплового баланса с соответствующими граничными и начальными условиями. Вязкость и плотность жидкости зависят от температуры. Жидкой фазе жидкости соответствует низкая вязкость и при кристаллизации жидкости вязкость возрастает скачком на 6 порядков [1,2]. На дневной поверхности жидкости рассматривается нелинейное условие конвективного теплообмена между воздухом и жидкостью и учитывается солнечная радиация [3].

Разработаны численные методы моделирования задачи в пакете OpenFOAM. Исследование может использоваться для моделирования кристаллизации лавовой корки при извержениях вулканов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Costa A., Caricchi L., Bagdassarov N. A model for the rheology of particle-bearing suspensions and partially molten tocks // Geochem. Geophys. Geosys. 2009. 10, Q03010, doi 10.1029/2008Gc002138.

2.Marsh B.D. On the crystallinity, probability of occurrence, and rheology of lava and magma // Contrib. Mineral. Petrol. 1981. Vol.78. P.85-98.

3.Neri A. A local heat transfer analysis of lava cooling in the atmosphere: application to thermal diffusion-dominated lava flows // J. Volcanol. Geother. Res. 1998. Vol.81. P.215-243.

ВСПЛЕСК СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ: ЛАБИРИНТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ И АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Чашечкин Ю.Д.

ФГБУН Институт проблем механики им.А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, e-mail: yulidch@gmail.com

Согласованными оптическими, контактными и акустическими методами исследована тонкая структура течений и акустических сигналов, возникающих при первичном контакте и последующем погружении свободно падающей капли воды, спирта, нефти в воду. Изучены свойства последовательности акустических пакетов, образующихся при контакте капли и в ходе последующей эволюции течений.

На поверхности погружающейся капли замечены короткие капиллярные волны, порождаемые падающими мелкими брызгами.

Впервые установлен дискретный характер распределения вещества капли на поверхности венца и первичной каверны. Вещество окрашенной капли концентрируется в тонких волокнах, образующих линейчатый или сетчатый узор. Интерпретация данных проводится на основе масштабного анализа фундаментальной системы уравнений механики и термодинамики.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ - НОВОЕ ПОКОЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ

Чашечкин Ю.Д.
ФГБУН Институт проблем механики им.А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, e-mail: yulidch@gmail.com

Структуры физических полей, составляющие основу классификации течений, выделены во всем доступном для наблюдений диапазоне масштабов. В данной работе теоретические и лабораторные исследования проводятся на основе фундаментальной системы, включающей уравнения термодинамики, а также переноса вещества, импульса, энергии. Симметрии системы отвечают основным принципам физики. Решения находятся с учетом условия совместности, определяющего ранг полной системы, порядок линеаризованной версии и степень характеристических (дисперсионных) уравнений. Собственные линейные и временные масштабы фундаментальной системы с физически обоснованными граничными условиями определяют требования к методикам расчета и лабораторного моделирования, позволяющим выделять значимые крупно- и тонкоструктурные компоненты.

В широком диапазоне параметров изучены картины обтекания равномерно движущейся или осциллирующей полосы в стратифицированной (сильно- и слабо) и однородной (потенциально и актуально) жидкости. В единой постановке изучены течения, индуцированные диффузией на неподвижном препятствии, ползучие, волновые, вихревые и нестационарные режимы обтекания препятствий. Обсуждаются критерии наблюдаемости физических величин и правила оценки погрешностей, а также условия переноса результатов моделирования на природные системы.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ В СЛУЧАЕ ДВУСТОРОННЕГО ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Чащин М.А., Рубина Л.И., Ульянов О.Н.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН,
Екатеринбург,
cma@imm.uran.ru, rli@imm.uran.ru, secretary@imm.uran.ru

Численное моделирование и исследование процессов, связанных с переносом излучения в однородных и неоднородных средах, вызывают большой интерес исследователей, используются как при изучении многих явлений природы, так и при создании новой техники.

Ранее в работах авторов была представлена методика численного моделирования взаимодействия излучения с плоским слоем вещества в случае, когда излучение падает на слой с одной стороны. В данной работе рассматривается случай двустороннего внешнего излучения. Математическая модель представляет собой систему уравнений, включающую уравнения кинетики для населенностей уровней с коэффициентами, зависящими от интенсивности излучения, уравнение переноса излучения, с коэффициентами, вычисляемыми по населенностям уровней, уравнение энергобаланса, дополненную соответствующими граничными условиями. Электронная температура вычисляется из решения уравнения энергобаланса с граничными условиями различных типов.

Детальное изучение переноса излучения и связанных с ним процессов - непростая задача, требующая учета многих тонких эффектов и приводящая к проведению большого объема вычислений, к обработке больших многомерных массивов информации и, следовательно, требующая мощной вычислительной техники.

Для проведения численных расчетов авторами созданы параллельные программы, использующие DVM и MPI.

Особое внимание было уделено расчету вариантов конкретных задач, для которых из физических соображений ясно, что распределение вычисляемых величин (электронная температура, населенности, излучение) имеет симметричный характер. Было проведено численное моделирование (при соответствующем задании граничных условий для интенсивности излучения), когда внешнее (одинаковое) излучение падает только справа или только слева, а также, когда одно и то же излучение падает на слой с обеих сторон. Такие варианты служат хорошими тестами для проверки правильности работы каждой из разработанных программ.

Численные расчеты продемонстрировали хорошую масштабируемость и эффективность разработанных программ, достоверность результатов расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Е.Ф.Леликова, Л.И.Рубина, О.Н.Ульянов, М.А.Чащин Параллельные вычислительные технологии в задаче о переносе радиационного излучения // ВАНТ. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 2002. Вып. 3. С. 3–13.

2.Л.И.Рубина, О.Н.Ульянов, И.А.Чащин О развитии двух параллельных алгоритмов численного моделирования взаимодействия излучения с веществом // Вестник УГАТУ. Сер. Управление, вычисл. техника и информатика. 2013. Т. 17. N. 2(55). С. 64–74.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АВАРИЙНОГО РАЗЛИВА НЕФТИ В УСЛОВИЯХ ЮЖНОГО, МЕЛКОВОДНОГО ВОДОЕМА

Шабас И.Н., Чикина Л.Г., Чикин А.Л.

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Институт аридных зон ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону

В работе представлены результаты моделирования проведения нефтяного загрязнения в южной части акватории Азовского моря – Керченского пролива. Исследования проводятся в рамках развития созданных коллективом авторов [2] трехмерных математических моделей, описывающих поведение различных загрязнений в водах Азовского моря. На основе этих моделей разработан программный комплекс прогнозирования экологических проблем в акватории Азовского моря на высокопроизводительных вычислительных системах (ВВС) с использованием существующих пакетов распараллеленных итерационных методов. При моделировании распространения нефти учитывались испарение нефти с поверхности водоема, ее растекание, возникновение нефтяной взвеси в толще вод [1], изменение температуры воды. Вычислительные эксперименты проводились с изменением количества, координат и мощности модельных разливов, силы и направления ветра над морем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1420, государственное задание ВУЗов, базовая часть).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ehsan Sarhadi Zadeh and Kourosh Hejazi* Eulerian Oil Spills Model Using Finite-Volume Method with Moving Boundary and Wet-Dry Fronts // Modelling and Simulation in Engineering Volume 2012 (2012), Article ID 398387, 7 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2012/398387
2. *И.Н. Шабас, А.Л. Чикин, Л.Г. Чикина* Математическое моделирование задач переноса многокомпонентных примесей в Азовском море на многопроцессорных вычислительных системах // Известия ЮФУ, Техн.науки. 2014. N 12, с. 200-210

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ, ЦИРКУЛИРУЮЩИХ ВОКРУГ КРУГЛОГО ОСТРОВА В ДВУХСЛОЙНОМ ОКЕАНЕ

Шавлюгин А.И.
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток, e-mail: Alexander.Shavlyugin@vvsu.ru

Рассматривается течение, индуцированное двумя равномерно завихренными цилиндрическими оболочками с внутренним радиусом a и внешними радиусами b_1 и b_2, расположенными в верхнем и нижнем слоях двухслойного океана, вплотную к круглому острову радиуса a. Толщины слоев h_1 и h_2, потенциальные вихри в оболочках постоянны и равны Π_1 и Π_2, вне них равны нулю; выполнено условие нулевой суммарной интенсивности $h_1\Pi_1(b_1^2-a^2)+h_2\Pi_2(b_2^2-a^2)=0$.

Следствием уравнений движения является закон сохранения потенциального вихря в слоях

$$\frac{D_j\Pi_j}{Dt}=\frac{\partial\Pi_j}{\partial t}+u_j\frac{\partial\Pi_j}{\partial x}+v_j\frac{\partial\Pi_j}{\partial y},$$

где проекции вектора скорости в слоях u_j и v_j связаны с аномалиями давления геострофическими формулами $u_j=-\partial p_j/\partial y$, $v_j=\partial p_j/\partial x$. Аномалии давления связаны с распределением Π_j соотношением

$$p_j(x,y,t)=h_j\Pi_j\iint\limits_{S_j}\left[G(r)+\frac{h_{3-j}}{h_j}G_0(r)\right]dx'dy'+$$
$$h_{3-j}\Pi_{3-j}\iint\limits_{S_{3-j}}\left[G(r)-G_0(r)\right]dx'dy',$$

где $G(r)$ и $G_0(r)$ - функции Грина для операторов Лапласа ∇^2 и Гельмгольца $\nabla^2-\gamma^2$, ограниченные на бесконечности и равные нулю на границе острова; интегралы берутся по завихренным областям.

Выполнен линейный анализ устойчивости рассматриваемой вихревой структуры, на основании которого найдены кривые нейтральной устойчивости и области доминирования различных неустойчивых мод в пространстве определяющих параметров задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания вузам № 2014/292 на выполнение работ в сфере научной деятельности.

АЛГОРИТМ УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТОВ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА КАК СПОСОБ ОПТИМИЗАЦИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Шангараева А.И.
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, AIShangaraeva@kpfu.ru

В работе рассматривается случай изотермической фильтрации двухфазной жидкости в пласте, вскрытом системой добывающих и нагнетательных скважин. Фильтрация жидкостей происходит по обобщенному линейному закону Дарси. Как правило, всегда возникает потребность множества вариантов расчетов моделей. Широко используемый вариант решения данной системы – это расчет поля давлений по неявной, поля насыщенности – по явной схемам расчета [1, 2]. В этом случае, возникает ограничение на шаг по времени при использовании явной схемы, что увеличивает физическое время компьютерных расчетов. Для решений данной проблемы автором предлагается алгоритм ускорения расчета нефтенасыщенности. В работе исследуется использование разных шагов по времени в разных областях месторождения так, чтобы в каждой области шаг был: во-первых, достаточно велик для уменьшения расчетных процедур и, во-вторых, удовлетворял условию Куранта для соответствующих ячеек. Проведено сравнение вышеописанного варианта численного расчета с аналитическим решением для плоского случая [3]. Результаты расчетов достаточно хорошо совпадают с аналитическими результатами. Алгоритм проверен на примере задачи движения фронта насыщенности в радиально-симметричном случае. Численные расчеты показали выигрыш реального (физического) времени расчетов нефтенасыщенности примерно в 1.7 раза. Показано, что

при использовании алгоритма в трехмерном случае, ускорение возможно более, чем в 2 раза.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02315)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. VIP-EXECUTIVE technical reference guide – режим доступа http://esd.halliburton.com/support/LSM/ResMgmt/NexusVIPDT/ Nexus/5000/5000_4/Help/Techref.pdf.
2. *Каневская Р.Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 140 с.
3. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1982. 208 с.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ НЕВЯЗОК

Шапеев В.П.
Новосибирский государственный университет,
Институт Теоретической и прикладной механики
им. Христиановича СО РАН, vshapeev@ngs.ru

В представленном докладе показываются возможности метода коллокации и наименьших невязок (CLR) численного решения краевых задач для системы PDE. В методе CLR дифференциальная задача проектируется в линейное функциональное пространство так, что ее приближенное решение отыскивается из решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В CLR метод коллокаций (СМ) сочетается с требованием достижения минимума функционала невязки, составленного из невязок уравнений этой СЛАУ, на ее решении. С одной стороны это требование расширило возможности метода КНН по сравнению с возможностями СМ и позволяет решать такие задачи, которые невозможно решить с помощью СМ, например, задачи для уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса. С другой стороны CLR в значительной мере обладает отдельными удобствами метода коллокаций. В нем относительно просто строить варианты высокого порядка точности в прямоугольных и неканонических областях, в том числе с криволинейными внешними и внутренними границами. В CLR удобно конструировать многосеточные варианты и применять хорошо зарекомендовавшие себя численные алгоритмы, например, с использованием подпространств Крылова.

В настоящее время возможности метода показаны при решении эталонных двумерных и трехмерных уравнений Навье-Стокса, при моделировании лазерной сварки металлических пластин из однородных и разнородных металлов, задач прочности деталей из композитных материалов, краевых задач для гиперболических уравнений. Все это указывает на значительную универсальность метода и возможность его использования для создания специализированных пакетов для решения различных задач численного моделирования физических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Shapeev. Collocation and Least Residuals Method and Its Applications. EPJ Web of Conferences 108, 01009 (2016), p.1–01009-p.12.
2. V. Isaev, V. Shapeev, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, V. 50, No. 10, pp. 1670-1681.
3. V. I. Isaev and V. P. Shapeev. High-Order Accurate Collocations and Least Squares Method for Solving the Navier-Stokes Equatons. Doklady Mathematics, 2012, Vol. 85, No. 1, pp. 71-74.
4. V. Isaev, A. Cherepanov, V. Shapeev. Numerical study of heat modes of laser welding of dissimilar metals with an intermediate insert. International Journal of Heat and Mass Transfer (2016), pp. 711-720.
5. Cherepanov A.N., Shapeev V.P., and Isaev V.I. Simulation of Heat Transfer Processes in Laser Welding of Dissimilar Metals with an Insert. High Temperature, 2015, Vol. 53, No. 6, pp. 841-846.
6. V.I. Isaev, V.P. Shapeev, A.N. Cherepanov, Thermophysics and Aeromechanics, 2010, V. 17, No. 3, pp. 419-434.
7. V. P. Shapeev, E. V. Vorozhtsov, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, V. 8660, pp. 434-448.
8. V.P. Shapeev, V.I. Isaev and V. Idimeshev, CD-ROM Proceedings of the ECCOMAS 2012, Vienna, Austria.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО ТИПА ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Шаяхметова Р. Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Уравнения газовой динамики [1] для одноатомного газа допускают 14-мерную алгебру Ли, содержащую проективный оператор. Для данной алгебры в работе [2] построена оптимальная система неподобных подалгебр, включающая 1248 представителей. Подалгебр, содержащих проективный оператор, значительно меньше. Все они представлены в работе [3] в компактном виде (73 представителя).

Рассмотрены все одномерные подалгебры работы [3]. Для каждой подалгебры вычислены инварианты и построены инвариантные подмодели с тремя независимыми переменными. Все подмодели стационарного типа. Подмодели приведены к каноническому виду. Выделена область гиперболичности и найден интеграл для энтропии. Вместо интеграла Бернулли в случае стационарных движений, для подмоделей получено обыкновенное дифференциальное уравнение на инвариантные функции. Геометрически представлены линии уровня инвариантных функций, позволяющие некоторым образом описать движение частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант 14-01-97027.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика. ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30-55.
2. *Черевко А. А.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\,\rho^{5/3}$. Новосибирск: Препринт/ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1996. № 4-96. С. 3-37.
3. *Шаяхметова Р.Ф.* Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа. Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 605-625.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ

Шефер И.А.
Сибирский федеральный университет, Красноярск, ilya.shefer@gmail.com

Интенсивное развитие микросистем жидкостной термостабилизации, в которых используются течения легкоиспаряющейся жидкости в потоке газообразной среды, предопределяет особый интерес к теоретическим исследованиям характеристик двухслойных течений типа “жидкость – газ”.

В настоящей работе на основе точного стационарного решения — аналога решения Остроумова – Бириха уравнений свободной конвекции — изучаются свойства и особенности совместного течения вязкой теплопроводной жидкости и спутного потока парогазовой смеси в плоском горизонтальном канале [1]. Пар считается пассивной примесью, диффузия пара в газе описывается уравнением Фика, в котором дополнительно учитываются слагаемые, отвечающие эффек-

ту Дюфура. На термокапиллярной поверхности раздела “жидкость–газ”, остающейся недеформируемой в процессе движения, справедливы обычные условия непрерывности полей скорости и температуры, динамическое и кинематическое условия. Диффузионный поток массы пара, возникающий за счёт испарения через межфазную границу, учитывается в условии баланса энергии.

Изучено влияние геометрии системы, а именно толщин слоев, на характеристики течения. В рамках линейной теории исследована устойчивость точного решения и определены типичные формы возмущений. Построены нейтральные кривые и получены зависимости критических характеристик устойчивости от значений толщин слоев рабочих сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-4519.2016.1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончарова О.Н., Резанова Е.В.* Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. 2014. N. 2. С. 68–79.

АНАЛИЗ ТЕКСТУРНЫХ ПРИЗНАКОВ КТ-ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ ОРГАНОВ БРЮШНОЙ ПОЛОСТИ

Юрова А.С.
ВМК МГУ, Москва, alexandra.yurova@gmail.com

В настоящее время существует ряд инструментов для полуавтоматического сегментирования анатомических структур. Полная автоматизация сегментации является сложной задачей по нескольким причинам. Во-первых, существует большое число видов медицинских снимков, что обусловлено разнообразием томографов и протоколов. Во-вторых, нельзя определить диапазон интенсивностей, характерный для какого-либо органа. В-третьих, во многих случаях диапазоны интенсивностей органов, имеющих общую границу, пересекаются. Это значительно затрудняет детектирование границы и построение корректной сегментации.

Данная работа посвящена методу сегментации снимков компьютерной томографии с контрастным усилением. Метод состоит из двух этапов. На первом этапе производится расчет текстурных признаков изображения для последующего построения бинарной маски. В

работе проанализированы текстурные признаки и выбраны наиболее подходщие для задачи обработки медицинских данных. Реализована параллельная версия расчета текстурных признаков на видеокарте. Основные подходы к анализу текстур изложены в [1]. На втором шаге из полученной бинарной маски извлекается трехмерная модель органа. Для этой операции используется метод активных контуров[2]. Подобраны параметры метода, необходимые для построения корректной анатомической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robert M. Haralick, K.Shanmugam and Its'hak Dinstein* Textural features for image classification. Transactions on systems, man, and cybernetics,Vol. SMC-3, No. 6, November 1973
2. *Sethian, J.A.* Level Set Methods. Cambridge University Press. 1996.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ АТЛАНТИЧЕСКИХ ВОД НА СОСТОЯНИЕ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА СЕВЕРНОГО ЛЕДОВИТОГО ОКЕАНА

Якшина Д.Ф., Голубева Е.Н.
ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск

Теплые промежуточные воды атлантического происхождения являются одним из основных источников тепла, поступающего в Северный Ледовитый океан. Хотя они расположены на достаточно большой глубине, считается, что тепло от атлантических вод может достигать нижней кромки льда. Влияние атлантических вод на ледовый покров в Арктике было исследовано с помощью трехмерной численной модели океан-лед, разработанной в ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск. Численные эксперименты проводились для периода 1948-2014 гг. с использованием данных реанализа NCEP/NCAR, определяющих потоки на поверхности океана и морского льда.

Результаты численных экспериментов отражают значительное уменьшение площади летнего ледового покрова в Арктике в последние два десятилетия. Влияние теплых атлантических вод в нашей модели наиболее отчетливо представлено в Баренцевом море и к западу от Шпицбергена, где отсутствует лед даже в зимний период. Численные результаты показывают также заметное сокращение толщины льда вдоль континентального склона к северу от Баренцева моря, где теплые атлантические воды подходят близко к поверхности и

процессы перемешивания могут способствовать вовлечению вод промежуточного слоя и передаче тепла вышележащим слоям. Проведенный анализ показывает, что изменчивость атмосферной циркуляции в Арктике и Северной Атлантике приводит к заметному изменению свойств атлантических вод, поступающих в Северный Ледовитый океан. На основе модельных расчетов проводятся оценки потоков тепла, поступающего от атлантических вод к нижней кромке льда во время различных периодов атмосферной циркуляции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16-05-00558, № 14-05-00730, № 16-35-00439).

МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Янбарисов Р.М., Терехов К.М., Никитин К.Д., Василевский Ю.В.
ИВМ РАН, Москва, ruslan.yanbarisov@gmail.com
Stanford University, Stanford, kirill.terehov@gmail.com
ИВМ РАН, Москва, nikitin.kira@gmail.com
ИВМ РАН, Москва, yuri.vassilevski@gmail.com

Рассматриваются уравнения Навье-Стокса для нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей, заданные в трехмерной области, дополненные граничными условиями на свободной поверхности и твердой границе области.

В статье [1] были предложены методы дискретизации и решения уравнений на динамических адаптивных сетках типа восьмидерево, реализованных в пакете Floctree, написанном на языке C++ Тереховым К.М и Никитиным К.Д.

Реализованные методы демонстрируют низкую численную вязкость предложенных схем на примерах тестовых задач:

- Обтекание круглого цилиндра в трубе
- Горизонтальный слошинг в прямоугольном контейнере

В качестве приложений рассматрена задача обтекания полупогруженной нефтяной платформы и расчет заплесков и нагрузок на нее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(грант 15-35-20991-мол_а_вед).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Terekhov K., Nikitin K., Olshanskii M., Vassilevski Yu.* A semi-Largangian method on dynamically adapted octree meshes. Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, V.30, No.6, p.363-380, 2015

SUBMODELS OF THE GENERALIZATION OF THE LEITH'S MODEL OF THE PHENOMENOLOGICAL THEORY OF TURBULENCE

Chirkunov Yu.A.
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, chr101@mail.ru

We study the nonlinear equation which is equivalent to the equation of generalization of the Leith's model of the phenomenological theory of turbulence. Using this equation, all submodels admitting a continuous Lie groups of transformations, acting on the set of solutions of the equations of these submodels are obtained. For obtained submodels all invariant submodels are found. All essentially distinct invariant solutions describing these invariant submodels are found explicitly or their finding is reduced to the solving of nonlinear integral equations. The integral equations defining these solutions reveal new possibilities for analytical and numerical studies. The presence of arbitrary constants in these equations allows one apply them to study of different boundary value problems. We have proved existence and uniqueness of solution for some boundary value problems. We have investigated the following boundary value problems: 1) the distribution of front-density turbulent kinetic energy in the framework of the generalized of the Leith's model of wave turbulence for which the spectrum and its wavenumber derivative or the spectrum and its time derivative are given at the initial moment of time at fixed wavenumber. Under certain additional conditions we have established the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems describing these processes.

This work was supported by the Program of the Russian Federation of Support of Leading Scientific Schools (NSH–2133.2014.1).

SIMULATION OF BEHAVIOR OF A GROUP OF AUTONOMOUS ROBOTS

Ibrahim I.A.[1], Filimonov M.Yu.[2,3], Kruglikov S.V.[2,3], Vaganova N.A.[2,3]
[1]*Electrical Engineering in Assiut University, Egypt, en.ismaiel@gmail.com,*
[2]*Ural Federal University, Russia,*
[3]*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Russia*

Contemporary autonomous robots, which are used to solve practical problems, generate new challenges for organization of the robots control system. A particular difficulty of developing such control systems arises in the case of a group of autonomous robots that solve a common problem

for all robots. In this case the control systems should also take into account the relative positions of the moving robot team [1], in order to avoid collision with each other reaching the goals. Software for these control systems should involve appropriate mathematical models that take into account both kinematics and dynamics of movement of the robots.

At the present time to solve these problems a specialized programs exist, on the basis of which one can build a generator of programming movement. Note that many modern management problems can not be solved by classical methods due to complexity of mathematical models. There are methods based, for example, on fuzzy technologies, the foundation of which is related with [2]. Fuzzy control is particularly effective when the processes are too complex for analysis by standard methods, or when the available sources of information are interpreted with low quality, inexactly or indefinitely.

A considered in the presentation problem is also described by complex mathematical model. In the first stage a control schemes are constructed in Matlab Simulink. In the presentation a Probabilistic Road Map algorithm to determine path for each robot is described. In this approach each Robot set up its path considering other Robot's path as obstacles, so they can move autonomously without overlap or collide. Results of simulations are shown.

The work was supported by Act 211 Government of the Russian Federation, contract 02.A03.21.0006.

REFERENCES

1.Balch T., Arkin. R.C. IEEE Transaction on Robotics and Automation. 1998. V0l. 14. N 6. P.926–939.

2.*Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. N 3. P.338–353.

DYNAMIC PROGRAMMING PROCEDURE FOR SOLVING ROUTING PROBLEMS WITHIN MULTI-AGENT APPROACH

Kruglikov S.V.[1,2], Kruglikov A.S.[1]

[1] *Ural Federal University, Russia,*

[2] *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Russia*

Topics of essential significance in developing concepts and technologies for cognitive robotics and modelling team behavior are interoperability and autonomy [1]. Problems under discussion in connection with the

control, navigation and guidance for multi-robot system under uncertainty conditions may be investigated in terms of multi-agent approach [2].

This approach is convenient for simulation and qualitative description, but needs in additional significant development of mathematical background and algorithmic framework for anticipative control and prediction procedures design. A possible way for such development presents the notion of unified information space for control system constructed on the base of mathematical theory of categories. Then wide range of objects and morphisms may be applied to formalize real and virtual agents.

The report presents the guidance problem for a multi-robot system transferring some load by the rote with dynamically uncertain obstacles. Assumptions on the environment and obstacles structure make possible mathematical analysis of the routes as previously constructed graph. Presented results form the version of dynamic programming algorithm in the case of operation research including in the common statement organizational structure, spacial positioning and time scheduling. Software realizing algorithms is presented.

Examples of software application are given for a team of unmanned surface vehicles (USV) used for the security of civilian harbors. In the last decade, the security of civilian objects and transportation hubs has received an increasing focus. To this aim USVs may be exploited for patrolling purposes and to investigate suspect situations, increasing the effectiveness of the protection system while excluding the personal of direct involvement into process and exposure to threats.

Formalized investigation of multi-agent systems may present interest not only in realm of applications, but also from the point of intelligent informational systems and AI. The objective is developing the innovation project of technology to form robotic teams and to incorporate them into civilian situational centers and homeland security systems as the adaptive subsystem for monitoring and protecting safety of environment.

REFERENCES

1.DoD Unmanned Systems Integrated Roadmap, FY 2011-2036, October 2011. URL: https://publicintelligence.net/dod-unmanned-systems-integrated-roadmap-fy2011-2036.

2.http://www.aiportal.ru/articles/multiagent-systems.

COLLOCATION AND LEAST RESIDUALS METHOD AND IT'S APPLICATIONS

Shapeev V.P.

Novosibirsk State University, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RUS, 630090 Novosibirsk, Russia E-mail: vshapeev@ngs.ru

The report is devoted to the potential of the method of collocations and least residuals (CLR) for numerical solution of the boundary value problems for PDE system. The CLR method combines the methods of collocations (MC) and least squares. In the CLR method, in order to approximate solution of the problem in the 1rst stage, one needs to build an overdetermined system of linear algebraic equations (SLAE). The solution of the latter is sought from the requirement of minimizing the functional composed of residuals of all its equations. On the one hand, such a complication of the numerical algorithm expans the capacities of the MC for solving the boundary value problems with singularities, e.g., the Navier-Stokes equations with large Reynolds numbers. On the other hand, the CLR method has largely some advantages of the collocations method. It is relatively easy in it to construct high-accuracy versions in various domains, including those with curvilinear outer and inner boundaries. It is convenient in the CLR method to construct multigrid versions and apply proven numerical algorithms, e.g., those using Krylov subspaces.

Currently, the potential of the method has been shown in solving the standard problems for 2D and 3D Navier-Stokes equations, modeling of laser welding of metal plates of similar and dissimilar metals, problems of strength of parts made of composite materials, boundary value problems for hyperbolic equations. All this points to a significant exibility of the method and the possibility to use it to create custom packages for solving various problems of numerical modeling of physical processes.

This work is supported by the RFBR, projects 13-01-00227, 14-08-00633; SB RAS int.project 04.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *V. I. Isaev, V. P Shapeev*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, V. 50, No. 10, pp. 1670-1681.
2. *V.I. Isaev, V.P. Shapeev, A.N. Cherepanov*, Thermophysics and Aeromechanics, 2010, V. 17, No. 3, pp. 419-434.
3. *V. P. Shapeev, E. V. Vorozhtsov*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, V. 8660, pp. 434-448.
4. *V.P. Shapeev, V.I. Isaev and V. Idimeshev*, CD-ROM Proceedings of the ECCOMAS 2012, Vienna, Austria.

SYMMETRIES OF THE HYPERBOLIC SHALLOW-WATER EQUATIONS AND THE GREEN-NAGHDI MODEL IN LAGRANGIAN COORDINATES

Siriwat P., Kaewmanee C., Meleshko S.V.
School of Science, Mae Fah Luang University, Chiang Rai, 57100, Thailand
Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University, Phitsanulok 65000, Thailand
School of Mathematics, Institute of Science, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, 30000, Thailand,
e-mail: sergey@math.sut.ac.th

The observation that the hyperbolic shallow water equations and the Green-Naghdi equations in Lagrangian coordinates have the form of an Euler-Lagrange equation with a natural Lagrangian allows us to apply Noether's theorem for constructing conservation laws for these equations. In this study the complete group analysis of these equations is given: admitted Lie groups of point and contact transformations, classification of the point symmetries and all invariant solutions. For the hyperbolic shallow water equations new conservation laws which have no analog in Eulerian coordinates are obtained. Using Noether's theorem a new conservation law of the Green-Naghdi equations is found. The dependence of solutions on the parameter is illustrated by self-similar solutions which are invariant solutions of both models.

Содержание

1. *Агошков В.И., Шелопут Т.О.* ВАРИАЦИОННАЯ АССИМИЛЯЦИЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКВАТОРИЙ С “ЖИДКИМИ” ГРАНИЦАМИ 3
2. *Алабужев А.А., Кашина М.А.* ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИИ КОНТАКТА НА КОЛЕБАНИЯ ПУЗЫРЬКА В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ 3
3. *Алиханов А.А.* РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УБЫВАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ ПАМЯТИ 4
4. *Амосов А.А.* ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛ 5
5. *Андреев В.К., Ефимова М.В.* О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ 6
6. *Анучина А.И., Артемова Н.А.,Бронина Т.Н., Гордейчук В.А., Ушакова О.В.* О РАЗРАБОТКЕ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК В КОНСТРУКЦИЯХ, ОБРАЗОВАННЫХ ОБЪЁМАМИ ВРАЩЕНИЯ, В ТОМ ЧИСЛЕ И ПРИ ИХ ДЕФОРМАЦИИ 7
7. *Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А.* МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЕГО ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ . . 9
8. *Ахмадиев Ф.Г.* МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД В ОБЛАСТЯХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ РАБОЧИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ 10
9. *Бадриев И.Б., Желтухин В.С.,Чебакова В.Ю.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЧЕ-РАЗРЯДА В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ДАВЛЕНИЙ . 11
10. *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П., Паймушин В.Н.* О РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН 12
11. *Байкин А.Н., Головин С.В.* ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ 13
12. *Бекежанова В.Б., Шефер И.А.* СПЕКТР ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ 14
13. *Блинова М.А., Бибердорф Э.А.* ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДИХОТОМИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА 15

14. *Блохин А. М., Круглова Е. А., Семисалов Б. В.* РАСЧЁТ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ 16
15. *Блохин А.М., Голдин А.Ю.* ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДВУХФАЗНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ГАЗА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА 17
16. *Богданов А.Н., Диесперов В.Н.* НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ 18
17. *Болкисев А.А.* МЕТОДИКА РАСЧЁТА НАГРЕВА ИЗЛУЧЕНИЕМ ОПТИЧЕСКИ ПРОЗРАЧНОГО ВЕЩЕСТВА С ПОГЛОЩАЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ 19
18. *Болкисев А.А., Шаклеин А.А.* СПОСОБ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ В КОМБИНИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ГОРЕНИЯ 20
19. *Бондарь И.В., Фалейчик Б.В.* БЕЗМАТРИЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ С АДАПТИВНЫМ ПОДАВЛЕНИЕМ ОШИБКИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 21
20. *Боронина М.А., Вшивков В.А.* СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ 22
21. *Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С., Якушев В.Л.* МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОРРЕКЦИИ ФОРМЫ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА ПРИ КЕРАТОКОНУСЕ 23
22. *Быков Н.В., Бырдин К.А., Макаренко В.С.* ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕКЦИИ ГАЗА В ЗАКРИТИЧЕСКУЮ ЧАСТЬ СОПЛА РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ 24
23. *Ваганова Н.А., Филимонов М.Ю.* ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ПРОДУКТИВНОМ СЛОЕ ЗАМКНУТОЙ ГЕОТЕРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ 25
24. *Василевский Ю.В.* ILU ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ 26
25. *Власова С.С., Просвиряков Е.Ю.* ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА 27
26. *Воскобойникова Г.М., Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.* ВЛИЯНИЕ СНЕЖНОГО ПОКРОВА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН 28

27. *Гафиятов Р.Н.* АКУСТИКА ВОЛН В МНОГОФРАКЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ ЖИДКОСТЯХ 28
28. *Генрих Е.А.* О ВЫБОРЕ ФОРМЫ И ЧИСЛА ЧАСТИЦ В МЕТОДЕ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКАХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ 29
29. *Геут Кр.Л., Титов С.С.* ЗАДАЧА УШАКОВА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕКУРРЕНТЫ 30
30. *Гладких В. С., Москалев А. В., Ильин В. П.* ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ФОРМАТА ХРАНЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ С УЧЕТОМ МИКРО-АРХИТЕКТУРЫ СОВРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОЙ СКОРОСТИ РЕШЕНИЯ СЛАУ 31
31. *Голушко С.К., Семисалов Б.В., Алеев Н.Р.* РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОГРИДНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА 32
32. *Городнова Н. О.* ИНТЕГРАЦИЯ МОДЕЛИ ОПУХОЛИ С МОДЕЛЬЮ МИКРОЦИРКУЛЯЦИИ КРОВИ 33
33. *Григорьев Ф.В.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ 34
34. *Губайдуллин Д.А.* ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ГАЗОКАПЕЛЬНЫХ И ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕД. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ 35
35. *Губайдуллин Д.А., Снигерев Б.А.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В ВОСХОДЯЩЕМ ГАЗОЖИДКОСТНОМ ПОТОКЕ В ТРУБЕ 36
36. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ 37
37. *Добросердова Т.К.* 1D-3D МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В СЕТИ СОСУДОВ 38
38. *Ефимова А.А., Дудникова Г.И.* ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО МЕХАНИЗМА УСКОРЕНИЯ ИОНОВ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ 38
39. *Жигарев В.А., Минаков А.В., Платонов Д.В., Дектерев Д.А.* МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРАХ 39
40. *Ильин В.П.* ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ СЛАУ 40
41. *Ильяш Ю.И.* ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ДВОЙНОЙ ЭМУЛЬСИИ 41

42. *Казаков А.Л., Лемперт А.А., Орлов Св.С.* О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ 42

43. *Казаков Е. А., Бондарчук А. А.* МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДИФИКАЦИЙ КОНСТРУКЦИИ АЭРОПЛАНА С КРЫЛОМ ОБРАТНОЙ СТРЕЛОВИДНОСТИ, НАПРАВЛЕННЫХ НА ПРЕОДОЛЕНИЕ ФЛАТТЕРА 43

44. *Кайсина М.И., Алабужев А.А.* ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦА ЖИДКОСТИ С УЧЁТОМ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИЙ КОНТАКТА 44

45. *Карова Ф.А.* РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА . . . 45

46. *Карпов А.И., Корепанов М.А., Шаклеин А.А.* ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПЛАМЕНИ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ 45

47. *Кашина М.А., Алабужев А.А.* ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ 46

48. *Клименко Л.С., Марышев Б.С.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОРБЦИИ ПРИМЕСИ В ПОРЕ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ 47

49. *Ковалевский В.В., Фатьянов А.Г., Караваев Д.А.* МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ВЕРИФИКАЦИИ СКОРОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ 48

50. *Ковеня В.М., Бабинцев П.В.* АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА 49

51. *Ковтуненко П. В.* ЭВОЛЮЦИЯ СЛОЯ СМЕШЕНИЯ В ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ 50

52. *Кодзокова И.З.* РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СТЕКЛОВА ПЕРВОГО КЛАССА 51

53. *Коновалов А.Н.* ОПТИМАЛЬНЫЕ, ЯВНО РАЗРЕШИМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ С КОНТРОЛИРУЕМЫМ ДИСБАЛАНСОМ ЭНЕРГИИ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 52

54. *Коновалов В.В.* ОТРЫВ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ ОТ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОДЛОЖКИ В ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ 53

55. *Короткий А.И.* ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЕЕ ПАРАМЕТРАМ НА ЧАСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА 53
56. *Котельникова М.С., Старченко С.В.* МАСШТАБИРОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БЫСТРО СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ 54
57. *Крайнева М.В. Голубева Е.Н.* РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШЕЛЬФОВЫХ МОРЕЙ И ГЛУБОКОГО ОКЕАНА 55
58. *Крыжановская Ю.А., Коростелев А.А.* АЛГОРИТМА ЗАЩИТЫ КАНАЛА СВЯЗИ 56
59. *Ксендзенко Л.С., Лосев А.С.* ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ МОДЕЛИ ЗОНАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД 57
60. *Кузьмин Г. А., Семисалов Б. В.* ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ 58
61. *Кулешов В.С., Моисеев К.В.* ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ С ГАУССОВСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ 59
62. *Курбацкая Л.И., Курбацкий А.Ф.* МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВИХРЕВОЙ ДИФФУЗИИ ИМПУЛЬСА И ТЕПЛА В НИЖНЕЙ АТМОСФЕРЕ 60
63. *Курбацкая Л.И., Курбацкий А.Ф.* МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОРОДСКОГО ОСТРОВА ТЕПЛА НА ОСНОВЕ RANS-ПРИБЛИЖЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЗАМЫКАНИЯ 61
64. *Курмаева К.В., Титов С.С.* ОБЕРТОНЫ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ . . 62
65. *Лазарева Г.Г., Куликов И.М.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В РЯДЕ ЗАДАЧ АСТРОФИЗИКИ 63
66. *Магденко Е.П.* ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ 64
67. *Марков А.А.* ОБ ИНТЕНСИФИКАЦИИ МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ВНЕДРЕНИИ В КАНАЛ НАНОНИТЕЙ 65
68. *Марков С.И.* ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ТЕНЗОРА ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА 66
69. *Мартынова Т.С.* ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ 67

70. *Марышев Б.С.* О ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СМЕСИ С УЧЕТОМ ЗАКУПОРИВАНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ 67
71. *Медведев Н.В., Титов С.С.* ОБ ОДНОРОДНЫХ МАТРОИДАХ В ИДЕАЛЬНЫХ СХЕМАХ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА 68
72. *Медведева Н.В., Титов С.С.* О ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ СОВЕРШЕННЫХ ШИФРОВ 69
73. *Мелешко С.В., Мошкин Н.П., Пухначев В.В.* СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ МАКСВЕЛЛА 70
74. *Муратова Г.В., Андреева Е.М., Бавин В.В., Белоус М.А.* МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА В НЕРВНОМ ВОЛОКНЕ 71
75. *Надолин К.А., Жиляев И.В.* МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЛКОГО ПРОТЯЖЕННОГО И СЛАБО ИСКРИВЛЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО РУСЛОВОГО ПОТОКА 72
76. *Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.* ТЕЧЕНИЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕРМОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ 73
77. *Никифоров А.И.* О МОДЕЛИРОВАНИИ СКВАЖИН НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ 74
78. *Новиков К.А.* ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ АКТИВНОГО ВНУТРИКЛЕТОЧНОГО ТРАНСПОРТА ПО РЕАЛЬНОЙ СЕТИ МИКРОТРУБОЧЕК 75
79. *Орлов С.С.* ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛН 76
80. *Палымский В.И., Палымский И.Б., Трилис А.В., Трифанов А.В.* О ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОТЬЮ КОНВЕКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕМ РАВНОВЕСНОМ ГАЗЕ 77
81. *Палымский В.И., Палымский И.Б., Фомин П.А., Трифанов А.В.* О СВЯЗИ ИНТЕНСИВНОСТИ КОНВЕКЦИИ И КОНЦЕНТРАЦИИ МИКРОЧАСТИЦ В ХИМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОМ РЕАГИРУЮЩЕМ ГАЗЕ 79
82. *Пененко В.В.* КОНЦЕПЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ В ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ 81
83. *Переварюха А.Ю., Дубровская В.А.* ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ С РЕЗКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ РЕПРОДУКТИВНОЙ АКТИВНОСТИ 82

84. *Пестренин В.М., Пестренина И.В.*. ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОНЕНТ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ 83
85. *Пикулин С.В.* ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ВНУТРИ ТЯЖЕЛОГО ИОНА В МОДЕЛИ ТОМАСА–ФЕРМИ 84
86. *Подрыга В.О.* РАСЧЕТ ТРАНСПОРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ 85
87. *Поляков С.В., Федирко В.А., Другов А.А.* ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПИННИНГА АБРИКОСОВСКОГО ВИХРЯ 86
88. *Просвиряков Е. Ю.* ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕРМОДИФФУЗИИ ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД 87
89. *Прямоносов Р.А.* АВТОМАТИЧЕСКАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ КОРОНАРНЫХ И ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ АРТЕРИЙ С КТ СНИМКОВ . . 88
90. *Пьянова Э.А., Фалейчик Л.М.* СЦЕНАРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕЗОКЛИМАТОВ В ЗИМНИЙ ПЕРИОД НАД ТЕРРИТОРИЯМИ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ 89
91. *Рошаль Д.С., Мясникова А.Э.* МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ САМОСБОРКИ 2D КРИСТАЛЛОВ НА СФЕРИЧЕСКИХ, ТРУБЧАТЫХ И КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НИХ 90
92. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА 91
93. *Саламатова В.Ю.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИПЕРУПРУГИХ МЕМБРАН 91
94. *Самойлова А.Е.* ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗА РАМКАМИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БУССИНЕСКА 92
95. *Свешников В.М., Савченко А.О., Петухов А.В.* РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗЦИИ ОБЛАСТИ С СОПРЯЖЕНИЕМ ТИПА НЕЙМАН – НЕЙМАН 93
96. *Сираева Д.Т.* ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ ИЗ ПЕРЕНОСОВ . . 94
97. *Сорокина С.В., Титов С.С.* СХЕМЫ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ МАТРОИДОВ, НЕ ПРЕДСТАВИМЫХ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ 95

98. *Стародубцева Ю.В.* ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДЛЯ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ 96
99. *Старченко С.В.* АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БЫСТРО ПЛОСКОМ СЛОЕ 97
100. *Стрелков С.А., Сушкевич Т.А., Максакова С.В.* О ДОСТИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ 98
101. *Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Максакова С.В.* ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАДИАЦИОННОГО ФОРСИНГА НА КЛИМАТ В РЕГИОНЕ АРКТИКИ 99
102. *Талышев А.А.* О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ 100
103. *Титов С.С., Филиппова Е.Г.* ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК МАТРИЦЫ В БИЛИНЕЙНЫХ АДДИТИВНЫХ ПОТОЧНЫХ ШИФРАХ 100
104. *Тиховская С.В.* РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МНОГОСЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ С ЭКСТРАПОЛЯЦИЕЙ РИЧАРДСОНА 101
105. *Федоров Ю.В., Губайдуллин Д.А* РАВНОВЕСНАЯ СКОРОСТЬ ЗВУКА В ПАРОГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ 102
106. *Филимонов М.Ю., Ваганова Н.А., Махнева В.В.* ДОЛГОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ В МНОГОЛЕТНЕМЁРЗЛОМ ГРУНТЕ ОТ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ 103
107. *Хабиров С.В.* ИНВАРИАНТНЫЕ ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА . . . 104
108. *Хамидуллин М.Р.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНОЙ, ПРОСТИМУЛИРОВАННОЙ МНОГОСТАДИЙНЫМ ГИДРОРАЗРЫВОМ ПЛАСТА 105
109. *Цветова Е.А.* МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ПОДО ЛЬДОМ В ОЗЕРЕ БАЙКАЛ . . 106
110. *Цепелев И.А.* КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ СОЛНЕЧНОЙ РАДИАЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА 107
111. *Чашечкин Ю.Д.* ВСПЛЕСК СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ: ЛАБИРИНТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ И АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ 108
112. *Чашечкин Ю.Д.* ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ - НОВОЕ ПОКОЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ 109

113. *Чащин М.А., Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ В СЛУЧАЕ ДВУСТОРОННЕГО ВНЕШНЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ 110
114. *Шабас И.Н., Чикина Л.Г., Чикин А.Л.* МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АВАРИЙНОГО РАЗЛИВА НЕФТИ В УСЛОВИЯХ ЮЖНОГО, МЕЛКОВОДНОГО ВОДОЕМА 111
115. *Шавлюгин А.И.* АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ, ЦИРКУЛИРУЮЩИХ ВОКРУГ КРУГЛОГО ОСТРОВА В ДВУХСЛОЙНОМ ОКЕАНЕ 112
116. *Шангараева А.И.* АЛГОРИТМ УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТОВ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА КАК СПОСОБ ОПТИМИЗАЦИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ 113
117. *Шапеев В.П.* МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ НЕВЯЗОК 114
118. *Шаяхметова Р. Ф.* ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО ТИПА ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА 115
119. *Шефер И.А.* ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ 116
120. *Юрова А.С.* АНАЛИЗ ТЕКСТУРНЫХ ПРИЗНАКОВ КТ-ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ ОРГАНОВ БРЮШНОЙ ПОЛОСТИ 117
121. *Якшина Д.Ф., Голубева Е.Н.* ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ АТЛАНТИЧЕСКИХ ВОД НА СОСТОЯНИЕ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА СЕВЕРНОГО ЛЕДОВИТОГО ОКЕАНА 118
122. *Янбарисов Р.М., Терехов К.М., Никитин К.Д., Василевский Ю.В.* МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И ПРИЛОЖЕНИЯ 119
123. *Chirkunov Yu.A.* SUBMODELS OF THE GENERALIZATION OF THE LEITH'S MODEL OF THE PHENOMENOLOGICAL THEORY OF TURBULENCE 120
124. *Ibrahim I.A., Filimonov M.Yu., Kruglikov S.V., Vaganova N.A.* SIMULATION OF BEHAVIOR OF A GROUP OF AUTONOMOUS ROBOTS 120
125. *Kruglikov S.V., Kruglikov A.S.* DYNAMIC PROGRAMMING PROCEDURE FOR SOLVING ROUTING PROBLEMS WITHIN MULTI-AGENT APPROACH 121
126. *Shapeev V.P.* COLLOCATION AND LEAST RESIDUALS METHOD AND IT'S APPLICATIONS 123
127. *Siriwat P., Kaewmanee C., Meleshko S.V.* SYMMETRIES OF THE HYPERBOLIC SHALLOW-WATER EQUATIONS AND THE GREEN-NAGHDI MODEL IN LAGRANGIAN COORDINATES 124