Синтез стохастической чувствительности при неполной информации

И. А. Башкирцева[1],
e-mail: Irina.Bashkirtseva@urfu.ru

Рассматривается система с управлением

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \varepsilon\sigma(x)\xi(t), \tag{1}$$

где $x, f \in R^n$, $u \in R^l$, $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $g(x)$ – $n \times l$-матричная функция, $\xi(t) \in R^m$ – дельта-коррелированный белый гауссовский шум с параметрами $\mathrm{E}\xi(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi(t)\xi^\top(\tau) = \delta(t-\tau)I$, I – единичная матрица, $\sigma(x)$ – $n \times m$-матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Пусть соответствующая детерминированная система (1) без управления (с $\varepsilon = 0$ и $u = 0$) имеет равновесие $\bar{x}$, устойчивость которого не предполагается. Рассматривается случай неполной информации, когда о поведении системы (1) можно судить лишь по вектору измерений $y(t)$:

$$y(t) = h(x(t)) + \varepsilon\varphi(x(t))\eta(t),$$

где $y, h \in R^r$, $\varphi(x)$ – $r \times q$-матричная функция, $\eta(t)$ – белый гауссовский q-векторный шум, некоррелированный с $\xi(t)$, удовлетворяющий $\mathrm{E}\eta(t) = 0$, $\mathrm{E}\eta(t)\eta^\top(\tau) = \delta(t-\tau)I$. В этом случае будем использовать следующий регулятор:

$$u = K(y - h(\bar{x})) = K(h(x) - h(\bar{x})) + \varepsilon K\varphi(x)\eta. \tag{2}$$

Динамика замкнутой системы (1) с регулятором (2) определяется уравнением

$$\dot{x} = f(x) + g(x)K(h(x) - h(\bar{x})) + \varepsilon\left(g(x)K\varphi(x)\eta(t) + \sigma(x)\xi(t)\right). \tag{3}$$

[1]Уральский математический центр, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

В анализе стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ будем использовать асимптотику

$$z(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}$$

отклонений решений $x^\varepsilon(t)$ замкнутой системы (3) от равновесия $\bar{x}$. Для $z(t)$ запишем динамическую систему

$$\dot{z} = (F + BKC)z + BKR\eta + G\xi, \tag{4}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}), \quad B = g(\bar{x}), \;\; R = \varphi(\bar{x}), \;\; G = \sigma(\bar{x}).$$

Множество матриц K, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость равновесия $\bar{x}$ детерминированной системы (3) (с $\varepsilon = 0$), имеет вид:

$$\mathbb{K} = \{K|\mathrm{Re}\lambda_\mathrm{i}(\mathrm{F} + \mathrm{BKC}) < 0\},$$

где $\lambda_i(F + BKC)$ – собственные числа матрицы $F + BKC$. Предполагается, что множество $\mathbb{K}$ не пусто.

При каждом $K \in \mathbb{K}$, существует предел

$$W = \lim_{t \to \infty} \mathrm{E}(z(t)z^\top(t)).$$

Матрица W называется матрицей стохастической чувствительности [1] равновесия $\bar{x}$ системы (3). Справедлива теорема:

Теорема. *Для любого $K \in \mathbb{K}$ матрица W стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ является единственным решением уравнения*

$$\begin{array}{l} (F + BKC)W + W(F + BKC)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S = 0, \\ \Phi = RR^\top, \;\; S = GG^\top. \end{array} \tag{5}$$

Обозначим через $\mathbb{M}$ множество симметрических положительно определенных $n \times n$-матриц. Для любого $K \in \mathbb{K}$ регулятор (2) формирует матрицу стохастической чувствительности W_K – решение уравнения (5).

Задача синтеза стохастической чувствительности. Для заданной матрицы $W \in \mathbb{M}$ найти матрицу $K \in \mathbb{K}$ такую, что $W_K = W$, где W_K– решение уравнения (5).

Для случая полной информации, задача синтеза матрицы стохастической чувствительности исследована в [2,3]. Эта задача синтеза для дискретных систем с неполной информацией рассматривалась в [4].

В докладе обсуждаются вопросы достижимости и алгоритмы решения задачи синтеза назначенной стохастической чувствительности в системе (1) при неполной информации (2). Приводятся примеры, иллюстрирующие разработанную теорию.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00165

[1] *Башкирцева И.А., Перевалова Т.В.* Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя – цикл // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 53–69. DOI: 10.1134/S0005117907100062

[2] *Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А.* Об управлении стохастической чувствительностью // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 78–89. DOI: 10.1134/S0005117908070084

[3] *Bashkirtseva I.* Attainability analysis in the stochastic sensitivity control // International Journal of Control. 2015. V. 88. P. 276–284. DOI: 10.1080/00207179.2014.949870

[4] *Bashkirtseva I.* Method of stochastic sensitivity synthesis in a stabilisation problem for nonlinear discrete systems with incomplete information // International Journal of Control. 2017. V. 90. P. 1652–1663. DOI: 10.1080/00207179.2016.1216608