

Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби

Материалы III Международного семинара,
посвящённого 75-летию академика А. И. Субботина



Materials of III International Seminar
dedicated to the 75th anniversary
of Academician A. I. Subbotin

Control Theory and
Theory of Generalized Solutions
of Hamilton–Jacobi Equations

**Control Theory
and
Theory of Generalized Solutions
of Hamilton–Jacobi Equations
CGS’2020**

Materials of III International Seminar
dedicated to the 75th anniversary
of Academician Andrei Izmailovich Subbotin

Ekaterinburg, Russia
26–30 October, 2020

Ekaterinburg
2020

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Уральский математический центр

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби

Материалы

III Международного семинара, посвящённого 75-летию
академика А. И. Субботина

Екатеринбург, Россия
26–30 октября 2020 г.

Екатеринбург
2020

УДК 517.9 + 519.63

ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

Мероприятие проводится при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 20-01-22017

Редактор: В. С. Пацко

«Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (CGS'2020): Материалы III Междунар. семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина, Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. 350 с.

В сборнике анонсируются результаты исследований, представленных на семинаре CGS'2020. Эти материалы отражают современное состояние следующих научных направлений: теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби, математическая теория управления динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, оценивание и идентификация в динамических системах, обратные задачи и управляемые распределенные системы, численные алгоритмы решения задач оптимального управления и краевых задач для уравнений Гамильтона – Якоби.

ISBN 978-5-8295-0729-9

© ИММ УрО РАН, 2020

© УрФУ, 2020

**III Международный семинар
«Теория управления и теория обобщенных
решений уравнений Гамильтона – Якоби»,
посвящённый
75-летию академика А. И. Субботина
Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г.**

Организаторы семинара:

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН),
Региональный научно-образовательный математический центр «Уральский математический центр»,
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Научные направления:

Обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби
Управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности
Задачи оценивания и идентификации в динамических системах
Обратные задачи и управляемые распределенные системы
Численные алгоритмы решения задач оптимального управления и краевых задач для уравнений Гамильтона – Якоби

Программный комитет

Сопредседатели:

В.И. Бердышев (Россия)
В.Е. Третьяков (Россия)
Н.Ю. Лукоянов (Россия)

Члены программного комитета:

А. Азамов (Узбекистан)	Ю.С. Ледяев (США)
А.В. Арутюнов (Россия)	М.С. Никольский (Россия)
М. Барди (Италия)	Ю.С. Осипов (Россия)
Т. Башар (США)	Л.А. Петросян (Россия)
Х. Гусейнов (Турция)	Е.С. Половинкин (Россия)
А.А. Давыдов (Россия)	Н.Н. Субботина (Россия)
В. Джафаров (Турция)	А.А. Толстоногов (Россия)
В.И. Жуковский (Россия)	В.Н. Ушаков (Россия)
М.И. Зеликин (Россия)	А.Г. Ченцов (Россия)
Ф.М. Кириллова (Беларусь)	Ф.Л. Черноусько (Россия)
Ф. Кларк (Франция)	А.А. Чикрий (Украина)
В.В. Козлов (Россия)	М. Фальконе (Италия)
А.Б. Куржанский (Россия)	А.А. Шананин (Россия)

Организационный комитет

Сопредседатели:

Н.Н. Субботина (ИММ УрО РАН)
В.Н. Ушаков (ИММ УрО РАН)
А.М. Тарасьев (ИММ УрО РАН)

Члены организационного комитета:

М.И. Гомоюнов (ИММ УрО РАН), М.И. Гусев (ИММ УрО РАН),
А.Г. Иванов (ИММ УрО РАН), А.О. Иванов (УрФУ),
И.Н. Кандоба (ИММ УрО РАН),
А.Ф. Клейменов (ИММ УрО РАН),
А.И. Короткий (ИММ УрО РАН), В.В. Кружаев (УрФУ),
Е.А. Крупенников (ИММ УрО РАН),
С.С. Кумков (ИММ УрО РАН), В.И. Максимов (ИММ УрО РАН),
О.Г. Матвийчук (ИММ УрО РАН), В.С. Пацко (ИММ УрО РАН),
В.Г. Пименов (УрФУ), Д.А. Серков (ИММ УрО РАН),
А.Н. Сесекин (УрФУ), О.Н. Старикова (ИММ УрО РАН),
А.А. Усова (ИММ УрО РАН), А.А. Успенский (ИММ УрО РАН),
Л.Г. Шагалова (ИММ УрО РАН), Г.С. Шелементьев (УрФУ).

E-mail: cgs20@imm.uran.ru

Сайт семинара: <https://cgs20.imm.uran.ru/>

Содержание

А. И. Субботин	27
<i>Averboukh Yu.</i> Value function of the mean field type differential game	35
<i>Bardi M., Cardaliaguet P.</i> Convergence of some control problems and Mean Field Games to aggregation and swarming models	38
<i>Barron E. N.</i> Applications of quasiconvex functions to HJ equations and optimal control	41
<i>Basar T.</i> Mean field differential games with elements of robustness	41
<i>Davydov A.</i> Optimization of steady states of exploited populations	41
<i>Dzhafarov V.</i> Stability region for discrete time systems and its boundary	42
<i>Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh.G.</i> On the control system described by Urysohn type integral equation	42
<i>Khlopin D. V.</i> Necessary conditions in infinite-horizon control problem regardless asymptotic assumptions	45
<i>Kim A. V., Andryushechkina N. A.</i> On application of i -smooth analysis to nonlinear differential games with delays	50
<i>Kolpakova E. A.</i> Feedback strategies for controlled continuity equation	52
<i>Krasovskii A. N.</i> Construction of mutual tracking of motions of a real nonlinear dynamical system and its virtual model-leader	55
<i>Ledyayev Y. S.</i> Harmonic analysis, differential games and matrix Riccati equations	56

<i>Lokutsievskiy L.</i>	
On optimal semiflow in a class of nilpotent-convex problems	57
<i>Maksimov V. I.</i>	
The methods of reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations	58
<i>Ovseevich A.</i>	
A number theoretic piece of control theory	61
<i>Petrosian O. L., Kuchkarov I. I.</i>	
Inverse optimal control with continuous updating for steering behavior model	66
<i>Petrosian O., Tur A., Zhou J.</i>	
Pontryagin Maximum Principle for cooperative differential games with continuous updating	70
<i>Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Ya.</i>	
A class of cooperative differential games on networks	72
<i>Pimenov V. G., Tashirova E. E.</i>	
Explicit numerical method for fractional diffusion-wave equation with functional delay	78
<i>Rettieva A. N.</i>	
Rational behavior in dynamic multicriteria games	82
<i>Shananin A., Tarasenko M., Trusov N.</i>	
Mathematical modeling of the consequences of the COVID-19 pandemic for the Russian economy	85
<i>Subbotina N. N.</i>	
A variational approach to solutions of control reconstruction problems	86
<i>Troeva M. S.</i>	
Abstract fractional McKean–Vlasov and HJB equations	90
<i>Turetsky V., Weiss M., Shima T.</i>	
Combined linear quadratic/bounded control differential game with delayed pursuit decision	91
<i>Азамов А. А., Бегалиев А. О.</i>	
К общей теории систем Пфаффа	95

<i>Ананьев Б. И.</i>	
О задачах оценивания для нелинейных динамических систем	96
<i>Арутюнов А. В.</i>	
Глобальная теорема о неявной функции	99
<i>Асеев С. М.</i>	
О принципе максимума Понтрягина для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени	99
<i>Багно А. Л., Тарасьев А. М.</i>	
Сведение задач оптимального управления с бесконечным горизонтом на компактные сильно инвариантные множества	99
<i>Башкирцева И. А.</i>	
Синтез стохастических аттракторов при неполной информации	104
<i>Бедин Д. А.</i>	
Смещённые оценки в задаче траекторной фильтрации, определение нижней границы возможной точности	107
<i>Бедин Д. А., Иванов А. Г.</i>	
Оптимизация матрицы переходных вероятностей для метода ИММ траекторного слежения	111
<i>Бенараб С.</i>	
Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи	115
<i>Братусь А. С., Дрожжин С. В., Якушкина Т. С.</i>	
Экстремальные принципы эволюционной адаптации в математических моделях репликаторных систем	117
<i>Бурлаков Е. О., Жуковский Е. С., Серова И. Д.</i>	
Условие типа Каристи в задаче о минимуме отображений при ограничениях	119
<i>Васёв П. А., Федотов А. А.</i>	
Визуализация движений траекторий, идущих по границе трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса	122

<i>Гомоюнов М. И.</i>	
Минимаксные решения уравнений Гамильтона – Якоби с коинвариантными производными дробного порядка	126
<i>Гребенчиков Б. Г., Ложников А. Б.</i>	
Неустойчивость и стабилизация системы с линейным запаздыванием	129
<i>Григоренко Н. Л., Григорьева Э. В., Хайлов Е. Н., Клименкова А. Д.</i>	
Оптимальные стратегии в модели CAR-T иммунотерапии лечения лейкемии	133
<i>Гриних А. Л., Петросян Л. А.</i>	
Эффективное наказание в многошаговой «дилемме заключённого n -лиц» на сети	137
<i>Гусев М. И., Осипов И. О.</i>	
Об асимптотике множеств достижимости на малых временных промежутках	142
<i>Дмитрук А. В., Самыловский И. А.</i>	
Оптимальный синтез в простейшей задаче быстрого действия с линейным фазовым ограничением	146
<i>Долгий Ю. Ф., Сесекин А. Н.</i>	
Регуляризация вырожденной задачи оптимальной стабилизации импульсных систем с запаздыванием	149
<i>Дыкта В. А.</i>	
Квадратичные опорные суперрешения уравнения Гамильтона – Якоби и позиционный принцип минимума второго порядка	153
<i>Ершов А. А., Ушаков А. В., Ушаков В. Н.</i>	
О двух игровых задачах сближения	156
<i>Желонкина Н. И., Сесекин А. Н.</i>	
О порядке сингулярности решения задачи оптимальной стабилизации для систем с запаздыванием	158

<i>Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Жуковская Л. В.</i>	
К устойчивости паретовского равновесия угроз и контругроз в одной коалиционной дифференциальной позиционной игре трех лиц с нетрансферабельными выигрышами	161
<i>Зайцев В. А., Ким И. Г.</i>	
О назначении спектра в линейных системах с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу	164
<i>Зыков И. В.</i>	
О способах построения внешних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями	167
<i>Изместьев И. В., Ушаков В. Н.</i>	
Параллельная реализация одного алгоритма решения задачи быстрогодействия для нелинейной управляемой системы	171
<i>Калев В. И., Шориков А. Ф.</i>	
Программный комплекс для компьютерного моделирования решения задач оптимизации управления жидкостной двигательной установкой ракеты-носителя	174
<i>Камнева Л. В.</i>	
Численное построение множеств разрешимости “к моменту” в линейных дифференциальных играх на плоскости	179
<i>Кандоба И. Н., Новиков Д. А., Плаксин А. Р., Козьмин И. В.</i>	
О задаче оптимального управления возвращаемым блоком ракеты-носителя	183
<i>Клейменов А. Ф.</i>	
Построение решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления с тремя участниками	187

<i>Колокольцов В. Н.</i>	
Квантовые динамические игры и уравнения Гамильтона – Якоби на Римановых многообразиях	188
<i>Корнеев В. А.</i>	
Гарантирующее управление упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта на подвижном основании от удара	189
<i>Костоусова Е. К.</i>	
О полиэдральном методе синтеза управлений в задаче целевого уклонения для линейных многошаговых систем	193
<i>Красовский Н. А., Тарасьев А. М.</i>	
Минимаксные решения уравнений Гамильтона – Якоби для динамических биматричных игр размерности 2×3	198
<i>Крупенников Е. А.</i>	
О численном методе решения задач динамической реконструкции	200
<i>Кувшинов О. А., Ершов А. А.</i>	
О пересечении α -множеств	204
<i>Кузнецов Н. В., Андриевский Б. Р., Кудряшова Е. В., Кузнецова О. А., Попов А. М.</i>	
Скрытые колебания управляемой аэродинамическим сопротивлением формации двух спутников	207
<i>Кумакшев С. А.</i>	
Активное гашение колебаний при помощи обратной связи	211
<i>Кумков С. И., Пятко С. Г., Овчинников М. М.</i>	
Управление бесконфликтным движением беспилотных летательных аппаратов в районе аэродрома	215
<i>Куржанский А. Б., Усова А. А.</i>	
О двойственности математических моделей проблем механики и теории электрических цепей	219
<i>Ламоткин А. Е., Мисюра Н. Е., Митюшов Е. А.</i>	
Об одном способе построения программной траектории сферического движения твердого тела	220

<i>Лемперт А. А., Казаков А. Л., Та Ч. Т.</i>	
Об упаковке пропорциональных шаров в компактное множество	224
<i>Лукьянова Л. Н.</i>	
Оптимальное и субоптимальное управление в модели односекторной экономики с запаздывающим аргументом	227
<i>Максимов В. П.</i>	
О задачах управления для непрерывно-дискретных систем с последствием	232
<i>Мерчела В.</i>	
О существовании точек совпадения двух отображений, определенных на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве	235
<i>Никитина С. А., Ухоботов В. И.</i>	
Дискретная задача управления с помехой и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств	238
<i>Никольский М. С.</i>	
Линейные управляемые объекты с фазовыми ограничениями. Приближенное вычисление множеств достижимости	240
<i>Новоселова Н. Г.</i>	
О численном построении множеств выживаемости в задачах химиотерапии злокачественных опухолей . .	243
<i>Пацко В. С., Федотов А. А.</i>	
Аналитическое исследование трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса в случае двусторонних поворотов	246
<i>Петров Н. Н., Мачтакова А. И.</i>	
Преследование группы убегающих в задаче с дробными производными и фазовыми ограничениями	249
<i>Плаксин А. Р.</i>	
Субградиенты функционала цены в дифференциальных играх для систем с запаздыванием	253

<i>Попова С. Н., Федорова М. В.</i>	
О критерии пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова систем с дискретным временем	255
<i>Решмин С. А.</i>	
Проблемы оптимального управления системами многих тел	259
<i>Родин А. С.</i>	
О точках бифуркации решения уравнения Гамильтона – Якоби в модели молекулярной генетики	263
<i>Розенберг В. Л.</i>	
Динамическая реконструкция внешних воздействий при дефиците информации в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении	268
<i>Ряшко Л. Б., Башкирцева И. А.</i>	
Управление стохастическими системами с цветными шумами	272
<i>Серков Д. А.</i>	
К методу программных итераций	275
<i>Соколов В. Ф.</i>	
Адаптивная субоптимальная стабилизация дискретного минимально фазового объекта с неопределенностями по выходу и управлению	278
<i>Спиридонов А. А., Кумков С. С.</i>	
Слияние потоков воздушных судов с учётом их типизации	282
<i>Сумин В. И.</i>	
Метод обращения главной части начально-краевых задач в теории оптимального управления распределенными системами	286
<i>Сумин М. И.</i>	
Регуляризация классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимизации управляемых распределенных систем	290

<i>Сурков П. Г.</i>	
О приближенном вычислении дробной производной типа Капуто по неточным данным, поступающим непрерывно	294
<i>Тимофеева Г. А., Завалищин Д. С.</i>	
Управление спросом на транспортные услуги как игровая задача со случайным вторым игроком	298
<i>Толстоногов А. А.</i>	
Максимальная монотонность оператора Немыцкого и неявные эволюционные включения	300
<i>Точилин П. А., Чистяков И. А.</i>	
Алгоритм построения кусочно-квадратичных оценок функции цены в задаче разрешимости для нелинейной системы	302
<i>Усова А. А., Тарасьев А. М.</i>	
Асимптотическая устойчивость по первому приближению гамильтоновых систем	305
<i>Успенский А. А., Лебедев П. Д.</i>	
Численно-аналитические методы построения сингулярных множеств решений в классе плоских задач управления по быстрдействию	309
<i>Ухоботов В. И., Ушаков В. Н., Изместьев И. В.</i>	
Об одной импульсной задаче управления с помехой и возможной поломкой в динамике	313
<i>Ушаков В. Н., Ершов А. А.</i>	
Оптимальный выбор пробных управлений для восстановления неопределённых параметров в управляемой системе	315
<i>Филиппова Т. Ф.</i>	
Задачи импульсного управления при неопределённости	319
<i>Хайиткулов Б. Х.</i>	
Консервативные схемы решения нестационарных задач управления теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольнике	322

<i>Ченцов А. Г.</i>	
Дифференциальная игра сближения-уклонения: проблема релаксации и программные конструкции	328
<i>Чистяков С. В.</i>	
Заметки о дифференциальных играх	331
<i>Шагалова Л. Г.</i>	
О построении обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби с трехкомпонентным гамильтонианом	335
<i>Шориков А. Ф., Горанов А. Ю.</i>	
Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением космических аппаратов	337
<i>Жуковский В. И.</i>	
Равновесие по Бержу	341
<i>Falcone M.</i>	
A tree structure algorithm for optimal control problems with state constraints	342
Список авторов	343

Contents

A. I. Subbotin	27
<i>Averboukh Yu.</i>	
Value function of the mean field type differential game	35
<i>Bardi M., Cardaliaguet P.</i>	
Convergence of some control problems and Mean Field Games to aggregation and swarming models	38
<i>Barron E. N.</i>	
Applications of quasiconvex functions to HJ equations and optimal control	41
<i>Basar T.</i>	
Mean field differential games with elements of robustness	41
<i>Davydov A.</i>	
Optimization of steady states of exploited populations .	41
<i>Dzhafarov V.</i>	
Stability region for discrete time systems and its boundary	42
<i>Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh.G.</i>	
On the control system described by Urysohn type integral equation	42
<i>Khlopin D. V.</i>	
Necessary conditions in infinite-horizon control problem regardless asymptotic assumptions	45
<i>Kim A. V., Andryushechkina N. A.</i>	
On application of i -smooth analysis to nonlinear differential games with delays	50
<i>Kolpakova E. A.</i>	
Feedback strategies for controlled continuity equation .	52
<i>Krasovskii A. N.</i>	
Construction of mutual tracking of motions of a real nonlinear dynamical system and its virtual model-leader	55
<i>Ledyayev Y. S.</i>	
Harmonic analysis, differential games and matrix Riccati equations	56

<i>Lokutsievskiy L.</i>	
On optimal semiflow in a class of nilpotent-convex problems	57
<i>Maksimov V. I.</i>	
The methods of reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations	58
<i>Ovseevich A.</i>	
A number theoretic piece of control theory	61
<i>Petrosian O. L., Kuchkarov I. I.</i>	
Inverse optimal control with continuous updating for steering behavior model	66
<i>Petrosian O., Tur A., Zhou J.</i>	
Pontryagin Maximum Principle for cooperative differential games with continuous updating	70
<i>Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Ya.</i>	
A class of cooperative differential games on networks	72
<i>Pimenov V. G., Tashirova E. E.</i>	
Explicit numerical method for fractional diffusion-wave equation with functional delay	78
<i>Rettieva A. N.</i>	
Rational behavior in dynamic multicriteria games	82
<i>Shananin A., Tarasenko M., Trusov N.</i>	
Mathematical modeling of the consequences of the COVID-19 pandemic for the Russian economy	85
<i>Subbotina N. N.</i>	
A variational approach to solutions of control reconstruction problems	86
<i>Troeva M. S.</i>	
Abstract fractional McKean–Vlasov and HJB equations	90
<i>Turetsky V., Weiss M., Shima T.</i>	
Combined linear quadratic/bounded control differential game with delayed pursuit decision	91
<i>Azamov A. A., Begaliev A. O.</i>	
On general theory of Pfaff systems	95

<i>Ananyev B. I.</i>	
On estimation problems for nonlinear dynamical systems	96
<i>Arutyunov A.</i>	
Implicit function theorem	99
<i>Aseev S. M.</i>	
On the Pontryagin Maximum Principle for infinite horizon optimal control problems	99
<i>Bagno A. L., Tarasyev A. M.</i>	
Reduction of optimal control problems with infinite horizon to compact strongly invariant sets	99
<i>Bashkirtseva I. A.</i>	
Synthesis of stochastic attractors under incomplete information	104
<i>Bedin D. A.</i>	
Biased estimates in the trajectory tracking problem: the determination of the lower bound of their accuracy	107
<i>Bedin D. A., Ivanov A. G.</i>	
Optimization of transition probabilities matrix for the IMM trajectory tracking method	111
<i>Benarab S.</i>	
Differential inequality for a periodic boundary value problem	115
<i>Bratus A., Drozhzhin S., Yakushkina T.</i>	
On the extreme principles for modeling the evolutionary adaptation process for permanent replicating systems	117
<i>Burlakov E. O., Zhukovskiy E. S., Serova I. D.</i>	
The Caristi-like condition for the problem of finding a conditional minimum of a mapping in the partially ordered set	119
<i>Vasev P. A., Fedotov A. A.</i>	
Visualization of motions going along the boundary of the three-dimensional reachable set for the Dubins car	122
<i>Gomoyunov M. I.</i>	
Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional-order coinvariant derivatives	126

<i>Grebenshchikov B. G., Lozhnikov A. B.</i>	
Unstability and stabilization of system with linear delay	129
<i>Grigorenko N. L., Grigorieva E. V., Khailov E. N., Klimenkova A. D.</i>	
Optimal strategies in the CAR-T model of immunotherapy of leukemia treatment	133
<i>Grinikh A. L., Petrosyan L. A.</i>	
Effective punishment in multi-stage n -person prisoner's dilemma network game	137
<i>Gusev M. I., Osipov I. O.</i>	
On the asymptotics of small-time reachable sets	142
<i>Dmitruk A. V., Samylovskiy I. A.</i>	
Optimal synthesis in the simplest time-optimal problem with linear state constrain	146
<i>Dolgiy Yu. F., Sesekin A. N.</i>	
Regularization of the degenerate problem of optimal stabilization of impulsive systems with delay	149
<i>Dykhta V. A.</i>	
Quadratic support super solutions of the Hamilton– Jacobi equation and the second order feedback minimum principle	153
<i>Ershov A. A., Ushakov A. V., Ushakov V. N.</i>	
On two game approach problems	156
<i>Zhelonkina N. I., Sesekin A. N.</i>	
On the order of singularity of the solution of the optimal stabilization problem for systems with delay	158
<i>Zhukovskiy V. I., Kudryavtsev K. N., Zhukovskaya L. V.</i>	
To the stability of Pareto equilibrium of objections and counterobjections in a coalition differential positional game for three persons without side payments	161
<i>Zaitsev V. A., Kim I. G.</i>	
Spectrum assignment in linear systems with commensurate lumped and distributed delays by static output feedback	164

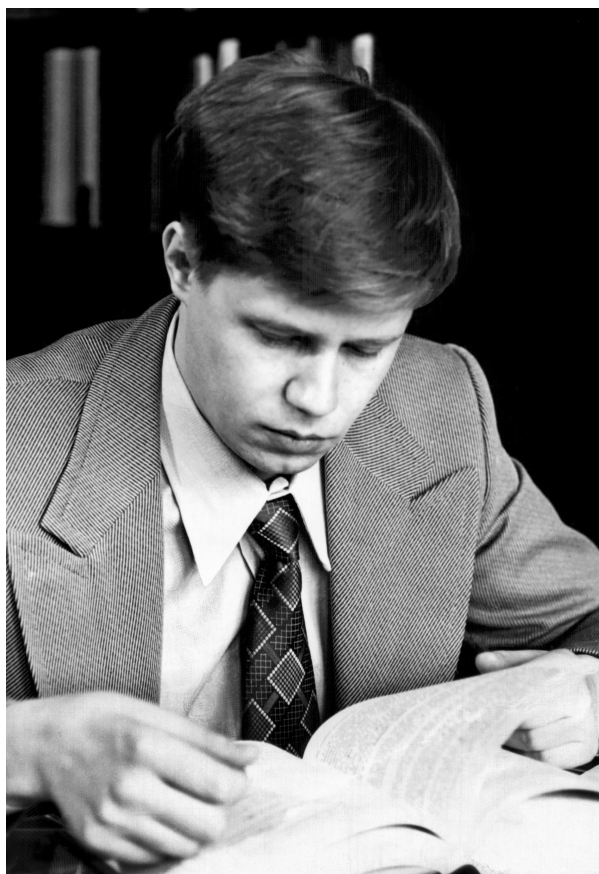
<i>Zykov I. V.</i>	
On methods of constructing external estimates for reachable sets of control systems with integral constraints	167
<i>Izmest'ev I. V., Ushakov V. N.</i>	
Parallel implementation of one algorithm for solving the time-optimal problem for a nonlinear control system . .	171
<i>Kalev V. I., Shorikov A. F.</i>	
Software package for computer simulation of solving optimization problems for the control of a launch vehicle's liquid propulsion system	174
<i>Kamneva L. V.</i>	
Computation of backward reachable set "up to an instant" for linear differential games in the plane . .	179
<i>Kandoba I. N., Novikov D. A., Plaksin A. R., Kozmin I. V.</i>	
On an optimal control problem by returnable module of the launch carrier	183
<i>Kleimenov A. F.</i>	
Decision making in a hybrid two-step problem of dynamic control with three participants	187
<i>Kolokoltsov V. N.</i>	
Quantum dynamic games and the Hamilton–Jacobi– Bellman equations on Riemannian manifolds	188
<i>Korneev V. A.</i>	
Guaranteeing control of anticipation and delay in the problem of protection of an object on a movable base from an impact	189
<i>Koustousova E. K.</i>	
On the polyhedral method of control synthesis in a target evasion problem for linear discrete-time systems	193
<i>Krasovskii N. A., Tarasyev A. M.</i>	
Minimax solutions of the Hamilton–Jacobi equations for 2×3 dynamic bimatrix games	198
<i>Krupennikov E. A.</i>	
On a numerical method for solving dynamic reconstruction problems	200

<i>Kuvshinov O. A., Ershov A. A.</i>	
On intersection of α -sets	204
<i>Kuznetsov N. V., Andrievsky B. R., Kudryashova E. V., Popov A. M.</i>	
Hidden oscillations of drag-controlled two satellites formation	207
<i>Kumakshev S. A.</i>	
Active vibration damping by feedback	211
<i>Kumkov S. I., Pyatko S. G., Ovchinnikov M. M.</i>	
Control by nonconflict motion of unmanned aerial vehicles in the airport zone	215
<i>Kurzhaniskii A. B., Usova A. A.</i>	
On the duality of the mathematical models of mechanics and the electrical circuit theory	219
<i>Lamotkin A. E., Misyura N. E., Mityushov E. A.</i>	
On one method for constructing a programmed spherical motion trajectory of a rigid body	220
<i>Lempert A. A., Kazakov A. L., Ta T. T.</i>	
On packing proportional balls into a compact set	224
<i>Lukianova L. N.</i>	
Optimal and suboptimal control in a one-sector model economic growth	227
<i>Maksimov V. P.</i>	
On some control problems for continuous-discrete systems with aftereffect	232
<i>Merchela W.</i>	
On the existence of coincidence points of two mappings defined on (q_1, q_2) -quasimetric space	235
<i>Nikitina S. A., Ukhobotov V. I.</i>	
Discrete control problem with interference and vectograms linearly dependent on the given sets	238
<i>Nikolskii M. S.</i>	
Linear controlled objects with phase restrictions. Approximate calculation of attainable sets	240

<i>Novoselova N. G.</i>	
On a numerical construction of viability sets in the problems of chemotherapy of malignant tumors	243
<i>Patsko V. S., Fedotov A. A.</i>	
Analytical investigation of the three-dimensional reachable set for the Dubins car in the case of two-side turns	246
<i>Petrov N. N., Machtakova A. I.</i>	
Pursuit of a group of evaders in a problem with fractional derivatives and phase constraints	249
<i>Plaksin A. R.</i>	
Subgradients of a value functional in differential games for time-delay systems	253
<i>Popova S. N., Fedorova M. V.</i>	
On a criterion for the proportional local assignability of Lyapunov exponents of discrete-time systems	255
<i>Reshmin S. A.</i>	
Problems of optimal control design for multibody systems	259
<i>Rodin A. S.</i>	
On bifurcation points of the solution of the Hamilton– Jacobi equation in the model of molecular genetics	263
<i>Rozenberg V. L.</i>	
Dynamic reconstruction of external actions in a quasi- linear stochastic differential equation under the lack of information	268
<i>Ryashko L. B., Bashkirtseva I. A.</i>	
Controlling stochastic systems with colored noise	272
<i>Serkov D. A.</i>	
On the programmed iterations method	275
<i>Sokolov V. F.</i>	
Adaptive stabilization of discrete-time minimum phase plant under output and control uncertainties	278
<i>Spiridonov A. A., Kumkov S. S.</i>	
Merging flows of aircraft taking into account their types	282

<i>Sumin V. I.</i>	
Method of inversion of the main part of initial-boundary value problems in the theory of optimal control of distributed systems	286
<i>Sumin M. I.</i>	
Regularization of the classical optimality conditions in the convex optimization problems for controlled distributed systems	290
<i>Surkov P. G.</i>	
On approximate calculation of the Caputo-type fractional derivative from inaccurate continuous data	294
<i>Timofeeva G. A., Zavalishchin D. S.</i>	
Transport service demand control as a game problem with a random second player	298
<i>Tolstonogov A. A.</i>	
Maximal monotonicity of a Nemytskii operator and implicit evolution inclusions	300
<i>Tochilin P. A., Chistiakov I. A.</i>	
An algorithm for constructing piecewise quadratic estimates of the value function in the solvability problem for a nonlinear system	302
<i>Usova A. A., Tarasyev A. M.</i>	
Asymptotic stability at the first approximation of Hamiltonian systems	305
<i>Uspenskii A. A., Lebedev P. D.</i>	
Numerical and analytical methods for singular sets constructing in one class of planar velocity control problems	309
<i>Ukhobotov V. I., Ushakov V. N., Izmet'ev I. V.</i>	
On an impulse control problem with disturbance and possible breakdown in dynamics	313
<i>Ushakov V. N., Ershov A. A.</i>	
Optimal choice of test controls for determining unknown parameters in a control system	315
<i>Filippova T. F.</i>	
Impulse control problems under uncertainty	319

<i>Khayitkulov B. Kh.</i>	
Conservative schemes for solving non-stationary problems of heat conduction control with variable coefficients in a rectangle	322
<i>Chentsov A. G.</i>	
Differential game of guidance-evasion: relaxation problem and programmed constructions	328
<i>Chistyakov S. V.</i>	
Notes about differential games	331
<i>Shagalova L. G.</i>	
On the construction of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation with a three-component Hamiltonian	335
<i>Shorikov A. F., Goranov A. Y.</i>	
Algorithm for solving open-loop terminal control problem of spacecraft’s rendezvous	337
<i>Zhukovskiy V. I.</i>	
Berge equilibrium	341
<i>Falcone M.</i>	
A tree structure algorithm for optimal control problems with state constraints	342
List of authors	346



Андрей Измайлович Субботин (1945 – 1997)

А.И. Субботин

Андрей Измайлович Субботин родился 16 февраля 1945 г. в городе Кирове в семье военнослужащего. В 1962 г. он поступил на математико-механический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького, где и началась его научная деятельность. В то время на факультете работали такие крупные учёные старшего поколения как профессора В. К. Иванов, П. Г. Конторович, Н. Н. Красовский, С. Н. Шиманов. Атмосфера на факультете благоприятствовала развитию научного творчества. Проводились семинары, развивались новые научные направления, создавались новые кафедры в соответствии с потребностями времени. Одна из таких кафедр — кафедра прикладной математики была создана Н. Н. Красовским в 1965 г. Первыми сотрудниками кафедры стали молодые учёные Э. Г. Альбрехт, А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов, В. Е. Третьяков, Г. С. Шелементьев.

Н. Н. Красовский определил научные приоритеты кафедры: они лежали в области теории устойчивости движения, качественной теории дифференциальных уравнений, теории стабилизации и теории оптимального управления.

Работы коллектива кафедры были хорошо известны в научных кругах.

В 50-е и 60-е годы двадцатого столетия идёт бурное формирование основ математической теории оптимального управления: создаются такие мощные методы, как принцип максимума Л. С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана, оказавшие существенное влияние на выбор приоритетных направлений кафедры прикладной математики. На кафедре развивались также собственные подходы к исследованию и решению задач оптимального управления. Так, Н. Н. Красовским был предложен оригинальный подход к решению задач оптимального управления, основанный на идеях и методах функционального анализа. Отметим важную роль монографии Н. Н. Красовского «Теория управления движением» (1968) в подготовке специалистов по теории управления.

Исследования в этом направлении были продолжены А. Б. Куржанским, Ю. С. Осиповым и их сотрудниками.

Возникновение постановок новых задач в ходе этих исследований способствовало привлечению к их решению одарённых студентов, к тому же увлечённых наукой. А. И. Субботин был одним из таких студентов. А. И. Субботин выделялся своими способностями практически сразу, с первых дней учёбы на математико-механическом факультете. Он был привлечён Э. Г. Альбрехтом — преподавателем кафедры прикладной математики — к научной работе. По результатам курсовой работы под руководством Э. Г. Альбрехта А. И. Субботиным была опубликована первая научная статья «Об управлении движением квазилинейной системы» (1968). Ему было предложено включиться в научно-исследовательскую работу кафедры прикладной математики.

В это время в сфере основных интересов кафедры находились задачи управления в условиях неопределённости, формализуемые как дифференциальные игры. В этой новой области А. И. Субботин проявил способность быстро вникать в суть проблем и находить оригинальные пути к их решению.

Существуют несколько подходов к формализации дифференциальных игр и путям их решений. Н. Н. Красовским и его сотрудниками развивался подход, основу которого составила формализация дифференциальных игр, во главу которой ставилось понятие позиционного управления.

В середине 60-х годов Н. Н. Красовский сформулировал правило экстремального прицеливания. Концепция позиционной дифференциальной игры и правило экстремального прицеливания были изложены в ряде работ Н. Н. Красовского и его монографии «Игровые задачи о встрече движений» (1970). Значительное внимание при этом уделялось выяснению так называемых условий регулярности, при которых возможно сведение задач позиционного управления к использованию чисто программных конструкций.

С августа 1967 г. после окончания университета А. И. Субботин работает в Свердловском отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1971 г. — Институт математики и механики). Институт становится основным местом его работы.

Первые исследования Андрея Измайловича в теории позиционных дифференциальных игр были посвящены изучению дифференциальных игр при наличии условия регулярности. Часть работ

А. И. Субботина в этом направлении была выполнена совместно с Н. Н. Красовским.

В ряде работ конца 60-х – начала 70-х годов А. И. Субботиним совместно с Н. Н. Красовским были изучены нелинейные дифференциальные игры в предположении стабильности множеств программного поглощения. В этих работах правило экстремального прицеливания формировалось как правило прицеливания на стабильную систему множеств программного поглощения.

В 1969 г. Н. Н. Красовский предложил А. И. Субботину представить результаты совместных исследований в позиционных дифференциальных играх на семинаре академика Л. С. Понтрягина. По словам участников семинара, доклад произвёл сильное впечатление на Льва Семёновича Понтрягина.

В том же году А. И. Субботин защищает кандидатскую диссертацию «Задачи о встрече и уклонении в дифференциальных играх», в которой подведены итоги первого этапа его исследований в области теории позиционных дифференциальных игр.

В 70-е годы А. И. Субботин продолжает исследования в области дифференциальных игр. Н. Н. Красовский привлекает его для разработки теоретических конструкций в позиционных дифференциальных играх при достаточно общих предположениях, не требующих уже условия регулярности. Разрабатывается принципиально новый подход к формализации дифференциальных игр, даётся определение движений, порождённых управлениями, действующими по принципу обратной связи, введены позиционные стратегии и предложены аппроксимационные схемы, удобные для физической реализации и допускающие переход к математическим конструкциям, содержащим элементы идеализации.

В рамках данного подхода Н. Н. Красовским и А. И. Субботиним был рассмотрен широкий круг нелинейных дифференциальных игр при общих предположениях на управляемую систему.

Так зарождалось новое направление в теории позиционных дифференциальных игр, ориентированное на решение задач в общей постановке. Центральным пунктом здесь является предложенный Н. Н. Красовским принцип конструирования стратегий, обеспечивающих в каждой позиции экстремальный сдвиг управляемой системы на стабильный мост. В рамках конструкций, основанных на принципе экстремального сдвига на стабильный мост, Н. Н. Красовским и А. И. Субботиним получен ряд важных результатов. При-

менение этих конструкций позволило им доказать ключевое для теории игр утверждение — теорему об альтернативе и, тем самым, установить существование равновесных решений в соответствующих классах позиционных стратегий.

К середине 70-х годов труды А. И. Субботина хорошо известны в нашей стране и за рубежом. В 1973 г. он защитил докторскую диссертацию «Экстремальные стратегии в дифференциальных играх». Диссертация содержит основные результаты, полученные А. И. Субботиным в рамках экстремального подхода. В 1973 г. А. И. Субботин становится лауреатом Золотой медали АН СССР для молодых учёных. В этот период он активно руководит работой многочисленной научной молодёжи.

В 1974 г. А. И. Субботин — приглашённый лектор на международном конгрессе математиков в Ванкувере (Канада), где был представлен доклад «Управление в условиях конфликта и неопределённости».

Наиболее существенные результаты исследований Н. Н. Красовского и А. И. Субботина составили монографию «Позиционные дифференциальные игры» (1974). В монографии дано подробное изложение концепции позиционных дифференциальных игр, предложенной Н. Н. Красовским. Предложена строгая математическая модель позиционной игры, а также изложен метод исследования этих игр, базирующийся на понятии стабильных мостов и функций. Монография представляет собой важную веху в развитии математической теории управления.

В середине 70-х годов в теории дифференциальных игр зарождается новое направление — унификация дифференциальных игр. А. И. Субботин активно поддерживал исследования по унификации, хорошо понимая их важность. Во многом благодаря его активной поддержке, работы по унификации продолжаются в Институте математики и механики.

Большое значение А. И. Субботин придавал вопросам, связанным с описанием центральной для теории дифференциальных игр функции — цены дифференциальной игры. В случае, когда цена дифференцируема, она является решением основного в теории дифференциальных игр уравнения Айзекса – Беллмана. В случае, когда цена не является дифференцируемой функцией, стоял вопрос о нахождении определяющих соотношений для этой функции, имеющих инфинитезимальный характер. Этот вопрос был изучен

А. И. Субботиным и Н. Н. Субботиной сначала для игровых задач динамики, в которых цена игры есть кусочно-гладкая функция, а затем и для более общих задач.

В работе А. И. Субботина «Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр» (1980) были получены необходимые и достаточные условия, описывающие свойства стабильности функции цены при помощи пары дифференциальных неравенств. С этой работы началось построение теории минимаксных решений уравнений в частных производных.

Итоги исследования А. И. Субботина свойств функции цены дифференциальных игр подведены в статье «Условия оптимальности гарантированного результата в игровых задачах управления», помещённой в сборнике трудов МИАН, приуроченном к 75-летию академика Л. С. Понтрягина (1985).

Отметим также исследования необходимых и достаточных условий для цены стохастической дифференциальной игры с частично вырожденным шумом.

Результаты исследований А. И. Субботина, посвящённых структуре позиционных дифференциальных игр и обобщению основного уравнения теории дифференциальных игр, отражены в трёх первых главах монографии А. И. Субботина и А. Г. Ченцова «Оптимизация гарантии в задачах управления» (1981).

Анализ работ А. И. Субботина, связанных с обобщением основного уравнения теории дифференциальных игр, показывает, что он своевременно оценил полезность использования конструкций негладкого и выпуклого анализа и внёс свой вклад в разработку такого рода конструкций. Позже подобные конструкции были применены А. И. Субботиным при исследовании уравнений в частных производных первого порядка.

В середине 80-х годов научные интересы А. И. Субботина смещаются в сторону теории обобщённых решений уравнений Гамильтона – Якоби общего вида. На основе инфинитезимальных и унификационных конструкций А. И. Субботин ввел понятие обобщённого решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса, которое позволило ему рассмотреть функцию цены как такое решение и доказать существование и единственность функции цены при общих предположениях на управляемую систему. Отметим, что приоритетным в определении обобщённых решений уравнений Гамильтона – Якоби явилось привлечение понятия инвариантности.

Эти обобщённые решения Андрей Измайлович назвал минимаксными, так как в их определении присутствовали операции минимума и максимума.

В первой половине 80-х годов М. Дж. Крэндаллом, П.-Л. Лионсом, Л. С. Эвансом был предложен иной подход к определению решений краевых задач для уравнений Гамильтона – Якоби общего вида. Ими было введено понятие вязкостного решения уравнения Гамильтона – Якоби.

Определения минимаксного и вязкостного решений отличаются по форме друг от друга, и их эквивалентность была неочевидна. А. И. Субботину с коллегами удалось получить прямое доказательство эквивалентности минимаксных и вязкостных решений. При этом отметим, что минимаксные и вязкостные подходы удачно дополняют друг друга. Итоги исследования по теории минимаксных решений уравнения Гамильтона – Якоби были подведены А. И. Субботиным в монографии «Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби» (1991). В монографии изложен минимаксный подход в теории обобщённых решений уравнений Гамильтона – Якоби. В ней, в частности, содержится обоснование перехода от уравнения Гамильтона – Якоби к дифференциальным неравенствам. Доказаны теоремы существования, единственности и корректности минимаксных решений, изучены их свойства. Значительное внимание в монографии уделено сопоставлению минимаксных и вязкостных решений уравнения Гамильтона – Якоби и обоснованию их эквивалентности.

В первой половине 90-х годов А. И. Субботин продолжал исследования в области уравнения Гамильтона – Якоби. К этим исследованиям добавились исследования по проблеме построения минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка. Результаты этих исследований отражены в монографии А. И. Субботина “Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective” (1995). Исследования, представленные в монографии, опираются на методы негладкого анализа, функции Ляпунова, динамическую оптимизацию, теорию дифференциальных игр.

К числу последних относятся исследования А. И. Субботина уравнений с частными производными первого порядка, разрывных по фазовым переменным, в которых предложена концепция многозначного решения.

В заключение отметим, что свою научную работу А. И. Субботин успешно совмещал с выполнением должностных обязанностей. С 1983 г. он заведовал Отделом динамических систем Института математики и механики. А. И. Субботин неизменно и вполне заслуженно был центром притяжения в Отделе. Можно сказать, что он держал руку на пульсе основных и, прежде всего, научных событий, происходящих в Отделе. При этом ему были далеко небезразличны институтские дела. Он внимательно следил за научными достижениями сотрудников Отдела, многим из которых он формулировал научные темы и руководил ими. Неоценимую роль в поддержании высокого научного уровня Отдела играли регулярные научные семинары у Андрея Измайловича. Эти семинары, вообще говоря, были не узкоотдельскими семинарами с тематикой, исключительно посвящённой дифференциальным играм и оптимальному управлению. Нередко на них обсуждались задачи и проблемы, возникающие в области теории дифференциальных уравнений, методов оптимизации, негладкого анализа. При этом часто с докладами выступали как российские, так и зарубежные специалисты — признанные лидеры в своих научных областях.

А. И. Субботин поддерживал регулярные научные контакты с коллегами и студентами математико-механического факультета Уральского государственного университета, читал студентам спецкурсы по теории оптимального управления, дифференциальных игр и минимаксных решений уравнений в частных производных, осуществлял научное руководство аспирантами.

Итоги научно-исследовательской деятельности А. И. Субботина внушительны и вызывают уважение: более 100 статей и 5 монографий в области теории дифференциальных игр, уравнений Гамильтона – Якоби, оптимального управления. Его научные достижения получили широкое признание. Он лауреат Ленинской премии (1976), кавалер ордена Трудового Красного Знамени (1976), член-корреспондент Российской академии наук (1991), действительный член Российской академии наук (1997).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

- [3] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer, 1988.
- [4] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991.
- [5] *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
- [6] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Value function of the mean field type differential game

Yu. Averboukh^{1,2}

e-mail: ayv@imm.uran.ru

The mean field type differential game is the mathematical model of the system of many identical agents interacting via some external media and influenced by two players. We assume that the dynamics of each agent is given by the ordinary differential equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), m(t), u(t), v(t)),$$

where $t \in [0, T]$ denotes time, $x(t)$ is the state of the agent, $m(t)$ is the distribution of all agents, $u(t)$ (respectively, $v(t)$) is the control of the first (respectively, second) player acting upon the agent. Notice, this equation determined the dynamic of the players' distribution that formally can be written as

$$\frac{d}{dt}m(t) = \langle f(t, \cdot, m(t), u(t, \cdot), v(t, \cdot)), \nabla \rangle m(t).$$

We assume that the first (respectively, second) player tries to minimize (respectively, maximize) the terminal cost that is equal to

$$g(m(T)).$$

We assume that the state space for the representative player is $\mathbb{T}^d \triangleq \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Thus, the phase space of the whole system is $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$ endowed with the second Kantorovich (Wassertein) metric. We denote it by W_2 . The control spaces of the players are U and V . They are assumed to be metric compacts.

We use the Krasovskii–Subbotin approach to the differential game [1]. For the mean field type case, this means that the strategy of the first (respectively, second) player at (t, m) is a probability on $\mathbb{T}^d \times U$ (respectively, on $\mathbb{T}^d \times V$) with the marginal distribution on \mathbb{T}^d

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

²Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

that is equal to m . Given a strategy of the player, he/she forms the control stepwise.

We assume that the dynamics and payoff are continuous, when, additionally, the dynamic function f is Lipschitz continuous w.r.t. x and m . Furthermore, we impose the Isaacs' condition: for every $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{T}^d$, $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle w, f(t, x, m, u, v) \rangle = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle w, f(t, x, m, u, v) \rangle.$$

Under these conditions the following result holds.

Theorem 1. *The mean field type differential game has a value in the class of feedback strategies.*

The proof of the theorem is based on the version of Krasovskii-Subbotin extremal shift rule [1].

The value function can be characterized in the terms of directional derivatives. To define their analogs suitable for the mean field type differential games, let us introduce some notation. If X_1, \dots, X_n are sets, i_1, \dots, i_k are indexes, then denote by p^{i_1, \dots, i_k} the projection operator from $X_1 \times \dots \times X_n$ on $X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}$ acting by the rule

$$p^{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) \triangleq (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

Further, if (Ω', Σ') , (Ω'', Σ'') are measurable spaces, m is a probability on Σ' h is a Σ'/Σ'' -measurable mapping from Ω' to Ω'' , then $h\#m$ denote the push-forward (image) measure, i.e., the measure on Σ'' denoted for $\Upsilon \in \Sigma''$ by

$$(h\#m)(\Upsilon) \triangleq m(h^{-1}(\Upsilon)).$$

Additionally, let \mathbb{B}_c stand for the ball in \mathbb{R}^d of radius c centered at the origin.

For $\tau > 0$, let $\Theta^\tau : \mathbb{T}^d \times U \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ be defined by the rule

$$\Theta^\tau(x, u, w) \triangleq x + \tau w.$$

With some abuse of notation, we also denote by Θ^τ the operator from $\mathbb{T}^d \times V \times \mathbb{R}^d$ to \mathbb{T}^d acting by the rule

$$\Theta^\tau(x, v, w) \triangleq x + \tau w.$$

Definition 1. Let $\psi : [0, T] \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in [0, T]$, $c > 0$, $\eta \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d \times V \times \mathbb{R}^d)$, $\beta \triangleq \mathfrak{p}^{1,2}\#\eta$, $m \triangleq \mathfrak{p}^1\#\beta = \mathfrak{p}^1\#\eta$. The value

$$u\text{-d}_c\psi(s; \eta) \triangleq \liminf_{\substack{\eta' \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d \times V \times \mathbb{B}_c), \\ \tau \downarrow 0, W_2(\eta', \eta) \downarrow 0}} \frac{\psi(s + \tau, \Theta^\tau\#\eta') - \psi(s, m)}{\tau}$$

is called a u -derivative of the function ψ at s and η for the radius c .

Analogously, if $\eta \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d \times U \times \mathbb{R}^d)$, $\alpha \triangleq \mathfrak{p}^{1,2}\#\eta$, $m \triangleq \mathfrak{p}^1\#\alpha = \mathfrak{p}^1\#\eta$, and $c > 0$, the number

$$v\text{-d}_c\psi(s; \eta) \triangleq \limsup_{\substack{\eta' \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times U \times \mathbb{B}_c), \\ \tau \downarrow 0, W_2(\eta', \eta) \downarrow 0}} \frac{\psi(s + \tau, \Theta^\tau\#\eta') - \psi(s, m)}{\tau}$$

is a v -derivative of the function ψ at s and η for the radius c .

Now, let us define analogues of the vectograms. First, for $s \in [0, T]$, $x \in \mathbb{T}^d$, $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $u \in U$, and $v \in V$, put

$$F_1(s, x, m, u) \triangleq \text{co}\{f(t, x, m, u, v) : v \in V\},$$

$$F_2(s, x, m, v) \triangleq \text{co}\{f(s, x, m, u, v) : u \in U\}.$$

The graphs of F_1 and F_2 are introduced as follows. Set

$$G_1(s, m) \triangleq \{(x, u, w) : x \in \mathbb{T}^d, u \in U, w \in F_1(s, x, m, u)\},$$

$$G_2(s, m) \triangleq \{(x, v, w) : x \in \mathbb{T}^d, v \in V, w \in F_2(s, x, m, v)\}.$$

Now, let $s \in [0, T]$, $\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times U)$, and $m \triangleq \mathfrak{p}^1\#\alpha$. Put

$$\mathcal{F}_1(s, \alpha) \triangleq \{\eta : \eta \in \mathcal{P}(G_1(s, m)), \mathfrak{p}^{1,2}\#\eta = \alpha\}.$$

If $\beta \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times V)$ and $m \triangleq \mathfrak{p}^1\#\beta$, then set

$$\mathcal{F}_2(s, \beta) \triangleq \{\eta : \eta \in \mathcal{P}(G_2(s, m)), \mathfrak{p}^{1,2}\#\eta = \beta\}.$$

The set $\mathcal{F}_1(s, \alpha)$ (respectively, $\mathcal{F}_2(s, \beta)$) plays the role the vectogram for the given distribution of the constant controls of the first (respectively, second) player.

Theorem 2. *A continuous function $\psi : [0, T] \times \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ is a value function of the mean field type differential game if and only if, for any $m \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$, $g(m) = \psi(T, m)$, and one can find a constant $c > 0$ satisfying the following condition: for each $s \in [0, T]$, $\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times U)$, $\beta \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times V)$, the following inequalities hold:*

- $\inf\{\text{u-d}_c\psi(s, \eta) : \eta \in \mathcal{F}_2(s, \beta)\} \leq 0;$
- $\sup\{\text{v-d}_c\psi(s, \eta) : \eta \in \mathcal{F}_1(s, \alpha)\} \geq 0.$

This result extends the famous Subbotin's theorem on the characterization of the value function via directional derivatives [2, 3].

- [1] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. Springer, New York, 1988.
- [2] *Subbotin A.I.* A generalization of the basic equation of the theory of differential games // Soviet Math. Dokl. 1980. Vol. 22. P. 358–362.
- [3] *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical perspective. Birkhäuser, Boston, 1995.

Convergence of some control problems and Mean Field Games to aggregation and swarming models

M. Bardi¹, P. Cardaliaguet²

e-mail: `bardi@math.unipd.it`, `cardaliaguet@ceremade.dauphine.fr`

We consider first a control problem with cheap controls and large discount factor in the cost functional, modelling a greedy agent who cares only about a very short time-horizon. We show that in the limit the optimal feedback, suitably rescaled, converges to the gradient of the running cost, so that the limit dynamics follows the steepest descent of the running cost.

Next we consider the same asymptotic problem for two classes of Mean Field Games (briefly, MFG), modelling a large population of

¹University of Padova, Italy

²University Paris-Dauphine, France

identical and very similar agents where the cost functional of the generic agent depends on the probability distribution of the others, and such distribution evolves according to an optimal feedback of each agent. This gives rise to a system of two PDEs: a backward Hamilton-Jacobi equation for the value function of the generic agent and a forward Kolmogorov equation for the distribution of the agents at the (Nash) equilibrium.

The first MFG system we study, associated to a stochastic control problem with vanishing noise and control acting on the velocity of the agents, is

$$\begin{cases} -\partial_t u_\lambda - \nu_\lambda \Delta u_\lambda + \lambda u_\lambda + \frac{\lambda}{2} |Du_\lambda|^2 = F(x, m_\lambda(t)) & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, +\infty), \\ \partial_t m_\lambda - \nu_\lambda \Delta m_\lambda - \operatorname{div}(m_\lambda \lambda Du_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, +\infty), \\ m_\lambda(0) = m_0 & \text{in } \mathbb{R}^d, \quad u_\lambda \text{ bounded,} \end{cases} \quad (1)$$

where the viscosity $\nu_\lambda \rightarrow 0^+$ as the discount factor λ tends to infinity and F is continuous on $\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ with the Wasserstein distance, and uniformly Lipschitz continuous and semi-concave in the space variable. We show that, as $\lambda \rightarrow +\infty$, meaning that players become more and more myopic in time and that their control is increasingly cheap, m_λ converges along subsequences to a solution m of the Aggregation Equation

$$\begin{cases} \partial_t m - \operatorname{div}(m D_x F(x, m)) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, +\infty), \\ m(0) = m_0 & \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Moreover, the optimal feedback $-\lambda Du_\lambda$ for the generic agent in the MFG (1) converges a.e. to the vector field $-D_x F(\cdot, m)$, which is the gradient descent of the running cost corresponding to the limit distribution of agents m .

Our second result concerns deterministic MFG with control on the acceleration [1, 2], whose first order PDE system is of the form

$$\begin{cases} -\partial_t u_\lambda + \lambda u_\lambda - v \cdot D_x u_\lambda + \frac{\lambda}{2} |D_v u_\lambda|^2 = \\ \quad = F(x, v, m_\lambda(t)) & \text{in } \mathbb{R}^{2d} \times (0, T), \\ \partial_t m_\lambda + v \cdot D_x m_\lambda - \operatorname{div}_v(m_\lambda \lambda D_v u_\lambda) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{2d} \times (0, T), \\ m_\lambda(0) = m_0, \quad u_\lambda(x, v, T) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{2d}, \end{cases}$$

where the unknowns u_λ and m_λ depend on the position x and the velocity v of the generic agent, and on the time t . Here F corresponds

to the celebrated Cucker–Smale model of flocking and swarming in animal populations [3]:

$$F(x, v, m(t)) = k * m(x, v, t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} k(x - y, v - v_*) m(y, v_*, t) dy dv_*,$$

where

$$k(x, v) = \frac{|v|^2}{(\alpha + |x|^2)^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta \geq 0.$$

In this case we prove the convergence as $\lambda \rightarrow +\infty$ to the kinetic equation

$$\begin{cases} \partial_t m + v \cdot D_x m - \operatorname{div}_v (m D_v F(x, v, m)) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{2d} \times (0, T), \\ m(0) = m_0 & \text{in } \mathbb{R}^{2d}. \end{cases} \quad (2)$$

The two problems are analyzed by very different methods: the former is treated with PDE techniques, whereas the latter is studied by variational methods in the space of probability measures on trajectories, relying on a well-posedness result for weak solutions of the limit equation (2) in [4].

Our results can be found in the preprint [5].

- [1] *Achdou Y., Mannucci P., Marchi C., Tchou N.* Deterministic mean field games with control on the acceleration // NoDEA Non-linear Differential Equations Appl. 2020. Vol. 27, paper no. 33. 32 pp.
- [2] *Cannarsa P., Mendico C.* Mild and weak solutions of Mean Field Games problem for linear control systems // Minimax Theory Appl. 2020. Vol. 5. P. 221–250.
- [3] *Cucker F., Smale S.* On the mathematics of emergence // Jpn. J. Math. 2007. Vol. 2, no. 1. P. 197–227.
- [4] *Canizo J.A., Carrillo J.A., Rosado J.* A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion // Math. Models Methods Appl. Sci. 2011. Vol. 21, no. 3. P. 515–539.
- [5] *Bardi M., Cardaliaguet P.* Convergence of some Mean Field Games systems to aggregation and flocking models, preprint 2020, arXiv: 2004.04403.

Applications of quasiconvex functions to HJ equations and optimal control

*E. N. Barron*¹

e-mail: ebarron@luc.edu

Quasiconvex functions, a major generalization of convex functions, naturally arise in calculus of variations, optimal control and differential games in L -infinity. This connection with HJ equations, representation formulas, obstacle problems, and reach-avoid problems will be discussed.

Mean field differential games with elements of robustness

*T. Basar*²

e-mail: basar1@illinois.edu

The talk will be on the mean field differential games (MFGs) with the risk-sensitive objective functions and relationship with risk-neutral MFGs with additional adversarial inputs. Also, connections between the infinite- and finite-population games will be discussed.

Optimization of steady states of exploited populations

*A. Davydov*³

e-mail: davydov@mi-ras.ru

An exploited population can tend to its steady state after the choice of control characterizing the exploitation. For some of such models we prove the existence of optimal control that provides the better income from the exploitation in the long run.

¹Loyola University, Chicago, USA

²University of Illinois at Urbana-Champaign, USA

³Lomonosov Moscow State University, Russia

Stability region for discrete time systems and its boundary

*V. Dzhaferov*¹

e-mail: vcaferov@eskisehir.edu.tr

We investigate Schur stability region of n -th order polynomials in coefficient space. We obtain exact parametric description of the boundary set and show that the boundary can be obtained as a multilinear image of three $(n - 1)$ -dimensional boundary boxes.

On the control system described by Urysohn type integral equation

*N. Huseyin*², *A. Huseyin*², *Kh. G. Guseynov*¹

e-mail: nhuseyin1@cumhuriyet.edu.tr,

ahuseyin@cumhuriyet.edu.tr, kguseynov@eskisehir.edu.tr

1. The system

Integral equations arise in various problems of theory and applications. Note that the mathematical models of many systems described by the integral equations include the external efforts called the control ones, and some of control efforts have special character, for example they are exhausted by consumption such as energy, fuel, finance, food, ets. In general, these kind of control efforts are characterized by the control functions, which have the integral constraints (see, e.g. [1–4]).

The control system described by the Urysohn type integral equation

$$\begin{aligned} x(\xi) &= f(\xi, x(\xi)) + \\ &+ \lambda \int_E [K_1(\xi, s, x(s)) + K_2(\xi, s, x(s)) u(s)] ds \end{aligned} \quad (1)$$

is considered where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control vector, $(\xi, s) \in E \times E$, $E \subset \mathbb{R}^k$ is a compact set, and $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

¹Eskisehir Technical University, Turkey

²Sivas Cumhuriyet University, Turkey

Let $p > 1$ and $r > 0$ be given numbers,

$$U_{p,r} = \{u(\cdot) \in L_p(E; \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p \leq r\},$$

where $L_p(E; \mathbb{R}^m)$ is the space of Lebesgue measurable functions $u(\cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $\|u(\cdot)\|_p < +\infty$, $\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_E \|u(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$, and $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm.

Hereinafter $U_{p,r}$ is the set of admissible control functions and every function, $u(\cdot) \in U_{p,r}$ is said to be an admissible control.

It is assumed that these functions and a number $\lambda \in \mathbb{R}^1$ given in equation (1) satisfy the following conditions:

A. The functions $f(\cdot) : E \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K_1(\cdot) : E \times E \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $K_2(\cdot) : E \times E \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ are continuous;

B. There exist $l_0 \in [0, 1)$, $l_1 > 0$, and $l_2 > 0$ such that

$$\|f(\xi, x_2) - f(\xi, x_1)\| \leq l_0 \|x_2 - x_1\|$$

for every $(\xi, x_1) \in E \times \mathbb{R}^n$, $(\xi, x_2) \in E \times \mathbb{R}^n$ and

$$\begin{aligned} \|K_1(\xi, s, x_2) - K_1(\xi, s, x_1)\| &\leq l_1 \|x_2 - x_1\|, \\ \|K_2(\xi, s, x_2) - K_2(\xi, s, x_1)\| &\leq l_2 \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

for every $(\xi, s, x_1) \in E \times E \times \mathbb{R}^n$ and $(\xi, s, x_2) \in E \times E \times \mathbb{R}^n$;

C. There exist $p_0 > 1$ and $r_0 > 0$ such that the inequality $0 \leq \lambda \left[l_1 \mu(E) + l_2 [\mu(E)]^{\frac{p_0-1}{p_0}} r_0 \right] < 1 - l_0$ is satisfied, where $\mu(E)$ denotes the Lebesgue measure of the set E .

We denote

$$L(\lambda; p, r) = l_0 + \lambda \left[l_1 \mu(E) + l_2 r [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}} \right]. \quad (2)$$

The condition C implies that $L(\lambda; p_0, r_0) < 1$. From (2), it follows that there exist $\tau_1 > 0$ and $\tau_2 > 0$ such that $p_0 - \tau_1 > 1$ and $L(\lambda; p, r) < 1$ for every $p \in [p_0 - \tau_1, p_0 + \tau_1]$, and $r \in [0, r_0 + \tau_2]$. From now, it will be assumed that $p \in [p_0 - \tau_1, p_0 + \tau_1]$ and $r \in [0, r_0 + \tau_2]$.

2. The set of trajectories and its properties

Let us define a trajectory of system (1) generated by an admissible control function $u(\cdot) \in U_{p,r}$. A continuous function $x(\cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$

satisfying the integral equation (1) for every $\xi \in E$ is said to be a trajectory of system (1) generated by the admissible control function $u(\cdot) \in U_{p,r}$. The set of trajectories of system (1) generated by all admissible control functions $u(\cdot) \in U_{p,r}$ is denoted by $\mathbf{X}_{p,r}$. For given $\xi \in E$, we denote

$$\mathbf{X}_{p,r}(\xi) = \{x(\xi) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in \mathbf{X}_{p,r}\}.$$

Proposition 1. *Every admissible control function $u(\cdot) \in U_{p,r}$ generates a unique trajectory of system (1).*

Proposition 2. *The set of trajectories $\mathbf{X}_{p,r}$ of system (1) is a compact and path-connected subset of the space $C(E; \mathbb{R}^n)$ where $C(E; \mathbb{R}^n)$ is the space of continuous functions $x(\cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ with norm $\|x(\cdot)\|_C = \max \{\|x(\xi)\| : \xi \in E\}$.*

Proposition 3. *The set valued maps $\xi \rightarrow \mathbf{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in E$, (p and r are fixed) and $p \rightarrow \mathbf{X}_{p,r}$, $p \in [p_0 - \tau_1, p_0 + \tau_1]$, (r is fixed) are continuous, the set valued map $r \rightarrow \mathbf{X}_{p,r}$, $r \in [0, r_0 + \tau_2]$, (p is fixed) is Lipschitz continuous.*

Proposition 4. *The equality $\mathbf{X}_{p,r} = cl(\mathbf{X}_{p,r}^*)$ is satisfied where $\mathbf{X}_{p,r}^*$ is the set of trajectories of the system (1) generated by the set of control functions $U_{p,r}^* = \{u(\cdot) \in L_p(E; \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p = r\}$, $cl(\cdot)$ denotes the closure of a set.*

From Proposition 4, it follows that every trajectory of system (1) is robust with respect to the rapid consumption of the remaining control resource; this means that every trajectory of the system can be approximated by the trajectory obtained by full consumption of the control resource.

Approximation of the set of trajectories $\mathbf{X}_{p,r}$ by the set consisting the finite number of trajectories is presented. The same properties of the set of p -integrable trajectories are discussed.

- [1] *Krasovskii N.N.* Theory of control of motion: Linear systems. Nauka, 1968.
- [2] *Subbotina N.N., Subbotin A.I.* Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 3. P. 376–385.

- [3] *Subbotin A.I., Ushakov V.N.* Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players controls // *J. Appl. Math. Mech.* 1975. Vol. 39, no. 1. P. 367–375.
- [4] *Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh.G.* Approximation of the set of trajectories of a control system described by the Urysohn integral equation // *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.* 2015. Vol. 21, no. 2. P. 59–72.

Necessary conditions in infinite-horizon control problem regardless asymptotic assumptions

*D. V. Khlopin*¹

e-mail: khlopin@imm.uran.ru

We will discuss an infinite-horizon optimal control problem with asymptotic terminal constraints. We propose the terminal transversality condition at infinity that is obtained through the theorems on the stability of subdifferentials. For the weakly overtaking criterion, a necessary boundary condition on co-state arcs is deduced. Under the absence of asymptotic terminal constraints, this boundary condition educes some convex hull of the co-state arcs corresponding to a convex subdifferential of the payoff function at infinity. In the case of the smooth cost functional at infinity, without asymptotic terminal constraints, this condition educes the co-state arc uniquely determined by the formula proposed by S. M. Aseev and A. V. Kryazhinskii.

1. The statement of infinite-horizon control problem

Consider the following infinite-horizon optimal control problem:

$$\text{minimize } l(y(0)) + \int_0^\infty f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (1)$$

$$\text{subject to } \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t)) \quad \text{a.e.}, \quad (2)$$

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

$$y(t) \in \mathbb{X} \triangleq \mathbb{R}^m, \quad u(t) \in U, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$y(0) \in \mathcal{C}_0, \quad \text{Limsup}_{\theta \uparrow \infty} \{y(\theta)\} \subset \mathcal{C}_\infty. \quad (4)$$

Here, \mathcal{C}_0 and \mathcal{C}_∞ are non-empty subsets of \mathbb{X} , the function $l : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ is locally Lipschitz continuous, the set U of control parameters is a closed subset of a certain finite-dimensional space.

Hereinafter, we assume the following conditions to hold:

- (H1) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{X} \times U \rightarrow \mathbb{X}$ and $f_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{X} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous in (x, u) and Borel measurable in t ;
- (H2) for all $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{X}$ and control $u \in \mathcal{U}$, there exists a unique (generated by u) solution $y \in (AC)(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ of (2) with the initial condition $y(t) = x$; further, $t \mapsto f_0(t, y(t), u(t))$ is locally summable.

Under these hypotheses, for each initial state $x \in \mathbb{X}$, time $t \in \mathbb{R}_+$, and, admissible control $u \in B(\mathbb{R}_+, U)$, there exists a defined on \mathbb{R}_+ unique solution $y(\cdot) = y(x, t, u; \cdot)$ of (2) with the initial condition $y(t) = x$. Let us now define a scalar function J as follows:

$$J(x, t, u; \theta) \triangleq \int_t^\theta f_0(\tau, y(x, t, u; \tau), u(\tau)) d\tau, \quad \forall x \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}_+, \theta \geq t.$$

A pair $(y, u) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{X}) \times B(\mathbb{R}_+, U)$ is called the admissible process if one has $y(\cdot) = y(y(0), 0, u; \cdot)$, $y(0) \in \mathcal{C}_0$, and $\text{Limsup}_{\theta \uparrow \infty} \{y(\theta)\} \subset \mathcal{C}_\infty$.

An admissible process (\hat{y}, \hat{u}) is called locally weakly overtaking optimal for problem (1)–(4) if for every $T > 0$ there exists a positive $\beta(T)$ such that, for each admissible process (y, u) , from $u|_{[T; \infty)} = \hat{u}|_{[T; \infty)}$ and

$$\max_{t \in [0; T]} \|y(t) - \hat{y}(t)\| + \text{meas} \{t \in [0; T] \mid u(t) \neq \hat{u}(t)\} < \beta(T),$$

it follows the inequality

$$l(y(0)) - l(\hat{y}(0)) + \limsup_{\theta \uparrow \infty} \int_0^\theta [f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) - f_0(\tau, \hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau))] d\tau \geq 0.$$

We assume that a certain admissible control process (\hat{y}, \hat{u}) is locally weakly overtaking optimal for problem (1)–(4). For brevity, let us also define $\hat{J}(x; \theta) \triangleq J(x, 0, \hat{u}; \theta)$ for all $\theta \geq 0, x \in \mathbb{X}$.

We also assume the following hypotheses:

- (H3) there exists a neighborhood $\hat{\mathbb{G}}_{\exists} \subset \mathbb{X}$ of the point $\hat{y}(0)$ such that the map $\hat{\mathbb{G}}_{\exists} \times \mathbb{R}_+ \ni (x, \theta) \mapsto \frac{\partial \hat{J}(x; \theta)}{\partial x}$ is well defined and continuous;
- (H4) there exists a neighborhood $\hat{\mathbb{G}}_{\partial} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{X}$ of the graph of \hat{y} such that $\hat{\mathbb{G}}_{\partial} \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \hat{u}(t))$ and $\hat{\mathbb{G}}_{\partial} \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x, \hat{u}(t))$ are well defined and majorized by some locally summable function $\hat{L} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$;
- (H5) for each $u \in U$, the maps $(t, x) \mapsto f(t, x, u)$ and $(t, x) \mapsto f_0(t, x, u)$ continuously differentiable in x on some neighborhood of the graph of \hat{y} .

2. Main results

Define the Hamilton–Pontryagin function H by the following rule: for all $(x, \psi, u, \lambda, t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}^* \times U \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$H(x, \psi, u, \lambda, t) \triangleq \psi f(t, x, u) - \lambda f_0(t, x, u).$$

Define, also, the homeward set for all generated by \hat{u} motions passed the asymptotic constraint \mathcal{C}_{∞} , it is the set

$$\mathcal{C}_{\text{home}} \triangleq \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \limsup_{\theta \uparrow \infty} \{y(x, 0, \hat{u}; \theta)\} \subset \mathcal{C}_{\infty} \right\}.$$

Theorem 1. *Under conditions (H1)–(H5) let a process (\hat{y}, \hat{u}) be locally weakly overtaking optimal for problem (1)–(4). Let also $\mathcal{C}_{\text{home}}$ be convex.*

Then, there exists a nonzero solution $(\hat{\psi}, \hat{\lambda}) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{X}^) \times \{0, 1\}$ of the Pontryagin Maximum Principle*

$$-\frac{d\hat{\psi}(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}(\hat{y}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t), \hat{\lambda}, t),$$

$$\sup_{v \in U} H(\hat{y}(t), \hat{\psi}(t), v, \hat{\lambda}, t) = H(\hat{y}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t), \hat{\lambda}, t)$$

with transversality conditions

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(0) &\in \hat{\lambda} \partial l(\hat{y}(0)) + N(\hat{y}(0); \mathcal{C}_0); \\ -\hat{\psi}(0) &\in N(\hat{y}(0); \mathcal{C}_{home}) + co \quad \text{Limsup}_{\substack{\theta_n \uparrow \infty, x_n \rightarrow \hat{y}(0), 0 < \lambda_n \rightarrow \hat{\lambda}, \\ \hat{J}(x_n; \theta_n) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ \lambda_n \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x_n; \theta_n) \right\}. \end{aligned}$$

Theorem 2. Under conditions (H1)–(H5) let a process (\hat{y}, \hat{u}) be locally weakly overtaking optimal for problem (1)–(4). Assume that the map

$$\mathcal{C}_{home} \cap G \ni x \in \limsup_{\theta \uparrow \infty} \left[\hat{J}(x; \theta) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta) \right]$$

is lower semicontinuous for some open relative to aff \mathcal{C}_{home} set G containing $\hat{y}(0)$. Assume, also, the following constraint qualification condition to hold:

$$N(\hat{y}(0); \mathcal{C}_{home}) \cap co \quad \text{Limsup}_{\substack{\lambda_n \downarrow 0, \theta_n \uparrow \infty, G \ni x_n \rightarrow \hat{y}(0), \\ \hat{J}(x_n; \theta_n) - \hat{J}(\hat{y}(0); \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ -\lambda_n \frac{\partial \hat{J}}{\partial x}(x_n; \theta_n) \right\} \subset \{0\}.$$

Then the conclusion of Theorem 1 holds true.

The corresponding results in [1–12] do not imply the theorems above.

- [1] Brodskii Y.I. Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems on an infinite time interval // Math Sb. 1978. Vol. 34, no. 3. P. 327–343. DOI: 10.1070/SM1978v034n03ABEH001208
- [2] Aubin J., Clarke F. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J Control Optim. 1979. Vol. 17. P. 567–586. DOI: 10.1137/0317040
- [3] Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J Optim Theory Appl. 1999. Vol. 103. P. 201–230. DOI: 10.1023/A:1021733719020
- [4] Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth // Proc Steklov Inst Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255. DOI: 10.1134/S0081543814090028

- [5] *Pereira F., Silva G.* Necessary conditions of optimality for state constrained infinite horizon differential inclusions / Abstracts of 50th IEEE Conference on Decision and Control (CDC-ECC), 2011, IEEE. P. 6717–6722. DOI: 10.1109/CDC 2011.6161207
- [6] *Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K.O.* Infinite-horizon optimal control problems in economics // Russ Math Surv. 2012. Vol. 67. P. 195–253. DOI: 10.4213/rm9467
- [7] *Khlopin D.V.* Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // J Dyn Con Sys. 2013. Vol. 19, no. 4. P. 519–552. DOI: 10.1007/s10883-013-9192-5
- [8] *Khlopin D.* Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 11. P. 2417–2440. DOI: 10.1080/02331934.2014.971413
- [9] *Belyakov A.O.* Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. arXiv1512.01206v2.
- [10] *Khlopin D.* On necessary limit gradients in control problems with infinite horizon // Trudy Inst Mat i Mekh UrO RAN. 2018. Vol. 24, no. 1. P. 247–256. (In Russian)
DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-247-256
- [11] *Khlopin D.* A maximum principle for one infinite horizon impulsive control problem // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 213–218. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.383
- [12] *Aseev S.M., Veliiov V.M.* Another view of the maximum principle for infinite-horizon optimal control problems in economics // Russ Math Surv. 2019. Vol. 74, no. 6. P. 963–1011. DOI: 10.1070/RM9915

On application of i -smooth analysis to nonlinear differential games with delays

A. V. Kim^{1,2}, N. A. Andryushechkina¹

e-mail: avkim@imm.uran.ru, nadia-andr@mail.ru

It is known that the methodology of i -smooth analysis allows one to study the problems of FDE theory similarly to the finite-dimensional (ODE) case. Based on this approach, there were developed and constructively described various sections of the FDE theory. Currently, the interest is in application of i -smooth analysis to the following areas:

- A) Phase portraits of FDE,
- B) Differential games of systems with delays.

The theory of differential games of systems with aftereffects was developed by N.N. Krasovskii, Yu.S. Osipov and A.V. Kryazhimskii [2–6]. The technique of the invariant differential calculus of functionals in problems of conflict control of hereditary systems is applied in the works of N. Yu. Lukoyanov [7–9]. These studies are mainly related to the development of the theory of Hamilton – Jacobi equations, which is an advanced direction in the modern theory of positional differential games. In this paper, the main attention is paid to the possibility of obtaining, basing on i -smooth analysis, results analogous to the classical Krasovskii – Subbotin theory of the positional differential games, described in the book [1]. Some application of i -smooth analysis to linear differential games of systems with delays was discussed in [10].

The purpose of this paper is to discuss the application of i -smooth analysis to differential games in nonlinear systems with delays.

The first part of the report presents a statement of the problem of the conflict control in systems with delays and basic constructions of the i -smooth analysis.

The second part of the report is devoted to obtaining *an alternative* in a differential game with delays. Based on i -smooth methodology the corresponding results are obtained and formulated in the same manner as for finite-dimensional (ODE) case.

In the third part of the work, we consider a differential game with a given final instant. Similar to the finite-dimensional case, an equation

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

²Ural State Agrarian University, Ekaterinburg, Russia

for the cost of the differential game and a *saddle point* theorem are obtained.

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-01-00352.

- [1] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. Springer, New York, 1988.
- [2] *Krasovskii N.N., Osipov Yu.S.* Linear differential-difference games // Dokl. AN USSR. 1971. Vol. 197, no. 4. P. 777–780.
- [3] *Osipov Yu.S.* On the theory of differential games of systems with aftereffect // J. Appl. Math. Mech. 1971. Vol. 35, no. 6. P. 262–272.
- [4] *Osipov Yu.S.* A differential guidance game for systems with after-effect // J. Appl. Math. Mech. 1971. Vol. 35, no. 1. P. 92–99.
- [5] *Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S.* Differential-difference game of encounter with a functional target set // J. Appl. Math. Mech. 1973. Vol. 37, no. 1. P. 1–10.
- [6] *Osipov Yu.S.* Linear differential-difference games // Dokl. AN USSR. 1971. Vol. 197, no. 5. P. 1022–1025.
- [7] *Lukoyanov N.Yu.* Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 3. P. 365–397.
- [8] *Lukoyanov N.Yu.* Functional Hamilton–Jacobi type equations with ci-derivatives in control problems with hereditary information // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 4. P. 535–555.
- [9] *Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.* On the approximation of nonlinear conflict-controlled systems of neutral type // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.) 2015. Vol. 292, no. 1. P. 182–196.
- [10] *Andryushechkina N.A., Kim A.V., Ivanov A.V.* Application of *i*-smooth analysis to differential games with delays // IFAC-PapersOnLine. Vol. 51, iss. 32, 2018. P. 225–227.
DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.385

Feedback strategies for controlled continuity equation

*E. A. Kolpakova*¹

e-mail: eakolpakova@gmail.com

We consider the multiagent system with the dynamics of each agent given by

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), m(t), u(t, m(t))), \quad x(s) = x_0, \quad m(s) = m_0. \quad (1)$$

Here $t \in [0, T]$, T is a final time, $x \in \mathbb{T}^d$, $m(t) \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, $u \in U \subset \mathbb{R}^n$, U is a compact, $s \in [0, T]$. The symbol \mathbb{T}^d denotes the d -dimensional torus $\mathbb{T}^d \triangleq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, whereas $\mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$ stands for the set of probabilities on \mathbb{T}^d with the finite second moment. We endow this space with the second Wasserstein metric W_2 [1]. Remind that

$$W_2(m_1, m_2) = \inf_{\pi \in \Pi(m_1, m_2)} \left(\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} \rho(x, y)^2 \pi(d(x, y)) \right)^{1/2},$$

where $\Pi(m_1, m_2)$ is a set of probabilities $\pi \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$ such that for any measurable $\Gamma \subset \mathbb{T}^d$ $\pi(\Gamma \times \mathbb{T}^d) = m_1(\Gamma)$, $\pi(\mathbb{T}^d \times \Gamma) = m_2(\Gamma)$, $\rho(x, y)$ is a metric on \mathbb{T}^d .

Thus, the dynamics of the whole system obeys the continuity equation

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f(t, \cdot, m(t), u(t, m(t))) m(t) \right) = 0, \quad m(s) = m_0.$$

Let us emphasize that we assume that all the agents are influenced by the same control depending only on current time and current distribution $m(t)$ of the agents.

The payoff functional has the form

$$J(t_0, m_0, u) = g(m(T, t_0, m_0, u)), \quad (2)$$

where $t_0 \in [0, T]$, $m(\cdot, t_0, m_0, u)$ is a motion of control system (1) starting from the initial position (t_0, m_0) under the control u . We maximize the functional J over the set of relaxed controls denoted here by \tilde{U} [2].

The problem is solved under the following assumptions.

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

A1 The function f is continuous and there exists a constant C_0 : for any $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{T}^d$, $m(t) \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, $u \in U$ the following inequality is valid

$$\|f(t, x, m, u)\| \leq C_0.$$

A2 $\|f(t, x, m, u) - f(t', x, m, u)\| \leq w_f(t - t')$, $t, t' \in [0, T]$, $x \in \mathbb{T}^d$, $m \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$.

A3 $|g(m) - g(m')| \leq w_g(W_2(m, m'))$, $m, m' \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, $u \in U$.

A4 There exists a constant $L > 0$: for any $t \in [0, T]$, $x, x' \in \mathbb{T}^d$, $m, m' \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, $u \in U$ we have

$$\|f(t, x, m, u) - f(t, x', m', u)\| \leq L(\|x - x'\| + W_2(m, m')).$$

In the assumptions, w_f and w_g are modules of continuity.

Definition. We say that a lower semicontinuous function $\psi : [0, T] \times \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ is *upper value function* if

- for any $m \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, $g(m) \leq \psi(T, m)$;
- for any $s, r \in [0, T]_2$, $s < r$, $m_0 \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, there exists a relaxed control $\xi \in \bar{U} : \psi(s, m_0) \geq \psi(r, m(r, s, m_0, \xi))$, where $m(\cdot, s, m_0, \xi)$ is a motion of dynamical system (1) starting from the position (s, m_0) under relaxed control ξ .

Consider a function $\rho(\varepsilon, t)$ with the property $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varepsilon, t) = 0$. Let $s \in [0, T]$, $m, \nu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$. We construct the measure ν such that

$$\left(W_2(m, \nu)\right)^2 \leq \rho(\varepsilon, s), \quad (3)$$

$$\psi(s, \nu) = \min\{\psi(s, m') : m' \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d), \left(W_2(\nu, m')\right)^2 \leq \rho(\varepsilon, s)\}. \quad (4)$$

Here ψ is a upper value function.

For given $s \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, $m \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, we construct

$$\hat{u}(s, m) \in \arg \min_{u \in U} \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d} \langle x - y, f(s, x, m, u) \rangle \pi(d(x, y)). \quad (5)$$

Here π is an optimal transportation plan.

Theorem. Assume $s, r \in [0, T]$, $s \leq r$, $m_0, \nu_0 \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}^d)$, π is an optimal transportation plan between m_0, ν_0 . Let \hat{u} defined by (5) be a feedback strategy generating a motion $m(\cdot) = m(\cdot, s, m_0, \hat{u})$, and $\eta \in \tilde{U}$ be an open-loop control generating a motion $\nu(\cdot) = \nu(\cdot, s, \nu_0, \eta)$. Then the following estimation between motions $m(\cdot)$ and $\nu(\cdot)$ is valid:

$$\begin{aligned} \left(W_2(m(r), \nu(r))\right)^2 &\leq \left(W_2(m_0, \nu_0)\right)^2 \left(1 + 4L(r - s)\right) + 4C_0^2(r - s)^2 + \\ &+ 4\sqrt{d}(w_f(r - s) + LC_0(r - s)^2). \end{aligned}$$

The proof of the theorem is based on the Krasovskii–Subbotin extremal shift rule [3] and its version for the mean field type control system in [4].

This theorem yields an approximation of the upper value function in the class of feedback strategies by the strategy \hat{u} under the certain choice of the function ρ . In this case, we form control according to the strategy \hat{u} stepwise and choose on each step the guiding measure ν to fulfil conditions (3),(4).

- [1] *Ambrosio L., Gigli N., Savaré G.* Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Birkhäuser Verlag, Basel, ETH Zürich, 2005.
- [2] *Warga J.* Optimal control of differential and functional equations. Academic Press, New York, 1972.
- [3] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. Springer, New York, 1988.
- [4] *Averboukh Y.* Krasovskii–Subbotin Approach to Mean Field Type Differential Games // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. P. 573–593. DOI: 10.1007/s13235-018-0282-6

Construction of mutual tracking of motions of a real nonlinear dynamical system and its virtual model-leader

*A. N. Krasovskii*¹

e-mail: ankrasovskii@gmail.com

A problem of the stochastic stable mutual tracking of motions of a real dynamical nonlinear controlled object and its virtual computer model-leader (guide) under the dynamical and informational disturbances is considered. The main result consists in constructing the procedures for mutual tracking of the motions. Solution of the problem is based on the extremal minmax and maxmin conditions and is constructed in the discrete time positional feedback control scheme. In this scheme, the informational data have random information errors. It is shown that vicinity of the motions of the real controlled object to its virtual model-guide (leader) is ensured with the probability close to 1.

- [1] *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control Under Lack of Information. Birkhäuser Basel, 1995.
- [2] *Krasovskii A.A., Krasovskii A.N.* Nonlinear positional differential game in the class of mixed strategies // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. Vol. 277. P. 137–143. DOI: 10.1134/S0081543812040098
- [3] *Krasovskii A.N., Kuanishev V.T., Choi Y.S.* On stable mutual tracking of real dynamic object and its virtual guide-model // Actual research (Aktual'nye issledovania), 2020. Vol. 5. (In Russian)

¹Ural Technical Institute of Communications and Informatics, Ekaterinburg, Russia

Harmonic analysis, differential games and matrix Riccati equations

*Y. S. Ledyaev*¹

e-mail: ledyaev@wmich.edu

We discuss a new approach to derivation of analytical representations of solution of classical linear-quadratic differential games. Dynamics of these games is described by the equation

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cw,$$

where u is control and w is disturbance. The cost functional is

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\langle x(t), Lx(t) \rangle + \langle u(t), Mu(t) \rangle - \gamma \langle w(t), Nw(t) \rangle) dt,$$

where L, M, N are positive definite matrices, $\gamma > 0$ is a scalar parameter.

Remark that such differential games appear in the framework of H_∞ -optimization methods in control. It is well known that these methods provided successful resolution of some important industrial control problems and they are used intensively in modern engineering practice.

We demonstrate that traditional tools of Harmonic Analysis and Optimal Control theory can be used in order to obtain an analytical representation of optimal feedback controls and matrix solutions of the algebraic matrix Riccati equations in terms of matrix transfer functions of the original dynamical control systems.

To illustrate these analytical representation, we consider a matrix Riccati equation for linear-quadratic optimal control problem: find a positive definite matrix R , which satisfies

$$L + A^T R + RA - RBM^{-1}B^T R = 0.$$

We proved that the solution R of this matrix Riccati equation is given by the following analytical formula:

$$R = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(i\omega)G_u(i\omega)M^{-1}G_u^H(i\omega)d\omega \right)^{-1} \left(\pi I - \int_{-\infty}^{+\infty} G(i\omega)G_0(i\omega)d\omega \right),$$

¹Western Michigan University, USA

where

$$G_0(s) := (sI - A)^{-1}, \quad G_u(s) := G_0(s)B = (sI - A)^{-1}B$$

are matrix transfer functions from the classical automatic control theory and

$$G(i\omega) := (I + G_u(i\omega)M^{-1}G_u^H(i\omega)L)^{-1}.$$

Note that in many industrial applications such transfer functions can be found in advance and proposed analytical formulas for stabilizing feedback can be used for stabilization of dynamical system without the need to identify its parameters.

We also demonstrate that a similar approach can be used for a derivation of analytical representations of solutions of the differential matrix Riccati-like equations, which permits to select classes of integrable differential equations with quadratic right-hand side.

In conclusion, we state few conjectures and open problems, which are closely related to proposed methods.

On optimal semiflow in a class of nilpotent-convex problems

L. Lokutsievskiy^{1,2}

e-mail: lion.lokut@gmail.com

Methods of the nilpotent approximation are actively developed for the last years. For example, the famous Gromov approximation theorem for metrics on Carnot–Carathéodory spaces by the left-invariant subriemannian metrics on the nilpotent Lie groups is widely known. General optimal control problems (and also many Hamiltonian systems with discontinuous right hand side) may be approximated by nilpotent-convex problems of optimal control. These problems can be studied precisely because of the rich internal geometry. During the talk, I show that the optimal synthesis is driven by a semiflow in these problems. This fact allows one to exploit geometry of the problems to predict some interesting properties of optimal synthesis behavior.

¹Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Russia

As one of examples, I will discuss a series of problems with multidimensional control lying in a unit ball. Surprisingly, hairy ball theorem predicts that an optimal control moves along an irrational winding of a Clifford torus and the whole winding is covered in a finite time. The optimal trajectories are logarithmic spirals driven by the winding and they hit the origin at the final instant. This fact is based on the Galois theory for polynomials with rational coefficients.

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-01-00469.

The methods of reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations

*V. I. Maksimov*¹

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

The problem of stable reconstruction of an unknown input of a dynamical system by inaccurate observations of some characteristics of its trajectory is considered. The problem is formulated as follows. Let a dynamical system be described by ordinary differential equations on some time interval. Let, also, trajectories of the system depend on a time-varying parameter; in what follows, it is considered as an input. The input, as well as the trajectory, is not specified in advance. It is assumed that some characteristics of the phase states are directly observed and that these observations are inaccurate. It is required to construct a stable dynamical algorithm of the approximate reconstruction of the phase coordinates and the input. The dynamic property means that the current values of approximations of the corresponding coordinates and the input are generated online (*i.e.*, in real time). In its turn, the stability property means that the algorithm produces an approximation that is as precise as one likes under a sufficient accuracy of the observations.

The problem is referred to the class of inverse problems of dynamical systems.

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

ics. The algorithms presented in this report are based on constructions from the theory of robust dynamic inversion. These constructions are obtained by combination of the methods of the theory of ill-posed problems and the theory of positional control. The methodology described in our paper consists in interpretation of the reconstruction algorithm as a control algorithm for an auxiliary dynamical system (a model). The control in the model is adapted to the results of current observations in such a way that its implementation approximates the unknown input. Note that this methodology is based on the idea of stabilizing the appropriate Lyapunov-type functionals by means of the extremal shift. Thus, the method combines the stabilization and extremal shift principles in the control scheme with a model.

The problem under consideration in this report can be formulated by the following way. Let a dynamical system be described by the nonlinear system of differential equations

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

with the initial condition $x(0) = x_0$, and operates on a interval $T = [0, \vartheta]$, $0 < \vartheta < +\infty$. An unknown input (disturbance) $u(\cdot)$ acts on system (1). At discrete, frequent enough, instants $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = 0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta$), the system's output $y(\tau_i) = Cx(\tau_i) \in \mathbb{R}^q$ is measured (C is a constant $(q \times r)$ -matrix). The measurement results are vectors $\xi_i^h \in \mathbb{R}^q, i \in [0 : m - 1]$, satisfying the inequalities

$$|y(\tau_i) - \xi_i^h|_q \leq h.$$

Here, $h \in (0, 1)$ is the accuracy of measurements; the symbol $|\cdot|_q$ stands for the Euclidean norm in the space \mathbb{R}^q . The problem is to construct an algorithm for reconstructing both the phase vector $x(\cdot)$ and disturbance $u(\cdot)$ generating the output $y(\cdot)$ through the results of inaccurate measurements of $y(\cdot)$ in the real time mode. In other words, it is required to form a pair "trajectory-control" that is close (in the sense explained below) to the pair $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$.

In the case when $y \in \mathbb{R}^n$ and C is the identity matrix, the problem formulated above is equivalent to the problem of input reconstruction on the basis of measurements of the whole phase vector $x(\tau_i)$. If the matrix C has the block structure, *i.e.*, $C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, the problem

is equivalent to the problem of input reconstruction on the basis of measurements of a “part” of the phase coordinates.

Let us briefly describe the approach to solving the problem applied in this report. This approach arises in the theory of positional control (feedback control) and represents a variant of the principle of control with a model (with guide) introduced in early 1970s by N. N. Krasovskii. The latter principle aims to eliminate the effect of feedback instability in systems with variable input disturbances. It is noted that if a feedback succeeds in solving a control problem using the exact information about the system’s states, then even arbitrarily weak perturbations of this information can ruin this property: the trajectories can obtain new undesirable qualities. The control scheme with a model eliminates this instability by introducing an additional artificial dynamical system (a model) into the control loop. The principle of control with a model has also proved to be successful in constructing robust methods of dynamic inversion.

Let us explain the keystones of the approach mentioned above. Consider the case when all coordinates of x are measured. For the convenience of description, we introduce an observer, *i.e.*, a person who solves the problem of dynamic inversion. First, the observer constructs an artificial controllable model; the motion of this model is formed in the real time. The model may be a computer program, its implementation is synchronized with the motion of the real system. In the process, at each instant τ_i of a sufficiently frequent grid τ_0, τ_1, \dots , the observer receives two signals, the real signal ξ_i^h of the system’s current state and the “artificial” signal $w^h(\tau_i)$ of the model current state. The real signal ξ_i^h is received from an observation device and is, generally, inaccurate. The artificial signal $w^h(\tau_i)$ is absolutely exact, it coincides with the state of the model, which is generated by the observer itself (by its computer program). The observer uses the signals ξ_i^h and $w^h(\tau_i)$ (if necessary, $w^h(\tau_j)$, $j \in [0 : i - 1]$) in order to obtain the value of the model input $v^h(\tau_i)$ influencing the local variation of the model state. The choice of this value predetermines the state $w^h(\tau_{i+1})$ of the model at the next correction time τ_{i+1} . Moreover, the value $w^h(\tau_i)$ is of crucial importance, since it serves as a current output of the solving algorithm; more precisely, $v^h(\tau_i)$ is an approximation of the value of the unobservable input of the real system on the time interval between τ_i and τ_{i+1} .

Thus, step by step, simultaneously with the development of the

real input $u(\cdot)$, we form a piecewise constant realization $v^h(t) = v^h(\tau_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, of the model input that provides an approximation to $u(\cdot)$. Note that the periodic choice of values $v^h(\tau_i)$ of the model input, depending on the current values ξ_i^h and $w^h(\tau_i)$ ($w^h(\tau_j)$, $j \in [0 : i - 1]$) of the signals is nothing but a control of the model M formed by the control law \mathcal{V}_h based on the feedback principle. The success of the implementation of such algorithmic scheme is provided, first, by the appropriate choice of the controlled model itself, and, second, by the correct choice of the control law in this model. Unfortunately, there are no universal techniques. Algorithmic constructions can depend on the class of systems under consideration, on the type of signals, on the constraints on admissible inputs, and, finally, on the statement of the problem of dynamic inversion.

The work was done in the framework of research of Ural Mathematical Center.

A number theoretic piece of control theory

*A. Ovseevich*¹

e-mail: `ovseev@gmail.com`, `ovseev@ipmnet.ru`

1. A matrix arising from control theory

In the problem of finite time feedback stabilization of a linear system of dimension N , an explicit matrix $Q = q^{-1}$ naturally arises [2–6], where

$$q_{ij} = \int_0^1 \tau^{(i-1)+(j-1)}(1-\tau)d\tau = \frac{1}{(i+j)(i+j-1)}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1)$$

The importance of the matrix Q is primarily due to the fact, that it defines a common Lyapunov function for two stable matrices $M = -\text{diag}(1, 2, \dots, N)$ and $A + BC$, where $Ae_i = -ie_{i+1}$, $i = 1, \dots, N$, $B = e_1^*$, $C = C = -\frac{1}{2}B^*Q$. Here, e_i , $i = 1, \dots, N$, is the standard basis of \mathbf{R}^N , $e_{N+1} = 0$.

It was proved in [7] that the title matrix Q is even integer: $Q_{ij} \in 2\mathbf{Z}$. Moreover, it is conjectured therein that the integer matrix Q is divisible

¹A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

by $N(N+1)$. It is also proved in [7] that $Q_{11} = N(N+1)$. The proofs in [7] are based on consideration of orthogonal polynomials.

Here, we prove the conjecture by using a similar technique.

Theorem 1. *Each matrix element of the $N \times N$ matrix $Q = (Q_{ij})$ is an integer divisible by $N(N+1)$.*

We consider orthogonal polynomials (shifted Jacobi polynomials) with respect to the measure $d\mu = (1-x)dx$ in the interval $[0, 1]$. The polynomials P_n are given by the Rodrigues formula

$$P_n(x) = \frac{1}{n!(1-x)} \partial^n [(1-x)(x-x^2)^n], \quad (2)$$

where $\partial = \frac{d}{dx}$. It follows immediately from the Rodrigues formula (2) that $P_n \in \mathbb{Z}[x]$, because operator $\frac{1}{n!} \partial^n$ maps $\mathbb{Z}[x]$ into itself.

Orthogonality relations for P_n have the form

$$\int P_n P_m d\mu = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{mn}, \quad (3)$$

and can be restated as follows: The integral kernel

$$K(x, y) = K_N(x, y) := \sum_{k=1}^N 2k P_{k-1}(x) P_{k-1}(y) \quad (4)$$

defines the orthogonal projection of the Lebesgue space $L_2(\mu)$ on the subspace of polynomials of degree $< N$. It is called the Christoffel–Darboux kernel.

Lemma 1. *The basic relation between the matrix Q and the Christoffel–Darboux kernel is*

$$Q(x, y) := \sum_{ij=1}^N Q_{ij} x^{i-1} y^{j-1} = K(x, y). \quad (5)$$

There is a general formula (Theorem 2, or [8] Theorem 3.2.2, see also Eq. (4.5.2) *loc. cit.*) for the kernel, which in the case at hand reduces to

$$\sum_{k=1}^N 2k P_{k-1}(x) P_{k-1}(y) = -\frac{N(N+1)}{2N+1} \frac{P_N(x) P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x) P_N(y)}{x-y}. \quad (6)$$

The rational number $\frac{N(N+1)}{2N+1} = \frac{m}{n}$ is an irreducible fraction, because any divisor of N or $N+1$ cannot divide the sum $N+(N+1) = 2N+1$. This implies that the right-hand side of (6) lies in $m\mathbb{Z}[x, y]$. In view of (5), this proves that $Q_{ij} \in m\mathbb{Z} = N(N+1)\mathbb{Z}$.

Remark 1. The above arguments prove also that the polynomial

$$\frac{P_N(x)P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x)P_N(y)}{x - y} \in \mathbb{Z}[x, y] \quad (7)$$

is divisible by $2N+1$.

Theorem 2. Put $R_N(x, y) := \frac{P_N(x)P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x)P_N(y)}{x - y}$, $C_N(y) := \int R_N(x, y)d\mu(x)$. Then, $C_N(y) = C_N$, and if f is a polynomial of degree $k < N$, then $\int R_N(x, y)f(x)d\mu(x) = C_N f(y)$.

Indeed, the value $\int R_N(x, y)(f(x) - f(y))d\mu(x) = 0$, since

$$\int R_N(x, y)(f(x) - f(y))d\mu(x) = \int Q_N(x, y)\phi(x, y)d\mu(x),$$

where $Q_N(x, y) = P_N(x)P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x)P_N(y)$, $\phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. The polynomial $\phi(x, y)$ has degree $< N-1$ wrt x , and the polynomial in x $Q_N(x, y)$ is a linear combination of polynomials $P_N(x)$ and $P_{N-1}(x)$. Therefore,

$$\int R_N(x, y)f(x)d\mu(x) = f(y) \int R_N(x, y)d\mu(x) = C_N(y)f(y).$$

The operator of multiplication by a polynomial preserves a space of polynomials of a bounded degree if and only if the polynomial is a constant.

Remark 2. The equation (6) can be regarded as an explicit computation of $C_N = -\frac{N(N+1)}{2N+1}$. The computation is performed below by comparison of coefficients of $x^{N-1}y^{N-1}$ in the right- and the left-hand sides of (6).

Indeed, it follows immediately from the Rodrigues formula, that the leading coefficient c_n of P_n equals $\frac{(-1)^n(2n+1)!}{n!(n+1)!}$. The equation $K(x, y) = C_N R_N(x, y)$ implies that $2Nc_{N-1}^2(xy)^{N-1} = C_N c_N c_{N-1}(xy)^{N-1}$ or $2Nc_{N-1} = C_N c_N$. In other words, $2N \frac{(2N-1)!}{(N-1)!N!} = -C_N \frac{(2N+1)!}{N!(N+1)!}$ or after obvious cancellations $\frac{(2N)!}{(N-1)!} = -C_N \frac{(2N+1)!}{(N+1)!}$, which is equivalent to $C_N = -\frac{N(N+1)}{2N+1}$.

2. The Hilbert counterpart

It is possible to extend the above study of matrices Q, q to the better known case of the Hilbert matrices

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad H = h^{-1}. \quad (8)$$

Theorem 3. *Each matrix element of the $N \times N$ matrix H is an integer divisible by N .*

The proof is quite similar to that of the previous theorem. We consider shifted Legendre polynomials, which are orthogonal with respect to the Lebesgue measure dx in the interval $[0, 1]$. The polynomials, again denoted by P_n , are given by the Rodrigues formula

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \partial^n (x - x^2)^n, \quad (9)$$

where $\partial = \frac{d}{dx}$. The counterpart of (5) is

$$\sum_{ij=1}^N H_{ij} x^{i-1} y^{j-1} = \sum_{k=1}^N (2k-1) P_{k-1}(x) P_{k-1}(y). \quad (10)$$

Known formula (Theorem 2, and [8] Eq.(4.5.2)) for the Christoffel-Darboux kernel says

$$\sum_{k=1}^N (2k-1) P_{k-1}(x) P_{k-1}(y) = -\frac{N}{2} \frac{P_N(x) P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x) P_N(y)}{x-y}. \quad (11)$$

Lemma 2. *Polynomial*

$$\frac{1}{2} R_N(x, y) = \frac{1}{2} \frac{P_N(x) P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x) P_N(y)}{x-y}$$

has integer coefficients.

Therefore, the right-hand side of (11) lies in $N\mathbf{Z}[x, y]$, and we conclude that the left-hand side of (10) belongs to $N\mathbf{Z}[x, y]$. To prove the Lemma, we consider the standard recurrent relation ([8] Eq. (4.5.1)) for the Legendre polynomials

$$nP_n(x) = (2n-1)(2x-1)P_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) \quad (12)$$

modulo 2. We obtain

$$nP_n(x) \equiv P_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) \pmod{2}, \quad (13)$$

which implies that $P_n \equiv 1 \pmod{2}$ for any $n = 0, 1, \dots$. This means, in particular, that $R_N \equiv 0 \pmod{2}$.

Since the right-hand side of (11) belongs to $N\mathbb{Z}[x, y]$, we conclude that the left-hand side of (10) also belongs to $N\mathbb{Z}[x, y]$.

Remark 3. There is an explicit expression for H , presented, e.g., in [10]. In particular, the integrality of H is well-known. But the divisibility statement of the last theorem might be a new one.

This work was supported by the Russian Science Foundation, grant 16-11-10343.

- [1] *Brunovsky P.* A classification of linear controllable systems // *Kibernetika*, 1970. Vol. 6, iss. 3. P. 173–188.
- [2] *Korobov V.I.* A general approach to synthesis of bounded controls in the controllability problem // *Math. Sb.*, 1979. Vol. 109(151), iss. 4(8). P. 582–606.
- [3] *Ananievskii I.M., Anokhin N.V., Ovseevich A.I.* Bounded feedback controls for linear dynamic systems by using common Lyapunov functions // *Dokl. Math.*, 2010. Vol. 82. P. 831–834.
DOI: 10.1134/S106456241005039X
- [4] *Ovseevich A.* A Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // *JOTA*, 2015. Vol. 165. P. 532–544.
DOI: 10.1007/s10957-014-0636-1
- [5] *Choque Rivero A.E., Korobov V.I., Skorik V.A.* The controllability function as the time of motion. I // *Math. Phys., Anal., Geom.*, 2004. Vol. 11, no. 2. P. 208–225.
- [6] *Choque Rivero A.E., Korobov V.I., Skorik V.A.* The controllability function as the time of motion. II // *Math. Phys., Anal., Geom.*, 2004. Vol. 11, no. 3. P. 341–354.
- [7] *Fedorov A., Ovseevich A.* Asymptotic control theory for a system of linear oscillators // *Moscow Math. J.*, 2016. Vol. 16, no. 3. P. 561–598. DOI: 10.17323/1609-4514-2016-16-3-561-598
- [8] *Szegő G.* *Orthogonal Polynomials* (Colloquium Publications). Amer Mathematical Soc, 1939.

- [9] *Hilbert D.* Ein beitrage zur theorie des Legendre'schen polynoms // Acta Mathematica, 1894. Vol. 18. P. 155–159.
- [10] *Choi M.-D.* Tricks or Treats with the Hilbert Matrix // The American Mathematical Monthly, 1983. Vol. 90, no. 5. P. 301–312.

Inverse optimal control with continuous updating for steering behavior model

O. L. Petrosian^{1,2}, *I. I. Kuchkarov*¹

e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru, st033114@student.spbu.ru

1. Introduction

In the most modeling approaches to human behavior, it is assumed that the human has all information about the motion equations and objective function at the beginning of the process and for the complete time interval. Nevertheless, most of real-life control processes evolve continuously in time, and the human may not have all information about the process at the initial time instant. For example, in an automotive application, the driver only has local information about the road curvature or any obstacles, which may force a lane change. Hence, it is questionable whether approaches based on the classical optimal control theory reflect human decision making adequately. Therefore, we conjecture that a human continuously receives updated information and adapts his behavior continuously to the new situation and, hence, it is important to include this characteristic in an identification procedure of a human behavior model.

In this paper, we present a steering behavior modeling approach based on the paradigm of continuous updating. This solves the problem of modeling behavior when information about the process updates continuously in time. This means that the subject

- has information about motion equations and objective function

¹Saint Petersburg State University, Russia

²National Research University Higher School of Economics, Saint-Petersburg, Russia

only on $[t, t + \bar{T}]$, where \bar{T} is the information horizon and t is the current time instant;

- receives updated information as time $t \in [t_0, +\infty)$ evolves.

Moreover, we solve the inverse optimal control problem with continuous updating to identify the subject's preferences. It shows the consistency of the approach with continuous updating.

2. Continuous updating approach

Consider the optimal control problem defined on the interval $[t_0, T]$:

$$J(x_0, t_0; u) = \int_{t_0}^T g[t, x(t), u(t, x)] dt \rightarrow \min_u \quad (1)$$

subject to

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x, u), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x &\in \text{comp}\mathbb{R}^n, u = u(t, x) \in U \subset \text{comp}\mathbb{R}^m, t \in [t_0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

where $\text{comp}\mathbb{R}^m$ is a compact set in an m -dimensional space of real numbers, $g[t, x(t), u(t, x(t))]$, $f(t, x, u)$ are integrable functions, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the solution of the Cauchy problem (2) with fixed $u(t, x) \in \mathbb{R}^m$. The control $u(t, x) \in \mathbb{R}^m$ is called admissible if problem (2) has a unique and continuous solution.

Using the initial optimal control problem defined on the closed time interval $[t_0, T]$, we construct the corresponding optimal control problem with continuous updating.

Consider the following optimal control problem defined on the interval $[t, t + \bar{T}]$, where $0 < \bar{T} < +\infty$:

$$J(x, t; u^t) = \int_t^{t+\bar{T}} g[s, x_t(s), u^t(s, x_t)] ds \rightarrow \min_{u^t} \quad (3)$$

subject to

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(s) &= f(s, x_t, u^t), \\ x_t(t) &= x, \\ x_t &\in \text{comp}\mathbb{R}^n, u^t = u^t(s, x_t) \in U \subset \text{comp}\mathbb{R}^m, s \in [t, t + \bar{T}], \end{aligned} \quad (4)$$

where $u^t(s, x_t) \in \mathbb{R}^m$ and $x_t(s) \in \mathbb{R}^n$ are the optimal control and the optimal state trajectories on the interval $[t, t + \bar{T}]$, respectively.

The main characteristic of the optimal control problem with continuous updating is the following.

The current time $t \in [t_0, +\infty)$ evolves continuously and, as a result, the human continuously obtains new information about motion equation and objective function on the interval $[t, t + \bar{T}]$.

The control $u(t, x)$ in the optimal control problem with continuous updating has the form

$$u(t, x) = u^t(s, x)|_{s=t}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (5)$$

where $u^t(s, x)$, $s \in [t, t + \bar{T}]$ is the control in the problem defined on the interval $[t, t + \bar{T}]$ and $u^t(s, x)|_{s=t}$ is the part of that control at the first instant $s = t$. The main idea of (5) is that as the current time t evolves information updates, therefore in order to model the behavior of the human, it is necessary to consider the control $u^t(s, x)$ only in the points where $s = t$.

3. Steering wheel model

Consider a model where the subject tries to follow reference trajectory using the steering wheel [1]. The dynamics of model is described by

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{d_c}{\theta_{sum}} & -\frac{c_c}{\theta_{sum}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_{sum}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

where $x = [\dot{\varphi}, \varphi, \varphi_{ref}]^T$, φ is the steering wheel angle, $\dot{\varphi}$ is its angular velocity, φ_{ref} is the reference value for steering wheel angle, d_c is the damping constant, c_c is the spring constant, θ_{sum} is the rotational inertia. We consider a piece-wise constant φ_{ref} , thus, derivative of φ_{ref} is zero.

The cost function has form

$$J = \int_0^\infty e^{-\gamma t} x^T \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & -q_2 \\ 0 & -q_2 & q_2 \end{bmatrix} x + ru^2 dt,$$

where parameters q_1, q_2, r characterize preferences of subject.

4. Inverse optimal control problem with continuous updating

Suppose the function $g[t, x(t), u(t, x(t))]$ in (1) is parameterized and, therefore, in an inverse optimal control problem, this parametrization is unknown and has to be estimated from the observed control and state trajectories. Furthermore, the value of the information horizon \bar{T} is also unknown. We denote by θ the set of unknown parameters including the cost function parametrization and the information horizon. The inverse control problem with continuous updating involves the estimation of the unknown parameter set θ based on the observed control $\hat{u}(t)$ and corresponding trajectory $\hat{x}(t)$ on the interval $[t_0, T]$. The objective is to obtain the estimated optimal control $u_\theta^*(t, x_\theta^*(t))$ and corresponding trajectory $x_\theta^*(t)$ such that the difference between these model trajectories and the observed ones is minimal.

Therefore, in this paper, the inverse optimal control problem with continuous updating is solved with an approach analogous to the bi-level approach to standard optimal control. The model parameters in θ are determined such that the squared error between the observed and model trajectories is minimized. This objective is represented by the optimization problem

$$Div = \int_{t_0}^T \|x_\theta(t) - \hat{x}(t)\|^2 + \|u_\theta(t, x_\theta^*(t)) - \hat{u}(t)\|^2 dt \rightarrow \min_\theta,$$

where x_θ and u_θ are the optimal control trajectories arising from the minimization of the cost function (1) with parameters θ .

5. Results

We solve the inverse optimal control (IOC) and inverse optimal control with continuous updating (IOC with CU) problems for the steering wheel model. The comparison of differences between model and observed parameters for IOC and IOC with CU cases is shown in the table.

Parameter	$\dot{\varphi}$	φ	u
IOC	2.3198	0.0825	1.7806
IOC with CU	2.1905	0.0819	1.4628

6. Conclusion

The inverse optimal control problem in a system with continuous updating is considered. A model of motion along a predetermined trajectory is shown. The consistency of the approach with continuous updating is given.

- [1] *Inga J., Flad M., Hohmann S.* Validation of a Human Cooperative Steering Behavior Model Based on Differential Games. 2019. DOI: 10.1109/SMC.2019.8914574

Pontryagin Maximum Principle for cooperative differential games with continuous updating

O. Petrosian¹, A. Tur¹, J. Zhou¹

e-mail: `petrosian.ovanes@yandex.ru`

Classical differential game models assume that the game structure does not change during the game or that the players have full information about the changes. Nevertheless, in the real life processes, players do not obtain complete information at the beginning of the process, but it is updated as the time goes on. In this regard, it is relevant to consider the class of differential games with continuous updating. In such games, it is assumed in such games that at each instant players have or use information about the game structure defined on the closed time interval with a fixed duration (less than the duration of the game). As time goes on, information about the game structure updates continuously.

The class of non-cooperative differential games with continuous updating was considered in papers [2–5]; here, it is supposed that the updating process evolves continuously in time. In papers [2] and [3], the class of linear-quadratic differential games with continuous updating is considered and the explicit form of the Nash equilibrium in the open-loop and closed-loop forms is derived. In paper [4], the system

¹Saint Petersburg State University, Russia

of Hamilton–Jacobi–Bellman equations is derived for the Nash equilibrium in a game with continuous updating. In paper [5], the explicit form of the Nash equilibrium for the differential game with continuous updating is derived by using the Pontryagin Maximum Principle.

In this paper, the class of cooperative games with continuous updating is studied. Due to the special information structure of the games under consideration, it becomes impossible to use the classical principles of optimality to construct a cooperative solution. Therefore, new notions of cooperative strategies, the characteristic function, and cooperative solution for a class of games with continuous updating are presented. The methods of construction of these new solutions with the use of the Pontryagin Maximum Principle are demonstrated.

Theoretical results are illustrated on a classic differential game model of pollution control presented in paper [1].

The work is funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the Grant No. 18-00-00727 (18-00-00725).

- [1] *Gromova E.* The Shapley Value as a Sustainable Cooperative Solution in Differential Games of Three Players // Petrosyan L., Mazalov V. (eds) Recent Advances in Game Theory and Applications. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Birkhäuser, Cham. 2015. P. 67–89.
- [2] *Kuchkarov I., Petrosian O.* Open-Loop Based Strategies for Autonomous Linear Quadratic Game Models with Continuous Updating // Kononov A., Khachay M., Kalyagin V., Pardalos P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2020. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12095. Springer, Cham. 2020. P. 212–230.
- [3] *Kuchkarov I., Petrosian O.L.* On class of linear quadratic non-cooperative differential games with continuous updating / M. Khachay, Y. Kochetov, & P. Pardalos (Eds.), Mathematical Optimization Theory and Operations Research – 18th International Conference, MOTOR 2019, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. Springer Nature. 2019. Vol. 11548. P. 635–650.
- [4] *Petrosian O.L., Tur A.* Hamilton–Jacobi–Bellman Equations for Non-cooperative Differential Games with Continuous Updating // Bykadorov I., Strusevich V., Tchemisova T. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019.

Communications in Computer and Information Science. Vol. 1090. Springer, Cham. 2019. P. 178–191.

- [5] *Petrosian O.L., Tur A., Zhou J.* Pontryagin Maximum Principle for Class of Non-cooperative Differential Game Models with Continuous Updating // Kochetov Y., Bykadorov I., Gruzdeva T. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2020.* Communications in Computer and Information Science. 2020. Vol. 1275. P. 256–270.

A class of cooperative differential games on networks

*L. Petrosyan*¹, *D. Yeung*², *Ya. Pankratova*¹

e-mail: l.petrosyan@spbu.ru, dwkyeung@hksyu.edu

y.pankratova@spbu.ru

1. Introduction

Differential games on networks are a relatively new class of differential games. It is necessary to mention the papers of Zhang et al. (2018) [8], Meza and Lopez-Barrientos (2016) [3], Petrosyan (2010) [4], Gao and Pankratova (2017) [1], and the paper of Petrosyan and Yeung (2020) [5], where the new characteristic function in the differential cooperative network game was introduced in a special case when the payoffs of players depend only upon their actions and actions of neighbors in the network. In this paper, we consider a more general case when a player's payoff depends upon payoffs of all players, with whom he is connected in the network. When constructing the characteristic function, we suppose that left out players can cut connections with those, who decide to form a coalition. This simplifies the computation of characteristic function and the Shapley Value. It is also shown that the corresponding cooperative game is convex.

¹Saint Petersburg State University, Russia

²SRS Consortium for Advanced Study in Cooperative Dynamic Games, Shue Yan University, PRC

2. Formulation of a class of differential network games

Consider a class of n -person differential games on the network with game horizon $[t_0, T]$. The players are connected in a network system. We use $N = \{1, 2, \dots, n\}$ to denote the set of players in the network. The nodes of the network are used to represent the players from the set N . We also denote the set of nodes by N and denote the set of all arcs in the network N by L . The arcs in L are the $arc(i, j) \in L$ for players $i, j \in N$. For notational convenience, we denote the set of players connected to the player i as $\tilde{K}(i) = \{j : arc(i, j) \in L\}$, for $i \in N$.

Let $x^i(\tau) \in R^m$ be the state variable of the player $i \in N$ at the instant τ and $u^i(\tau) \in U^i \subset R^k$ the control variable of player $i \in N$.

Every player $i \in N$ can cut the connection with any other players from the set $\tilde{K}(i)$ at any instant.

The state dynamics of the game is

$$\dot{x}^i(\tau) = f^i(x^i(\tau), u^i(\tau)), \quad x^i(t_0) = x_0^i, \quad \text{for } \tau \in [t_0, T] \text{ and } i \in N. \quad (1)$$

The function $f^i(x^i, u^i)$ is continuously differentiable in x^i and u^i .

Denote by $\tilde{K}^m(i)$ the set of players connected with the player $i \in N$ by a minimal path containing exactly m arcs.

The payoff function of the player i depends upon his state variable, his own control variable, and the state variables of players from the set $\tilde{K}^m(i)$, $m = 1, 2, \dots$

In particular, the payoff of the player i is given as

$$\begin{aligned} & H_i(x_0^1, \dots, x_0^n, u^1, \dots, u^n) = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \tilde{K}^m(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau \right), \quad \delta \in (0, 1). \quad (2) \end{aligned}$$

The term $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$ is the instantaneous gain that the player i can obtain through network links with the player $j \in \tilde{K}^m(i)$. The functions $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$ for $j \in \tilde{K}(i)$ are non-negative. For notational convenience, we use $x(t)$ to denote the vector $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$.

From formula (2), we can see that the payoff of the player i is computed as a sum of payoffs, which he gets interacting with the players $j \in N \setminus \{i\}$ with discount factor δ^{m-1} if the distance (the number of

arcs in the minimal path connecting i and j) between the player i and j is equal to m .

Since the set N is finite, the sum in (2) contains a finite number of summands that does not exceed $|N|$.

2.1. Cooperation and characteristic function. To achieve the group optimality, the players maximize their joint payoff

$$\sum_{i \in N} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \bar{K}^m(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau \right) \quad (3)$$

subject to dynamics (1).

We use $\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \bar{x}^2(t), \dots, \bar{x}^n(t))$ to denote the optimal cooperative trajectory of problem of maximizing (3) subject to (1). We let the corresponding optimal cooperative trajectory of the player i be denoted by $\bar{x}^i(t)$, for $t \in [t_0, T]$ and $i \in N$. The maximized joint cooperative payoff involving all players can then be expressed as

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \bar{K}^m(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau \right) = \\ & = \max_{u^1, u^2, \dots, u^n} \sum_{i \in N} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \bar{K}^m(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau \right) \quad (4) \end{aligned}$$

subject to dynamics (1)

Next, we consider distributing the cooperative payoff to the participating players] under an agreeable scheme. Given that the contributions of an individual player to the joint payoff through linked players can be diverse, the Shapley (1953) [6] value provides one of the best solutions in attributing a fair gain to each player in a complex network. One of the contentious issues in using the Shapley value is the determination of the worth of subsets of players (the characteristic function).

In this section, we present a new formulation of the worth of coalition $S \subset N$. In computing the values of characteristic function for coalitions, we evaluate contributions of the players in the process of cooperation and maintain the cooperative strategies for all players along

the cooperative trajectory. In particular, we evaluate the worth of the coalitions along the cooperative trajectory as

$$V(S; x_0, T - t_0) = \sum_{i \in S} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \tilde{K}^m(i) \cap S} \int_{t_0}^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau \right). \quad (5)$$

Note that the worth of coalition S is measured by the sum of payoffs of the players in the coalition in the cooperation process with the exclusion of the gains from the players outside coalition S . Thus, the characteristic function reflecting the worth of coalition S in (5) is formulated along the cooperative trajectory $\bar{x}(t)$.

Similarly, the characteristic function at the instant $t \in [t_0, T]$ can be evaluated as

$$V(S; \bar{x}(t), T - t) = \sum_{i \in S} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \tilde{K}^m(i) \cap S} \int_t^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau \right). \quad (6)$$

For simplicity in notation, we denote the gain that the player i can obtain through the network link with player $j \in \tilde{K}^m(i)$ as

$$\alpha_{ij}(\bar{x}(t), T - t) = \int_t^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau, \quad (7)$$

for $t \in [t_0, T]$.

Using the notations in (7), we can express the worth of coalition S in (5) at the start of the cooperation scheme as

$$V(S; x_0, T - t_0) = \sum_{i \in S} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in K^m(i) \cap S} \alpha_{ij}(x_0, T - t_0) \right) \right], \quad (8)$$

and the worth of coalition S along the cooperative trajectory $\bar{x}(t)$ as

$$V(S; \bar{x}(t), T - t) = \sum_{i \in S} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in K^m(i) \cap S} \alpha_{ij}(\bar{x}(t), T - t) \right) \right] \quad (9)$$

for $t \in [t_0, T]$.

An important property of the above characteristic function as a measure of the worth of coalition in the Shapley value is given below.

Proposition 5. *The characteristic function defined by (8) and (9) is convex.*

The time consistency property of the characteristic function has not been shared by existing characteristic functions in differential games (see Gromova (2016) [2], Yeung (2010) [7]). It is the first time that the worth of coalitions is measured under the process of cooperation instead of under min-max confrontation or Nash non-cooperative stance. Finally, any individual player or coalition attempting to act independently will have the links to other players in the network being cut off.

3. Dynamic Shapley value

In this section, we develop a dynamic Shapley value imputation using the defined characteristic function.

Now, we consider allocating the grand coalition cooperative network gain $V(N; x_0, T - t_0)$ to individual players according to the Shapley value imputation. The i player's payoff under cooperation would become

$$\begin{aligned} & Sh_i(x_0, T - t_0) = \\ & = \sum_{\substack{S \subset N, \\ S \ni i}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [V(S; x_0, T - t_0) - V(S \setminus \{i\}; x_0, T - t_0)] \end{aligned} \quad (10)$$

for $i \in N$.

Invoking (8), in our case, we can obtain the cooperative payoff of player i under the Shapley value as

$$\begin{aligned} & Sh_i(x_0, T - t_0) = \sum_{\substack{S \subset N \\ S \ni i}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \times \\ & \times \left\{ \sum_{l \in S} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \bar{K}^m(l) \cap S} \int_{t_0}^T h_l^j(\bar{x}^l(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{l \in S \setminus \{i\}} \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \left(\sum_{j \in \bar{K}^m(l) \cap S \setminus \{i\}} \int_{t_0}^T h_l^j(\bar{x}^l(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Proposition 6. *The Shapley value imputation in (11) satisfies the time consistency property.*

4. Conclusions

In this paper, we present the new characteristic function, which generates a time-consistent dynamic Shapley Value for a new class of differential network games where the payoffs of players depend not only upon actions of direct neighbors but, also, upon actions of all players connected with them.

The characteristic function features include the property that the worth of coalitions is derived in the process of cooperation along the cooperative trajectory, and the marginal contributions of individual players are evaluated based on their cooperative actions.

The first author is supported by Russian Science Foundation the grant Optimal Behavior in Conflict-Controlled Systems 17-11-01079.

- [1] *Gao H., Pankratova Y.* Cooperation in Dynamic Network Games / Contributions to Game Theory and Management. 2017. Vol. 10. P. 42–67.
- [2] *Gromova E.* The Shapley Value as a Sustainable Cooperative Solution in Differential Games of Three Players / Recent Advances in Game Theory and Applications: European Meeting on Game Theory, Saint Petersburg, Russia, 2015, and Networking Games and Management, Petrozavodsk, Russia, 2015. Springer. 2016. P. 67–89.
DOI: 10.1007/978-3-319-43838-2_4
- [3] *Meza M.A.G., Lopez-Barrientos J.D.* A Differential Game of a Duopoly with Network Externalities / L.A. Petrosyan and V.V. Mazalov (eds.) Recent Advances in Game Theory and Applications, Springer. Birkhäuser, 2016.
DOI: 10.1007/978-3-319-43838-2
- [4] *Petrosyan L.A.* Cooperative Differential Games on Networks // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 16(5), 2010. P. 143–150.
- [5] *Petrosyan L.A., Yeung D.W.K.* Construction of Dynamically Stable Solutions in Differential Network Games // Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Nature, 2020. P. 51–61.

- [6] *Shapley L.S.* A Value for N-person Games / Contributions to the Theory of Games (eds. H. Kuhn and A. Tucker), Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.
- [7] *Yeung D.W.K.* Subgame Consistent Shapley Value Imputation for Cost-Saving Joint Ventures // *Mathematical Game Theory and Applications*, 2(3), 2010. P. 137–149.
- [8] *Zhang H., Jiang L.V., Huang S., Wang J., Zhang Y.* Attack-Defense Differential Game Model for Network Defense Strategy Selection // *IEEE Access*, 2018.
DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2880214

Explicit numerical method for fractional diffusion-wave equation with functional delay

V. G. Pimenov^{1,2}, *E. E. Tashirova*¹

e-mail: V.G.Pimenov@urfu.ru, Linetisa@yandex.ru

1. Introduction

The effect of functional delay gives mathematical models with essential features, and the most effective methods for studying such models are numerical methods. For partial differential equations, the grid methods for solving equations with the functional delay have been sufficiently developed, see [1]. Numerical methods have also been developed for the space-fractional equations with this effect, see, for example, [2]. As for the time-fractional systems with the functional delay, the justification of the convergence of the algorithms requires [3, 4] an essentially new technique based on the application of generalizations of fractional versions of the Gronwall inequality [5]. This technique is applied only to purely implicit methods, and the most of the results were obtained only for systems with the constant delay. Meanwhile, in problems of

¹Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

²Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

control based on the principle of feedback systems with delay, presence of even a constant delay leads to a functional delay in control. For a fractional diffusion-wave equation, *i.e.*, equations with fractional time derivative from 1 to 2, one can significantly simplify the situation and carry out a direct proof of the convergence for explicit methods in the maximum norm.

2. Formulation of the problem

Consider an equation of the form

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1)$$

where $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$ are the independent variables, $u(x, t)$ is the decision function, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), \tau \leq s < 0\}$ is the prehistory of the function at the time t , τ is the value of delay. The Caputo fractional derivative of order α , $1 < \alpha < 2$, is determined by the formula

$$\frac{d^\alpha F(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \frac{F''(\xi)}{(t - \xi)^{\alpha-1}} d\xi, \quad t > 0.$$

Boundary conditions set is

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(X, t) = u_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

and the initial conditions set is

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (3)$$

We assume that the solution $u(x, t)$ of problem (1)–(3) exists and is unique. In addition, in proving the convergence of numerical algorithms, we will assume the necessary smoothness of the solution $u(x, t)$ and the Lipschitzness in a certain sense of functional f in the last two arguments.

3. Difference scheme

We introduce the time step $\Delta = \frac{\tau}{M_0}$, where M_0 is a natural number and let $M = \lceil \frac{T}{\Delta} \rceil$. Enter the points $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \dots, M$. We divide the segment $[0, X]$ into parts with the step $h = X/N$ by entering

the points $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. The approximation of the function $u(x_i, t_j)$ at the nodes of the grid will be denoted by u_i^j .

Given a set of numbers $\{u_i^j\}_{j=0}^{m+1}$, we introduce a difference operator that approximates the Caputo derivative (L2-method [6, p. 49])

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_i^m = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=-1}^m w_j u_i^{m-j},$$

$$w_j = \begin{cases} 1, & j = -1, \\ 2^{2-\alpha} - 3, & j = 0, \\ (j+2)^{2-\alpha} - 3(j+1)^{2-\alpha} + 3j^{2-\alpha} - (j-1)^{2-\alpha}, & 1 \leq j \leq m-2, \\ -2m^{2-\alpha} + 3(m-1)^{2-\alpha} - (m-2)^{2-\alpha}, & j = m-1, \\ m^{2-\alpha} - (m-1)^{2-\alpha}, & j = m. \end{cases}$$

We introduce a difference operator that approximates the second derivative with respect to x

$$\delta_x^2 u_i^m = \frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{h^2}.$$

To take into account the discrete prehistory, we will use the piecewise linear interpolation

$$u_i^m(t) = \frac{1}{\Delta} ((t_j - t)u_i^{j-1} + (t - t_{j-1})u_i^j), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j \leq m.$$

For $m = 1, 2, \dots, M-1$, we consider the explicit difference scheme

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_i^m = \delta_x^2 u_i^m + f(x_i, t_m, u_i^m, u_{t_m}^m(x_i, \cdot)) \quad (4)$$

with the initial conditions $u_i^j = \varphi(x_i, t_j)$, $j = -M_0, \dots, 0$, $i = 1, \dots, N-1$, and the boundary conditions $u_0^j = u_0(t_j)$, $u_N^j = u_1(t_j)$, $j = 0, \dots, m$.

Remark. To implement the scheme, starting values are needed, *i.e.*, u_i^1 values that affect the accuracy of the method. For example, we can put

$$u_i^1 = 2u_i^0 - u_i^{-1} = 2\varphi(x_i, t_0) - \varphi(x_i, t_{-1}). \quad (5)$$

4. Error analysis

We define the error of method (4) $\varepsilon_i^m = u(x_i, t_m) - u_i^m$. We say that the error is of the order of $\Delta^p + h^q$ if there is a constant C such that for all $i = 0, \dots, N$, $m = 0, \dots, M$ the inequality $|\varepsilon_{i,j}^m| \leq C(\Delta^p + h^q)$ holds.

We will assume that the following stability condition is satisfied.

Assumption.

$$\frac{\Delta^\alpha}{h^2} \leq \frac{3 - 2^{2-\alpha}}{2\Gamma(3 - \alpha)}. \quad (6)$$

For $\alpha \rightarrow 2$, this condition transforms into the classical Courant condition

$$\frac{\Delta}{h} \leq 1$$

for the wave equation.

Theorem. *If the exact solution $u(x, t)$ to problem (1)–(3) is four times continuously differentiable with respect to x and twice continuously differentiable with respect to t , the stability conditions (6) are satisfied, then method (4) with starting values (5) converges with order $h^2 + \Delta^2$.*

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 19-01-00019.

- [1] *Pimenov V.G.* Difference methods for solving partial differential equations with heredity. Ural University Publishing House, 2014.
- [2] *Pimenov V.G., Hendy A.S.* A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay // Ural Mathematical Journal. 2016. Vol. 2, no. 1. P. 48–57.
- [3] *Li L., Zhou B., Chen X., Wang Z.* Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction-diffusion equations with delay // Appl. Math. and Comput. 2018. Vol. 337. P. 144–152.
- [4] *Hendy A.S., Pimenov V.G., Macias-Dias J.E.* Convergence and stability estimates in difference setting for time-fractional parabolic equations with functional delay // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2020. Vol. 36, no. 1. P. 118–132.
- [5] *Li D., Liao H., Sun W., Wang J., Zhang J.* Analysis of L1-Galerkin FEMs for Time-Fractional Nonlinear Parabolic Problems // Commun. Comput. Phys. 2018. Vol. 24, no. 1. P. 86–103.
- [6] *Li C.P., Zeng F.H.* Numerical Methods for Fractional Calculus. CRC Press, 2015.

Rational behavior in dynamic multicriteria games

A. N. Rettieva^{1,2}

e-mail: annaret@krc.karelia.ru

1. Introduction

A dynamic discrete-time game model is considered where n players use a common resource and have different criteria to optimize. To construct a multicriteria Nash equilibrium, the bargaining solution is adopted. To design a multicriteria cooperative equilibrium, a modified bargaining scheme that guarantees the fulfillment of the rationality conditions is applied. The concept of dynamic stability is adopted for dynamic multicriteria games. To stabilize the multicriteria cooperative solution, a time-consistent payoff distribution procedure is constructed. The conditions for rational behavior are defined for the dynamic multicriteria games.

2. Dynamic multicriteria game with finite horizon

Consider a multicriteria dynamic game with the finite horizon in discrete time. Let $N = \{1, \dots, n\}$ players exploit a common resource for k different goals. The state dynamics is in the form

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt}), \quad x_0 = x, \quad (1)$$

where $x_t \geq 0$ denotes the quantity of resource at the time $t \geq 0$, $f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt})$ is the natural growth function, and $u_{it} \in U_i = [0, \infty)$ specifies the strategy (resource exploitation rate) of the player i at the time $t \geq 0$, $i \in N$.

Denote $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})$. Each player has k goals to optimize. The vector payoff functions of players on a finite planning horizon $[0, m]$

¹Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Center of RAS, Petrozavodsk, Russia

²Saint Petersburg State University, Russia

have the form

$$J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 = \sum_{t=0}^m \delta^t g_i^1(u_t) \\ \dots \\ J_i^k = \sum_{t=0}^m \delta^t g_i^k(u_t) \end{pmatrix}, i \in N, \quad (2)$$

where $g_i^j(u_t) \geq 0$ are the instantaneous payoff functions, $j = 1, \dots, k$, $i \in N$, and $\delta \in (0, 1)$ denotes the discount factor.

We design the noncooperative equilibrium in a dynamic multicriteria game applying the Nash bargaining products [5,6]. The cooperative strategies and payoffs of players are determined from the modified bargaining solution for the entire game horizon. The *status quo* points J_i^{jN} , $i \in N$, $j = 1, \dots, k$, are the noncooperative payoffs obtained by the players using the multicriteria Nash equilibrium strategies. The cooperative strategies and payoffs are constructed by solving the following problem:

$$(V_1^{1c} - J_1^{1N}) \cdot \dots \cdot (V_1^{kc} - J_1^{kN}) + \dots + (V_n^{1c} - J_n^{1N}) \cdot \dots \cdot (V_n^{kc} - J_n^{kN}) \rightarrow \max_{u_{1t}^c, \dots, u_{nt}^c}. \quad (3)$$

Definition 1. A strategy profile $u_t^c = (u_{1t}^c, \dots, u_{nt}^c)$ is a rational multicriteria cooperative equilibrium [7] of problem (1),(2) if it is a solution of problem (3).

It is demonstrated that with the presented approach, the conditions of individual rationality are fulfilled.

To stabilize the cooperative solution in the multicriteria dynamic games, we adopt the idea of imputation distribution procedure [3,4].

Definition 2. A vector

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)),$$

where

$$\beta_1(t) = \begin{pmatrix} \beta_1^1(t) \\ \dots \\ \beta_1^k(t) \end{pmatrix}, \dots, \beta_n(t) = \begin{pmatrix} \beta_n^1(t) \\ \dots \\ \beta_n^k(t) \end{pmatrix}$$

is a payoff distribution procedure (PDP) for the dynamic multicriteria game (1),(2) if

$$J_i^c(0) = \sum_{t=0}^m \delta^t \beta_i(t), \quad i \in N.$$

Definition 3. A vector $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ is a time-consistent [3, 4] PDP for the dynamic multicriteria game (1), (2) if for every $t \geq 0$

$$J_i^c(0) = \sum_{\tau=0}^t \delta^\tau \beta_i(\tau) + \delta^{t+1} J_i^c(t+1), \quad i \in N.$$

Theorem. A vector $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$, where

$$\beta_i(t) = J_i^c(t) - \delta J_i^c(t+1), \quad i \in N,$$

is a time-consistent payoff distribution procedure for the dynamic multicriteria game (1), (2).

The conditions for rational behavior, namely, the irrational-behavior-proofness condition [8] and each step rational behavior condition [1, 2] are defined for the dynamic multicriteria games.

To illustrate the presented approaches, a dynamic bi-criteria bioresource management problem with many players is investigated.

The work was supported by Russian Science Foundation, project No. 17-11-01079.

- [1] Mazalov V.V., Rettieva A.N. Incentive conditions for rational behavior in discrete-time bioresource management problem // Dokl. Math. 2010. Vol. 81. P. 399–402.
- [2] Mazalov V.V., Rettieva A.N. Cooperation maintenance in fishery problems // Fishery Management. Nova Science Publishers, 2012. P. 151–198.
- [3] Petrosjan L.A. Stable solutions of differential games with many participants // Vestn. Leningr. Univ. 1977. Vol. 19. P. 46–52.
- [4] Petrosjan L.A., Danilov N.N. Stable solutions of nonantagonistic differential games with transferable utilities // Vestn. Leningrad Univ. 1979. Vol. 1. P. 52–59.
- [5] Rettieva A.N. Equilibria in dynamic multicriteria games // Int. Game Theory Rev. 2017. Vol. 19, no. 1. 1750002 (21 pages). DOI: 10.1142/S0219198917500025
- [6] Rettieva A.N. Cooperation in dynamic multicriteria games with random horizons // J. Glob. Optim. 2020. Vol. 76. P. 455–470.
- [7] Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games with asymmetric players // J. Glob. Optim. 2020. DOI: 10.1007/s10898-020-00929-5

- [8] *Yeung D.W.K.* An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games // *Int. Game Theory Rev.* 2006. Vol. 8. P. 739–744.

Mathematical modeling of the consequences of the COVID-19 pandemic for the Russian economy

*A. Shanarin*¹, *M. Tarasenko*², *N. Trusov*²
e-mail: alexshan@yandex.ru

Consumer credit has become an important element of economic relations in Russia in the 21st century. In conditions of low real incomes of the main part of the population, consumer credit stimulated economic activity of the population, supported the effective demand of households, and had a positive impact on the GDP growth rate. In 2019, the share of consumer credit in the assets of the consolidated balance sheet of commercial banks, which is one of the most profitable assets, reached 18%. About half of the credit debt of individuals is made up of unsecured consumer credit. Already in the fall of 2019, the government of the Russian Federation discussed the problem of riskiness of consumer credit as an asset of commercial banks, as well as measures to restructure consumer credit debt. The decline in real incomes caused by the COVID-19 pandemic exacerbates this problem. The report, based on joint work with M. V. Tarasenko and N. V. Trusov, offers a Ramsay-type model for describing the economic behavior of households. The optimal control problem modeling the economic behavior of a representative household is investigated. A theorem on the existence of a solution is proved, necessary optimality conditions are obtained in the form of the Pontryagin–Clark maximum principle, and an optimal control synthesis is constructed. The model was identified based on Russian statistics. It is used to analyze the problem of consumer lending in Russia and the impact of the COVID-19 pandemic on the economic situation of households.

¹Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Russia

A variational approach to solutions of control reconstruction problems

N. N. Subbotina^{1,2}
e-mail: subb@uran.ru

1. Control reconstruction problems

We discuss a new approach to solving control reconstruction problems, which are actual in the control theory and applications. Determined affine controlled systems are considered. It is assumed that information about inaccurate current measurements of real states of the system comes at discrete instants. The control generating this motion has to be reconstructed in the real time. Many different methods are known to solve these inverse problems. These methods are based on ideas and results of algebra, geometry, functional analysis, the theory of perturbations, positional differential games, and so on (see, for example, [1,2]). We suggest and develop a new effective method relied on necessary optimality conditions in auxiliary variational problems with the integral convex-concave cost functionals [3,4].

2. Data

We consider controlled systems with dynamics of the form

$$\dot{x}(t) = G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where coordinates of x are the state variables and coordinates of u are the control parameters. We put that admissible controls are measurable functions satisfied the restriction

$$u(t) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

where \mathbf{U} is a compact convex set.

One can observe a real motion of system (1), namely, a trajectory $x^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ generating by an admissible control.

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia

²Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

Discrete inaccurate measurements of this “basic” trajectory arrive step-by-step in the real time:

$$\{y_k^\delta : \|y_k^\delta - x^*(t_k)\| \leq \delta, \quad t_k = k\Delta t, \quad k = \overline{0, N}, \quad N = T/\Delta t, \quad (3)$$

where $\delta \in (0, \delta^*]$ is the measurement error and $\Delta t \in (0, \Delta^*]$ is the step of measurements. The admissible control generated the basic trajectory is unknown and has to be reconstructed.

3. Correct Statement

There can be many solutions of this inverse problem. We introduce the notion of “normal” control in the problem as such admissible control generating the basic trajectory that has the minimal norm in L_2 . Note, that the normal control in problem (1)–(3) exists and it is unique.

So, we can introduce the correct control reconstruction problem (CRP).

Fix $\delta_0 \leq \delta^*, \Delta_0 \leq \Delta^*$. For any $\delta \in (0, \delta_0]$, $\Delta t \in (0, \Delta_0]$ and the set of measurements $\{y_k^\delta\}$ (3) arriving in the real time at instants $t_k = k\Delta t, k = 0, \dots, N$, to find such admissible control $u^\delta(\cdot) \in U[0, T]$ that at the end of the reconstruction process, the following relations are satisfied:

C.1 $u^\delta(\cdot)$ generates a trajectory $x^\delta(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ of (1) satisfied the boundary condition $x^\delta(0) = y_0^\delta$ and

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_{C[0, T]} = 0; \quad (4)$$

C.2

$$u^\delta(\cdot) \xrightarrow{w^*} u^*(\cdot) \text{ as } \delta \rightarrow 0. \quad (5)$$

The symbol $\|x(\cdot)\|_{C[0, T]}$ means the norm in the space $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ and the symbol $\xrightarrow{w^*}$ means weak-* convergence.

4. Solutions: Variational approach

For any fixed $\delta \in (0, \delta_0]$, $\Delta t \in (0, \Delta_0]$, interval $[t_{k-2}, t_k], k \in \{2, N\}$ and measurements $\{y_r^\delta\}, r = k-2, k-1, k$, we construct a continuously differentiable interpolation $y^\delta(t) : [t_{k-2}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ of the measurements $\{y_k^\delta\}$ and introduce the following auxiliary variational problem (AVP).

To find a pair of such functions $\{x_k(\cdot), u_k(\cdot)\} \in C_1([t_{k-2}, t_k], \mathbb{R}^n) \times C_1([t_{k-2}, t_k], \mathbb{R}^m)$ that

1. they satisfy equation (1) and the following structure holds:

$$u_k(t) = -1/\alpha^2 G^\top(t_{k-2}, y^\delta(t_{k-2}))s_k(t), \quad (6)$$

where $s_k(\cdot) \in C_1([t_{k-2}, t_k], \mathbb{R}^n)$ and G^\top means transposition;

2. they satisfy the boundary conditions

$$x_k(t_{k-2}) = y^\delta(t_{k-2}), \quad s_k(t_{k-2}) = s_{k-1}(t_{k-2}), \quad k = \overline{2, N}, \quad (7)$$

$$s_1(0) = -\alpha^2 Q^{-1}(0, y^\delta(0))(y^\delta(0) - f(0, y^\delta(0))),$$

where $Q \stackrel{def}{=} (GG^\top)$;

3. they minimize the cost functional

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_{k-2}}^{t_k} \left[-\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u(t)\|^2}{2} \right] dt, \quad (8)$$

where α is a small positive regularising parameter.

Necessary optimality conditions for AVP have the form of the Hamiltonian system with $x_k = \{x_{k,1}, \dots, x_{k,n}\}$, $s_k = \{s_{k,1}, \dots, s_{k,n}\}$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(t)}{dt} &= -\alpha^{-2} Q(t, x_k(t))s_k(t) + f(t, x_k(t)), \\ \frac{s_{k,i}(t)}{dt} &= x_{k,i}(t) - y_i^\delta(t) + \alpha^{-2} \langle s_k(t), \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} Q(t, x_k(t))s_k(t) \rangle + \\ &+ \langle s_k(t), \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} f(t, x_k(t)) \rangle, \quad t \in [t_{k-2}, t_k], \quad i \in \overline{1, n}, \quad k \in \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (9)$$

with the boundary conditions

$$\begin{aligned} x_k(t_{k-2}) &= y^\delta(t_{k-2}), \quad s_k(t_{k-2}) = s_{k-1}(t_{k-2}), \quad k = \overline{2, N}, \\ s_1(0) &= -\alpha^2 (Q(0, y^\delta(0)))^{-1} (y^\delta(0) - f(0, y^\delta(0))). \end{aligned} \quad (10)$$

5. Main result

We assume that there exist positive constants $\delta_0 < \delta^*$, $\Delta_0 < \Delta^*$ and a compact set $\Psi \subset \mathbb{R}^n$ ($D_0 \triangleq [0, T] \times \Psi$) such that

A.1 For any $\delta \in (0, \delta_0]$ and any $\Delta t \in (0, \Delta_0]$

$$\bigcup_{k=0, N} B_{2\delta_0}[y_k^\delta] \subset \Psi.$$

The symbol $B_\rho[x]$ means the closed ball of the radius ρ with the center in x .

A.2 The elements of the matrix function $G(\cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ and the vector function $f(\cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ are twice continuously differentiable with respect to all variables for each $(t, x) \in D_0$. The elements are not oscillating.

A.3 The rank of matrix $G(t, x)$ is equal to $\min\{n, m\}$ for each $(t, x) \in D_0$.

We apply the modified Hamiltonian system (9) linearized at $(t_{k-2}, y^\delta(t_{k-2}))$ on each interval $[t_{k-2}, t_k], k = 2, \dots, N$, to construct solutions of DRP. The following statement is valid.

Statement 1. *If assumptions A.1–A.3 are true, then the controls $\hat{u}^{\alpha, \delta}(t)$ of form (6) clipped by restrictions (1) satisfy C.1, C.2.*

The case DRP for $m \geq n$ was studied in [4].

Justifications, advantages, and perspectives of the variational approach to solving dynamic reconstruction problems are discussed.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00362).

- [1] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. Springer Verlag. 1988.
- [2] *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.* Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs // Proceedings Steklov Inst. Math. 2011. Vol. 275, suppl. 1. P. 86–120.
DOI: 10.1134/S0081543811090082
- [3] *Subbotina N.N., Tokmantsev T.B., Krupennikov E.A.* On the solution of inverse problems of dynamics of linearly controlled systems by the negative discrepancy method // Proceedings of Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 291. P. 253–262.
DOI: 10.1134/S0081543815080209
- [4] *Subbotina N.N., Krupennikov E.A.* Hamiltonian Systems for Dynamic Control Reconstruction Problems // Minimax Theory and its Applications. 2020. Vol. 5, no. 2. P. 439–454.

Abstract fractional McKean–Vlasov and HJB equations

*M. S. Troeva*¹

e-mail: troeva@mail.ru

In this paper, we introduce and study a new class of abstract nonlinear fractional pseudo-differential equations in Banach spaces. These abstract equations include both the McKean–Vlasov-type equations describing nonlinear Markov processes and the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations of stochastic control and games thus allowing for a unified analysis of these equations.

Looking at these equations as evolving in dual Banach triples allows us to recast directly the properties of one type to the properties of another type leading to an effective theory of coupled forward-backward systems (forward McKean–Vlasov evolution and backward HJB evolution), which are central to the modern theory of mean-field games.

We prove the basic well-posedness results for these abstract equations, and their continuous dependence on the initial data. Our approach is based on the mild solutions to the fractional nonlinear equations that are based on the Zolotarev integral representation for the Mittag-Leffler functions.

This is a joint work with Vassili N. Kolokoltsov.

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no. FSRG-2020-0006.

¹Research Institute of Mathematics, North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

Combined linear quadratic/bounded control differential game with delayed pursuit decision

V. Turetsky^{1,2}, M. Weiss², T. Shima²

e-mail: turetsky1@braude.ac.il, weissm@technion.ac.il,
tal.shima@technion.ac.il

This presentation deals with a differential game, modeling a planar engagement between the pursuer P and N evaders E_j , $j = 1, \dots, N$. By assuming small aspect and line-of-sight angles, this engagement can be described [1] by N linear systems

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B u_p + C_j u_{e_j}, \quad t \in [t_0, t_{f_j}], \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

where x_{j_1} is the relative separation between P and E_j , normal to the initial line-of-sight; x_{j_2} is the corresponding relative velocity, the rest of the components of x_j are internal flight dynamics coordinates. Let us use the terminal projection transformations [2] $z_j = Q_j \Phi_j(t_{f_j}, t) x_j$, $j = 1, \dots, N$, where $\Phi_j(t_{f_j}, t)$ are transition matrices of homogeneous systems corresponding to (1), $j = 1, \dots, N$, Q_j is a matrix of the form $[1, 0, \dots, 0]$ of an appropriate dimension. The zero-effort miss distances (ZEM) z_j satisfy the scalar differential equations

$$\dot{z}_j = h_{p_j}(t) u_p + h_{e_j}(t) u_{e_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

where $h_{p_j}(t) = Q_j \Phi_j(t_{f_j}, t) B$, $h_{e_j}(t) = Q_j \Phi_j(t_{f_j}, t) C_j$.

As in [3, 4], it is assumed that at the initial time $t = t_0$ the pursuer P did not decide which evader E_j , $j = 1, \dots, N$, it should pursue. The decision is taken at the prescribed instant $t_d > t_0$. It is known in advance that the probability to pursue the evader E_j is equal to $p_j > 0$, satisfying $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$. Then, the motion of the system, consisting of the pursuer and N evaders on the interval $[t_0, t_d]$ (*i.e.*, before the decision) is described by the differential equation

$$\dot{Z} = H_p(t) u_p + H_e(t) u_e, \quad (3)$$

where $Z = (z_1, \dots, z_N)^T$, $H_p(t) = (h_{p1}(t), \dots, h_{pN}(t))^T$, $H_e(t) = \text{diag}(h_{e1}(t), \dots, h_{eN}(t))^T$, $u_e = (u_{e1}, \dots, u_{eN})^T$. After the decision, the motion is described by (2) for $u_p = u_{p_j}$ against a chosen evader E_j .

¹Ort Braude College of Engineering, Karmiel, Israel

²Technion – Israel Institute of Technology, Haifa, Israel

The pursuer's objective is minimizing average squared miss distance

$$J_d = f(Z(t_d)) = \sum_{j=1}^N p_j z_j^2(t_{f_j}).$$

The second important feature of the problem, along with the delayed pursuit decision, is a difference in control constraints at the initial and at the final phases of the engagement. Namely, we assume that the players' controls satisfy hard constraints only for $t \geq t_d$:

$$|u_{p_j}(t)| \leq u_p^{\max}, \quad |u_{e_j}(t)| \leq u_{e_j}^{\max}, \quad t \in [t_d, t_{f_j}], \quad j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

For $t \in [t_0, t_d]$, it is assumed that $u_p(\cdot), u_{e_j}(\cdot) \in L_2[t_0, t_d]$, $j = 1, \dots, N$. This yields the necessity of soft-constraining the players' controls by including control effort penalty terms into the cost functional. Thus, the cost functional becomes

$$J = J_d + \alpha \int_{t_0}^{t_d} u_p^2(t) dt - \int_{t_0}^{t_d} u_e^T(t) M_e u_e(t) dt, \quad (5)$$

where $M_e = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_N)$, $\alpha, \beta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, are the penalty coefficients.

Consider N differential games between the pursuer and the evader E_j for $t \in [t_d, t_{f_j}]$, $j = 1, \dots, N$, with bounded controls satisfying (4) and the miss distance $|z_j(t_{f_j})|$ as a cost functional. These games are well known in the literature [5–7], and are addressed here as Norm Differential Games (NDG_{*j*}). Subject to the condition

$$R_j(t) \triangleq u_p^{\max} |h_{p_j}(t)| - u_{e_j}^{\max} |h_{e_j}(t)| \geq 0, \quad t \in [t_d, t_{f_j}], \quad j = 1, \dots, N,$$

the NDG_{*j*} solution [8] is based on the game space decomposition into singular and the regular regions \mathcal{R}_{0_j} and \mathcal{R}_{1_j} :

$$\mathcal{R}_{0_j} = \{(t, z_j) : t \in [t_d, t_{f_j}], |z_j| < z_j^*(t)\},$$

$$\mathcal{R}_{1_j} = \{(t, z_j) : t \in [t_d, t_{f_j}], |z_j| \geq z_j^*(t)\},$$

where $z_j^*(t) = \int_t^{t_{f_j}} R_j(\xi) d\xi$. The optimal strategies are

$$u_{p_j}^0(t, z_j) = -u_p^{\max} \text{sign}(z_j) \text{sign}(h_{p_j}(t)),$$

$$u_{e_j}^0(t, z_j) = u_{e_j}^{\max} \text{sign}(z_j) \text{sign}(h_{e_j}(t))$$

for $(t, z_j) \in \mathcal{R}_{1_j}$ and are arbitrary subject to (4) for $(t, z_j) \in \mathcal{R}_{0_j}$.

The game value is

$$J_j^0(t, z_j) = \begin{cases} 0, & (t, z_j) \in \mathcal{R}_{0_j}, \\ |z_j| - z_j^*(t), & (t, z_j) \in \mathcal{R}_{1_j}, \end{cases} \quad t \in [t_d, t_{f_j}].$$

Then, due to the ‘‘tenet of transition’’ of Isaacs [9], the terminal term in (5) becomes the weighted sum of squared NDG_j game values:

$$J_d = f(Z(t_d)) = \sum_{j=1}^N p_j (J_j^0(t_d, z_j(t_d)))^2 = D(Z(t_d))^T P D(Z(t_d)),$$

where $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_N)$, $D(Z) = (D_1(z_1), \dots, D_N(z_N))^T$, $D_j(z_j)$ is a deadzone function with thresholds $\pm z_{d_j} = \pm z_j^*(t_d)$:

$$D_j(z_j) = D(z) = \begin{cases} z_j + z_{d_j}, & z_j \leq -z_{d_j}, \\ 0, & |z_j| < z_{d_j}, \\ z_j - z_{d_j}, & z_j \geq z_{d_j}. \end{cases}$$

This yields the (non-standard) linear-quadratic differential game for system (3) with the cost functional

$$J = D(Z(t_d))^T P D(Z(t_d)) + \alpha \int_{t_0}^{t_d} u_p^2(t) dt - \int_{t_0}^{t_d} u_e^T(t) M_e u_e(t) dt. \quad (6)$$

Remark 1. The function $f(Z) = D(Z)^T P D(Z)$ in (6) is continuously differentiable, and

$$\nabla f(Z) = 2G(Z) P D(Z),$$

where $G(Z) = \text{diag} \left(\frac{\partial D_1(z_1)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial D_N(z_N)}{\partial z_N} \right)$,

$$\frac{\partial D_j(z_j)}{\partial z_j} = \begin{cases} 1, & |z_j| \geq z_{d_j}, \\ 0, & |z_j| < z_{d_j}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N.$$

Remark 2. For the differential game (3), (6), the Isaacs equation [9] is

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T M_H(t) \nabla V = 0, \quad V(t_d, Z) = f(Z),$$

where

$$M_H(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha} H_p(t) H_p^T(t) - H_e(t) M_e^{-1} H_e^T(t) \right). \quad (7)$$

Define the matrix function

$$W(t, Z) = P^{-1} + 4G(Z) \left(\int_t^{t_d} M_H(\xi) d\xi \right) G(Z).$$

Theorem 1. *Let $\det(W(t, Z)) > 0$, $t \in [t_0, t_d]$, $Z \in R^N$. Then, for $z_j \neq \pm z_{d_j}$, $j = 1, \dots, N$, the function*

$$V(t, Z) = D(Z)W^{-1}(t, Z)D(Z) \quad (8)$$

satisfies the Isaacs equation (7). Moreover, the function (8) satisfies the boundary condition $V(t_d, Z) = f(Z) = D(Z)^T P D(Z)$.

- [1] Zarchan P. Tactical and Strategic Missile Guidance. AIAA, 1994.
- [2] Bryson A.E., Ho Y.C. Applied Optimal Control. Hemisphere, 1975.
- [3] Turetsky V., Weiss M., Shima T. Minimum effort pursuit guidance with delayed engagement decision // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2019. Vol. 42, no. 12. P. 2664–2670. DOI: 10.2514/1.G004393
- [4] Turetsky V., Weiss M., Shima T. Pursuit-evasion game with delayed pursuit decision // Proceedings of the 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, 4 March 2020 – 5 March 2020, Tel Aviv – Haifa, Israel. P. 157–178.
- [5] Shinar J. Solution Techniques for Realistic Pursuit-Evasion Games // Advances in Control and Dynamic Systems (C.T. Leonides ed.), Vol. 17, Academic Press, 1981. P. 63–124.
- [6] Shima T., Shinar J. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2002. Vol. 25, no. 3. P. 425–432. DOI: 10.2514/2.4927
- [7] Turetsky V., Shinar J. Missile guidance laws based on pursuit-evasion game formulations // Automatica. 2003. Vol. 39, no. 4. P. 607–618. DOI: 10.1016/S0005-1098(02)00273-X
- [8] Glizer V.Y., Turetsky V. Complete solution of a differential game with linear dynamics and bounded controls // Applied Mathematics Research eXpress. 2008. Vol. 2008. P. 15–49. DOI: 10.1093/amrx/abm012

- [9] *Isaacs R.* Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. Dover Publications, Inc., 1965.

К общей теории систем Пфаффа

А. А. Азамов¹, А. О. Безалиев¹

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, azizuzmu@mail.ru

В теории дифференциальных уравнений особое положение занимают системы Пфаффа, относящиеся к системам переопределенного типа [2]. Такие системы служат важным инструментом в термодинамике и имеют существенные приложения в дифференциальной геометрии. После создания в середине прошлого века теории слоеных системы Пфаффа нашли новые эффективные приложения в этой теории.

Система Пфаффа в форме Э. Картана имеет вид

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) dx_k = 0 \quad (1)$$

и определяет поле плоскостей коразмерности m в области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($a_k(x)$ — m -мерные вектор-функции, $m \leq n$). Обычно требуется гладкость $a_k(x)$ и невырожденность поля. Если существует гладкое слоение (той же коразмерности), для которого (1) является полем касательных, то (1) называется интегрируемой. Имеется несколько критериев интегрируемости (1), по существу, переформулировок классического критерия Фробениуса [1, § 28]. Все они относятся к случаю гладких систем Пфаффа и являются локальными условиями интегрируемости. Для систем Пфаффа можно поставить задачу Коши, и при выполнении критерия Фробениуса она будет иметь единственное решение. Вместе с тем само понятие интегрируемости имеет смысл и в случае, когда коэффициенты системы (1) только непрерывны. Очевидно, для таких систем критерий Фробениуса и его варианты теряют смысл.

¹Институт математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Оказывается, что если систему (1) привести к форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), \quad (2)$$

где $(x, u) \in F \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $m > n$, $f : F \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ — непрерывная матрично-значная функция, то задачу Коши для (2) удастся заменить переопределенной системой интегральных уравнений Вольтерра специального типа. Это позволяет перенести практически все теоремы общей теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) на систему (2), включая методы приближенного построения интегралов и уравнения вариаций. При этом обнаруживаются свойства, существенно отличающиеся от случая СОДУ, например, область максимального продолжения решения может оказаться неоднозначной.

- [1] Тамура И. Теория слоений. М., Мир, 1979.
- [2] Азамов А.А., Бегалиев А.О. Теоремы существования и единственности для уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами // Дифференц. уравнения (в печати).

О задачах оценивания для нелинейных динамических систем

Б. И. Ананьев¹
e-mail: abi@imm.uran.ru

Пусть задана нелинейная векторная система с наблюдением вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) + b(t, x)v, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^r, \\ y &= g(t, x) + w, \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x — фазовый вектор системы, не доступный для измерения; v, w — неопределённые борелевские вектор-функции времени (возмущения), которые вместе с начальным состоянием $x(0)$ стеснены

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

ограничением

$$J = F(x(0)) + \int_0^T \left(Q(t, w) + \sum_{j=1}^r \frac{1}{q} \left(\frac{|v_j|}{k_j} \right)^q \right) dt \leq 1. \quad (2)$$

В формуле (2) F, Q — борелевские функции, $k_j > 0, q > 1$ — константы.

Примем стандартные условия

$$|f(t, x)| + |b(t, x)| \leq \varkappa(1 + |x|),$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| + |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq \lambda|x_1 - x_2|,$$

где λ, \varkappa — константы; величина $|b| = \sqrt{\text{tr } b'b}$ — евклидова норма произвольной матрицы $b \in \mathbb{R}^{n \times r}$; tr — след матрицы; символ $'$ означает транспонирование.

Определение 1. Информационным множеством $\mathbf{X}(t, y)$ системы (1) называется совокупность всех векторов $\{x(t)\}$, для которых найдется тройка $(x(0), v(\cdot), w(\cdot))$ такая, что выход уравнения (1) на отрезке $[0, t]$ почти всюду совпадает с измеренным сигналом $y(s), s \in [0, t]$, и выполняются ограничения (2).

Основная рассматриваемая задача состоит в определении множества $\mathbf{X}(t, y)$. Используя метод динамического программирования [1], введём функцию Беллмана $\mathbf{V}(t, x) = \min_{v(\cdot)} J(t, x, v)$, где функционал J определяется формулой

$$J(t, x, v) = F(x(0)) + \int_0^t \left(Q(s, y(s) - g(s, x(s))) + \sum_{j=1}^r \frac{1}{q} \left(\frac{|v_j|}{k_j} \right)^q \right) ds.$$

Минимум функционала J ищется при краевом условии $x(t) = x$. Уравнение Беллмана для $V(t, x)$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}_t = -f'(t, x)\mathbf{V}_x + Q(t, y(t) - g(t, x)) - \sum_{j=1}^r \frac{k_j^p}{p} |b'_{\cdot j}(t, x)\mathbf{V}_x|^p. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{V}(0, x) = F(x)$, $p = q/(q - 1)$, и оптимальными являются функции $v_{*j} = k_j^p |b'_{\cdot j}(t, x)\mathbf{V}_x|^{p-1} \text{sign}(b'_{\cdot j}(t, x)\mathbf{V}_x)$, $j \in 1 : r$. Символом $b_{\cdot j}$ обозначен j -й столбец матрицы b . Если решение уравнения (3) найдено, то имеем $\mathbf{X}(t, y) = \{x : \mathbf{V}(t, x) \leq 1\}$.

Рассмотрим вместо (2) ограничение

$$I = F(x(0)) + \int_0^T \left(Q(t, w) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{q} \left(\frac{|v_j|}{k_j} \right)^q + \frac{1}{p} \left(\frac{\tilde{v}_j}{k_j} \right)^p \right) \right) dt \leq 1, \quad (4)$$

где $\tilde{v}_j = k_j^p |b'_{\cdot j}(t, x) V_x|^{p-1} = k_j^p |\sum_{i=1}^n b_{ij}(t, x) V_{x_i}|^{p-1}$, $j \in 1 : r$, и линейное уравнение Ляпунова

$$V_t + \sum_{i=1}^n f_i(t, x) V_{x_i} = Q(t, w), \quad V(0, x) = F(x). \quad (5)$$

С соотношениями (4) и (5) свяжем множество

$$X(t, y) = \{x : V(t, x) \leq 1\}.$$

В работе изучается соотношение между множествами $\mathbf{X}(t, y)$ и $X(t, y)$. Уравнение (5) существенно проще уравнения (3) и может быть решено стандартными методами. Левую часть ограничения (4) иногда называют обобщённой работой [2]. Величина $V(T, x(T))$ — это минимум функционала I в (4). Исследуются соотношения между информационными множествами $X(t, y)$ и $\mathbf{X}(t, y)$ при разных формах ограничений и конкретных видах систем. Изложение иллюстрируется численными примерами.

- [1] *Kurzhanski A., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. SCFA. Birkhäuser, Boston. 2014.
- [2] *Красовский А.А.* Неклассические целевые функционалы и проблемы оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 3–11.

Глобальная теорема о неявной функции

*А. В. Арutyunov*¹

e-mail: arutyunov@cs.msu.ru

В докладе приведены различные аспекты глобальной теоремы о неявной функции.

О принципе максимума Понтрягина для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени

*С. М. Асеев*²

e-mail: aseev@mi-ras.ru

Будет представлен недавно полученный совместно с В.М. Вельтовым (Vienna, Austria) вариант Принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, содержащий явное описание сопряженной переменной.

Сведение областей определения задач оптимального управления на бесконечном горизонте к компактным сильно инвариантным множествам

*А. Л. Багно*³, *А. М. Тарасьев*³

e-mail: bagno.alexander@gmail.com, tam@imm.uran.ru

1. Введение

При изучении задач оптимального управления и дифференциальных игр на бесконечном горизонте возникают уравнения Гамильтона – Якоби, которые, как правило, имеют негладкие реше-

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

²Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

³Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

ния. Такие решения определены на неограниченной области, и это порождает трудности для построения вычислительных аппроксимационных схем.

Статья предлагает метод получения аппроксимационных схем, который заключается в серии таких замен переменных, что появляются необходимые ограничения на область определения и на область значений решений уравнений Гамильтона – Якоби. Этот метод реализован на примере задачи оптимального управления с функционалом качества, который содержит неограниченный подынтегральный индекс с дисконтирующим множителем экспоненциального вида.

Задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом возникают в моделях экономического роста и задачах стабилизации для динамических систем. В таких задачах функция цены удовлетворяет условию непрерывности по Гельдеру и условию подлинейного роста [3]. Отметим, что задачи оптимального управления с ограниченной подынтегральной функцией и ограниченной функцией цены рассматривались в работе [2].

2. Описание динамики системы

Рассмотрим задачу оптимального управления для динамической системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ – управляющий параметр, P – компактное множество.

Функционал качества, который требуется максимизировать, задается формулой

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \quad (2)$$

Предполагается, что в задаче оптимального управления (1),(2) выполнены следующие условия.

1. Функции f и g непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, при любом $u \in P$ справедливы соотношения Липшица по аргументу x :

$$\begin{aligned} \|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| &\leq L\|x_1 - x_2\|, \\ |g(x_1, u) - g(x_2, u)| &\leq L\|x_1 - x_2\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь L — константа Липшица.

3. Для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ выполняется условие подлинейного роста по аргументу x :

$$\|f(x, u)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|), \quad |g(x, u)| \leq \varkappa(1 + \|x\|). \quad (4)$$

Здесь \varkappa — положительная константа.

Ставится задача максимизации функционала (2) с бесконечным горизонтом на траекториях системы (1), построенных на множестве U измеримых по Лебегу управлений $u(\cdot)$ со значениями в компакте P .

Определение 1. *Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом* называется функция ω , ставящая в соответствие каждой начальной позиции (t_0, x_0, z_0) , где $t_0 \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = x(t_0)$, наибольшее значение $\omega(t_0, x_0, z_0)$ функционала качества:

$$\omega(t_0, x_0, z_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sup_{u(\cdot) \in U} \left(z_0 + \int_{t_0}^T e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right).$$

В дальнейшем будем рассматривать функцию цены при $t_0 = 0$, $z_0 = 0$. Введем для нее обозначение $\varphi(x_0) = \omega(0, x_0, 0)$.

Будем рассматривать для функции $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ уравнение Гамильтона – Якоби вида

$$-\varphi(x) + H(x, \nabla\varphi(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Здесь $\nabla\varphi(x)$ — вектор частных производных функции $\varphi(x)$, а $H(x, s)$ — гамильтониан задачи управления (1),(2):

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u \in P} \left(\langle s, f(x, u) \rangle + g(x, u) \right), \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

В работе [4] показано, что функция цены задачи оптимального управления совпадает с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона – Якоби (5).

3. Сведение задачи оптимального управления на компактное сильно инвариантное множество

Сделаем замену переменных

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varkappa(1 + \|x\|)},$$

где $\varkappa > 0$ — константа из (4). Отметим, что область значений функции $\psi(x)$ — компакт.

Так как функция $\psi(x)$ при $x = 0$ негладкая, введем функцию, сглаживающую $\|x\|$:

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} \|x\|, & \text{если } \|x\| > \varepsilon, \\ \|x\|^2/(2\varepsilon) + \varepsilon/2, & \text{если } \|x\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Уравнение (5) принимает вид

$$-\psi(x)\varkappa(1 + r_\varepsilon(x)) + \frac{1}{\lambda} \min_{u \in P} (\langle \nabla \psi(x)\varkappa(1 + r_\varepsilon(x)) + \psi(x)\varkappa \nabla r_\varepsilon(x), f(x, u) \rangle + g(x, u)) = 0.$$

Для аппроксимации решения уравнения Гамильтона – Якоби используется разложение в ряд Тейлора, и функция $\psi(x)$ приближается функцией $\psi^h(x)$ с положительным аппроксимационным параметром $h > 0$,

$$\psi^h(x + hf(x, u)) - \psi^h(x) \approx h \langle \nabla \psi(x), f(x, u) \rangle.$$

После преобразований получается следующее уравнение аппроксимации

$$\min_{u \in P} \left(-\psi^h(x) + \left(1 - \lambda h + \varkappa h \left\langle \nabla r_\varepsilon(x), \frac{f(x, u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))} \right\rangle \right) \times \right. \\ \left. \times \psi^h(x + hf(x, u)) \frac{hg(x, u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))} \right) = 0.$$

Отметим, что уравнение аппроксимации рассматривается на всем пространстве \mathbb{R}^n . Для компактификации области определения сделаем замену переменных

$$y(t) = e^{-\Lambda t} x(t),$$

где параметр Λ выбирается из условия $\Lambda > \varkappa > 0$.

Для сведения задачи к стационарному случаю введем переменную $\xi(t) = e^{-\Lambda t}$ и обозначение для динамики системы:

$$F(y, \xi, u) = -\Lambda y + \xi f \left(\frac{y}{\xi}, u \right).$$

Можно показать, что, благодаря условиям (3) и (4), переменная y содержится в компактном шаре K , который обладает свойством сильной инвариантности относительно динамики $\dot{y} = F(y, \xi, u)$,

$$K = \{\|y\| \leq R\}.$$

Здесь радиус шара выбирается из условия

$$R \geq R_0 = \frac{e^{-\Lambda t_0} \kappa}{(\Lambda - \varkappa)}.$$

Для обоснования того факта, что полученная динамика имеет сильно инвариантные компактные области определения, потребуются следующие конструкции.

Определение 2. *Касательным конусом в смысле Дубовицкого – Милотина $D_K(y)$ ко множеству K называется множество таких векторов v , что $\exists \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0: y(0, \alpha)(v + \varepsilon B) \subset K$.*

В монографии [1, теорема 4.3.6] был доказан следующий факт. Рассмотрим нетривиальное полунепрерывное сверху многозначное отображение $F: X \rightarrow X$ с компактными выпуклыми образами и предположим, что внутренность K не пуста. Если

$$\forall y \in \partial K \quad F(y) \subset D_{K \setminus \partial K}(y),$$

то для любого начального состояния $y_0 \in \partial K$ и для любого решения $y(\cdot)$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in F(y(t)), \quad y(t_0) = y_0,$$

существует такое $T > 0$, что $y(t)$ остается во внутренней части K для $t \in (0, T]$.

Можно доказать, что это утверждение справедливо для шара K радиуса $R \geq R_0$ и обеспечивает его строгую инвариантность относительно динамики $F(y, \xi, u)$. То есть все траектории динамической системы (1),(2) выживают в шаре K . Это позволяет редуцировать аппроксимационные схемы для решения уравнений Гамильтона – Якоби и выполнять вычисления только на сетке, построенной на сильно инвариантном компактном множестве.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

- [1] *Aubin J.-P.* Viability Theory. Springer Science+Business Media, LLC. 1991.
- [2] *Dolcetta I.C.* On a discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. V. 10, no. 4. P. 367–377. DOI: 10.1007/BF01448394
- [3] *Багно А.Л., Тарасьев А.М.* Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестник Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 3–14. DOI: 10.20537/vm160101
- [4] *Багно А.Л., Тарасьев А.М.* Свойства стабильности функции цены в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–56. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56

Синтез стохастической чувствительности при неполной информации

*И. А. Башкирцева*¹

e-mail: Irina.Bashkirtseva@urfu.ru

Рассматривается система с управлением

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \varepsilon\sigma(x)\xi(t), \quad (1)$$

где $x, f(x) \in R^n$, $u \in R^l$, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $g(x)$ — $n \times l$ -матричная функция, $\xi(t) \in R^m$ — дельта-коррелированный белый гауссовский шум с параметрами $E\xi(t) = 0$, $E\xi(t)\xi^\top(\tau) = \delta(t - \tau)I$, I — единичная матрица, $\sigma(x)$ — $n \times m$ -матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния, ε — скалярный параметр интенсивности шума.

Пусть соответствующая детерминированная система (1) без управления ($\varepsilon = 0$ и $u = 0$) имеет равновесие \bar{x} , устойчивость

¹Уральский математический центр, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

которого не предполагается. Рассматривается случай неполной информации, когда о поведении системы (1) можно судить лишь по вектору измерений $y(t)$:

$$y(t) = h(x(t)) + \varepsilon\varphi(x(t))\eta(t),$$

где $y, h(x) \in R^r$, $\varphi(x)$ — $r \times q$ -матричная функция, $\eta(t)$ — белый гауссовский q -векторный шум, некоррелированный с $\xi(t)$, удовлетворяющий $E\eta(t) = 0$, $E\eta(t)\eta^\top(\tau) = \delta(t - \tau)I$. В этом случае будем использовать следующий регулятор:

$$u = K(y - h(\bar{x})) = K(h(x) - h(\bar{x})) + \varepsilon K\varphi(x)\eta. \quad (2)$$

Динамика замкнутой системы (1) с регулятором (2) определяется уравнением

$$\dot{x} = f(x) + g(x)K(h(x) - h(\bar{x})) + \varepsilon(g(x)K\varphi(x)\eta(t) + \sigma(x)\xi(t)). \quad (3)$$

В анализе стохастической чувствительности равновесия \bar{x} будем использовать асимптотику

$$z(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}$$

отклонений решений $x^\varepsilon(t)$ замкнутой системы (3) от равновесия \bar{x} . Для $z(t)$ запишем динамическую систему

$$\dot{z} = (F + BKC)z + BKR\eta + G\xi, \quad (4)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad C = \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}), \quad B = g(\bar{x}), \quad R = \varphi(\bar{x}), \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Множество матриц K , обеспечивающих экспоненциальную устойчивость равновесия \bar{x} детерминированной системы (3) (с $\varepsilon = 0$), имеет вид

$$\mathbb{K} = \{K | \operatorname{Re}\lambda_i(F + BKC) < 0\},$$

где $\lambda_i(F + BKC)$ — собственные числа матрицы $F + BKC$. Предполагается, что множество \mathbb{K} непусто.

При каждом $K \in \mathbb{K}$ существует предел

$$W = \lim_{t \rightarrow \infty} E(z(t)z^\top(t)).$$

Матрица W называется матрицей стохастической чувствительности [1] равновесия \bar{x} системы (3). Справедлива теорема

Теорема. Для любого $K \in \mathbb{K}$ матрица W стохастической чувствительности равновесия \bar{x} является единственным решением уравнения

$$\begin{aligned} (F + BKC)W + W(F + BKC)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S &= 0, \\ \Phi &= RR^\top, \quad S = GG^\top. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через \mathbb{M} множество симметрических положительно определенных $n \times n$ -матриц. Для любого $K \in \mathbb{K}$ регулятор (2) формирует матрицу стохастической чувствительности W_K — решение уравнения (5).

Задача синтеза стохастической чувствительности. Для заданной матрицы $W \in \mathbb{M}$ найти матрицу $K \in \mathbb{K}$ такую, что $W_K = W$, где W_K — решение уравнения (5).

Для случая полной информации задача синтеза матрицы стохастической чувствительности исследована в [2, 3]. Задача синтеза для дискретных систем с неполной информацией рассматривалась в [4].

В докладе обсуждаются вопросы достижимости и алгоритмы решения задачи синтеза назначенной стохастической чувствительности в системе (1) при неполной информации (2). Приводятся примеры, иллюстрирующие разработанную теорию.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00165.

- [1] Башкирцева И.А., Первалова Т.В. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя – цикл // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 53–69. DOI: 10.1134/S0005117907100062
- [2] Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А. Об управлении стохастической чувствительностью // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 78–89. DOI: 10.1134/S0005117908070084
- [3] Bashkirtseva I. Attainability analysis in the stochastic sensitivity control // International Journal of Control. 2015. V. 88. P. 276–284. DOI: 10.1080/00207179.2014.949870
- [4] Bashkirtseva I. Method of stochastic sensitivity synthesis in a stabilisation problem for nonlinear discrete systems with incomplete information // International Journal of Control. 2017. V. 90. P. 1652–1663. DOI: 10.1080/00207179.2016.1216608

Смещённые оценки в задаче траекторной фильтрации, определение нижней границы возможной точности

Д. А. Бедин¹

e-mail: bedin@imm.uran.ru

1. Траекторная фильтрация

Задача траекторной фильтрации (траекторного слежения, trajectory tracking) [1] в самой простой постановке состоит в выработке оценки \hat{x}_i положения $x(t_i)$ некоторого движущегося на плоскости \mathbb{R}^2 объекта в момент времени t_i по неточным измерениям

$$z_j^x = x(t_j) + \eta_j$$

его положения в предшествующие моменты времени t_j , $1 \leq j \leq i$. Здесь η_j — случайная ошибка измерения, которую полагаем нормально распределённой: $\eta_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$. Символ x у измерений z^x обозначает то, что они порождены траекторией $x(\cdot)$.

Под точностью фильтрации будем понимать среднеквадратичное отклонение $\mathbf{E} \{ \|\hat{x}_i - x(t_i)\|^2 \}$.

Определение 1. *Нижней границей точности* [2] для заданной траектории $x(\cdot)$ из множества возможных траекторий $\mathcal{X} \ni x(\cdot)$ называют величину J , для которой неравенство

$$\mathbf{E} \{ \|\hat{x}_i(Z_i^x) - x(t_i)\|^2 \} \geq J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}(\mathcal{X})) \quad (1)$$

справедливо при любых возможных оценках \hat{x}_i из некоторого заданного класса $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ отображений

$$Z_i^x = [z_1^x \quad \cdots \quad z_j^x \quad \cdots \quad z_i^x]^\top \mapsto \hat{x}_i(Z_i^x).$$

Отметим, что у класса оценок $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ проставлена зависимость от множества траекторий \mathcal{X} , поскольку класс обычно определяют как множество оценок, обладающих каким-то глобальным свойством по отношению ко всем $x'(\cdot) \in \mathcal{X}$.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

В исследованиях (например, [3, 4, 6]) стремятся предьявить в качестве J формулу, дающую значения, по возможности близкие к точной нижней грани среднеквадратичного отклонения

$$\inf_{\hat{x}_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})} \mathbf{E} \left\{ \|\hat{x}_i(Z_i^x) - x(t_i)\|^2 \right\}, \quad (2)$$

а в идеале самую точную нижнюю грань. Также важно найти оценку \hat{x}_i (или последовательность оценок), превращающую неравенство (1) в равенство.

2. Нижние границы точности

Известно [2, 3], что нижняя граница точности в классе \mathcal{K}_m измеримых функций от Z_i^x равна нулю и достигается на тривиальной оценке $\hat{x}_i(Z_i^x) \equiv \text{const} = x(t_i)$, которую невозможно использовать никаким образом, поскольку $x(t_i)$ неизвестно для стороны, конструирующей оценку. Также и сама граница $J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}_m) = 0$ не даёт никакой новой информации о свойствах оценок, поскольку $\|\hat{x}_i - x(t_i)\|^2 \geq 0$ как квадрат вещественной величины. Для получения границ, отражающих свойства реальных оценок, необходимо задействовать более узкие классы \mathcal{K} .

Наиболее популярным классом, приводящим к конструктивным формулам нижней границы J , является класс $\mathcal{K}_u(\mathcal{X})$ несмещённых (в небайесовском смысле) оценок [2, 3], от которых требуется выполнение условия

$$\forall x'(\cdot) \in \mathcal{X} \quad \mathbf{E} \left\{ \hat{x}_i \left(Z_i^{x'} \right) \right\} = x'(t_i). \quad (3)$$

Самой известной нижней границей в таком классе является граница Рао – Крамера [2]. Однако для многих ситуаций [5, 6] формула Рао – Крамера не даёт нижнюю грань (2), и равенство в (1) не достигается. Так, автор ранее в [7] при помощи границ вида, отличающегося от границы Рао – Крамера [2, 4, 6], показал, что для важного класса $\mathcal{X}_{switch}^\theta$ траекторий с переключениями режимов [6], параметризованных некоторым векторным параметром θ , нижняя грань точности достигается на точности самих измерений:

$$J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}_u(\mathcal{X}_{switch}^\theta)) = \sigma^2.$$

Этот факт, а также то, что все реальные алгоритмы траекторной фильтрации являются смещёнными [1], побудил автора к исследованию смещённых оценок \hat{x}_i (то есть таких, для которых не выполняется (3)).

3. Эквивариантные оценки

В поиске класса оценок, приводящих к конструктивным формулам и подходящих для реальных программ траекторной фильтрации, был рассмотрен [8] класс $\mathcal{K}_e(\mathcal{X})$ эквивариантных оценок. Впервые этот класс был введён, по-видимому, Леманом [2] и состоит из оценок \hat{x}_i , реагирующих на группу преобразований измерений Z_i согласованным образом (в определении этого свойства закрепление траектории $x(\cdot)$ не важно, поэтому Z_i не снабжено значком x).

Пусть задано аффинное преобразование на плоскости

$$x' = A_q x + a_q \quad (4)$$

с зависящими от одномерного параметра q матрицей A_q и вектором сдвига a_q . Введём обозначение

$$\mathfrak{A}_q Z_i + \mathfrak{a}_q = [A_q z_1 + a_q \quad \cdots \quad A_q z_i + a_q]^T.$$

Определение 2. Оценка \hat{x}_i называется *эквивариантной*, если

$$\forall Z_i \quad \hat{x}_i(\mathfrak{A}_q Z_i + \mathfrak{a}_q) = A_q \hat{x}_i(Z_i) + a_q. \quad (5)$$

Условие (5) можно в какой-то мере считать ослабленным условием (3), поскольку последнее требует чувствительности оценки \hat{x}_i к любым движениям конца траектории $x(t_i)$, а условие (5) предполагает обязательную реакцию оценки \hat{x}_i только на согласованные движения вида (4) сразу всех измерений Z_i .

В работе [8] был введён класс $\mathcal{K}_{el}(\mathcal{X})$ линейных эквивариантных оценок, то есть оценок со свойством (5), имеющих вид

$$\hat{x}_i(Z_i) = \sum_{j=1}^i L_j z_j = L Z_i.$$

К настоящему времени доказана следующая

Теорема. Для движений с переключениями $\mathcal{X}_{switch}^\theta$, допускающих m групп преобразований вида (4), среди которых есть преобразование масштаба ($A_q = qI$, $a_q = 0$), нижняя грань точности эквивариантных оценок $\hat{x}_i \in \mathcal{K}_e(\mathcal{X}_{switch}^\theta)$ достигается на линейной эквивариантной оценке $\hat{x}_i \in \mathcal{K}_{el}(\mathcal{X}_{switch}^\theta)$. Таким образом, имеется совпадение

$$\begin{aligned} J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}_e(\mathcal{X}_{switch}^\theta)) &= J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}_{el}(\mathcal{X}_{switch}^\theta)) = \\ &= \inf_{\hat{x}_i \in \mathcal{K}_e(\mathcal{X}_{switch}^\theta)} \mathbf{E} \{ \|\hat{x}_i(Z_i^x) - x(t_i)\|^2 \}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы снабжено конструктивными формулами вычисления $J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}_e(\mathcal{X}_{switch}^\theta))$ и $J(t_i, x(\cdot), \mathcal{K}_{el}(\mathcal{X}_{switch}^\theta))$, позволяющими эффективно рассчитывать нижнюю границу в задачах траекторной фильтрации.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

- [1] *Bar-Shalom Y., Blair W.D.* Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances. Vol. III. Artech House, 2000.
- [2] *Lehmann E.L., Casella G.* Theory of Point Estimation, Second Edition. Springer Texts in Statistics. New York: Springer, 1998.
- [3] *Ибрагимов И.А., Хасъминский П.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука. 1979.
- [4] *Abel J.S.* A bound on mean-square-estimate error // IEEE Transactions on Information Theory, 1993. V. 39, no. 5. P. 1675–1680.
- [5] *Knockaert L.* The Barankin bound and threshold behavior in frequency estimation // IEEE Transactions on Signal Processing, 1997. V. 45, no. 9. P. 2398–2401.
- [6] *La Rosa P.S., Renaux A., Muravchik C.H., Nehorai A.* Barankin-Type Lower Bound on Multiple Change-Point Estimation // IEEE Transactions on Signal Processing, 2010. V. 58, no. 11. P. 5534–5549.
- [7] *Бедин Д.А.* Нижняя граница точности несмещённых оценок конца траектории для движения с переключениями // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): Матер. межд. конф., посв. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского, 16–19 сентября 2019. Екатеринбург: 2019. С. 56–59.
- [8] *Бедин Д.А.* Линейные эквивариантные оценки в задаче траекторного слежения // Теория управления и математическое моделирование: Матер. Всерос. конф., посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г. Ижевск: «Удмуртский университет», 2020. С. 249–250.

Оптимизация матрицы переходных вероятностей для метода ИММ траекторного слежения

Д. А. Бедин¹, А. Г. Иванов¹

e-mail: bedin@imm.uran.ru, iagsoft@imm.uran.ru

1. Задача траекторного слежения

Рассмотрим следующую постановку задачи наблюдения за подвижным объектом. В дискретные моменты времени $\{t_i\}_{i=1}^n$ производятся неточные измерения

$$y_i = x(t_i) + w_i$$

положения объекта, движущегося по траектории $x(\cdot)$. Ограничимся исследованием плоского движения: $y_i, x(t_i), w_i \in \mathbb{R}^2$. Вектор w_i есть ошибка измерения, будем считать её гауссовской: $w_i \sim \mathcal{N}(0, W_i)$. Последовательность матриц ковариаций W_i задана заранее. Задача траекторного слежения (trajectory tracking, [1]) состоит в том, чтобы по измерениям $\{y_i\}_{i=1}^j$, известным до текущего момента времени t_j , получить оценку \hat{x}_j положения $x(t_i)$, близкую к нему в некоторой метрике.

Для траекторного слежения применяют разные алгоритмы в зависимости от того, насколько сложно устроены возможные траектории $x(\cdot)$. Если динамика движения задана в виде

$$x(t_i) = Ax(t_{i-1}) + v_i, \quad (1)$$

где A — известная матрица, а v_i — случайная величина, называемая шумом системы, оптимальным в смысле минимизации среднеквадратичной ошибки $\mathbf{E}\{\|\hat{x}_i - x(t_i)\|^2\}$ является фильтр Калмана [1].

В том случае, если движение предполагает переключения между различными вариантами динамики (1), успешно применяют алгоритмы, основанные на скрытых марковских моделях [2]. Наиболее популярным из них в настоящее время является метод Interacting Multiple Model (ИММ), ставший де-факто стандартом в области траекторного слежения за самолётами (в программах для диспетчерских служб воздушного движения).

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

2. Оптимизация вероятностей перехода

Работа алгоритма ИММ во многом определяется его внутренними параметрами. Значимыми параметрами являются характеристики шумов системы и матрицы A для нескольких вариантов динамики (1) (обозначим их число символом m). Но ещё сильнее свойства трека оценок $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^n$ зависят от матрицы $P = [p_{kj}]_{k,j=1}^m$ переходных вероятностей. Её элементы задают вероятности переключения между различными вариантами динамики: p_{kj} — вероятность смены динамики k динамикой j . Возникает задача оптимизации параметров матрицы P с целью улучшить общее качество траекторного слежения.

Ранее авторами была разработана программа оптимизации алгоритмов траекторного слежения [3]. Основу программы составляет генетический алгоритм оптимизации [4]. В настоящее время программа адаптирована для подбора параметров метода ИММ, о чём сообщалось в [5].

При оптимизации параметров матрицы переходных вероятностей авторы столкнулись с тем, что генетические алгоритмы плохо приспособлены к ограничениям типа равенств (из-за процедуры случайной мутации, сводящейся к сдвигу параметров на случайный вектор), в то время как для вероятностей перехода p_{kj} справедливо

$$\sum_{\ell=1}^m p_{k\ell} = 1, \quad p_{kj} \in [0, 1]. \quad (2)$$

Естественным решением было перейти к некоторой параметризации $p_{kj} = f_{kj}(\varepsilon)$ величин $p_{k\ell}$ при помощи нового вектора параметров ε . Новая параметризация должна быть такой, чтобы для вектора ε ограничений типа равенств уже не было, а условие (2) выполнялось автоматически по свойствам функций f_{kj} . Кроме того, важно, чтобы ограничения типа неравенств на новые параметры ε имели как можно более простой вид, например, $\varepsilon_{kj} \in [a, b]$.

3. Варианты параметризации матрицы P

Первоначально была выбрана следующая параметризация:

$$\begin{aligned}
 p_{k1} &= (1 - \varepsilon_{k2})(1 - \varepsilon_{k3}) \cdots (1 - \varepsilon_{km}), \\
 p_{k2} &= \varepsilon_{k2}(1 - \varepsilon_{k3}) \cdots (1 - \varepsilon_{km}), \\
 &\vdots \\
 p_{k(m-1)} &= \varepsilon_{k(m-1)}(1 - \varepsilon_{km}), \\
 p_{km} &= \varepsilon_{km}, \\
 \varepsilon_{kj} &\in [0, 1], \quad j = \overline{2, m}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

С её помощью было получено улучшение качества работы программы траекторного слежения. Однако, начиная с некоторой итерации генетического алгоритма, улучшение качества замедлилось, а матрица P , восстановленная по параметрам ε , почти перестала изменяться.

Была высказана гипотеза, что замедление оптимизации происходит по причине того, что преобразование (3) неравномерно отображает параметры $\varepsilon_{k\ell}$ в параметры p_{kj} . Так, если для вектора $\varepsilon_k = [\varepsilon_{k1} \cdots \varepsilon_{k(m-1)}]^\top$ задать равномерное распределение на множестве $[0, 1]^{m-1}$, то после отображения по правилу (3) распределение вектора $p_k = [p_{k1} \cdots p_{km}]^\top$ на симплексе (2) уже не будет равномерным. При этом сосредоточение распределения будет наблюдаться в сторону p_{kj} с большими номерами j . Такому же влиянию должно быть подвержено и распределение точек популяции генетического алгоритма.

Состояние популяции в реальных расчётах косвенно подтверждает такую гипотезу. Для преодоления указанной проблемы потребовалась новая параметризация, «равномерно» отображающая пространство параметров на симплекс (2).

Известно [6], что равномерное распределение на симплексе (2) можно моделировать при помощи распределения Дирихле $\mathbf{Dir}(\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_m = 1)$, которое в свою очередь моделируется при помощи экспоненциального распределения:

$$\varepsilon'_{kj} \sim \mathbf{Exp}(1) \implies \left(\frac{\varepsilon'_{k1}}{\sum_{\ell=1}^m \varepsilon'_{k\ell}}, \dots, \frac{\varepsilon'_{km}}{\sum_{\ell=1}^m \varepsilon'_{k\ell}} \right) \sim \mathbf{Dir}(1, \dots, 1).$$

Последнее, используя метод обратного преобразования [7], можно получить при помощи замены $\varepsilon'_{kj} = -\log \varepsilon_{kj}$ из равномерного рас-

пределённых на полуинтервале $(0, 1]$ величин $\varepsilon_{kj} \sim \mathbf{U}(0, 1]$. В итоге, получаем следующую параметризацию:

$$p_{kj} = \frac{-\log \varepsilon_{kj}}{-\sum_{\ell=1}^m \log \varepsilon_{k\ell}}, \quad \varepsilon_{kj} \in (0, 1]. \quad (4)$$

4. Заключение

Применение параметризации (4) в программе оптимизации позволило улучшить результаты траекторного слежения по сравнению с версией, использующей параметризацию (3). Примечательно, что в популяции генетического алгоритма при новой параметризации были представлены особи с достаточно разнообразными значениями матрицы P .

- [1] *Bar-Shalom Y., Blair W.D.* Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances. Vol. III. Artech House, 2000.
- [2] *Li X.R., Jilkov V.P.* Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2005. V. 41, no. 4. P. 1255–1321. DOI: 10.1109/TAES.2005.1561886
- [3] *Bedin D., Ivanov A.* The Use of a Genetic Algorithm for Parameter Adjustment of the Multi-Hypothesis Aircraft Tracking Algorithm // 2019 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS): Proceedings of International Conference, Saint Petersburg, Russia, May 27–29, 2019. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS.2019.8769413
- [4] *Michalewicz Z.* Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- [5] *Бедин Д.А., Иванов А.Г., Ганебный С.А.* Задача оценки траектории самолета, улучшение точности при помощи генетического алгоритма // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всерос. конф., посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г. Ижевск: Изд. «Удмуртский университет», 2020. С. 251–252.
- [6] *Reed W.J.* Random points in a simplex // Pacific J. Math. 1974. Vol. 54, no. 2. P. 183–198.
- [7] *Devroye L.* Non-Uniform Random Variate Generation. New York: Springer-Verlag, 1986.

Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи

С. Бенараб¹

e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Обозначим через AC^n пространство абсолютно непрерывных n -мерных функций. Пусть заданы функции $f_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. Для системы дифференциальных уравнений

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

в докладе получены условия разрешимости периодической краевой задачи.

Пусть задана диагональная $n \times n$ матрица $\lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены условия

1) при $i = \overline{1, n}$, п.в. $t \in [0, 1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, функция $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает и непрерывна справа по каждому аргументу x_1, \dots, x_n , функция $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ не возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу v_1, \dots, v_n , функция $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна;

2) для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что

$$\nu(0) - \nu(1) \geq \eta(0) - \eta(1), \quad \dot{\nu} - \lambda\nu \geq \dot{\eta} - \lambda\eta,$$

выполнены неравенства

$$\begin{aligned} f_i(t, \nu, v + \lambda\nu, y_i + \lambda_i\nu_i) &\geq 0, \\ f_i(t, \eta, v + \lambda\eta, y_i + \lambda_i\eta_i) &\leq 0 \end{aligned}$$

при $i = \overline{1, n}$ и п.в. $t \in [0, 1]$.

¹Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$\eta(0) - \eta(1) \leq A \leq \nu(0) - \nu(1),$$

существует решение $x \in AC^n$ краевой задачи для системы (1) с условием

$$x(0) - x(1) = A,$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} - \lambda\eta \leq \dot{x} - \lambda x \leq \dot{\nu} - \lambda\nu.$$

Сформулированная теорема обобщает теорему Чаплыгина [1] на периодическую краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Доказательство этой теоремы использует результаты работы [2].

- [1] Чаплыгин С.А. Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений / М., 1919. Собрание сочинений I. Гостехиздат. 1948. С. 348–368.
- [2] Бенараб С., Жуковский Е.С. Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 10–16. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16

Экстремальные принципы эволюционной адаптации в математических моделях репликаторных систем

А. С. Братусь^{1,2}, *С. В. Дрожжин*³, *Т. С. Якушкина*⁴

e-mail: alexander.bratus@yandex.ru

Модели репликаторных систем были предложены в работах М. Эйгена и П. Шустера [1] для описания процессов динамики и эволюции сообщества сложных макромолекул. С математической точки зрения эти системы образуют специальный класс систем нелинейных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности.

Особый интерес представляет система гиперциклической репликации, в которой воспроизводство каждой макромолекулы происходит с помощью предыдущей в замкнутом цикле. Эта система обладает замечательными математическими свойствами, которые соответствуют основным постулатам триады Ч. Дарвина: наследственность, изменчивость, естественный отбор. Все это дало основание рассматривать такую систему в качестве математической модели, так называемой, предбиологической эволюции, которая могла привести к появлению сложных самовоспроизводящихся макромолекул, подобных макромолекулам РНК. Однако успеху этой теории помешало одно существенное обстоятельство: система гиперцикла неустойчива по отношению к воздействию паразитических макромолекул, которые пользуются ресурсами системы, ничего не отдавая взамен.

В докладе рассматривается математическая модель эволюционной адаптации репликаторных систем, основанная на утверждении фундаментальной теоремы о естественном отборе Р. Фишера о том, что любая биологическая система в процессе эволюции стремится к увеличению величины средней приспособленности (фитнеса). С позиции математики теорема Фишера постулирует существова-

¹Российский университет транспорта, Москва

²Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

³Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

⁴Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

ние функции ляпуновского типа, которая монотонно растет вдоль траекторий системы.

В теоретической биологии широко используется визуальное представление ландшафта средней приспособленности в виде стационарного геометрического объекта, состоящего из возвышенностей и впадин, а сам процесс эволюции видов отмечается траекторией, которая, несмотря на временное снижение, через перевалы устремляется к одной из вершин этого ландшафта [2].

Основная гипотеза предлагаемой модели эволюционной адаптации заключается в предположении о том, что эволюционное изменение ландшафта приспособленности репликаторной системы может происходить во времени, которое много раз более медленное, чем время активной динамики системы, причем это изменение происходит в соответствии с постулатом основной теоремы естественного отбора Р. Фишера, то есть с целью максимизации функции средней приспособленности. Показано, что тогда процесс эволюционной адаптации может быть сведен к решению последовательности задач математического программирования.

Найдены необходимые и достаточные условия достижения локального экстремума функции средней приспособленности (фитнеса). Приводятся примеры эволюционной адаптации гиперциклов, а также других репликаторных систем, полученные в результате многочисленных численных экспериментов [3, 4]. Показано, что система гиперцикла в результате предложенного процесса эволюционной адаптации становится устойчивой (резистентной) по отношению к паразитическим макромолекулам, от воздействия которых она погибала до момента эволюционного изменения. Отдельно рассмотрены задачи эволюционной адаптации ландшафта приспособленности, так называемых, открытых репликаторных систем при изменении показателей смертности видов [5–7]. В этом случае, предложенный алгоритм эволюционной адаптации гарантирует достижение глобального максимума функции средней приспособленности.

- [1] *Eigen M., Shuster P.* A principle of natural self-organization // *Naturwissenschaften.* 1977, no. 64(11). P. 541–565.
- [2] *Birch J.* Natural selection and the maximization of fitness // *Biological Reviews.* 2016, no. 91(3). P. 712–727

- [3] *Bratus A., Drozhzhin S., Yakushkina T.* On the evolution of hypercycles // *Mathematical Biosciences*. 2018, no. 306. P. 119–125. DOI: 10.1016/j.mbs.2018.09.001
- [4] *Bratus A., Semenov Yu., Novozhilov A.* Adaptive fitness landscape for replicator systems: to maximize or not maximize. *Mathematical modelling of natural phenomena*. 2018. DOI: 10.1051/mmnp/2018040
- [5] *Bratus A., Novozhilov A., Semenov Yu.* Linear algebra of the permutation invariant Crow-Kimura model of prebiotic evolution // *Mathematical Biosciences*. 2014, no. 256. P. 42–57.
- [6] *Bratus A., Novozhilov A., Semenov Yu.* Rigorous Mathematical Analysis in Quasispecies Model: From Manfred Eigen to the Recent Development / *Advance Mathematical Methods in Bioscience and Application*. Springer, 2019. P. 27–51. DOI: 10.1007/978-3-030-15715-9
- [7] *Yegorov I., Novozhilov A., Bratus A.* Open quasispecies models: optimization, and distributed extension // *Journal of Mathematics and Application*. 2020. Vol. 481, issue 2. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123477

Условие типа Каристи в задаче о минимуме отображений при ограничениях

Е. О. Бурлаков^{1,2}, *Е. С. Жуковский*^{1,2}, *И. Д. Серова*¹
e-mail: eb_@bk.ru, zukovskys@mail.ru, irinka_36@mail.ru

В работе [1] определено условие типа Каристи и показано, что при выполнении этого условия полунепрерывная снизу функция, заданная на метрическом пространстве, достигает инфимума. Это утверждение в [1] применено к исследованию неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств. В работе [2] определено условие типа Каристи для отображений, дей-

¹Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

²Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

ствующих в частично упорядоченных пространствах, и доказано утверждение о достижении отображением, удовлетворяющем этому условию, минимальной точки. Из этого утверждения выводятся [1, теорема 3] и некоторые известные утверждения о неподвижных точках и точках совпадения отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах (в частности, полученные в работах [3–6]).

В докладе предлагается условие типа Каристи для задачи о минимуме отображений в метрических и частично упорядоченных пространствах при ограничениях в виде включений. Сформулируем рассматриваемую задачу для отображений метрических пространств.

Пусть $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, пространство X предполагается полным. Пусть заданы: ограниченная снизу функция $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ (т. е. для некоторого γ выполнено $U(x) \geq \gamma$ при всех $x \in X$), многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$ такое, что при любом $x \in X$ множество $G(x) \neq \emptyset$ замкнуто в Y , и элемент $y \in Y$.

Рассмотрим задачу о достижении функцией U своего наименьшего значения в точке $x = \xi \in X$, удовлетворяющей включению

$$G(x) \ni y. \quad (1)$$

Будем предполагать, что для любой сходящейся к некоторому $x \in X$ последовательности $\{x_i\} \subset X$, если числовая последовательность $\{U(x_i)\}$ убывает, то $\lim_{i \rightarrow \infty} U(x_i) \geq U(x)$.

Для произвольного $x \in X$ обозначим

$$I_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } U(x) \neq \gamma, \\ 0, & \text{если } U(x) = \gamma; \end{cases} \quad I_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \notin G(x), \\ 0, & \text{если } y \in G(x). \end{cases}$$

Теорема. Пусть многозначное отображение G является h -полунепрерывным сверху и выполнено условие:

существуют $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что для любого $x \in X$, если $U(x) \neq \gamma$ или $y \notin G(x)$, то существует $x' \in X$, $x' \neq x$, который удовлетворяет неравенствам

$$U(x') \leq U(x) - k_1 I_1(x) \rho_X(x, x'),$$

$$\rho_Y(y, G(x')) \leq \rho_Y(y, G(x)) - k_2 I_2(x) \rho_X(x, x').$$

Тогда для любого $x_0 \in X$ существует решение $x = \xi \in X$ включения (1) такое, что $U(\xi) = \gamma$ и справедлива оценка

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \max \left\{ \frac{1}{k_1} (U(x_0) - \gamma), \frac{1}{k_2} \rho_Y(y, G(x_0)) \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-04-60524, и РНФ, проект № 20-11-20131.

- [1] *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 30–44. DOI: 10.1134/S0371968515040032
- [2] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. V. 180, no. 1. P. 48–61. DOI: 10.1007/s10957-018-1413-3
- [3] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179, no. 1. P. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013
- [4] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.044
- [5] *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453, № 5. С. 475–478. DOI: 10.7868/S086956521335003X
- [6] *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. 2013. Т. 453, № 6. С. 595–598. DOI: 10.7868/S0869565213360036

Визуализация движений, идущих по границе трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса

П. А. Васёв¹, А. А. Федотов¹

e-mail: pavel.vasev@gmail.com, andreyfedotov@mail.ru

1. Динамика машины Дубинса на плоскости x, y с симметричными ограничениями на управление описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [-1, 1].\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения объекта; φ – угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x ; u – скалярное управление. Величина линейной скорости равна единице. Предполагается, что $\varphi \in (-\infty, \infty)$.

Множеством достижимости $G(t)$ в момент t называем совокупность всех точек трёхмерного фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в силу системы (1) в момент t из заданного начального фазового состояния при помощи некоторого допустимого управления. Начальный момент и начальное фазовое состояние полагаем нулевыми. В качестве допустимых управлений принимаем кусочно-постоянные функции времени со значениями из отрезка $[-1, 1]$.

Описание трёхмерных множеств достижимости для рассматриваемой динамики получено в статьях [1, 2]. В настоящее время проводятся работы по визуализации трёхмерных множеств достижимости для машины Дубинса. Начальная стадия таких исследований отражена в [3].

Цель данной работы – продемонстрировать визуализацию экстремальных движений (с возможностью анимации по времени), удовлетворяющих Принципу максимума Понтрягина, которые идут по границе трёхмерного множества достижимости. Разработанный инструмент позволяет видеть расположение текущей фазовой точки $(x(t), y(t), \varphi(t))$ траектории на границе множества достижимо-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

сти $G(t)$, соответствующего данному моменту времени. Наглядно можно проследить, в какие моменты движение находится на гладком участке границы, в какие – на ребре негладкости границы и т.д.

Представляют интерес траектории, которые после некоторого соответствующего момента времени t_* уже не могут быть продолжены движениями, идущими по границе множества достижимости: для любого допустимого управления при $t > t_*$ движение оказывается во внутренней части множества достижимости. Возможны также ситуации, когда экстремальное движение, ведущее в некоторый момент t_f в некоторую точку на границе множества $G(t_f)$, не является единственным, причём расщепление движений происходит не обязательно в начальный момент времени. Таким образом, имеем дело с пучком экстремальных движений, выходящих в момент t_0 из одной и той же фазовой точки и приходящих в момент t_f также в одну и ту же фазовую точку.

2. Использовался специальный инструмент визуализации 38parrots [4], адаптированный для задачи визуализации множеств достижимости. Программа 38parrots – это веб-приложение, загружающее сцены визуализации с машины пользователя или по сети, включая сеть Интернет. Сцена описывается в текстовом формате CinemaScience [5] и интерпретируется следующим образом: для каждого параметра автоматически создается элемент управления типа “ползунок”, а для каждого артефакта определяется вид отображения (точки, отрезки, треугольники, сферы, vrml-файлы и т.д.).

Пользователь, указывая значения параметров, тем самым определяет список данных для артефактов, что и формирует текущий визуальный образ.

Для решаемой в настоящей работе задачи визуализации описание сцены имеет следующий вид:

```
T, FILE_vrml_mnoj, FILE_treki_all, FILE_treki_currentT
1.00,  Symm-20.vrml, treki.csv, pts_1.00.treki.csv
1.05,  Symm-21.vrml, treki.csv, pts_1.05.treki.csv
1.10,  Symm-22.vrml, treki.csv, pts_1.10.treki.csv
...
```

В данной сцене определены один параметр T и три артефакта: $FILE_vrml_mnoj$, $FILE_treki_all$, $FILE_treki_currentT$. Для первого артефакта в его названии закодирован вид отображения vrml, что означает загрузку и визуализацию данных в формате vrml, ко-

торый использован для хранения образа границы множества достижимости. Для второго и третьего артефактов вид отображения *treki* представляет собой специальный формат визуализации траекторий. Пользователь выбирает в автоматически созданном графическом интерфейсе значение T , программа вычисляет соответствующие значения имен файлов артефактов и передает их видам отображения.

В результате графическое представление приобретает необходимый вид: поверхности, составляющие границу множества достижимости для выбранного момента времени; точки траекторий; точки, соответствующие текущему моменту.

Специально разработанный вид отображения *treki* требует на вход файл в формате csv с колонками X , Y , F_i и отображает каждую строчку этого файла в виде точки в сцене. Кроме того, он реагирует на колонку N (номер траектории); в графическом интерфейсе можно выбрать значение N и увидеть только точки соответствующей траектории. В дальнейшем можно расширить этот вид отображения, например, соединяя точки траекторий отрезками.

3. Используемый подход позволяет описывать разнообразные сцены. Применяемая семантика выбора значений параметров и загрузки соответствующих им файлов для видов отображения может быть задействована при решении широкого круга задач визуализации.

Дополнительно используется система фильтров – графических преобразователей, которые стыкуются в цепочку. Для задачи визуализации множества достижимости, особенно для удобства восприятия структуры границы множества, оказались полезными следующие фильтры: сечение полупространством, серия сечений, подкраска сечений/краев и другие.

Среди других преимуществ подхода – автоматическая возможность создания анимационных фильмов на основе параметров, заданных во входных файлах.

4. Особенный интерес представляет задача автоматического масштабирования. Дело в том, что множество достижимости растет слишком быстро с точки зрения восприятия человеческим глазом. Для компенсации этого предложен следующий метод: визуализировать не абсолютные значения координат множества достижимости, а масштабированные в зависимости от времени T . Таким образом, например, можно добиться того, чтобы визуальный образ

множества увеличивался с ростом T , но не так быстро, как истинное множество. Это позволяет, с одной стороны, спокойно изучать его структуру, а с другой стороны, соответствует ожиданию, что множество должно “расти”.

Технически визуализация в настоящей работе построена из двух компонент: расчётная и визуализирующая. Расчётная производит вычисление и формирует файлы в описанном выше формате. Визуализирующая загружает их и изображает, обеспечивая интерактивное восприятие с помощью визуального канала, включая применение графических фильтров. По сути, расчётная и рисующая части – это участники единого конвейера визуализации, на входе которого находятся параметры расчётов, а на выходе – интерактивные образы на экране.

Для реализации метода перемасштабирования изначально использовалась расчётная часть. В настоящее время ведётся доработка программы визуализации, чтобы и она могла решать эту задачу.

5. Особенностью 38parrots является реализация графики на основе WebGL, что позволяет не только использовать возможности видеоускорителя для рендеринга, но и обеспечивает стыковку с технологиями виртуальной реальности WebVR. Мы наблюдали множества достижимости в виртуальной реальности, и, кроме положительных эффектов для восприятия, пришли к выводу, что работа в ней требует привлечения дополнительных методов, повышающих удобство навигации в графическом пространстве и удобство управления фильтрами.

Программа визуализации множеств достижимости доступна в среде Интернет по адресу <http://viewlang.ru/dubins/>. В докладе будут представлены результаты анимации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00410.

- [1] Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТИСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
- [2] Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 182–197.
- [3] Васёв П.А., Федотов А.А. Визуализация трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса / Материалы Все-

российской конференции с международным участием “Теория управления и математическое моделирование”, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск. 2020. С. 264–265.

[4] URL: <https://38parrots.viewlang.ru>

[5] URL: <https://cinemascience.org>

Минимаксные решения уравнений Гамильтона – Якоби с коинвариантными производными дробного порядка

М. И. Гомоюнов¹

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Работа посвящена доказательству существования и единственности минимаксного решения (см., например, [1, 2]) задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с коинвариантными производными дробного порядка [3].

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество AC^α функций $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде $x(\xi) = x(0) + (I^\alpha f)(\xi)$, $\xi \in [0, T]$, для некоторой своей измеримой ограниченной функции $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Здесь через I^α обозначен оператор интегрирования Римана – Лиувилля порядка α (см. [4]). На множестве AC^α введем норму $\|x(\cdot)\|_\infty = \max\{\|x(\xi)\| : \xi \in [0, T]\}$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n .

Функционал $\varphi : [0, T] \times AC^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ называется [3] коинвариантно (*ci*-) дифференцируемым порядка α в точке $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times AC^\alpha$, если найдутся такие $\partial_t^\alpha \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, что для любой функции $y(\cdot) \in AC^\alpha$, удовлетворяющей условию $y(\xi) = x(\xi)$, $\xi \in [0, t]$, при всех $\tau \in (t, T)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \\ & = \partial_t^\alpha \varphi(t, x(\cdot))(\tau - t) + \int_t^\tau \langle \nabla^\alpha \varphi(t, x(\cdot)), ({}^C D^\alpha y)(\xi) \rangle d\xi + o(\tau - t), \end{aligned}$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

где $o(\tau - t)/(\tau - t) \rightarrow 0$ при $\tau \downarrow t$, через ${}^C D^\alpha$ обозначен оператор дифференцирования Капуто порядка α (см. [4]), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Величины $\partial_t^\alpha \varphi(t, x(\cdot))$ и $\nabla^\alpha \varphi(t, x(\cdot))$ называются ci -производными порядка α функционала φ в точке $(t, x(\cdot))$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона – Якоби

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha \varphi(t, x(\cdot)) + H(t, x(t), \nabla^\alpha \varphi(t, x(\cdot))) &= 0, \\ (t, x(\cdot)) &\in [0, T] \times AC^\alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

и краевого условия

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in AC^\alpha. \quad (2)$$

Искомым является функционал $\varphi : [0, T] \times AC^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий свойством неупреждаемости: если $t \in [0, T]$ и $x(\cdot), y(\cdot) \in AC^\alpha$ удовлетворяют равенству $x(\xi) = y(\xi)$, $\xi \in [0, t]$, то $\varphi(t, x(\cdot)) = \varphi(t, y(\cdot))$.

Задача (1), (2) изучается при следующих предположениях:

- (a) Гамильтониан $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и краевой функционал $\sigma : AC^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны.
- (b) Существует константа $c > 0$ такая, что для любых $t \in [0, T]$ и $x, s, s' \in \mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$|H(t, x, s) - H(t, x, s')| \leq c(1 + \|x\|)\|s - s'\|.$$

- (c) Для всякого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое число $\lambda > 0$, что, каковы бы ни были $t \in [0, T]$, $x, x' \in K$ и $s \in \mathbb{R}^n$, справедливо неравенство

$$|H(t, x, s) - H(t, x', s)| \leq \lambda(1 + \|s\|)\|x - x'\|.$$

Уравнения вида (1) возникают [3] при исследовании инфинитезимальных свойств функционала цены в задачах оптимального управления динамическими системами, эволюция которых описывается при помощи дифференциальных уравнений с производными Капуто порядка α . Однако, как правило, функционал цены не является достаточно гладким чтобы трактоваться как решение задачи (1), (2) в классическом смысле, что приводит к необходимости рассмотрения обобщенных решений этой задачи.

В работе для задачи (1), (2) развивается минимаксный подход (см., например, [1, 2]) к понятию обобщенного решения.

Определение. Минимаксным решением задачи (1), (2) назовем неупреждающий непрерывный функционал $\varphi : [0, T] \times AC^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, который удовлетворяет краевому условию (2) и обладает следующим свойством: каковы бы ни были $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times AC^\alpha$ и $s \in \mathbb{R}^n$, найдется функция $y(\cdot) \in AC^\alpha$ такая, что $y(\xi) = x(\xi)$ при $\xi \in [0, t]$, $\|({}^C D^\alpha y)(\xi)\| \leq c(1 + \|y(\xi)\|)$ при почти всех $\xi \in [t, T]$, и для каждого $\tau \in [t, T]$ имеет место равенство

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \int_t^\tau (\langle s, ({}^C D^\alpha y)(\xi) \rangle - H(\xi, y(\xi), s)) d\xi.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть выполнены предположения (a)–(c). Тогда минимаксное решение задачи (1), (2) существует и единственно.

Доказательство теоремы проводится в целом по схеме обоснования аналогичных утверждений для уравнений Гамильтона – Якоби с частными производными [1, теорема 8.1] и с ci -производными первого порядка [2, теорема 6.1], но с учетом специфических свойств операторов интегрирования и дифференцирования порядка α . В частности, существенное отличие составляет конструкция подходящего функционала Ляпунова – Красовского, удовлетворяющего определенному набору условий [2, замечание 15.1].

Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 19-71-00073.

- [1] *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first order PDEs. The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.
- [2] *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона – Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011.
- [3] *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // ArXiv:1908.01747. 2019.
- [4] *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.

Неустойчивость и стабилизация системы с линейным запаздыванием

Б. Г. Гребенщиков¹, А. Б. Ложников^{2,1}

e-mail: b.g.grebenshchikov@urfu.ru, a.b.lozhnikov@urfu.ru

1. Исследование асимптотических свойств некоторых систем с запаздыванием

Рассматривается управляемая система с линейным запаздыванием

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bx(\mu t) + Cu(t), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (1)$$

Здесь A, B — постоянные матрицы размерности $m \times m$, C — постоянная матрица размерности $m \times r$, $1 \leq r \leq m$; $x(t)$ — m -мерная вектор-функция времени t , определенная в момент $t_0 > 0$ начальной вектор-функцией $\varphi(\eta)$ на множестве $[\mu t_0, t_0]$; $u(t)$ — r -мерная вектор-функция управляющего воздействия, $t \geq t_0$.

Заменой аргумента $\tau = \ln(t)$ получаем из (1) систему с постоянным запаздыванием $\sigma = -\ln(\mu)$:

$$dz(\tau)/d\tau = e^\tau [Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma) + C\bar{u}(\tau)]. \quad (2)$$

Сведем данную систему к счетной системе дифференциальных уравнений на конечном промежутке времени $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$:

$$\varepsilon_n dz_{n+1}(\tau)/d\tau = e^\tau [Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau)], \quad z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma), \quad (3)$$

$$z_{n+1}(\tau_0) = z_n(\tau_0 + \sigma), \quad z_0(\tau) = \psi(\tau - \sigma), \quad \varepsilon_n = \mu^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, рассмотрим теперь сингулярную систему

$$\varepsilon dy(\tau)/d\tau = Ay(\tau) + By(\tau - \sigma) \quad (4)$$

(ε — малое положительное число). Ей будет соответствовать счетная система

$$\varepsilon dy_{n+1}(\tau)/d\tau = Ay_{n+1}(\tau) + By_n(\tau), \quad y_{n+1}(\tau_0) = y_n(\tau_0 + \sigma). \quad (5)$$

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Получим для системы (5) достаточные условия устойчивости и неустойчивости.

Введем норму вектора $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}^T$: $\|w\| = \max_{1 \leq k \leq m} |w_k|$ (Γ — символ транспонирования). Норму матрицы $S = \{s_{ij}\}$ определим в соответствии с нормой вектора. Наряду с нормой вектора определим норму вектор-функции на отрезке $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$: $\|w(\tau)\|_\sigma = \max_\tau \|w(\tau)\|$. При такой нормировке данное нормированное пространство будет банаховым пространством. Введем в нем оператор сдвига T_ε следующим образом:

$$T_\varepsilon f(s) = \exp\{A\tau\varepsilon^{-1}\} [\exp\{-A\tau_0\varepsilon^{-1}\}f(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\{-As\varepsilon^{-1}\}Bf(s)\varepsilon^{-1}ds].$$

Тогда решение счетной системы (5) можно представить в виде

$$y_{n+1}(\tau) = T_\varepsilon y_n(s).$$

Оператор T_ε является вполне непрерывным, следовательно, асимптотические свойства системы (5) зависят от собственных значений ν_j данного оператора. Комплексное число ν тогда и только тогда является собственным значением оператора T_ε , когда интегральное уравнение

$$\exp\{\nu A\tau\varepsilon^{-1}\} [\exp\{-\nu A\tau_0\varepsilon^{-1}\}y(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\{-\nu As\varepsilon^{-1}\}\varepsilon^{-1}By(s)ds] = \nu y(\tau)$$

имеет нетривиальное решение. Дифференцируя по τ , получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\nu}{\varepsilon} [Ay(\tau) + \nu^{-1}By(\tau)] = \nu dy(\tau)/d\tau.$$

Решением этого уравнения является выражение

$$y(\tau) = \exp\{\varepsilon^{-1}(A + \nu^{-1}B)(\tau - \tau_0)\}y(\tau_0),$$

откуда, ввиду граничных условий, имеем характеристическое уравнение

$$\det(\exp\{(A + B\nu^{-1})\frac{\sigma}{\nu}\} - \nu E) = 0 \quad (6)$$

(E — единичная матрица размерности $m \times m$). Пусть λ — собственные числа матрицы A и $\exists \lambda_0: Re(\lambda_0) > 0$. Тогда ввиду того, что $\nu_0 = \exp\{\frac{\lambda_0}{\varepsilon}\}$ является собственным числом матрицы $\exp\{\varepsilon^{-1}A\}$, в малой окрестности ν_0 уравнение (6) имеет вид

$$\det(\exp\{(A + O(\varepsilon))\frac{\sigma}{\varepsilon}\} - \nu E) = 0.$$

Следовательно, по теореме Руше в малой окрестности точки ν_0 найдется корень уравнения (6) больше единицы по модулю, то есть решение уравнения (4) неустойчиво. Пусть теперь для λ справедливо неравенство $Re(\lambda) < -H$, $H = \text{const}$, $H > 0$. Вследствие оценки $\|\exp\{\varepsilon^{-1}A(\tau - s)\}\| \leq M \exp\{-\varepsilon^{-1}H(\tau - s)\}$, $M = \text{const}$, $M > 1$, $\tau_0 < s < \tau \leq \tau_0 + \sigma$, оператор T_ε удовлетворяет оценке $\|T_\varepsilon\| < M(1 + \frac{\|B\|}{H})$. Стало быть, он равномерно ограничен при любом ε . Следовательно, $|\nu_j| \leq M(1 + \frac{\|B\|}{H})$.

Сделав замену $\nu = e^{\sigma\gamma}$: $-\frac{\pi}{2} < Im(\gamma) \leq \frac{\pi}{2}$, получаем из (6) характеристическое уравнение

$$\det\{A + B e^{-\sigma\gamma} - \gamma E\} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим поведение корней этого уравнения в комплексной области \bar{G} :

$$\bar{G}: 0 \leq Re(\gamma) \leq \ln[M(1 + \frac{\|B\|}{H})], \quad -\frac{\pi}{2} < Im(\gamma) \leq \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

(при достаточно малом $\varepsilon > 0$). Очевидно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в области \bar{G} корни уравнения (7) как угодно близки к корням вырожденного уравнения

$$\det\{A + B e^{-\sigma\gamma}\} = 0. \quad (9)$$

В области \bar{G} , при условии отсутствия корней $|\rho| \geq 1$, все корни уравнения (9) имеют отрицательную вещественную часть. С другой стороны, ввиду произведенной замены только в этой области и могли быть корни уравнения (7) с неотрицательной вещественной частью. Таким образом, решение системы (4) экспоненциально устойчиво. Наоборот, в случае существования корня ρ_0 следует, что в данной области найдется корень уравнения (7) с положительной вещественной частью. Следовательно, система (4) неустойчива. Эти достаточные условия устойчивости (и неустойчивости) совпадают с условиями асимптотической устойчивости (а также неустойчивости) и для системы (2).

2. Методы стабилизации некоторых систем

1) Пусть $Re(\lambda) < 0$, а система (1) неустойчива, или устойчива, но не асимптотически. Тогда проблему рассматриваем как задачу оптимальной стабилизации разностной системы

$$y_{n+1} = -A^{-1}By_n - A^{-1}Cv_n = A_2y_n + C_1v_n \quad (10)$$

с минимизацией функционала

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^T G y_j + v_j^T D v_j.$$

Здесь G и D — симметричные положительно определенные матрицы размерности, соответственно, $m \times m$ и $r \times r$. Искомое управление имеет вид

$$v_n^0 = [D + (C_1)^T P C_1]^{-1} (C_1)^T A_2 y_n = A_1 y_n,$$

где P — симметричная положительно определенная матрица, при этом

$$(A_2)^T P A_2 - P + G - ((C_1)^T P A_2)^T [D + (C_1)^T P C_1]^{-1} (C_1)^T P A_2 = 0.$$

Переходя к (1), получаем асимптотически устойчивую систему

$$dx(t)/dt = Ax(t) + (B + CA_1)x(\mu t).$$

2) Пусть имеется собственное число λ_0 : $Re(\lambda_0) > 0$. Стабилизируем систему без запаздывающих членов

$$dx_0(t)/dt = Ax_0(t) + Cu_0(t) \quad (11)$$

при законе стабилизации $u_0^0 = -C^T \Gamma x_0(t)$, Γ — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая нелинейному уравнению [1, с. 97]

$$\Gamma A + A^T \Gamma - 2\Gamma C C^T \Gamma = -\beta \Gamma, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0 \quad (12)$$

(константой β мы можем распоряжаться).

Далее при необходимости стабилизируем соответствующую разностную систему. Предложенный метод стабилизации применим и для систем вида (4).

[1] Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.

Оптимальные стратегии в модели CAR-T иммунотерапии лечения лейкемии

*Н. Л. Григоренко¹, Э. В. Григорьева²,
Е. Н. Хайлов¹, А. Д. Клименкова¹*
e-mail: grigor@cs.msu.ru, egrigorieva@twu.edu,
khailov@cs.msu.su, klimenkovaad@mail.ru

1. Введение

Иммунотерапия Т-клетками (CAR-T) химерного антигена является недавно разработанной технологией лечения лейкемии. Во время нее у пациента берутся Т-клетки (иммунные клетки), которые затем генетически модифицируются в лабораторных условиях, чтобы заставить их продуцировать химерные антигенные рецепторы (CAR). После этого модифицированные Т-клетки обратно вводятся пациенту. Химерные антигенные рецепторы позволяют Т-клеткам распознавать раковые клетки и нацеленно атаковать их. Таким образом, процесс лечения CAR Т-клетками превращает собственные Т-клетки пациента в охотников-убийц раковых клеток. Если в организме пациента CAR Т-клетки сталкиваются со здоровой клеткой, то они не взаимодействуют друг с другом. Если же обнаруживают раковую клетку, то CAR Т-клетки убивают ее и начинают активное деление. Пока в организме пациента присутствуют раковые клетки, CAR Т-клетки будут их уничтожать. Когда все раковые клетки уничтожены, большая часть CAR Т-клеток гибнет, некоторые остаются в костном мозге, чтобы в случае повторных рецидивов снова появиться, размножиться и уничтожить раковые клетки.

При лечении лейкемии CAR Т-клетками возникают побочные эффекты, связанные с очень мощным воздействием, которое они оказывают на другие клетки иммунной системы. Указанное мощное воздействие приводит к выделению в организме пациента огромного количества биологически активных веществ (цитокинов), и возникает состояние, называемое “цитокиновым штормом”. Врачи научились контролировать развитие такого явления у пациентов, но его обязательно следует учитывать при проведении CAR-T тера-

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

²Техасский женский университет, Дентон, США

пии. В настоящее время CAR-T иммунотерапия также показывает высокую эффективность при лечении пациентов с лимфомой и миеломой.

Результаты, обсуждающиеся в докладе, являются продолжением исследований, ранее представленных в работах [1–3].

2. Задача оптимального управления

Рассмотрим на заданном отрезке времени $[0, T]$ нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(k_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t)), \\ y'(t) = y(t)(k_2 - a_{21}x(t) - a_{22}y(t) - a_{23}z(t)), \\ z'(t) = z(t)(mu(t) - (k_3 - a_{32}y(t) + a_{33}z(t))), \\ w'(t) = r + p(1 - v(t))y(t)z(t) - qw(t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, w(0) = w_0; \\ x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0, w_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

которая описывает взаимодействие между соответствующими популяциями здоровых, раковых и CAR T-клеток $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а также цитокинами $w(t)$ при CAR-T иммунотерапии лечения лейкемии. Здесь $k_1, k_2, k_3, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}, m, r, p, q$ — заданные положительные параметры. Отметим, что в системе (1) взаимодействие популяций здоровых и раковых клеток описывается с помощью модели конкуренции, а взаимодействие популяций раковых и CAR T-клеток — с помощью модели хищник-жертва Лотки – Вольтерры. При этом CAR T-клетки выступают в роли хищников, а раковые клетки — в роли жертв.

В системе (1) присутствуют две управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq v(t) \leq 1. \quad (2)$$

Управление $u(t)$ задает интенсивность ввода CAR T-клеток в организм пациента, а управление $v(t)$ определяет интенсивность приема лекарственного препарата, воздействующего на изменение количества цитокинов. Мы считаем, что множество допустимых управлений $\Omega(T)$ состоит из всевозможных пар измеримых по Лебегу функций $(u(t), v(t))$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют неравенствам (2).

Положительность, ограниченность и продолжимость решений системы (1) устанавливается следующей леммой.

Лемма. Для произвольной пары допустимых управлений $(u(t), v(t))$ соответствующие абсолютно непрерывные решения $x(t), y(t), z(t), w(t)$ системы (1) определены на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < x(t) < x_{\max}, & \quad 0 < y(t) < y_{\max}, \\ 0 < z(t) < z_{\max}, & \quad 0 < w(t) < w_{\max}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Для системы (1) на множестве допустимых управлений $\Omega(T)$ мы рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} J(u(\cdot), v(\cdot)) = & (y(T) - \alpha x(T) + \beta w(T)) + \\ & + \int_0^T (y(t) - \alpha x(t) + \beta w(t)) dt \rightarrow \min_{(u(\cdot), v(\cdot)) \in \Omega(T)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь α и β — положительные весовые коэффициенты. Целевая функция в (3) — сумма терминальной и интегральной частей. Терминальная часть отражает состояние пациента (взвешенная комбинация популяций раковых и здоровых клеток, а также цитокинов) в конце периода лечения $[0, T]$, а интегральная часть определяет это состояние в течение всего периода лечения.

Отметим, что Лемма гарантирует в задаче (3) существование оптимального решения, состоящего из оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$, а также отвечающих им оптимальных решений $x_*(t), y_*(t), z_*(t), w_*(t)$.

Задача оптимального управления (3) анализируется как аналитически, благодаря использованию Принципа максимума Понтрягина, так и численно с помощью применения для соответствующих расчетов программной среды ВОСОР-2.2.0.

Применение Принципа максимума Понтрягина приводит к нахождению сопряженной системы, а также формул, связывающих поведение оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$ с поведением соответствующих сопряженных переменных. Затем осуществляется анализ задачи Коши для сопряженной переменной, определяющей управление $v_*(t)$. Он показывает, что такое оптимальное управление принимает максимальное значение 1 на всем отрезке $[0, T]$. Это означает, что прием лекарства, влияющего на количество цитокинов в организме пациента, происходит с максимальной интенсивностью во время всего периода лечения. После этого вводятся новые

сопряженные переменные, благодаря которым исходная сопряженная система сильно упрощается. Также определяется функция переключений, поведение которой задает вид оптимального управления $u_*(t)$.

Новая сопряженная система позволяет получить линейную неоднородную неавтономную систему дифференциальных уравнений для функции переключений и отвечающих ей вспомогательных функций. Такая система уравнений очень важна, так как, во-первых, она приводит к выводу о существовании интервала, прилегающего к $t = T$, на котором управление $u_*(t)$ принимает максимальное значение u_{\max} . Это означает, что в конце периода лечения $[0, T]$ CAR-T иммунотерапия осуществляется с максимальной интенсивностью. Во-вторых, анализ этой системы показывает невозможность обращения в нуль функции переключений на указанном интервале, что приводит к выводу о релейном характере оптимального управления $u_*(t)$ и о конечности числа его переключений. Наконец, в-третьих, с помощью специальной замены переменных матрица системы преобразуется к верхне-треугольному виду и определяется длина максимального интервала, на котором такое преобразование возможно. Применение обобщенной теоремы Ролля позволяет оценить число нулей функции переключений на этом интервале, что, в свою очередь, приводит к нахождению оценки числа нулей функции переключений уже на всем отрезке $[0, T]$.

Объединение полученных результатов показывает возможные виды оптимального управления $u_*(t)$, которые затем подтверждаются соответствующими численными расчетами. Далее проводится необходимый анализ таких расчетов и делаются выводы, имеющие отношение к оптимальным стратегиям CAR-T иммунотерапии лечения лейкемии.

А. Д. Клименкова поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики.

- [1] *Khailov E.N., Klimenkova A.D., Korobeinikov A.* Optimal control for anti-cancer therapy / Extended Abstracts Spring 2018. Trends in Mathematics; Korobeinikov, A., Caubergh, M., Lázaro, T., Sardanyés, J., Eds.; Basel, Switzerland, Birkhäuser, 2019. V. 11. P. 35–43.
- [2] *Grigorenko N.L., Khailov E.N., Klimenkova A.D., Koro-*

beinikov A. Program and positional control strategies for the Lotka–Volterra competition model / Stability, Control and Differential Games. Proceedings of the International Conference “Stability, Control, Differential Games” (SCDG2019); Tarasyev, A., Maksimov, V., Filippova, T., Eds.; Switzerland AG, Springer Nature, 2020. P. 39–49.

- [3] *Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д.* Оптимальные стратегии лечения раковых заболеваний в математической модели конкуренции Лотки – Вольтерры // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 71–88.

Эффективное наказание в многошаговой «дилемме заключённого n -лиц» на сети

А. Л. Гриних¹, Л. А. Петросян¹

e-mail: st062331@student.spbu.ru, l.petrosyan@spbu.ru

1. Введение

Большая часть исследований в области теории игр связана с играми двух игроков. Одним из классических примеров является дилемма заключённого двух лиц. Данная игра заключается в конфликте интересов двух задержанных, каждому из которых предложено сократить свой срок пребывания в тюрьме, выдав своего соучастника. Предложения о предательстве поступают заключённым одновременно, а те, в свою очередь, должны незамедлительно и без возможности переговоров со своим подельником принять решение о сотрудничестве со следствием. Сотрудничество со следствием уменьшает срок заключения задержанного, даже если его подельник тоже решил «сдаться», однако увеличивает срок заключения соучастника.

В настоящей работе будет использована модификация данной модели (которую впервые предложил Генри Гамбургер [1]), рассматривающая взаимодействие n заключённых. Мы будем исследовать модель дилеммы заключённого n -лиц на графе. Каждый из заключённых обладает лишь частью сведений об участии осталь-

¹Санкт-Петербургский государственный университет

ных заключённых в преступлении, поэтому возможность влияния на срок заключения остальных игроков зависит от длины пути на графе, связывающем всех соучастников преступления.

Работа продолжает исследования, результаты которых опубликованы в статье Grinikh A.L. «Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value» [2].

2. Постановка модели

Рассмотрим сеть M , узлами которой являются игроки. Путём от игрока i к игроку j назовём последовательность игроков, поочередно соединённых между собой рёбрами данной сети. Соответственно, *длиной пути* будем называть количество игроков в пути от i к j . Если путь от i к j содержит минимальное количество игроков, то он является *кратчайшим путём*. Тогда, *расстояние* между игроками i и j — это длина кратчайшего пути между ними.

Строится статическая некооперативная игра γ_M для n игроков на сети M . Множество всех игроков обозначим через N . Каждый из игроков имеет две доступные чистые стратегии: C — «молчать», и D — «предать». Соответственно, множество чистых стратегий игрока может быть представлено в виде $X_i = \{C, D\}$, $\forall i \in N$. Тогда функция выигрыша $h_i(x_1, \dots, x_n)$ i -го игрока в статической игре типа «дилемма заключённого n -лиц», γ_M , на сети M будет зависеть от стратегии $x_i \in \{C, D\}$, выбранной данным игроком, и $x_{m,N}^i$ — количества игроков из множества N , выбравших стратегию C , длина пути от которых до i -ого игрока равна m :

$$h_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} (\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m x_{m,N}^i) + b_1, & \text{если } x_i = C, \\ (\sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m x_{m,N}^i) + b_2, & \text{если } x_i = D. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a_1, a_2, b_1, b_2, \delta$ — параметры, единые для всех игроков.

Данная функция выигрыша удовлетворяет следующим условиям игры типа «дилемма заключённого n -лиц»:

1. $(\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m x_{m,N}^i) + b_1 < (\sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m x_{m,N}^i) + b_2, \forall i \in N$, то есть стратегия D строго доминирует стратегию C ;
2. $\sum_{i \in N} ((\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m \bar{x}_{m,N}^i) + b_1) > \sum_{i \in N} (b_2)$, где $\bar{x}_{m,N}^i$ означает, что все игроки, включая i -го, выбирают стратегию C , а, следовательно, совместное «молчание» приносит больший

суммарный выигрыш игрокам, чем абсолютное «предательство»;

3. $\left(\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m x_{m,N}^i \right) + b_1 \right) \geq (a_1 + b_1)$ и $\left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m x_{m,N}^i \right) + b_2 \right) \geq b_2$, что означает уменьшение выигрыша игрока от предательства каждым из остальных игроков.

3. Постановка задачи

Пусть Γ_M — повторяющаяся K раз игра γ_M типа «дилемма заключённого n -лиц» на сети M . Тогда выигрыш i -го игрока в игре Γ_M будет равен сумме выигрышей i -го игрока в каждой из K игр.

Поскольку у каждого из игроков на отдельном шаге игры стратегия D является доминирующей, абсолютным равновесием по Нэшу будет являться выбор каждым из игроков стратегии C на каждом шаге игры.

Тем не менее, поскольку суммарный выигрыш будет выше при выборе каждым из игроков на каждом шаге стратегии «молчать» (C), необходимо определить, какое количество шагов достаточно для того, чтобы выигрыш игрока от единоличного «предательства», $(h_i(x_i = D, x_j = C, \forall j \in N \setminus i) - h_i(x_i = C, x_j = C, \forall j \in N \setminus i))$, был бы меньше потерь от «наказания». Под наказанием здесь и далее будем понимать выбор каждым из игроков, кто не отклонился от стратегии, приносящей максимальный суммарный выигрыш, стратегии «всех против каждого отклонившегося», а, значит, приносящей минимальный возможный выигрыш отклонившимся игрокам.

4. Эффективное наказание

Определим «эффективное наказание» для игры Γ_M «дилемма заключённого n -лиц» на сети.

Теорема. Для многошаговой игры «дилемма заключённого n -лиц» на сети M количество шагов, обеспечивающих стратегию «молчать на всех этапах игры» для каждого из игроков равно

$$\bar{k} = \max_{i \in N} \left[\frac{a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i}{a_1 + b_1 - b_2 + a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i} \right]. \quad (2)$$

Доказательство. Найдём k_i — количество шагов, необходимое для «эффективного наказания» i -го игрока. Поскольку выбор страте-

гии «предать» уменьшает выигрыш каждого из остальных игроков по сравнению с выбором стратегии «молчать», стратегия «против каждого предавшего» будет совпадать со стратегией «предать» на всех оставшихся шагах игры у всех игроков, которые на предыдущем шаге выбрали стратегию «С». Тогда количество шагов k_i , достаточных для эффективного наказания i -го игрока, можно определить в виде

$$k_i b_2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m \bar{x}_{m,N}^i < \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m \bar{x}_{m,N}^i + b_1 \right) k_i. \quad (3)$$

В этом случае для «эффективного наказания» i -го игрока будет достаточно, чтобы оставшееся до конца игры количество шагов удовлетворяло условию

$$k_i = \left\lceil \frac{a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i}{a_1 + b_1 - b_2 + a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i} \right\rceil. \quad (4)$$

Тогда количество шагов, необходимое для обеспечения оптимального по Парето исхода игры в многошаговой игре «дилемма заключённого n -лиц» на сети M , а, следовательно, и для «эффективного наказания» всех игроков, будет равно

$$\bar{k} = \max_{i \in N} k_i. \quad (5)$$

□

5. Пример

Рассмотрим пример игры Γ_M для четырёх игроков на сети M , представленной на рис. 1.

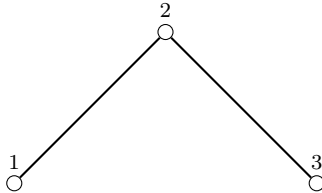


Рис. 1: Пример сети для игры Γ_M

Пусть функция выигрыша игроков на каждом из трёх шагов игры задана формулой

$$h_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (\sum_{m=0}^{\infty} 0,8^m x_{m,N}^i) + 3, & \text{если } x_i = C, \\ (\sum_{m=1}^{\infty} 2 \times 0,8^m x_{m,N}^i) + 5, & \text{если } x_i = D. \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае количество шагов, необходимых для «эффективного наказания» каждого из игроков, будет равно, соответственно,

$$k_1 = \lceil \frac{2 \times (0,8 + 0,64)}{1 + 3 - 5 + 1 \times (0,8 + 0,64)} \rceil = 7, \quad (7)$$

$$k_2 = \lceil \frac{2 \times (0,8 \times 2)}{1 + 3 - 5 + 1 \times (0,8 \times 2)} \rceil = 6, \quad (8)$$

$$k_3 = \lceil \frac{2 \times (0,8 + 0,64)}{1 + 3 - 5 + 1 \times (0,8 + 0,64)} \rceil = 7. \quad (9)$$

Тогда количество шагов, необходимых для «эффективного наказания» в представленной игре, будет

$$\bar{k} = \max \{7, 6, 7\} = 7. \quad (10)$$

То есть, при количестве шагов, оставшихся до окончания игры больше, чем 7, ни одному из игроков не будет выгодно «предавать» остальных.

6. Заключение

В данной работе исследована повторяющаяся «дилемма заключённого» n -лиц на сети. Найдено количество шагов, обеспечивающее «эффективное наказание» любого из игроков. Кроме того, определено количество шагов, необходимое для «эффективного наказания» любого из отклонившихся игроков в повторяющейся «дилемме заключённого n -лиц» на сети M .

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01079).

- [1] *Hamburger H.* N-person prisoner's dilemma // *Journal of Mathematical Sociology.* 1973. V. 3, no. 1. P. 27–48.
- [2] *Grinikh A.L.* Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value // *Contributions to Game theory and management.* 2019. No. 12. P. 151–158.

Об асимптотике множеств достижимости на малых временных промежутках

М. И. Гусев¹, И. О. Осипов¹

e-mail: gmi@imm.uran.ru, 79193053374@yandex.ru

1. Введение. Асимптотическая эквивалентность множеств

В работе изучается асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных управляемых систем с интегральными ограничениями на малых промежутках времени. В тех случаях, когда некоторые из параметров управляемой системы малы (начальные отклонения от положения равновесия, возмущения на входе системы и т.д.), о ее поведении часто можно судить по поведению ее линейного приближения. Здесь мы исследуем применимость данного подхода при построении множеств достижимости на малых промежутках времени: будут ли эти множества в каком-то смысле близкими к множествам достижимости линеаризованной системы? Это свойство, как и выпуклость множеств достижимости, зависит от поведения грамиана управляемости линеаризованной системы при стремлении к нулю длины промежутка времени [1, 2]. Понятие асимптотической близости множеств определяется через расстояние Банаха – Мазура, определяемое следующим образом. Пусть выпуклые компактные множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что нулевой вектор является внутренней точкой каждого из них. Расстоянием Банаха – Мазура $\rho(X, Y)$ между X и Y называется величина $\rho(X, Y) := \log(r(X, Y) \cdot r(Y, X))$, где $r(X, Y) = \inf\{t \geq 1 : tX \supset Y\}$.

Предположим, что $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ – выпуклые компактные множества, зависящие от параметра ε , и нулевой вектор является внутренней точкой каждого из этих множеств при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Множества $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ называются асимптотически эквивалентными [3], если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$, то $h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$, где h – хаусдорфово расстояние между множествами. Обратное верно только при дополнительном условии. Для $A \subset \mathbb{R}^n$ введем обозначение $\delta_{\min}(A) := \inf_{\|y\|=1} \delta(y|A)$; здесь $\delta(y|A)$ – опорная функция множества A .

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Теорема 1. Для того, чтобы $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, достаточно выполнения условий

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))}{\delta_{\min}(Y(\varepsilon))} = 0.$$

2. Множества достижимости нелинейных систем на малых промежутках времени

Далее исследуются множества достижимости для аффинных по управлению систем

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

на промежутке $[0, \varepsilon]$ с интегральным ограничением на управление

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 = \int_0^\varepsilon u^\top(t)u(t)dt \leq \mu^2,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ — малый параметр. Будем предполагать, что для любого $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[0, \bar{\varepsilon}]$, $\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} \leq \mu$ существует и единственно решение $x(t, u(\cdot))$ системы (1); это решение определено на промежутке $[0, \bar{\varepsilon}]$ и принадлежит компакту $D \subset \mathbb{R}^n$. Считаем, что функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ дифференцируемы и их производные удовлетворяют условиям Липшица на D . Линеаризованную вдоль траектории $x(t, 0)$ систему (1) после замены времени $t = \varepsilon\tau$ представим в виде

$$\dot{y}(\tau) = \varepsilon A_\varepsilon(\tau)y(\tau) + B_\varepsilon(\tau)v(\tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad y(0) = 0. \quad (2)$$

Обозначим символом

$$G(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), \|u(\cdot)\|^2 \leq \mu^2, x = x(\varepsilon, u(\cdot))\}$$

множество достижимости системы (1) в момент времени ε . Через $\hat{G}(\varepsilon)$ будем обозначать множество достижимости системы (2) в момент времени $\tau = 1$ при ограничении $\|v(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} \leq \mu\varepsilon^{1/2}$ на управление. Множество $\hat{G}(\varepsilon)$ — эллипсоид в \mathbb{R}^n .

Рассмотрим отображение $\Psi_\varepsilon(v(\cdot)) : \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное равенством $\Psi_\varepsilon(v(\cdot)) = y(1, v(\cdot))$; здесь y — решение системы (2). Отображение Ψ_ε удовлетворяет условию Липшица с константой $L(\varepsilon)$. Обозначим через W_ε грамиан управляемости линеаризованной системы (2) (см. [4]), пусть $\nu(\varepsilon)$ — минимальное собственное число грамиана. Из теоремы 1 и достаточных условий выпуклости множеств достижимости [1] вытекает следующая

Теорема 2. Пусть линеаризованная система (2) вполне управляема на $[0, 1]$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и выполнено условие $\varepsilon L^2(\varepsilon)/\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$.

Тогда при достаточно малых ε множество $G(\varepsilon) - x(\varepsilon, 0)$ выпукло и асимптотически эквивалентно множеству $\hat{G}(\varepsilon)$, то есть $\rho(G(\varepsilon) - x(\varepsilon, 0), \hat{G}(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$.

В работе [4] изучена асимптотика минимального собственного числа грамиана управляемости для линейных стационарных систем с малым параметром. Используя результаты [4], из теоремы 2 получим

Следствие. Пусть управляемая система 2-го порядка имеет вид $\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2 u(t)$, $x(0) = x^0$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \leq 2$, f_2 — постоянная матрица размеров $2 \times r$. Пусть $f_1(x^0) = 0$ и пара $A := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^0)$, f_2 вполне управляема. Тогда множество $G(\varepsilon) - x^0$ выпукло при достаточно малых ε и асимптотически эквивалентно $\hat{G}(\varepsilon)$.

3. Множества достижимости по части координат

Представленные выше результаты могут быть распространены на случай множеств достижимости по части фазовых координат системы (достижимости по выходу). Определим выход системы равенством $z(t) = Cx(t)$, где C — $m \times n$ матрица полного ранга, $m \leq n$. Множество достижимости по выходу z определяется следующим образом: $G_z(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^m : \exists u(\cdot), \|u(\cdot)\|^2 \leq \mu^2, z = Cx(\varepsilon, u(\cdot))\}$. Для данного множества достижимости справедлив аналог теоремы 2 о достаточных условиях асимптотической эквивалентности $G_z(\varepsilon)$ и множества достижимости по выходу линеаризованной системы. В этой теореме роль отображения $\Psi_\varepsilon(v(\cdot))$ играет $\Phi_\varepsilon(v(\cdot)) : \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное равенством $\Phi_\varepsilon(v(\cdot)) = C \circ \Psi_\varepsilon(v(\cdot))$. Вместо грамиана W_ε надо рассматривать грамиан управляемости по выходу $W_\varepsilon^z = CW_\varepsilon C^T$. Отметим, что асимптотика собственных чисел грамиана W_ε^z не является прямым следствием соответствующей асимптотики для W_ε и ее получение представляет самостоятельную задачу.

В докладе рассмотрен пример нелинейной системы третьего порядка (уницикла), множество достижимости которой вычисляется по первым двум координатам. В данном примере минимальное собственное число грамиана управляемости имеет порядок ε^4 и для

него не выполнены достаточные условия выпуклости множеств достижимости исходной системы на малых временных промежутках. Проведенное численное моделирование показывает, что эти множества невыпуклы. В отличие от примера, рассмотренного в [1], здесь линеаризованная система является нестационарной, но при этом вполне управляемой.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в региональном научно-образовательном центре ИММ УрО РАН, «Уральский математический центр».

- [1] *Гусев М.И., Осипов И.О.* Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды Ин-та математики и механики. 2019. Т. 25, № 3. С. 86–99. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99
- [2] *Гусев М.И.* Асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных систем с изопериметрическими ограничениями на малых временных промежутках // Труды Ин-та математики и механики. 2020. Т. 26, № 1. С. 89–101. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-89-101
- [3] *Goncharova E., Ouseevich A.* Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. V. 168 (2). P. 615–624. DOI: 10.1007/s10957-015-0754-4
- [4] *Gusev M.I.* Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11548. P. 461–473. DOI: 10.1007/978-3-030-22629-9_32

Оптимальный синтез в простейшей задаче быстродействия с линейным фазовым ограничением

А. В. Дмитриуж¹, И. А. Самыловский²

e-mail: vrainax@mail.ru, ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

1. Постановка задачи

Рассматривается задача быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = x_0, & x(T) = 0, \\ \dot{y} = u, & y(0) = y_0, & y(T) = 0, \end{cases}$$
$$t \in [0, T], \quad T \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1,$$

при наличии линейного фазового ограничения

$$y \geq kx - b \quad (b > 0).$$

При отсутствии фазового ограничения задача представляет собой известную задачу Фельдбаума — один из первых тестовых примеров применения Принципа максимума Понтрягина [1].

Наша цель заключается в построении оптимальных траекторий для всех допустимых начальных условий (x_0, y_0) и для всех значений $k \neq 0$. Инструментом является принцип максимума для задач с фазовыми ограничениями, полученный А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиним [2]. Случай горизонтального фазового ограничения, то есть при $k = 0$, рассмотрен в книге [3] с помощью указанного принципа максимума.

2. Оптимальный синтез

Ключевым свойством данного синтеза является тот факт, что выход на фазовую границу Γ возможен лишь на отрезке (возможно, вырождающемся в точку).

На рис. 1 приведен наиболее «богатый» синтез для случая $k > 0$. Начальные условия, лежащие ниже прямой Γ , а также правее и выше дуги EE' параболы, порожденной управлением $u = -1$, вклю-

¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

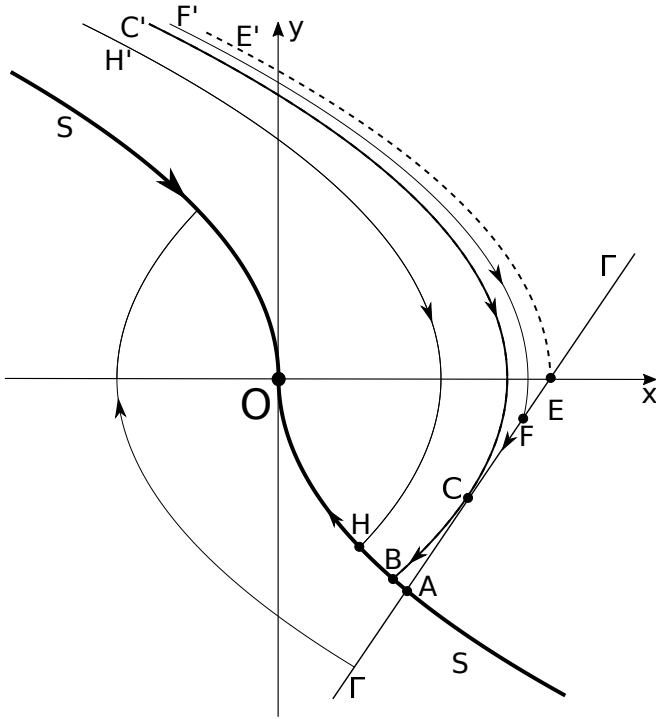


Рис. 1: Синтез для случая $k > 0$

чая саму дугу, являются запретными. Качественно новыми являются траектории, выходящие из точек, лежащих между прямой Γ , дугой EE' и дугой CC' касательной к Γ параболы, порожденной управлением $u = -1$. Они имеют до трех точек переключения (см. траекторию $F'FCBO$: движение по дуге параболы $F'F$ с управлением $u = -1$, затем движение по фазе Γ на отрезке FC , переход на дугу CB касательной параболы и, наконец, движение в начало координат по линии переключения S). Сход с фазы происходит всегда по дуге касательной параболы. В точке схода имеется атом меры (множителя Лагранжа при фазовом ограничении), который порождает скачки сопряженных переменных. В зависимости от параметров задачи точки A, B, C могут совпасть.

На рис. 2 приведен наиболее «богатый» синтез для случая $k < 0$.

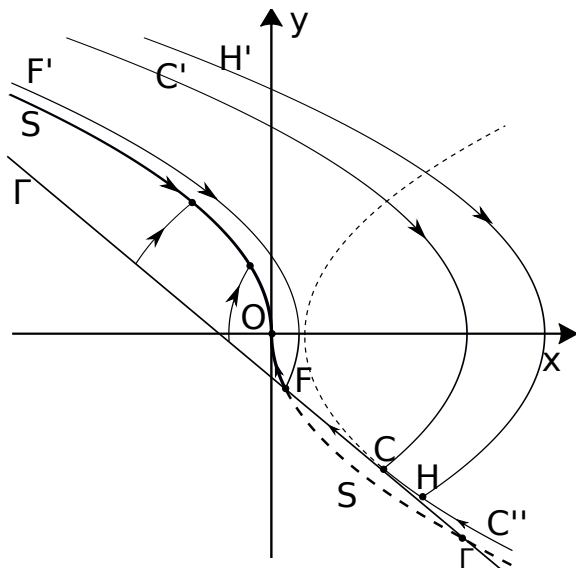


Рис. 2: Синтез для случая $k < 0$

Начальные условия, лежащие ниже прямой Γ , а также левее и ниже дуги CC'' касательной к Γ параболы, порожденной управлением $u = +1$ (не включая дугу), являются запретными. Качественно новыми являются траектории, выходящие из множества, ограниченного дугами CC' и CC'' . Они могут иметь до трех точек переключения (см. траекторию $H'HCFO$: движение по дуге параболы $H'H$ с управлением $u = -1$, переход на дугу HC касательной к Γ параболы с управлением $u = 1$, переход на Γ и движение по фазе на отрезке CF и, наконец, движение в начало координат по линии переключения S). Заход на фазу происходит всегда по дуге касательной параболы CC'' . В точке захода на фазу имеется атом меры, который порождает скачки сопряженных переменных. В зависимости от параметров задачи ограничение Γ может иметь одну, две или три точки пересечения с линией переключения S .

Подробное построения синтеза изложено в работе [4].

Исследования А.В. Дмитрука для случая $k > 0$ выполнены при поддержке РФФ, проект № 20-11-20169. Исследования И.А. Самыловского для случая

$k < 0$ выполнены при поддержке РФФ, проект № 19-71-00103

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
- [2] Дубовицкий А.Я., Милотин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 3.
- [3] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [4] Дмитрук А.В., Самыловский И.А. Оптимальный синтез в простейшей задаче быстрогодействия с линейным фазовым ограничением. arXiv:2009.13086 [math.OC]

Регуляризация вырожденной задачи оптимальной стабилизации импульсных систем с запаздыванием

Ю. Ф. Долгий^{1,2}, А. Н. Сесекин^{1,2}

e-mail: jury.dolgy@urfu.ru, sesekin@list.ru

1. Введение

Объект управления описывается автономной линейной системой с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + B\frac{dv(t)}{dt}, \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, A_0, A_1, B — постоянные матрицы. Импульсные управления $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ — обобщенные функции, импульс управления $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке и определяется формулами $v(0) = 0$, $v(t) = v(+0) + \int_0^t u(s)ds$, $t > 0$. Предполагается, что $\text{rank} B = r \leq n$.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Под решением импульсной системы (1) понимается решение интегрального уравнения

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (A_0 x(s) + A_1 x(s - \tau)) ds + \\ + B(v(t) - v(+0)), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Для любой начальной функции $\varphi \in \mathbb{H}$ существует единственное решение $x(t, \varphi, v)$, $t > 0$, этого уравнения, удовлетворяющее условию $x(t, \varphi, v) = \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$. Здесь $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{H}} = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$. Из метода последовательных приближений следует, что решение интегрального уравнения является функцией с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке положительной полуоси \mathbb{R}^+ .

Рассматривается задача оптимальной стабилизации с критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} (x^\top(t)C_x x(t) + \alpha v^\top(t)v(t))dt, \quad (2)$$

где C_x — положительно определенная матрица, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. В предельном случае $\alpha = 0$ критерий качества переходных процессов является вырожденным.

При решении невырожденной задачи оптимальной стабилизации (1), (2) используется принцип динамического программирования Беллмана [1]. Определяющая система уравнений оптимальной стабилизации построена в [2]. В настоящей работе предлагается метод ее решения. Другой метод решения этой задачи предложен в [3].

2. Импульс оптимального стабилизирующего управления

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если система (1) с критерием качества (2) стабилизируема, то импульс оптимального стабилизирующего управ-*

ления определяется формулой

$$v(t) = - \left(C_{vv} - B^\top \hat{D}^\top B \right)^{-1} B^\top \left(\hat{D}^\top x(t) + \int_{-\tau}^0 \hat{X}_4^\top(s) x(t+s) ds \right)$$

для $t > 0$, где $C_{vv} = B^\top C_x B + \alpha I_r$, $\tilde{C}_{vv} = B C_{vv}^{-1} B^\top$, матрица \hat{D} удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\hat{D} + \hat{D}^\top - C_x - \hat{D} \tilde{C}_{vv} \hat{D}^\top = 0, \quad (3)$$

матричнозначная функция $X_4(\cdot)$ является решением нелинейного матричного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \hat{X}_4(\vartheta) = & A_1^\top \left(\hat{D} - C_x \right) + \int_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s) ds \left(I_n - \tilde{C}_{vv} \hat{D}^\top \right) A_0 - A_1^\top \left(I_n - \right. \\ & \left. - \hat{D} \tilde{C}_{vv} \right) \int_{-\vartheta-\tau}^0 \hat{X}_4^\top(s) ds - \int_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s) \tilde{C}_{vv} \hat{X}_4^\top(s - \vartheta) ds, \vartheta \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимально стабилизируемые решения удовлетворяют импульсной системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = & A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B v(+0) \delta(t) - \\ & - B \left(C_{vv} - B^\top \hat{D}^\top B \right)^{-1} B^\top \left(\hat{D}^\top \frac{dx(t)}{dt} + \int_{-\tau}^0 \hat{X}_4^\top(s) \frac{dx(t+s)}{ds} ds \right), \end{aligned}$$

где $t \geq 0$, $\delta(\cdot)$ — функция Дирака,

$$v(+0) = - \left(C_{vv} - B^\top \hat{D}^\top B \right)^{-1} B^\top \left(\hat{D}^\top \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{X}_4^\top(s) \varphi(s) ds \right).$$

3. Асимптотика импульса оптимального стабилизирующего управления

Решения уравнений (3), (4) зависят от регуляризующего параметра α . Будем искать коэффициенты их асимптотических разложений вблизи $\alpha = 0$ при выполнении условий $\text{rank} B = n$, $\det(A_0 + A_1) \neq 0$.

Лемма 1. Пусть $\text{rank}B = n$, $\det(A_0 + A_1) \neq 0$. Тогда решение уравнения (3) определяется асимптотической формулой

$$\hat{D} = C_x + \hat{D}_1\alpha^{1/2} + \hat{D}_2\alpha + O(\alpha^{3/2}),$$

где $\hat{D}_1 = K_1(A_0 + A_1)$, K_1 — симметрическая положительно определенная матрица, решение матричного уравнения

$$K_1(A_0 + A_1)C_x^{-1}(A_0 + A_1)^\top K_1^\top = B^{-1\top}B^{-1},$$

\hat{D}_2 — решение матричного уравнения

$$\hat{D}_1C_x^{-1}\hat{D}_2^\top + \hat{D}_2C_x^{-1}\hat{D}_1^\top = \hat{D}_1C_x^{-1}B^{-1\top}B^{-1} + B^{-1\top}B^{-1}C_x^{-1}\hat{D}_1^\top.$$

Лемма 2. Пусть $\text{rank}B = n$, $\det(A_0 + A_1) \neq 0$. Тогда решение уравнения (4) определяется асимптотической формулой

$$\hat{X}_4(\vartheta) = A_1^\top \hat{D}_1\alpha^{1/2} + O(\alpha), \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Теорема 2. Пусть $\text{rank}B = n$, $\det(A_0 + A_1) \neq 0$ и система (1) с критерием качества (2) стабилизируема. Тогда для импульса оптимального стабилизирующего управления справедливо асимптотическое разложение

$$v(t) = \alpha^{-1/2}B^{-1}\hat{D}_1^{\top-1}C_x x(t) + B^{-1} \left(I_n + \hat{D}_1^{\top-1}(B^{\top-1}B^{-1} - \right. \\ \left. - \hat{D}_2) \hat{D}_1^{\top-1}C_x \right) x(t) + B^{-1}A_1 \int_{-\tau}^0 x(t+s)ds + O(\alpha^{1/2}), t > 0.$$

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 2 для функционала качества переходных процессов справедлива асимптотическая формула

$$J = O(\alpha^{1/2}).$$

Родственные вопросы для систем без запаздывания рассматривались в [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19.01.00371.

- [1] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последствием. М.: Наука, 1992.
- [2] Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Импульсная линейно-квадратичная задача оптимизации в системах с последствием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 10–14.
- [3] Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н. Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последствием // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 11. С. 39–48.
- [4] Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–53.

Квадратичные опорные суперрешения уравнения Гамильтона – Якоби и позиционный принцип минимума второго порядка

*В. А. Дыхта*¹

e-mail: dykhta@gmail.com

Хорошо известно, что введенные Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным u -стабильные функции [1], а также по существу совпадающие с ними суперрешения уравнения Гамильтона – Якоби и слабо убывающие решения неравенства Гамильтона – Якоби, позволяют получать гарантированные оценки сверху качества синтеза в задачах оптимального управления [2–4]. Более того, как оказалось [5–7], при подходящей адаптации этого подхода можно получать нелокальные необходимые условия оптимальности программных управлений, используя позиционные управления потенциального спуска по функционалу, т.е. стратегии, порождаемые суперрешениями (их конструкция определяет общность и эффективность условий оптимальности). В этом плане наиболее привлекательным и доста-

¹Институт динамики систем и теории управления им. В.М.Матросова СО РАН, Иркутск

точно универсальным оказалось необходимое условие оптимальности, названное *позиционным принципом минимума* [6–8]. Оно конструктивно усиливает классический Принцип максимума Понтрягина для гладких задач и его негладкий аналог Кларка (при отсутствии терминальных ограничений). Доказательство позиционного принципа использует опорное суперрешение уравнения Гамильтона – Якоби, которое задается решением сопряженной системы, соответствующим исследуемому процессу $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, и линейно по $(x - \bar{x}(t))$ (будучи в целом нелинейным по x).

Между тем нередко встречаются задачи, в которых обсуждаемый позиционный принцип оказывается не эффективным и не бракует неоптимальный процесс. Здесь можно отметить задачи, в которых фазовые координаты и управления разделены, или исследуемый процесс является особым (экстремальное отображение опорного суперрешения существенно многозначно). Примеры показывают, что в таких задачах естественно расширить рамки позиционного варьирования управления путем привлечения конструкций из теории необходимых условий оптимальности второго порядка, в частности, матричных импульсов Р. Габасова $\Psi(t)$ и квадратичных по $(x - \bar{x}(t))$ членов в опорной функции.

Опишем вкратце возникающее на этом пути необходимое условие (позиционный принцип минимума второго порядка) применительно к следующей дважды гладкой по x задаче терминального управления:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & x(t_0) &= x_0, \\ u(t) &\in U \subset \text{comp}(R^m), & t \in T &= [t_0, t_1], \\ J(x, u) &= l(x(t_1)) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Положим $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -H_x(t, \bar{x}(t), \psi, \bar{u}(t)), & \psi(t_1) &= l_x(\bar{x}(t_1)), \\ \dot{\Psi} &= -H_{x\psi}\Psi - \Psi H_{\psi x} - H_{xx}, & \Psi(t_1) &= l_{xx}(\bar{x}(t_1)) \end{aligned}$$

(здесь коэффициенты вычисляются вдоль $(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t))$), и по аналогии с доказательством позиционного принципа минимума введем предопорную функцию

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= l(x) - l(\bar{x}(t)) + [\psi(t) - l_x(\bar{x}(t))](x - \bar{x}(t)) + \\ &+ \frac{1}{2}(x - \bar{x}(t))[\Psi(t) - l_{xx}(\bar{x}(t))](x - \bar{x}(t)). \end{aligned}$$

При помощи стандартной нормировки [5], которая не принципиальна для формулировки результатов, можно из φ получить слабо убывающую функцию [4].

Определим φ -экстремальное отображение $U_\varphi(t, x)$, положив

$$U_\varphi(t, x) = \text{Argmin} \{ \dot{\varphi}(t, x) \mid u \in U \},$$

где $\dot{\varphi}(t, x)$ — производная от φ в силу управляемой системы. (Явное выражение для $\dot{\varphi}$ опускаем.) Селекторы $v(t, x)$ отображения $U_\varphi(t, x)$ будем рассматривать в качестве позиционных управлений, траекториями которых являются конструктивные движения Крассовского – Субботина управляемой системы или решения Каратеодори.

Позиционный принцип минимума второго порядка можно сформулировать следующим образом.

Теорема. *Если процесс (\bar{x}, \bar{u}) оптимален, то отображение $U_\varphi(t, x)$ не содержит селекторов, траектории которых удовлетворяют неравенству $l(x(t_1)) < l(\bar{x}(t_1))$.*

В докладе будут рассмотрены иллюстрирующие примеры использования теоремы, а также её конкретизация для невыпуклых задач билинейной и квадратичной структуры с управляемыми коэффициентами.

- [1] *Крассовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2003.
- [3] *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton – Jacobi – Bellman equations. Boston: Birkhauser, 1997.
- [4] *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth analysis and control theory. N.Y.: Springer – Verlag, 1998.
- [5] *Дыкта В.А.* Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона – Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 31–49. DOI: 10.1134/S0005117914050038

- [6] *Дыхта В.А.* Позиционные усиления принципа минимума и достаточные условия оптимальности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 73–86. DOI: 10.1134/S0081543816050059
- [7] *Дыхта В.А.* Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 6. С. 653–656. DOI: 10.7868/S0869565215180048
- [8] *Dykhta V.A.* Approximate Feedback Minimum Principle for Suboptimal Processes in Non-smooth Optimal Control Problems / Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds). Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings. Springer, Cham. 2020. P. 127–132. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_12

О двух игровых задачах сближения

А. А. Ершов¹, А. В. Ушаков¹, В. Н. Ушаков¹

e-mail: ale10919@ya.ru, aushakov.pk@gmail.com, ushak@imm.uran.ru

Рассматривается нелинейная конфликтно-управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^m . Исследуются две взаимосвязанные игровые задачи о сближении системы с компактами в фиксированный момент времени. В этих задачах для конфликтно-управляемой системы рассматриваются целевые множества в \mathbb{R}^m , представляющие собой альтернативные цели для игроков.

Эту пару дуальных задач можно трактовать как некоторую дифференциальную игру сближения-уклонения, вкладывающуюся в русло позиционной теории дифференциальных игр, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным во второй половине XX века. Отличие лишь в том, что целевые множества для обоих игроков есть компакты в пространстве \mathbb{R}^m . При такой постановке задач

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

их множества разрешимости — множества позиционного поглощения есть компакты в пространстве позиций игры, и при определённых условиях граница одного из этих компактов содержится в границе другого. Выделение (вычисление) границ множеств разрешимости задач означает, что тем самым выделены и множества разрешимости. Принцип экстремального прицеливания движения конфликтно-управляемой системы на границу множества разрешимости [1, 2] формирует позиционную стратегию игрока, обеспечивающую приведение движения системы на целевое множество для всех исходных позиций игры, заключённых внутри границы.

Сложность конкретных игровых задач при относительно простой динамике не позволяет выделить (точно) границу множества разрешимости. Это приводит нас к разработке методов приближённого вычисления множеств разрешимости игровых задач путём приближённого вычисления их границ. Предлагается один из таких методов. Согласно этому методу, системы множеств в фазовом пространстве \mathbb{R}^m , аппроксимирующие множество разрешимости, аппроксимируют его сверху (по включению). Это даёт возможность, конструируя аппроксимации множеств разрешимости в двух задачах о сближении, получить двусторонние оценки границы множества разрешимости одной из задач. Эти оценки заключают границу множества разрешимости в некоторый слой в пространстве \mathbb{R}^m , гомеоморфный шаровому слою. Такое погружение в шаровой слой мы называем локализацией границы множества разрешимости игровой задачи о сближении. Чем тоньше этот слой, тем точнее локализация.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 15-11-10018.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526.
- [2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

О порядке сингулярности решения задачи оптимальной стабилизации для систем с запаздыванием

*Н. И. Желонкина*¹, *А. Н. Сесекин*^{1,2}
e-mail: 312115@mail.ru, sesekin@list.ru

1. Введение

Рассматривается задача оптимальной стабилизации, когда объект управления описывается автономной линейной системой с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + B \frac{d^k v(t)}{dt^k}, \quad (1)$$

где A, A_τ, B — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times n$ и $n \times m$; $x(t)$ и $v(t)$ — соответственно, n и m -мерные вектор-функции, определенные на множестве $[0, +\infty)$; функция $v(t)$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке; производные в (1) понимаются в обобщенном смысле. Предполагается, что $\text{rank} B = m \leq n$. Начальное условие для уравнения (1) задается следующим образом:

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2)$$

Минимизируемый функционал имеет вид

$$J = \int_0^{+\infty} x^\top(t) Q x(t) dt, \quad (3)$$

где Q — неотрицательно определенная симметричная матрица.

Известно [1, 2], что если $\det B^\top Q B \neq 0$ и $k = 1$, то задача оптимальной стабилизации имеет решение. Если же $\det B^\top Q B = 0$, то в классе управлений — обобщенных производных функций ограниченной вариации задача не имеет решения и для обеспечения существования решения необходимо повышать порядок сингулярности управления.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

2. Построение вспомогательной задачи

Выполним в системе (1) замену

$$x(t) = y_{(k)}(t) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=j-1}^{k-1} B_{i,j} v^{(k-1-i)}(t - (j-1)\tau). \quad (4)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} B_{i,1} &= AB_{i-1,1}, \quad B_{0,1} = B, \quad i \in \overline{1, k-1}, \\ B_{i,j} &= AB_{i-1,j} + A_\tau B_{i-1,j-1}, \quad l \in \overline{2, i}, \\ B_{i,i+1} &= A_\tau B_{i-1,i}. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате получим дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_{(k)}(t) = Ay_{(k)}(t) + A_\tau y_{(k)}(t - \tau) + \sum_{i=1}^{k+1} B_{k,i} v(t - (i-1)\tau). \quad (6)$$

Функционал (3) после выполнения в нем замены (4) примет вид

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} (y_{(k)}(t) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=j-1}^{k-1} B_{i,j} v^{(k-1-i)}(t - (j-1)\tau)^\top(t)) Q \times \\ &\times (y_{(k)}(t) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=j-1}^{k-1} B_{i,j} v^{(k-1-i)}(t - (j-1)\tau)(t)) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что выполнены условия

$$B_{i,j}^\top Q B_{i,j} = 0, \quad i \in \overline{0, k-2}, \quad j \in \overline{1, i+1}, \quad (8)$$

$$B_{i-1,j}^\top Q B_{i-1,j} = 0, \quad j \in \overline{2, k}, \quad (9)$$

$$\det B_{k-1,1}^\top Q B_{k-1,1} \neq 0. \quad (10)$$

Заметим, что если матрица $\bar{B}^\top Q \bar{B} = 0$, то и $Q \bar{B} = 0$. С учетом последнего замечания при выполнении условий (8)–(10) функционал (3) после выполнения замены (4) примет вид

$$J^* = \int_0^{+\infty} (y_{(k)}(t) + B_{k-1,k} v(t))^\top(t) Q (y_{(k)}(t) + B_{k-1,k} v(t)) dt. \quad (11)$$

3. Порядок сингулярности оптимального решения

При предположениях (8)–(10) вспомогательная задача оптимальной стабилизации является невырожденной и при условии стабилизируемости решений уравнения (1) имеет оптимальное решение. Решение исходной задачи получится путем k -кратного дифференцирования оптимального решения вспомогательной задачи в смысле теории обобщенных функций [3]. Для коэффициентов, задающих оптимальное управление, построена система определяющих уравнений. В результате структура оптимального программного управления исходной задачи будет следующей: в начальный момент на систему будет действовать импульсное воздействие, содержащее $\delta(t)$, $\delta'(t)$, ..., $\delta^{(k)}(t)$. На промежутке $(0, \infty)$ оптимальное управление будет интегрируемой функцией. Для того, чтобы построить позиционное управление, необходимо использовать импульсно-скользящий режим с импульсами порядка сингулярности до k . Порядок сингулярности оптимальных решений для линейно-квадратичных задач оптимизации на конечном промежутке времени рассматривался в [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19.01.00371.

- [1] *Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.* Импульсная линейно-квадратичная задача оптимизации в системах с последствием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 10–14.
- [2] *Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н.* Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последствием // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 11. С. 39–48.
- [3] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [4] *Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В.* О порядке сингулярности импульсного оптимального управления в вырожденной линейно-квадратичной задаче оптимизации с последствием // Автоматика и Телемеханика. 2009. Вып. 4. С. 31–40.

К устойчивости паретовского равновесия угроз и контругроз в одной коалиционной дифференциальной позиционной игре трех лиц с нетрансферабельными выигрышами

*В. И. Жуковский*¹, *К. Н. Кудрявцев*², *Л. В. Жуковская*³
 e-mail: zhkvlad@yandex.ru, kudrkn@gmail.com, zhukovskaylv@mail.ru

Поводом к подготовке этого сообщения явились две, вышедшие недавно, статьи [1,2]. В [1] исследована индивидуальная устойчивость коалиционных структур в играх трех лиц с трансферабельными выигрышами (с побочными платежами) в статическом случае, в [2] «проглядывает» возможность рассмотреть аналогичную задачу, но уже для *дифференциальной* линейно-квадратичной позиционной игры с *нетрансферабельными выигрышами* (без побочных платежей), базируясь на паретовском равновесии угроз и контругроз из книги [3]. В представляемом сообщении будут изложены теоретические основы предлагаемого подхода и получены коэффициентные условия индивидуальной устойчивости для коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ в дифференциальной игре трех лиц (в нормальной форме)

$$\Gamma = \langle \{\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}\}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$x, u_i \in \mathbb{R}^n, \quad \vartheta = \text{const} > t_0 \geq 0, \quad A(\cdot) \in C^{n \times n}[0, \vartheta],$$

$$\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = P_i(t)x, \quad P_i(\cdot) \in C^{n \times n}[0, \vartheta]\} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u'_j[t]D_{ij}u_j[t]dt \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Игре Γ поставим в соответствие трехкритериальную динамическую задачу

$$\Gamma_v = \left\langle \Sigma, \mathcal{U} = \prod_{j=1}^3 \mathcal{U}_j, \{J_i(U = (U_1, U_2, U_3), t_0, x_0)\}_{i \in \mathbb{N}} \right\rangle.$$

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

²Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

³Центральный экономико-математический институт РАН, Москва

Альтернатива U^P максимальна по Парето для Γ_v , если при $\forall U \in \mathfrak{U}$ и $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \{\mathbb{R}^n \setminus 0_n\}$ несовместна система неравенств

$$J_i(U, t_0, x_0) \geq J_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

Далее $D > 0$ ($D < 0$) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определено положительна (отрицательна).

Утверждение [2]. Пусть в дифференциальной игре Γ

1°. $n \times n$ -матрицы

$$D_{ii} > 0, \quad D_{ij} < 0, \quad C_i < 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; j \neq i)$$

постоянные симметричные;

2°. $[\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}]$.

Тогда при $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n$ максимальной по Парето будет ситуация

$$U^P \div u^P(t, x) = (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x); \quad (1)$$

при этом выигрыши равны

$$J^P = (J_1^P, J_2^P, J_3^P), \quad J_i^P = x_0' \Theta_i(t_0) x_0 \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Здесь непрерывные симметричные $n \times n$ -матрицы имеют вид

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C^{-1} + \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau) [D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}] [X^{-1}(\tau)]' d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t),$$

$$\Theta_i(t) = [Y^{-1}(t)]' \left\{ C_i - \int_t^\vartheta Y'(\tau) \Theta^P(\tau) M_i(\tau) \Theta^P(\tau) Y(\tau) d\tau \right\} Y^{-1}(t),$$

где $i \in \mathbb{N}$; $n \times n$ -матрица $X(t)$ ($Y(t)$) — фундаментальная матрица решения системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ (соответственно $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$); матрицы C , $N(t)$, $M_i(t)$ определяются равенствами

$$C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3, \quad D_i = D_{i1} + \beta D_{i2} + \gamma D_{i3},$$

$$N(t) = A(t) - (D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}) \Theta^P(t),$$

$$M_i(t) = \Theta^p(t) [D_1^{-1}D_{i1}D_1^{-1} + D_2^{-1}D_{i2}D_2^{-1} + D_3^{-1}D_{i3}D_3^{-1}] \Theta^p(t),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Lambda_{13} & \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \Lambda_{23} \\ \Lambda_{33} & \Lambda_{33} \end{bmatrix},$$

величина Λ_{ii} ($-\Lambda_{ij}$) – наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ (соответственно, $\det[D_{ij} - \Lambda E_n] = 0$) ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$).

Для игры Γ вводится понятие индивидуально устойчивой коалиционной структуры $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ с помощью угрозы каждого игрока, а также контругрозы, заключающейся в «обнулении» действия угрозы.

Доказано следующее утверждение.

Теорема. Если для игры Γ выполнены условия (1) и (2), то коалиционная структура \mathfrak{K} индивидуально устойчива.

Заметим, что в игре Γ при предположениях 1^о и 2^о отсутствует равновесие по Нэшу, однако существует равновесие угроз и контругроз (доказано в [2]).

- [1] Сунь Ф., Парилина Е.М., Гао Х. Индивидуальная устойчивость коалиционных структур в играх трех лиц // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Том 11, № 1. С. 73–95.
- [2] Жуковский В.И., Житенева Ю.Н., Бельских Ю.А. Паретовское равновесие угроз и контругроз в одной дифференциальной игре трех лиц // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Том 11, № 1. С. 39–72.
- [3] Жуковский В.И., Чикрий А.А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. М.: Юрайт, 2017.

О назначении спектра в линейных системах с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу

В. А. Зайцев¹, И. Г. Ким¹

e-mail: verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$ -матриц над полем \mathbb{K} ; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; \bar{a} — комплексное сопряжение элемента a ; T — операция транспонирования; $*$ — эрмитово сопряжение, то есть $A^* = \bar{A}^T$.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, заданную дифференциальным уравнением n -го порядка с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n - p)$ включительно ($1 \leq p \leq n$), а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p - 1)$ включительно:

$$\begin{aligned}
 & x^{(n)}(t) + a_{10}x^{(n-1)}(t) + a_{11}x^{(n-1)}(t-h) + \dots + a_{1s}x^{(n-1)}(t-sh) + \\
 & + \dots + a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t-h) + \dots + a_{ns}x(t-sh) + \\
 & + \int_{-h}^0 g_{11}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau) d\tau + \int_{-2h}^{-h} g_{12}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau) d\tau + \\
 & + \dots + \int_{-sh}^{-(s-1)h} g_{1s}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau) d\tau + \dots + \\
 & + \int_{-h}^0 g_{n1}(\tau)x(t+\tau) d\tau + \int_{-2h}^{-h} g_{n2}(\tau)x(t+\tau) d\tau + \dots + \\
 & + \int_{-sh}^{-(s-1)h} g_{ns}(\tau)x(t+\tau) d\tau = \\
 & = b_{p1}u_1^{(n-p)}(t) + b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)}(t) + \dots + b_{n1}u_1(t) + \dots + \\
 & + b_{pm}u_m^{(n-p)}(t) + \dots + b_{nm}u_m(t), \quad t > 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \bar{c}_{11}x(t) + \bar{c}_{21}x'(t) + \dots + \bar{c}_{p1}x^{(p-1)}(t), \dots, \\ y_k(t) &= \bar{c}_{1k}x(t) + \bar{c}_{2k}x'(t) + \dots + \bar{c}_{pk}x^{(p-1)}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $a_{ij}, b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, s}$, $l = \overline{p, \bar{n}}$, $\alpha = \overline{1, \bar{m}}$, $\nu = \overline{1, \bar{p}}$, $\beta = \overline{1, \bar{k}}$; $g_{i\eta}: [-\eta h, -(\eta - 1)h] \rightarrow \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($i = \overline{1, n}$, $\eta = \overline{1, s}$); $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \text{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор. Начальные условия имеют вид $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-sh, 0]$, где $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi_i: [-sh, 0] \rightarrow \mathbb{K}$ — непрерывные функции.

Будем строить управление в системе (1), (2) в виде линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенными и распределенными соизмеримыми запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_{\rho} y(t - \rho h) + \sum_{v=1}^{\theta} \int_{-vh}^{-(v-1)h} R_v(\tau) y(t + \tau) d\tau, \quad (3)$$

$y(\xi) = 0$, $\xi < -\theta h$. Здесь $Q_{\rho} = \{q_{\alpha\beta}^{\rho}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы ($\rho = \overline{0, \theta}$), $R_v(\tau) = \{r_{\alpha\beta}^v(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta}^v: [-vh, -(v-1)h] \rightarrow \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($v = \overline{1, \theta}$), $\alpha = \overline{1, \bar{m}}$, $\beta = \overline{1, \bar{k}}$.

Из (2) имеем $y_{\beta}(t) = \sum_{\nu=1}^{\bar{p}} \bar{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t)$, $\beta = \overline{1, \bar{k}}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(t) &= \sum_{\beta=1}^{\bar{k}} \left[\sum_{\rho=0}^{\theta} q_{\alpha\beta}^{\rho} \left(\sum_{\nu=1}^{\bar{p}} \bar{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t - \rho h) \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{v=1}^{\theta} \int_{-vh}^{-(v-1)h} r_{\alpha\beta}^v(\tau) \left(\sum_{\nu=1}^{\bar{p}} \bar{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t + \tau) \right) d\tau \right], \quad \alpha = \overline{1, \bar{m}}. \end{aligned}$$

Замкнутая система (1), (2), (3) примет вид

$$\begin{aligned}
 & x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^s a_{ij} x^{(n-i)}(t - jh) + \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{\eta=1}^s \int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h} g_{i\eta}(\tau) x^{(n-i)}(t + \tau) d\tau - \\
 & - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{l=p}^n b_{l\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^k \left[\sum_{\rho=0}^{\theta} q_{\alpha\beta}^{\rho} \left(\sum_{\nu=1}^p \bar{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t - \rho h) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{v=1}^{\theta} \int_{-vh}^{-(v-1)h} r_{\alpha\beta}^v(\tau) \left(\sum_{\nu=1}^p \bar{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t + \tau) \right) d\tau \right] \right)^{(n-l)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Исследуется задача назначения произвольного возможного спектра системы (4). Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию замкнутой системы (4).

Определение. Для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (3), если для любого числа $\ell \geq 0$, любых чисел $\gamma_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, \ell}$, и любых интегрируемых функций $\delta_{i\eta}: [-\eta h, -(\eta-1)h] \rightarrow \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $\eta = \overline{1, \ell}$, найдутся число $\theta \geq 0$, матрицы $Q_0, \dots, Q_{\theta} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ и интегрируемые функции $R_v: [-vh, -(v-1)h] \rightarrow M_{m,k}(\mathbb{K})$, $v = \overline{1, \theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (4) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \gamma_{ij} e^{-\lambda j h} + \sum_{\eta=1}^{\ell} \int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h} \delta_{i\eta}(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau \right).$$

По системе (1), (2) построим $n \times m$ -матрицу $B := \{b_{l\alpha}\}$, $l = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, m}$, и $n \times k$ -матрицу $C := \{c_{\nu\beta}\}$, $\nu = \overline{1, n}$, $\beta = \overline{1, k}$, где $b_{l\alpha} := 0$ для $l < p$ и $c_{\nu\beta} := 0$ для $\nu > p$. Пусть $J := \{\vartheta_{ij}\} \in M_n(\mathbb{R})$, где $\vartheta_{ij} = 1$ для $j = i + 1$ и $\vartheta_{ij} = 0$ для $j \neq i + 1$.

Теорема. Задача назначения произвольного спектра для системы (1), (2) посредством регулятора (3) разрешима тогда и только тогда, когда матрицы C^*B , C^*JB , \dots , $C^*J^{n-1}B$ линейно независимы.

Работа продолжает исследования [1–3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00293, и при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем».

- [1] *Zaitsev V.A.* Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 1. С. 133–135.
- [2] *Zaitsev V.A., Kim I.G.* Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 810–814.
- [3] *Zaitsev V.A., Kim I.G.* Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2020. Vol. 30, issue 2. P. 208–220.

О способах построения внешних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями

*И. В. Зыков*¹

e-mail: zykoviustu@mail.ru

В работе предлагаются способы построения внешних оценок множества достижимости $K(t)$ для управляемых систем с интегральными ограничениями на управляющее воздействие. Схема, предложенная в [1], была перенесена в работе [2] на случай нелинейных управляемых систем с ограничением на управление в пространстве \mathbb{L}_p ($p > 1$).

Рассмотрим автономную линейную по управлению систему

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление; $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ — отображения, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим продолжимость решений на промежуток $[0, t_1]$.

Интегральное ограничение на управление имеет вид $u(\cdot) \in U_p$, где

$$U_p = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_p : \int_0^{t_1} \|u(t)\|_r^p dt \leq \mu^p \right\}, \quad p > 1, \quad \mu > 0. \quad (2)$$

Далее через $D \subset \mathbb{R}^n$ обозначим множество, которое содержит точки всех допустимых траекторий, удовлетворяющих заданному начальному условию и интегральному ограничению на управление. Если априори такое множество неизвестно, то принимаем в качестве D все пространство \mathbb{R}^n . Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$ на D , такую что $v(x^0) = 0$.

Предположение 1. Пусть на множестве D выполняются неравенства $\nabla v(x)f_1(x) \leq -\alpha v(x)$ и $\|\nabla v(x)f_2(x)\|_r^{\frac{p}{p-1}} \leq \beta^{\frac{p}{p-1}} v(x)$. Здесь $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ — заданные константы, через $\nabla v(x)$ обозначен градиент функции v .

Из второго неравенства следует неотрицательность $v(x)$. На основе данного предположения доказана [2] следующая теорема.

Теорема 1. Пусть предположение 1 выполнено. Тогда

$$K(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \leq \psi(t)\}, \quad t \in [0, t_1],$$

где $\psi(t) = p \left(\frac{\mu\beta}{p}\right)^p t^{p-1}$ в случае $\alpha = 0$. В случае $\alpha > 0$ можно положить

$$\psi(t) = \alpha \left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{p}t\right)\right)^{p-1},$$

либо, что дает более точную оценку,

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\mu^2 \beta^2}{\alpha} (1 - \exp(-\frac{\alpha}{2}t)) \exp(-\frac{\alpha}{2}t), & \text{если } t < \frac{p \ln p}{\alpha}, \\ \frac{\alpha}{p-1} \left(\frac{\mu\beta}{\alpha}\right)^p \left(\frac{p-1}{p}\right)^p, & \text{если } t \geq \frac{p \ln p}{\alpha}. \end{cases}$$

Если в качестве аналога функций Ляпунова брать квадратичные функции и применять эту схему к линейным управляемым

системам, то оценки множеств достижимости являются довольно грубыми.

Рассмотрим линейную стационарную систему, то есть в системе (1) примем равенства

$$f_1(x) = Ax, \quad f_2(x) = B, \quad (3)$$

и, для упрощения вычислений, положим $x(0) = 0$. Непрерывно дифференцируемую функцию $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы

$$v(x) = x^\top P x \geq 0, \quad P^\top = P. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть матрица A гурвицева. Тогда:

1) матрица P определяется единственным образом из матричного уравнения Ляпунова

$$PA + A^\top P = -C$$

для любой положительно определенной матрицы C ,

$$2) 0 \leq \alpha \leq \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \beta \geq 2\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(PBB^\top P)}{\lambda_{\min}(P)}},$$

3) $K(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P x \leq \psi(t)\}$, $t \in [0, t_1]$,
где $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

За счет использования времени в аргументах функции Ляпунова удается получить более точные оценки даже в случае стационарных систем. В линейно-квадратичном случае внешняя оценка может совпасть с множеством достижимости.

Будем рассматривать линейную систему с интегральным ограничением на управление

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \quad (5)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$; $A(t)$, $B(t)$ — интегрируемые на $[t_0, t_1]$ матричные функции. Ограничение на управление определено интегральным квадратичным неравенством $u(\cdot) \in U_2$ (см. формулу (2)). Далее $W(t)$ будет обозначать грамиан управляемости системы (1) в момент $t \leq t_1$. Пусть $\Phi(t)$ — матрица Коши, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I, \quad t \geq t_0.$$

Теорема 3. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой положительно определенной матрицы \bar{Q} матрица $Q_\varepsilon(t)$, определяемая равенством

$$Q_\varepsilon(t) = [W(t) + \varepsilon \Phi(t) \bar{Q}^{-1} \Phi^\top(t)]^{-1},$$

удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\varepsilon(t) + Q_\varepsilon(t)A(t) + A^\top(t)Q_\varepsilon(t) &= -Q_\varepsilon(t)B(t)B^\top(t)Q_\varepsilon(t), \\ Q_\varepsilon(t_0) &= \frac{1}{\varepsilon} \bar{Q}. \end{aligned}$$

Кроме того:

1) выполнено включение

$$\begin{aligned} K(t) \subset K_\varepsilon(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x}(t))^\top Q_\varepsilon(t)(x - \hat{x}(t)) \leq \mu^2\}, \\ \hat{x}(t) &= \Phi(t)x^0; \end{aligned}$$

2) существуют $k_1, k_2 > 0$ такие, что

$$h(K_\varepsilon(t), K(t)) \leq \phi(\varepsilon) = \begin{cases} k_1 \varepsilon, & \text{если система вполне управляема,} \\ k_2 \sqrt{\varepsilon}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция h обозначает хаусдорфово расстояние.

В докладе также обсуждается способ получения внутренних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями. Рассмотрено несколько примеров с результатами их численного моделирования.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в региональном научно-образовательном центре ИММ УрО РАН, «Уральский математический центр».

- [1] Никольский М.С. Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов / Материалы Межд. конф., посв. 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. 2018. С. 194–196. DOI: 10.4213/rgoc23018
- [2] Зыков И.В. О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2019. Т. 53, № 1. С. 61–72. DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-06

Параллельная реализация одного алгоритма решения задачи быстродействия для нелинейной управляемой системы

И. В. Изместьев^{1,2}, *В. Н. Ушаков*¹
e-mail: j748e8@gmail.com, ushak@imm.uran.ru

1. Постановка задачи

На промежутке времени $[t_0, +\infty)$ задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние, u — вектор управления, удовлетворяющий включению $u \in P$, где P — компакт в \mathbb{R}^p .

Предполагаются выполненными следующие условия:

Условие 1. Вектор-функция $f(t, x, u)$ ограничена и непрерывна на $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ найдётся такая константа $L = L(D) \in (0, \infty)$, что $\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|$, $(t, x^{(i)}, u) \in D \times P, i = 1, 2$.

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в \mathbb{R}^n .

Условие 2. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times P.$$

Условие 3. Множество

$$F(t, x) = f(t, x, P) = \{f(t, x, u) : u \in P\} \subset \mathbb{R}^n$$

выпукло при любых $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, понимаем измеримую по Лебегу вектор-функцию со значениями в P .

Рассматривается задача о построении управления, которое выводит управляемую систему (1) из точки x_0 в заданную точку $x_f \in \mathbb{R}^n$ за наименьшее время.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Челябинский государственный университет

2. Основной результат

Рассматриваемая задача быстрогодействия решается с помощью модификации алгоритма построения областей достижимости из работы [1], который можно описать следующим образом. Выбираем достаточно малый шаг $\delta > 0$ и задаём последовательность моментов времени $t_i = t_{i-1} + \delta$, $i \geq 1$. Обозначим через $X(t^*, t_*, x_*)$ ($t_0 \leq t_* < t^* < +\infty$) множество достижимости в \mathbb{R}^n системы (1), отвечающее моменту времени t^* и начальному условию $x(t_*) = x_*$. Тогда для каждого t_i , $i \geq 1$, множество достижимости из точки x_0 может быть найдено по рекуррентной формуле $X(t_i) = X(t_i, t_{i-1}, X(t_{i-1}))$. Поскольку это нельзя сделать точно, то будем вычислять множества достижимости приближенно, заменяя множества $X(t^*, t_*, x_*)$ множествами

$$X^{(\delta)}(t^*, t_*, x_*) = x_* + \delta F^{(\delta)}(t_*, x_*).$$

Здесь $F^{(\delta)}(t_*, x_*) = f(t_*, x_*, P^{(\delta)})$, $P^{(\delta)}$ — заданное конечное подмножество P . Однако на некоторой итерации количество точек в множестве $X^{(\delta)}(t_i)$ может стать настолько большим, что ресурсов ЭВМ, на которой происходят расчеты, может не хватить для вычисления множества $X^{(\delta)}(t_{i+1})$. Поэтому введём процедуру прореживания, которая заключается в следующем. Строится оценочный n -мерный параллелепипед, содержащий в себе $X^{(\delta)}(t_i)$. Затем с учетом геометрии этого оценочного параллелепипеда строится равномерная по каждой координате сетка, содержащаяся в нем. Для каждого узла сетки выбирается ближайшая к нему точка множества $X^{(\delta)}(t_i)$. Полученное множество обозначим $\tilde{X}^{(\delta)}(t_i)$. Таким образом, если количество точек в множестве $X^{(\delta)}(t_i)$ превысило заданное значение, то проводим процедуру прореживания и заменяем $X^{(\delta)}(t_i)$ множеством $\tilde{X}^{(\delta)}(t_i)$.

Чтобы решить рассматриваемую в докладе задачу быстрогодействия, строим множества $X^{(\delta)}(t_i)$ до тех пор, пока на некоторой итерации i расстояние между хотя бы одной точкой множества $X^{(\delta)}(t_i)$ и целевой точкой x_f не станет меньше $\varepsilon > 0$ (заданной точности). Тогда итерационный процесс останавливается. Затем, идя в обратном времени по построенным множествам достижимости $X^{(\delta)}(t_i)$, восстанавливаем вид управления и соответствующую ему траекторию. В случае, если данное условие окончания не выполнилось до заданного t_{max} , также останавливаем итерационный

процесс (управление, приводящее систему (1) в точку x_f за время меньше или равное t_{max} , не найдено).

Программная реализация описанного алгоритма выполнена на языке программирования C++. В качестве входных данных программа принимает точки x_0 и x_f , а также множество управлений $P^{(\delta)}$. Правая часть системы (1) задается непосредственно в коде программы. В процессе работы программы происходит пошаговое вычисление множеств $X^{(\delta)}(t_i)$, каждое из которых записывается на жесткий диск в отдельный файл. Вместе с координатами точки сохраняются индексы ее «родителей» (соответствующего управления и точки из предыдущего по времени множества достижимости). В процедуре прореживания для нахождения ближайших точек к узлам решетки используется алгоритм приближенного поиска ближайших соседей, реализованный в библиотеке Annoy [2]. Для увеличения скорости работы программы использована технология параллельных вычислений OpenMP [3]. А именно, распараллелены следующие части программы: вычисление множеств $X^{(\delta)}(t_i)$; процедура поиска ближайших соседей к узлам решетки; проверка близости точек текущего множества $X^{(\delta)}(t_i)$ к целевой точке x_f .

3. Пример

В качестве примера для численного моделирования выбрана задача управления стержнем OA [4]. В точке O стержень жестко прикреплен к оси ротора электродвигателя так, что он может вращаться вместе с ротором вокруг его оси в заданной плоскости Π . Симметричный относительно своей оси вращения маховик смонтирован так, что его центр находится в точке A . Маховик может вращаться вокруг оси, которая проходит через точку A перпендикулярно плоскости Π . Ось вращения маховика является осью ротора второго электродвигателя.

Управлениями являются напряжения, подаваемые на электродвигатели. Цель выбора управлений — вывести стержень OA в верхнее вертикальное положение за наименьшее время.

В работе [4] применялся подход [5], в котором нелинейные слабые в уравнении движения системы принимались за помеху. Таким образом получалась линейная задача управления при наличии помехи. Для этой задачи в работе [4] построено соответствующее позиционное управление. В рамках данного доклада это управление и порожденная им траектория сравниваются с результатами

численного моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 19-11-00105.

- [1] Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды МИАН. 2015. Т. 291, № 1. С. 276–291. DOI: 10.1134/S0371968515040214
- [2] www.github.com/spotify/annoy
- [3] www.openmp.org
- [4] *Ukhobotov V.I., Izmest'ev I.V.* Control Problem with Disturbance and Unknown Moment of Change of Dynamics / Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lect. Notes Control. Inf. Sci. - Proceedings. Springer, 2020. P. 335–344. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_30
- [5] *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Труды МИАН. 1995. Т. 211. С. 595–606.

Программный комплекс для компьютерного моделирования решения задач оптимизации управления жидкостной двигательной установкой ракеты-носителя

В. И. Калев¹, А. Ф. Шориков²

e-mail: v.i.kalev@urfu.ru, afshorikov@mail.ru

1. Введение

В работе представлено описание разработанного авторами компьютерного программного комплекса (КПК), позволяющего реализовать моделирование решения задач оптимизации управления жидкостной двигательной установкой (ЖДУ) ракеты-носителя (РН).

¹АО «НПО автоматики», Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Известно [1], что стационарный режим работы ЖДУ РН на отрезке времени $[\theta_0, \theta_f]$ может быть описан следующей дискретно-непрерывной (гибридной) системой:

$$\begin{aligned}
 a_{th}(t+1) &= a_{th}(t) + c_0 u(t), \quad a_{th}(0) = 0, \\
 m_o(\theta) &= \frac{(P + c_1 a_{th}(\theta)^2 + c_2 a_{th}(\theta))(K + c_5 a_{th}(\theta))}{(I + c_3 a_{th}(\theta)^2 + c_4 a_{th}(\theta))(1 + K + c_5 a_{th}(\theta))}, \\
 m_f(\theta) &= \frac{P + c_1 a_{th}(\theta)^2 + c_2 a_{th}(\theta)}{(I + c_3 a_{th}(\theta)^2 + c_4 a_{th}(\theta))(1 + K + c_5 a_{th}(\theta))}, \quad (1) \\
 M_o(\theta) &= M_{0.o} - \int_{\theta_0}^{\theta_f} m_o(\theta) d\theta, \\
 M_f(\theta) &= M_{0.f} - \int_{\theta_0}^{\theta_f} m_f(\theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

Здесь $\theta \in [\theta_0, \theta_f]$; $u(t) \in \mathbb{R}$ — управление, применяемое в фиксированные моменты времени $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{T-1}\} \subset [\theta_0, \theta_f]$; $\theta_T = \theta_f$; $t \in \overline{0, T-1}$; $a_{th}(t)$ — положение дросселя, $\forall \theta \in [\theta_t, \theta_{t+1})$ $a_{th}(\theta) = a_{th}(t)$; m_o, m_f — расходы окислителя и горючего из баков; M_o, M_f — массы компонентов топлива в баках; P, I, K — значения силы тяги, удельного импульса тяги и коэффициента соотношения компонентов топлива; c_0, \dots, c_5 — параметры динамики ЖДУ РН.

Предлагаемый КПК позволяет реализовать моделирование решения задач: формирования для исходной гибридной динамической системы соответствующей аппроксимирующей линейной дискретной управляемой динамической системы (ЛДУДС); оптимального программного и адаптивного терминального управления расходом топлива ЖДУ РН; минимаксного программного и адаптивного терминального управления расходом топлива ЖДУ РН. Для моделирования решения каждой задачи создан соответствующий компьютерный программный модуль. В работе приведено описание этих модулей и их функций, входных и выходных данных.

2. Описание модулей КПК

2.1. Модуль линеаризации и дискретизации.

На основе исходной гибридной системы вида (1) данный программный модуль вычисляет основные параметры соответствующей ей аппроксимирующей ЛДУДС. При формировании аппроксимирующей системы используются методы линеаризации вдоль

опорной траектории (разложения в ряд Тейлора) и квантования (дискретизации), которые подробно описаны в работе [1]. Входные данные задают параметры исходной гибридной системы (1), а выходные данные — параметры аппроксимирующей системы. Программный модуль может быть использован для проведения статистического моделирования, верификации пусков реальной РН и др.

Результаты работы данного модуля формируют входную информацию для разделов 2.2–2.5. Также в модуле формируются множества ограничений фазового вектора и вектора ограничений — это выпуклые многогранники-компакты, в разделах 2.2–2.3 управления ограничиваются выпуклыми многогранниками, в разделах 2.4–2.5 управления ограничиваются конечными множествами.

2.2. Модуль оптимального программного управления.

С помощью этого модуля реализуется компьютерное моделирование решения задачи оптимального программного управления ЛДУДС при наличии выпуклого терминального функционала качества [2]. В данном модуле для поиска множества оптимальных программных управлений используется метод прямых и обратных конструкций, основывающийся на общем рекуррентном алгебраическом методе построения и анализа областей достижимости линейных дискретных управляемых динамических систем. Эти методы разработаны А. Ф. Шориковым и изложены в работах [3, 4]. На выходе модуля формируются параметры, определяющие множество всех оптимальных программных управлений, которое может быть использовано «напрямую» для выработки управляющего сигнала на приводы дросселей ЖДУ РН, описываемой гибридной системой вида (1).

2.3. Модуль оптимального адаптивного управления.

Данный программный модуль позволяет реализовать компьютерное моделирование решения задачи оптимального адаптивного управления ЛДУДС при наличии выпуклого терминального функционала качества в специальном классе стратегий адаптивного управления [3]. Алгоритм решения исследуемой задачи основан на реализации конечной последовательности решений соответствующих вспомогательных задач оптимального программного терминального управления рассматриваемой ЛДУДС. На выходе модуля формируются параметры, описывающие реализацию искомого алгоритма оптимального адаптивного управления, соответствующей

ющей фактическим реализациям фазовых состояний системы. Эти данные используются для формирования алгоритма оптимизации адаптивного управления [5, 6] исходной системой вида (1).

2.4. Модуль минимаксного программного управления.

Этот модуль предназначен для компьютерного моделирования решения задачи минимаксного программного управления ЛДУДС при наличии возмущения и выпуклого терминального функционала качества [3]. Алгоритм решения данной задачи базируется на реализации конечной последовательности решений соответствующих задач оптимального программного терминального рассматриваемой ЛДУДС и решении задачи конечной дискретной оптимизации. Выходными данными модуля являются параметры, описывающие множество всех минимаксных программных управлений, которое используется для формирования алгоритма минимаксного программного управления [7] исходной гибридной системой (1).

2.5. Модуль минимаксного адаптивного управления.

С помощью данного программного модуля реализуется компьютерное моделирование решения задачи минимаксного адаптивного управления ЛДУДС при наличии возмущения и выпуклого терминального функционала качества в специальном классе стратегий адаптивного управления [3]. Алгоритм решения задачи основан на реализации конечной последовательности решений соответствующих вспомогательных задач минимаксного программного терминального управления рассматриваемой ЛДУДС. На выходе модуля формируются параметры, описывающие реализацию искомой стратегии минимаксного адаптивного управления, соответствующей фактическим реализациям фазовых состояний системы. Эти данные используются для формирования алгоритма минимаксного адаптивного управления [8] исходной гибридной системой (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00544.

- [1] Шориков А.Ф., Калев В.И. Формирование линейной дискретной динамической модели для решения задачи оптимального терминального управления расходом топлива ракеты-носителя // Информационные технологии и системы. 2016. С. 61–66.
- [2] Шориков А.Ф., Калев В.И. Решение задачи оптимального программного терминального управление расходом топлива

- ракеты-носителя // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 166–176.
- [3] *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
- [4] *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы / Негладкие задачи оптимизации и управление. Свердловск. УрО АН СССР. 1986. С. 55–61.
- [5] *Шориков А.Ф., Калев В.И.* Алгоритм оптимального адаптивного терминального управления расходом топлива жидкостной двигательной установки ракеты-носителя. Часть I // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2018. Т. 19, № 1. С. 30–39.
- [6] *Шориков А.Ф., Калев В.И.* Алгоритм оптимального адаптивного терминального управления расходом топлива жидкостной двигательной установки ракеты-носителя. Часть II // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2018. Т. 19, № 2. С. 29–37.
- [7] *Шориков А.Ф., Калев В.И.* Решение задачи минимаксного программного управления расходом топлива ракеты-носителя // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 76–90.
- [8] *Шориков А.Ф., Калев В.И.* Решение задачи минимаксного адаптивного управления расходом топлива жидкостной ракеты-носителя // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 4. С. 129–145.

Численное построение множеств разрешимости “к моменту” в линейных дифференциальных играх на плоскости

Л. В. Камнева¹

e-mail: kamneva@imm.uran.ru

1. Постановка задачи. Пусть динамика конфликтно управляемой системы имеет вид

$$\dot{z}(t) = Az(t) + u + v, \quad z(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, \vartheta], \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1)$$

Здесь A — 2×2 -матрица, $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограничения на управления первого (u) и второго (v) игроков, каждое из которых — выпуклый многоугольник или линейный отрезок на плоскости. Момент ϑ фиксирован.

Рассмотрим игру на минимакс-максимин времени до встречи [1]. Пусть терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^2$ является простым многоугольником. Цель первого игрока — обеспечить включение $z(t_*) \in M$ для наименьшего возможного $t_* \in [0, \vartheta]$ и траектории $z(\cdot)$ системы (1) с начальным условием $z(0) = z_0$. Цель второго игрока противоположна.

Для построения оптимального управления первого игрока можно использовать процедуру прицеливания [1] на соответствующие множества разрешимости. Множество разрешимости $\tilde{G}_\vartheta(M)$ к моменту ϑ определяется как множество всех начальных точек $z_0 \in \mathbb{R}^2$, из которых первый игрок гарантирует достижение множества M на интервале времени $[0, \vartheta]$.

Задача состоит в численном построении множества $\tilde{G}_\vartheta^\Delta(M)$, приближающего множество разрешимости $\tilde{G}_\vartheta(M)$.

2. Алгоритм попятного построения множества $\tilde{G}_\vartheta^\Delta(M)$. Заданный отрезок времени $[0, \vartheta]$ разбивается с некоторым шагом Δ и строится система множеств (многоугольников) $\tilde{W}_i, i = 1, \vartheta/\Delta$:

$$\tilde{W}_1 := \tilde{W}_\Delta(M), \quad \tilde{W}_i := \tilde{W}_\Delta(\tilde{W}_{i-1}), \quad i = 2, \vartheta/\Delta.$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Полагаем $\tilde{G}_\vartheta^\Delta(M) := \tilde{W}_{\vartheta/\Delta}$.

Схема построения многоугольника $\tilde{W}_\Delta(M)$ на первом шаге $[0, \Delta]$ обратного времени заключается в следующем.

- 1) На границе многоугольника M выделяем ломаную L_0 — замыкание допустимой зоны [2] множества M .
- 2) Задаем некоторое замкнутое множество M_0 , частью границы которого является L_0 .
- 3) Конструируем множество $W_\Delta(M_0)$ на основе множества разрешимости в момент Δ в задаче с простыми движениями $\dot{x} = u + v$, $u \in P$, $v \in Q$, и терминальным множеством M_0 [3].
- 4) Предполагаем, что часть границы множества M , содержащая ломаную L_0 , и часть границы множества $W_\Delta(M_0)$ формируют многоугольник $E_\Delta(M)$, примыкающий к множеству M со стороны L_0 .
- 5) Определяем $\tilde{W}_\Delta(M) := M \cup E_\Delta(M)$.

Построения на i -м шаге $[(i-1)\Delta, i\Delta]$ проводятся аналогично, но многоугольник M заменяется на \tilde{W}_{i-1} , $i = 2, \vartheta/\Delta$.

На практике схема для $\tilde{W}_\Delta(M)$ представляет собой модификацию одного шага попятной процедуры построения множества разрешимости “в момент” в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания [3]. Эта процедура осуществляет переход к эквивалентной системе [1] вида

$$\dot{x}(t) = B(t)u + C(t)v, \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, \vartheta], \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (2)$$

На одном шаге коэффициенты динамики (2) замораживаются. Далее используется алгоритм точного построения множества разрешимости “в момент” для динамики простых движений, который основан на обработке упорядоченного списка полуплоскостей, опорных к M и сдвигаемых вдоль нормалей. Модификация этого алгоритма для построения множества $\tilde{W}_\Delta(M)$ включает в себя: (а) замораживание сдвига полуплоскостей, опорных к недопустимой зоне терминального множества M ; (б) добавление “барьерных” полуплоскостей от множества M_0 ; (в) возврат в оригинальную систему координат в конце каждого шага построений.

3. Связь между множествами $\tilde{G}_\vartheta^\Delta(M)$ и $\tilde{G}_\vartheta(M)$. Для случая $A^2 = 0$ и при дополнительных геометрических условиях на

множества M_0 и $W_\Delta(M_0)$ доказано следующее свойство множества $\widetilde{W}_\Delta(M)$, аналогичное утверждению из [4].

Утверждение 1 (дискретная u -стабильность относительно M).

$$\forall w_0 \in \widetilde{W}_\Delta(M) \quad \forall v_* \in Q \quad \exists u_* \in P \quad \exists \zeta \in [0, \Delta] : \quad \rho(w_\zeta, M) \leq K\Delta^2,$$

где $w_\zeta := w_0 + \zeta(Aw_0 + u_* + v_*)$, $\rho(x, M)$ — расстояние от $x \in \mathbb{R}^2$ до M , значение K зависит только от исходных данных задачи.

Предположим, что свойство дискретной u -стабильности выполнено для каждого множества \widetilde{W}_i относительно множества \widetilde{W}_{i-1} , $i = \overline{1, \vartheta/\Delta}$, $\widetilde{W}_0 = M$. Тогда, как показано в [4], процедура управления первого игрока, экстремальная к системе множеств \widetilde{W}_i , $i = \overline{1, \vartheta/\Delta}$, обеспечивает следующую оценку для результирующей траектории $z(\cdot)$:

$$\rho^2(z(\zeta_i), \widetilde{W}_{i-1}) \leq K_1\Delta^2 + \|z(\zeta_{i-1}) - w_{i-1}\|^2 e^{K_2\Delta}. \quad (3)$$

Здесь $i = \overline{1, \vartheta/\Delta}$; ζ_i — момент выбора экстремального управления первым игроком; w_{i-1} — точка из \widetilde{W}_{i-1} , ближайшая к $z(\zeta_{i-1})$; K_1, K_2 — постоянные, зависящие лишь от исходных данных задачи. Опираясь на оценку (3), получаем [4] следующее свойство.

Утверждение 2.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \leq \delta \quad \widetilde{G}_\vartheta^\Delta(M) \subset O_\varepsilon(\widetilde{G}_\vartheta(M)),$$

где $O_\varepsilon(G)$ — ε -окрестность множества G .

4. Пример. Рассмотрим частный случай игры (1):

$$\dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = u_2, \quad |u_2| \leq 1, \quad |v_1| \leq 1. \quad (4)$$

Пусть множество M — правильный 12-угольник, вписанный в круг единичного радиуса с центром в начале координат. Игра (4) представляет собой задачу управления материальной точкой на прямой при наличии помехи, влияющей на скорость точки.

Для данного примера $A^2 = 0$ и выполнены нужные геометрические условия на каждом шаге численных построений. На рис. 1 показаны границы терминального множества M и множества $\widetilde{G}_\vartheta^\Delta(M)$

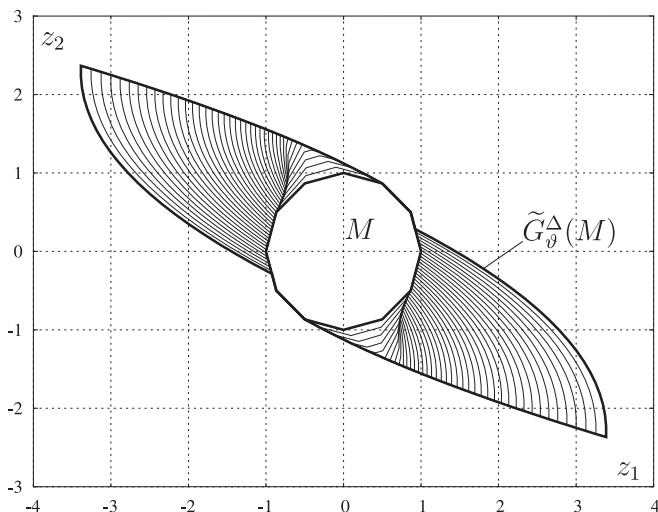


Рис. 1: Множество $\tilde{G}_\vartheta^\Delta(M)$ для игры (4), $\vartheta = 4$, $\Delta = 0.1$

для $\vartheta = 4$, а также границы промежуточных множеств $\tilde{G}_{i\Delta}^\Delta(M)$, $i = 1, \vartheta/\Delta$, с шагом $\Delta = 0.1$. Результаты счета визуально совпадают с численными построениями для этого примера, полученными в [5] другим алгоритмом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00410.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [3] Kamneva L. Computation of solvability set for differential games in the plane with simple motion and non-convex terminal set // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9, no. 3. P. 724–750. DOI: 10.1007/s13235-018-00292-x
- [4] Турова В.Л. Построение множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре второго порядка с нефиксированным временем окончания // Управление с гарантированным результатом: Сб. научн. трудов. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 92–112.

- [5] Пацко В.С., Турова В.Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995.

О задаче оптимального управления возвращаемым блоком ракеты-носителя

И. Н. Кандоба^{1,2}, Д. А. Новиков¹, А. Р. Плаксин¹, И. В. Козьмин¹
e-mail: kandoba@imm.uran.ru, novikov@yandex.com,
a.r.plaksin@gmail.com, ikozmin@imm.uran.ru

1. Введение

В настоящее время производители космической техники значительное внимание уделяют разработке технических решений, позволяющих создавать бюджетные ракеты-носители с отдельными ступенями или блоками, которые могли бы быть успешно возвращены на Землю после завершения выполнения их функций для повторного использования этих конструктивных элементов. Одним из ключевых моментов при проектировании указанной техники является разработка методов построения управлений, с помощью которых осуществляется такое движение возвращаемого элемента конструкции (далее — блока), которое обеспечивает его успешное приземление в заданной точке с требуемой точностью и в состоянии, пригодном для дальнейшего использования.

В работе в качестве блока рассматривается твердое тело цилиндрической формы, управление которым осуществляется с помощью четырех аэродинамических рулей, симметрично расположенных на границе одного из торцов цилиндра.

Основное внимание уделяется построению допустимых управлений в задаче оптимального управления нелинейной динамической системой, описывающей движение блока на отдельном атмосферном участке его траектории. На этом участке осуществляется дви-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

жение блока к посадочной вертикали — вертикальной прямой, проходящей через заданную точку приземления.

Содержательная постановка задачи приведения блока на посадочную вертикаль заключается в следующем. Требуется построить программное управление, которое обеспечивает максимальное сближение блока с посадочной вертикалью до момента достижения им заданной высоты, а также — минимальные абсолютные значения горизонтальных составляющих скоростей блока в точке пересечения его траектории с этой прямой.

Задача исследуется при следующих предположениях: а) поверхностью Земли является плоскость, касательная к земному эллипсоиду в точке приземления блока; б) поле тяготения Земли является однородным, значение гравитационного ускорения зависит только от высоты; в) отсутствует систематический ветер, а другие термодинамические характеристики атмосферы задаются известными детерминированными функциями.

2. Математическая модель. Постановка задачи

Поступательное движение центра масс блока на промежутке времени $[t_s, t_f]$ в некоторой неподвижной (посадочной) системе координат $Oxyz$ описывается уравнениями [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \phi) + \mathbf{W}^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \phi, \delta), \quad \dot{\delta} = \mathbf{u}. \quad (1)$$

Вращательное движение блока как “твёрдого тела” вокруг осей связанной с ним (подвижной) системы координат $O_1x_1y_1z_1$ задается на $[t_s, t_f]$ уравнениями Эйлера [2]

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G} \cdot \left(\mathbf{M}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \phi) + \mathbf{M}^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \phi, \delta) \right), \quad \dot{\phi} = \mathbf{\Lambda}(\phi)\boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{J_{y_1} - J_{z_1}}{J_{x_1}} \omega_{y_1} \omega_{z_1}, \frac{J_{z_1} - J_{x_1}}{J_{y_1}} \omega_{z_1} \omega_{x_1}, \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{J_{z_1}} \omega_{x_1} \omega_{y_1} \right)^\top,$$

$$\mathbf{G} = \left(\frac{1}{J_{x_1}}, \frac{1}{J_{y_1}}, \frac{1}{J_{z_1}} \right)^\top,$$

$$\mathbf{\Lambda}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi (\cos \psi)^{-1} & \cos \varphi (\cos \psi)^{-1} \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 1 & \sin \varphi \sin \psi (\cos \psi)^{-1} & \cos \varphi \sin \psi (\cos \psi)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь t_s — начальный момент времени; t_f — конечный момент; $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость центра масс блока; $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость вращения блока; $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^4$ — углы поворота рулей; $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ — гравитационное ускорение; $\mathbf{W}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}), \mathbf{W}^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^3$ — ускорения, возникающие при действии аэродинамических сил на корпус блока и рули соответственно; $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}$ — осевые моменты инерции блока; $\mathbf{M}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}), \mathbf{M}^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^3$ — моменты аэродинамических сил, действующих на корпус блока и рули; $\boldsymbol{\phi} = (\vartheta, \psi, \varphi)^\top \in \mathbb{R}^3$, где ϑ, ψ, φ — углы тангажа, рыскания и крена, определяющие пространственную ориентацию блока.

В момент времени t_s для динамической системы (1),(2) задаются начальные условия

$$\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_s, \quad \mathbf{v}(t_s) = \mathbf{v}_s, \quad \boldsymbol{\omega}(t_s) = \boldsymbol{\omega}_s, \quad \boldsymbol{\delta}(t_s) = \boldsymbol{\delta}_s, \quad \boldsymbol{\phi}(t_s) = \boldsymbol{\phi}_s. \quad (3)$$

Компоненты u_i управления $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ ограничены:

$$|u_i(t)| \leq u_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

К управляемому движению блока предъявляется ряд дополнительных требований, которые приводят к ограничениям на текущее фазовое состояние системы (1),(2):

$$|\delta_i(t)| \leq \delta_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (4)$$

$$y(t_f) \geq h_f^{\min}. \quad (5)$$

Здесь h_f^{\min} — положительная константа, определяющая минимально-допустимую высоту блока в конечный момент времени t_f .

Исследуется частный способ управления. Пусть

$$\delta_1(t) = \delta_3(t) = \delta_\vartheta(t), \quad \delta_2(t) = \delta_4(t) = \delta_\psi(t), \quad t \in [t_s, t_f].$$

При таком способе в качестве управляющих воздействий используются скорости изменения углов δ_ϑ и δ_ψ :

$$u_\vartheta(t) = \dot{\delta}_\vartheta(t), \quad u_\psi(t) = \dot{\delta}_\psi(t), \quad t \in [t_s, t_f].$$

Управление должно удовлетворять условиям

$$|u_\vartheta(t)| \leq u_\vartheta^{\max}, \quad |u_\psi(t)| \leq u_\psi^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (6)$$

а фазовые ограничения (4) могут быть записаны в виде

$$|\delta_{\vartheta}(t)| \leq \delta_{\vartheta}^{\max}, \quad |\delta_{\psi}(t)| \leq \delta_{\psi}^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (7)$$

Тогда задача приведения блока на посадочную вертикаль может быть сформулирована как следующая задача оптимального управления.

Задача 1. Пусть конечный момент времени t_f не зафиксирован. На промежутке времени $[t_s, t_f]$ для управляемой системы (1),(2) с заданными начальными условиями (3) найти программное управление \mathbf{u} (кусочно-непрерывную на $[t_s, t_f]$ вектор-функцию), которое удовлетворяет условию (6) и обеспечивает минимальное значение функционалу

$$J_{\mu}[\mathbf{u}(\cdot)] = x^2(t_f) + z^2(t_f) + \mu ([v_x(t_f)]^2 + [v_z(t_f)]^2),$$

где $\mu > 0$ — заданная константа. При этом должны быть выполнены фазовые ограничения (5) и (7).

3. Алгоритм построения допустимых управлений

Предлагается алгоритм построения допустимых и субоптимальных управлений в задаче 1, который основан на решении обратной задачи аэродинамики. Его основная идея заключается в последовательном определении и использовании для построения искомого управления желаемого момента $\overline{\mathbf{M}}^s$, который обеспечивает движение центра масс блока с некоторым заданным вектором скорости \vec{v} .

Эта идея реализуется выполнением в каждый текущий момент времени из $[t_s, t_f)$ следующих операций:

- 1) Задается требуемый вектор скорости \vec{v} центра масс блока;
- 2) С учетом всех ограничений определяется соответствующий \vec{v} желаемый момент $\overline{\mathbf{M}}^s$;
- 3) Для момента $\overline{\mathbf{M}}^s$ вычисляются значения углов $\bar{\delta}_{\vartheta}$, $\bar{\delta}_{\psi}$ и строится допустимое в задаче 1 управление $\vec{\mathbf{u}}$.

Чтобы задать вектор скорости \vec{v} , применяется несколько подходов, которые позволяют строить в задаче 1 как допустимые, так и субоптимальные управления. Для определения момента $\overline{\mathbf{M}}^s$ используются уравнения Эйлера (2).

Результаты численного моделирования свидетельствуют о работоспособности предлагаемых подходов к решению исследуемой в работе прикладной задачи оптимального управления.

- [1] Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В. Механика полета. М.: Машиностроение, 1969.
- [2] Калугин В.Т., Голубев А.Г., Епихин А.С. Аэродинамика. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.

Построение решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления с тремя участниками

А. Ф. Клейменов¹

e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Уравнения движения управляемой системы в рассматриваемой двухшаговой задаче на фиксированном промежутке времени содержат управления либо первого игрока, либо первого и второго игроков, либо первого и третьего игроков, либо всех игроков одновременно [1]. На первом шаге управляемого процесса (от начального момента до некоторого заданного момента) на систему действует управление только первого игрока, который решает задачу оптимального управления с заданным терминальным функционалом. В начале второго шага процесса первый игрок решает, будут ли участвовать в процессе управления на оставшемся промежутке времени другие игроки или нет. Если будут, то все участвующие игроки разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру с заданными терминальными функционалами игроков, причем это может быть игра двух или трех лиц. Предполагается, что выигрыши игроков являются трансферабельными и что за участие в управляемом процессе вошедшие игроки выплачивают первому игроку платеж в некотором фиксированном размере. При этом в игре выбирается равновесие по Нэшу, неулучшаемое по Парето. Если же не будут, то первый игрок продолжает решать задачу оптимального управления до окончания процесса. Задача

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

состоит в нахождении наилучших решений первого игрока (позиционной стратегии на всем промежутке процесса и выбора опции в начале второго шага), а также стратегий второго и третьего игроков (в случае их участия в управляемом процессе). Решение задачи иллюстрируется на конкретном примере.

- [1] *Клейменов А.Ф.* Альтруистический и агрессивный типы поведения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре трех лиц // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 3. С. 108–117.

Квантовые динамические игры и уравнения Гамильтона – Якоби на Римановых многообразиях

В. Н. Колокольцов^{1,2,3}

e-mail: kolokoltsov59@mail.ru

Квантовые игры являются новым направлением в теории игр, возникшим в начале 21-го века. Они тесно связаны с современным развитием квантовых вычислений и квантовых технологий. До сих пор изучались только стационарные или повторяющиеся игры. В этом докладе мы начинаем развитие истинно динамической теории со стратегиями, выбираемыми игроками в реальном времени. Поскольку квантовые наблюдения разрушают квантовую эволюцию (квантовый парадокс Зенона), необходимым новым ингредиентом для теории квантовых динамических игр должна быть теория квантовой стохастической фильтрации. Кроме технических проблем с организацией позиционного управления в реальном времени, здесь возникают и математические сложности, ибо результирующие задачи управления обычно приводят к нетривиальным стохастическим моделям на многообразиях со случайными прыжками и/или вырожденной диффузии. Отправной точкой настоящего

¹Warwick University, Coventry, UK

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

³Санкт-Петербургский государственный университет

исследования явилось замечательное наблюдение, что существует естественный класс непрерывных наблюдений, при которых главная часть возникающих управляемых диффузионных процессов на комплексных проективных пространствах совпадает со стандартным броуновским движением. В этом случае можно построить эффективную теорию соответствующих уравнений Беллмана – Айзекса. Доклад основан на препринте автора <https://arXiv:2002.00271>

Гарантирующее управление упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта на подвижном основании от удара

*В. А. Корнеев*¹

e-mail: korneev@ipmnet.ru

1. Механическая система и постановка задачи

Пусть механическая система состоит из основания и объекта, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора — устройства, генерирующего управляющую силу f между основанием и объектом с ограничением $|f| \leq F_0$ и предназначенного для защиты объекта от удара, действующего на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой.

Обозначим: z' — смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x' — смещение объекта относительно основания, m — масса объекта. Ударное воздействие v' на основание моделируется зависимостью $v' = -\dot{z}'$, где \dot{z}' — ускорение основания.

В начальный момент времени объект покоится относительно основания, движение объекта относительно основания описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}' + u' &= v'(t'), & u' &= f/m, & |u'| &\leq u_0, & u_0 &= F_0/m, & v' &= -\dot{z}', \\ x'(0) &= 0, & \dot{x}'(0) &= 0, & v'(t') &= V'(t' - t'_0), & t'_0 &\geq 0, \end{aligned}$$

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

где кусочно-непрерывная функция $V'(\xi')$ определена для всех вещественных ξ' , причем $V'(\xi') \equiv 0$ для $\xi' \leq 0$, а t'_0 — время упреждения, спустя которое после включения системы противоударной изоляции возмущение v' начинает действовать на основание. Ударное воздействие имеет конечную длительность T' , ускорение основания не меняет знак ($V' \geq 0$), а интеграл от величины $V'(t')$ по времени равен v_0 . Возмущение V' превышает величину u'_0 только на одном интервале времени.

Класс описанных возмущений обозначим V_* . Качество изоляции при заданных управлении $u'(t)$ и времени упреждения t'_0 будем оценивать функционалом J' , характеризующим максимальную величину смещения объекта относительно основания $x'(t'; u', V', t'_0)$ при наихудшем возмущении: $J'(u', t'_0) = \max_{V \in V_*} \max_{t' \in [0, \infty)} |x'(t'; u', V', t'_0)|$.

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{u_0}{v_0^2} x', \quad t = \frac{u_0}{v_0} t', \quad v(t) = \frac{1}{v_0} v' \left(\frac{v_0}{u_0} t' \right), \quad u = \frac{u'}{u_0}, \quad J = \frac{u_0}{v_0^2} J'.$$

Задача. Для заданного параметрического семейства допустимых управлений $u_s(t)$, где s — параметр, найти время упреждения t_0^* и значение параметра s^* , минимизирующие максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u_{s^*}, t_0^*) = \min_{t_0, s} \max_{V \in V_*} \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u_s, V, t_0)|.$$

2. Решение задачи для различных управлений

2.1. Управление для мгновенного удара. Рассмотрим класс управлений, описываемый параметрическим семейством функций $u_c(t)$:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ -1, & c \leq t \leq 1/4 + c, \\ 1, & 1/4 + c < t \leq 3/2 + c, \\ 0, & t > 3/2 + c, \end{cases} \quad c \geq 0.$$

Управление $u_\delta(t) = u_c(t)|_{c=0}$ есть оптимальное управление с оптимальным упреждением $t_0 = 1$ для задачи при возмущении $V(\xi) = \delta(\xi)$ [1]. Управление $u_c(t)$ есть u_δ -управление с запаздыванием c ,

так как $u_c(t) = u_\delta(t - c)$. Решение задачи для класса управлений u_c :

$$J(u_{c^*}, t_0^*) = \begin{cases} 25/16 - \sqrt{9/4 + 2T} + T, & T \leq 7/8, \\ T/2, & 7/8 < T, \end{cases}$$

$$t_0^* = \begin{cases} c^* + \sqrt{9/4 + 2T} - 1/2 - T, & T \leq 7/8, \\ c^* + 17/16 - T/2, & 7/8 < T, \end{cases} \quad c^* \geq \max \left[0, \frac{T}{2} - \frac{17}{16} \right],$$

значения c^*, t_0^* не единственны.

2.2. Постоянное управление с упреждением и запаздыванием. Рассмотрим класс управлений, описываемый параметрическим семейством функций u_d :

$$u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d, \\ 1, & d \leq t \leq 1 + d, \\ 0, & t > 1 + d, \end{cases} \quad d \geq 0.$$

Управление $u_d(t)$ при $d = 0$ обозначим $u_{0d}(t)$. Управление $u_{0d}(t)$ есть оптимальное управление для частного случая задачи, когда упреждения нет ($t_0 = 0$) и возмущение реализуется в виде мгновенного удара, то есть $v(t) = V(t) = \delta(t)$. Управление $u_d(t)$ есть u_{0d} -управление с запаздыванием d , так как $u_d(t) = u_{0d}(t - d)$. Решение задачи для класса управлений u_d определяется выражениями

$$t_0^* = \begin{cases} d^* + \sqrt{2T + 2} - T - 1, & T \leq 1, \\ d^* + 1/2 - T/2, & 1 < T, \end{cases} \quad d^* \geq \max \left[0, \frac{T - 1}{2} \right],$$

$$J_d(T) = J(u_{d^*}, t_0^*) = \begin{cases} 3/2 - \sqrt{2T + 2} + T, & T \leq 1, \\ T/2, & 1 < T, \end{cases}$$

то есть оптимальные параметры d^*, t_0^* не единственны.

2.3. Постоянное управление без упреждения и запаздывания. Управление $u_{0d}(t)$ есть оптимальное управление для задачи без упреждения и запаздывания при возмущении $V(\xi) = \delta(\xi)$ [1]. Значение функционала $J(u_{0d}(t), 0)$ дается формулой

$$J_0(T) = J(u_{0d}(t), 0) = \begin{cases} 1/2, & T \leq 1, \\ T - 1/2, & 1 < T. \end{cases}$$

2.4. *Управление с одним переключением.* Рассмотрим класс допустимых релейных управлений u_τ :

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \tau, \\ +1, & \tau \leq t \leq T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \quad T_c = 1 + 2\tau. \quad (1)$$

Длины отрезков управления в (1) выбраны из условия $\dot{x} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Оптимальное управление определяется формулой (1) со следующим значением параметра τ :

$$\tau^* = \begin{cases} T/2 + 1/4, & T < 1/2, \\ 1/2, & 1/2 < T \leq 7/2, \\ \sqrt{(1+T)/2} - 1, & T > 7/2. \end{cases}$$

Значение функционала и момент упреждения суть

$$J_\tau(T) = \begin{cases} (T/2 + 1/4)^2, & T \leq 1/2, \\ T/2, & 1/2 < T, \end{cases}$$

$$t_{0\tau}^* = \begin{cases} T + 1, & T < 1/2, \\ 7/4 - T/2, & 1/2 < T \leq 7/2, \\ 0, & T > 7/2. \end{cases}$$

Приведенное решение задачи при $T > 1/2$ не является единственным. Значение функционала $J = T/2$ при этом обеспечивается значениями τ и t_0 , удовлетворяющими соотношениям

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2} - 1, 0\} \leq \tau \leq \sqrt{T/2},$$

$$t_{0\tau} = 1/2 + \tau^2 + 2\tau - T/2.$$

2.5. *Сравнение решений.* Справедливы соотношения

$$J_\tau(T) \leq J_c(T) \leq J_d(T) \leq J_0(T).$$

Показано, что относительные разности

$$\eta = (J_c - J_\tau)/J_\tau, \quad \mu = (J_d - J_\tau)/J_\tau$$

при $T > 0$ удовлетворяют неравенствам $\eta \leq 0.1$, $\mu \leq 0.372$, что позволяет использовать более удобные на практике простые

управления u_c, u_d заданного профиля. Оптимизация в этом случае осуществляется только за счет упреждения и запаздывания. При $T < 1$ запаздывание можно положить равным нулю, при этом для $T = 0$ имеем $J_0(0)/J_d(0) \approx 5.82843$, $J_0(0)/J_\tau(0) = J_0(0)/J_c(0) = 8$. Итак, для малых T использование управления u_d с оптимизацией только по моменту упреждения позволяет уменьшить максимальное смещение в 5.8 раз, а оптимизация по моменту упреждения и использование управления $u_\tau(t)$ — в 8 раз.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690138-6.

- [1] *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001.

О полиэдральном методе синтеза управлений в задаче целевого уклонения для линейных многошаговых систем

*Е. К. Костоусова*¹
e-mail: kek@imm.uran.ru

1. Введение

Рассматривается линейная многошаговая система с двумя управлениями в условиях конфликта, когда цель одного управления состоит в приведении траектории системы на заданное целевое множество в заданный конечный момент времени, а цель другого противоположна. Таким образом, возникают две подзадачи, а именно, задача сближения и задача уклонения. Хорошо известны подходы к решению задач такого рода, основанные на построении трубок разрешимости [1, 2]. Однако точное построение трубок траекторий, как правило, бывает затруднительно. Поэтому активно разрабатываются различные численные методы. Ряд из них, со сравнитель-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

но малой трудоемкостью, основан на оценивании множеств областями простой формы, такими как эллипсоиды [2–4], параллелепипеды, параллелотопы [5–8]. В частности, здесь были разработаны конструктивные схемы решения задач сближения [2, 4–6]. Развитие аналогичной техники может быть полезно и для решения задачи уклонения, например, для построения опасных возмущений. Так, разработанная для задач сближения в дифференциальных системах полиэдральная техника [5] была использована для решения задач управления самолетом с возмущениями и развита далее для решения задачи уклонения [7]. Работа посвящена развитию полиэдрального метода синтеза управлений в задаче целевого уклонения для линейных многошаговых систем и продолжает исследования, начатые в [8].

2. Основные результаты

Исследуется линейная многошаговая система

$$\begin{aligned} x[k] &= A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N; \\ u[k] &\in \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]]; \quad v[k] \in \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]]; \quad \mathcal{M} = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x[k] \in \mathbb{R}^n$ — состояния системы, $A[k]$ — известные неособые матрицы (все $\det A[k] \neq 0$, $k = 1, \dots, N$), $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ — управления/возмущения, стесненные параллелотопозначными ограничениями; \mathcal{M} — заданное целевое множество. Напомним, что параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называют множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$ (p определяет центр параллелотопа, \bar{P} — форму). Полагаем, что $\bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $\bar{Q}[k] \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, $\bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, причем $\det \bar{P}_f \neq 0$. Цель управления u — добиться выполнения включения $x[N] \in \mathcal{M}$, а v — обеспечить $x[N] \notin \mathcal{M}$. Формулировки задачи сближения и “полиэдральной” задачи сближения могут быть найдены, например, в [6, задачи 1 и 2].

Рассматривается следующая “полиэдральная” задача уклонения для системы (1). Найти такую полиэдральную трубку $\mathcal{P}^e[k] = \mathcal{P}[p^e[k], \bar{P}^e[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^e[N] \supseteq \mathcal{M}$, а также соответствующую стратегию управления $v = v[k, x]$, удовлетворяющую ограничениям $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения $x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]]$, $k = i+1, \dots, N$, с $x[i] = x_i \notin \mathcal{P}^e[i]$ удовлетворяло

$x[N] \notin \mathcal{M}$, каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot]$. Более того, следуя подходу из [2], желательно ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^e[\cdot]$. (Здесь индекс “e” идет от слова “evasion”).

Заметим, что при использовании невырожденных параллелотопозначных трубок $\mathcal{P}^e[\cdot]$ (когда все $\det \bar{P}^e[k] \neq 0$) удобно оценивать отклонение траектории $x[\cdot]$ от сечений трубки в терминах относительных координат $\zeta^e[k] = \bar{P}^e[k]^{-1}(x[k] - p^e[k])$, обладающих тем свойством, что условие $x[k] \notin \mathcal{P}^e[k]$ обеспечивается тогда и только тогда, когда $\|\zeta^e[k]\|_\infty > 1$.

Представим два способа решения сформулированной задачи.

Начнем с первого. Зафиксируем произвольную неособую матрицу P_f^+ ($\det P_f^+ \neq 0$) и рассмотрим следующую систему рекуррентных соотношений, введенную в [8] и определяющую параллелотопы $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$ — сечения трубки $\mathcal{P}[\cdot]$:

$$\begin{aligned} p[k-1] &= A[k]^{-1}(p[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad k = N, \dots, 1; \\ \bar{P}[k-1] &= A[k]^{-1} \bar{P}[k] (I + \text{diag } \alpha[k] - \text{diag } \gamma[k]), \\ \alpha[k] &= (\text{Abs } (\bar{P}[k]^{-1} B[k] \bar{R}[k])) e, \\ \gamma[k] &= (\text{Abs } (\bar{P}[k]^{-1} C[k] \bar{Q}[k])) e, \\ p[N] &= p_f, \quad \bar{P}[N] = P_f^+ \text{diag } ((P_f^+)^{-1} \bar{P}_f) e. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем соответствующую этой трубке стратегию управления $v = v^I[k, x]$ вида

$$\begin{aligned} v^I[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k] \chi^I[k, x], \\ \chi_f^I[k, x] &= \text{sign } (\bar{P}[k]^{-1} C[k] \bar{Q}[k])_{i_*[k]j} \cdot \text{sign } (\bar{P}[k-1]^{-1} (x - p[k-1]))_{i_*[k]}, \\ i_*[k] &\in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |(\bar{P}[k-1]^{-1} (x - p[k-1]))_i|. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения: I — единичная матрица; $\text{Abs } A = \{|a_{ij}|\}$ для $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\text{diag } \pi$ — диагональная матрица с компонентами вектора π на диагонали; символы e стоят для обозначения векторов вида $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ соответствующих размерностей.

Теорема 1. Пусть система (2) имеет такое решение $(p[\cdot], \bar{P}[\cdot])$, что выполнены (поэлементно) неравенства $\gamma[k] < e + \alpha[k]$, $k = N, \dots, 1$. Тогда трубка $\mathcal{P}[\cdot] = \mathcal{P}[p[\cdot], \bar{P}[\cdot]]$ вместе со стратегией управления $v^I[\cdot, \cdot]$ дает частное решение “полиэдральной” задачи уклонения. При этом, если $x[\cdot]$ — траектория, соответ-

ствующая $x[0] \notin \mathcal{P}[0]$, управлению $v^I[\cdot, \cdot]$ и некоторому (произвольному) допустимому управлению $u[\cdot]$, то справедливы следующие гарантированные оценки снизу для отклонения траектории от трубки $\mathcal{P}[\cdot]$, записанные в терминах относительных координат $\zeta[k] = \bar{P}[k]^{-1}(x[k] - p[k])$: $\|\zeta[k]\|_\infty - 1 \geq (\|\zeta[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k (1 + \min_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i[l] - \gamma_i[l]))$, $k = 1, \dots, N$.

Теперь исследуем некоторый аналог трубок и стратегий управления из [7] применительно к случаю многошаговых систем. В этом русле рассмотрим трубки $\mathcal{P}^e[\cdot] = \mathcal{P}[p^e[\cdot], \bar{P}^e[\cdot]]$, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} p^e[k-1] &= A[k]^{-1}(p^e[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad k = N, \dots, 1; \\ \bar{P}^e[k-1] &= A[k]^{-1}(\bar{P}^e[k](I + \text{diag } \alpha^e[k]) - C[k]\bar{Q}[k]\Gamma^e[k]), \\ \alpha^e[k] &= (\text{Abs}(\bar{P}^e[k]^{-1}B[k]\bar{R}[k]))e, \quad k = N, \dots, 1; \\ p^e[N] &= p_f, \quad \bar{P}^e[N] = P_f^+ \text{diag}((P_f^+)^{-1}\bar{P}_f)e. \end{aligned} \quad (3)$$

Фактически, здесь опять описано целое параметрическое семейство трубок, где параметрами являются произвольная неособая матрица P_f^+ и матричная функция $\Gamma^e[k] \in \mathbb{R}^{n_v \times n}$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющая условиям $\Gamma^e[k] \in \mathcal{G}^{n_v \times n} = \{\Gamma = \{\gamma_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n_v \times n} \mid \|\Gamma\| \leq 1\}$, $\|\Gamma\| = \max_{1 \leq i \leq n_v} \sum_{j=1}^n |\gamma_{ij}|$.

Имея трубку $\mathcal{P}^e[\cdot]$, введем стратегию управления $v = v^{II}[k, x]$ вида

$$\begin{aligned} v^{II}[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k]\chi^{II}[k, x], \\ \chi^{II}[k, x] &= \Gamma^e[k] \frac{\bar{P}^e[k-1]^{-1}(x - p^e[k-1])}{\max\{\|\bar{P}^e[k-1]^{-1}(x - p^e[k-1])\|_\infty, 1\}}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть P_f^+ и $\Gamma^e[\cdot]$ — произвольные допустимые параметры и система (3) имеет такое решение $(p^e[\cdot], \bar{P}^e[\cdot])$, что оказываются выполненными условия $\delta^e[k] > 0$, $k = N, \dots, 1$, где $\delta^e[k] = 1 + \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^e[k] - \max_{1 \leq i \leq n} \gamma_i^e[k]$, $\gamma^e[k] = (\text{Abs}(\bar{P}^e[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e$. Тогда трубка $\mathcal{P}^e[\cdot] = \mathcal{P}[p^e[\cdot], \bar{P}^e[\cdot]]$ вместе со стратегией управления $v^{II}[\cdot, \cdot]$ дает частное решение “полиэдральной” задачи уклонения. При этом для любой траектории $x[\cdot]$ с $x[0] \notin \mathcal{P}^e[0]$ справедливы оценки

$$\|\zeta^e[k]\|_\infty - 1 \geq (\|\zeta^e[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \delta^e[l], \quad k = 1, \dots, N.$$

Для обоих способов проведено численное моделирование.

- [1] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. Springer, 1988.
- [2] *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Birkhäuser, 1997.
- [3] *Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филлипова Т.Ф.* Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018.
- [4] *Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.* Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // *Automatica*. 2011. Vol. 47, no. 7. P. 1414–1426.
- [5] *Kostousova E.K.* On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques // *IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT)*. 2014. Vol. 443. P. 170–180.
- [6] *Kostousova E.K.* On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2018. Vol. 38, no. 12. P. 6149–6162.
- [7] *Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J.* Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems // *Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2020. Vol. 17.
- [8] *Костусова Е.К.* О полиэдральном методе решения задачи уклонения для линейных многошаговых систем / Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XV Международной научной конференции. М.: ИПУ РАН, 2020. С. 193–196.

Минимаксные решения уравнений Гамильтона – Якоби для динамических биматричных игр размерности 2×3

Н. А. Красовский¹, А. М. Тарасьев^{1,2}

e-mail: nkrasovskiy@gmail.com, tam@imm.uran.ru

В работе рассматривается динамическая биматричная игра, динамика которой связана с эволюционными изменениями [3], инвестиционными процессами [2], декомпозиционными алгоритмами аукционного типа и дифференциальными уравнениями Колмогорова для вероятностей состояний системы. Новизна работы состоит в увеличении размерности биматричной игры до матриц выигрышей размера 2×3 . Увеличение размерности существенно усложняет построение решений динамической биматричной игры. Кроме того, такой переход является шагом к рассмотрению известной алгоритмически сложной игры «камень-ножницы-бумага», особенно в динамической постановке.

На первом шаге решения задачи построены приемлемые ситуации игроков в статической постановке. На призме возможных ситуаций игры найдены седловые точки в антагонистических играх, а также точки равновесия по Нэшу.

На втором шаге рассматривается дифференциальная игра антагонистического типа на бесконечном горизонте времени. Ставится задача построения функции цены такой игры как обобщенного минимаксного (вязкостного) решения уравнений Гамильтона – Якоби [5, 7]. С этой целью на основе обобщенного метода характеристик проведено построение областей на призме возможных ситуаций, в которых функция цены описывается гладкими составляющими. Проверяется непрерывная склейка этих гладких составляющих на границах областей. Не везде непрерывные склейки оказываются гладкими. Напомним, что в точках гладкой склейки функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби. В точках же негладкой склейки требуется проверять дифференциальные неравенства, обеспечивающие свойства стабильности функции цены. В работе

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

такая проверка проводится на основе аппарата сопряженных производных [4].

Отметим, что с помощью функции цены можно построить гарантирующие позиционные стратегии [6] игроков и использовать их для построения равновесных траекторий в динамической биматричной игре на основе подхода, предложенного в работе [1] для получения динамического равновесия по Нэшу.

В будущих исследованиях планируется построение равновесных траекторий на основе гарантирующих стратегий, порожденных функциями цены как обобщенными минимаксными решениями уравнений Гамильтона – Якоби.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00264.

- [1] *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.
- [2] *Красовский Н.А., Тарасьев А.М.* Равновесные траектории в динамических биматричных играх со среднеинтегральными функционалами выигрышей // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, № 2. С. 58–90.
- [3] *Кряжсимский А.В., Осипов Ю.С.* О дифференциально-эволюционных играх // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
- [4] *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
- [5] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
- [6] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game–Theoretical Control Problems. New-York: Springer-Verlag, 1988.
- [7] *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1994.

О численном методе решения задач динамической реконструкции

Е. А. Крупенников^{1,2}

e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

1. Введение

В докладе рассматриваются задачи динамической реконструкции управлений по известным неточным замерам реализованной траектории для динамических управляемых детерминированных систем, линейных по управлениям.

Один из наиболее известных подходов к решению задач динамической реконструкции был предложен Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским и в дальнейшем развивался В. И. Максимовым [1]. Этот подход (далее — метод ОКМ) имеет истоки в работах школы Н. Н. Красовского [2].

В докладе обсуждается новый подход (далее — метод СКТ), предложенный Субботиной Н.Н., Крупенниковым Е.А. и Токманцевым Т.Б. в работах [3,4]. Этот подход опирается на вспомогательные вариационные задачи. Его особенностью является использование выпукло-вогнутого интегрального функционала невязки, что позволяет получить стабильный колебательный характер решений.

Представлены результаты численной реализации подхода СКТ. Рассмотрены модельные примеры.

2. Входные данные

Рассматриваются динамические системы вида

$$\dot{x}(t) = G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \quad (1)$$

$$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad t \in [0, T],$$

$$G(t, x) : [0, T] \times R^n \rightarrow R^{n \times m}, \quad f(t, x) : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n,$$

где $u(t)$ — вектор управлений, $x(t)$ — вектор фазовых переменных. Допустимые управления — измеримые функции, удовлетворяющие

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

ограничению

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t \in [0, T].$$

Здесь $\mathbf{U} \in R^m$ — компактное выпуклое множество.

Предполагается, что известны неточные замеры некоторой базовой траектории $x^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n$, порождаемой неизвестным допустимым управлением. Замеры поступают дискретно с фиксированным шагом измерения h в реальном времени по мере реализации базовой траектории. Пусть δ — погрешность замеров.

3. Задача динамической реконструкции

Показано [4], что для входных данных, удовлетворяющих предположениям, описанным в [3, 4], существует единственное нормальное допустимое управление $u^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^m$, порождающее траекторию $x^*(\cdot)$ и имеющее минимальную норму в пространстве $L^2[0, T]$. Задача динамической реконструкции состоит в построении такого допустимого управления $u^\delta(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^m$, что выполняются условия:

1. $\|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_{C[0, T]} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, где $x^\delta(\cdot)$ — траектория, порождаемая управлением $u^\delta(\cdot)$;
2. $u^\delta(\cdot) \xrightarrow{w^*} u^*(\cdot)$ при $\delta \rightarrow 0$, где символ $\xrightarrow{w^*}$ обозначает *-слабую сходимость в пространстве $C[0, T]$.

Предполагается, что функция $u^\delta(\cdot)$ достраивается в реальном времени по мере поступления новых замеров.

4. Алгоритм решения

Алгоритм решения задачи динамической реконструкции управлений, основанный на методе СКТ, подробно описан в [3, 4]. Там же приведено обоснование сходимости метода. Алгоритм опирается на необходимые условия оптимальности в форме Лагранжа, записанные в виде гамильтоновой системы уравнений, для следующей задачи вариационного исчисления на множестве непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot), u(\cdot)$:

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u(t)\|^2}{2} \right] dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Здесь $y^\delta(\cdot)$ — гладкая интерполяция дискретных замеров, а α — малый регуляризирующий (по Тихонову [5]) параметр.

5. Примеры

Исследуются два модельных примера, описанных в [1]. В роли показателя качества аппроксимации была взята невязка управлений $\|u^\delta(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L^2[0,T]}$.

5.1. Пример 1. Рассматривается простейшая модель движения материальной точки по прямой под воздействием силы, параллельной этой прямой. Динамика имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 2, \quad t \in [0, 2].$$

Исходные данные взяты из [1]: исходное управление, подлежащее восстановлению, имеет вид $u(t) = \sin(t)$. Для получения неточных замеров порождаемая им базовая траектория была возмущена случайным образом в точках, выбранных с шагом $h = 10^{-1}$. Согласно [1], расчеты проведены при погрешностях измерений $\delta = 10^{-2}$ и $\delta = 10^{-3}$. Регуляризирующий параметр был взят соответственно $\alpha = 10^{-1}$ и $\alpha = 10^{-2}$. Результаты численной реализации метода СКТ для этих входных данных представлены на рис. 1. На графике пунктирной линией обозначено исходное управление, сплошной линией — восстановленное. Показатель качества аппроксимации составил 0.16 (для $\delta = 10^{-2}$) и 0.044 (для $\delta = 10^{-3}$).

5.2. Пример 2. Рассматривается колебательное звено

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 0.4x_2(t) + u(t), \quad |u(t)| \leq 2, \quad t \in [0, 10].$$

Исходные данные также взяты из [1]: управление, подлежащее восстановлению, имеет вид $u(t) = \sin(1 + t)$. Для получения неточных замеров порождаемая им базовая траектория была возмущена в точках, выбранных с шагом $h = 10^{-1}$. Согласно [1], расчеты проведены при предположении, что погрешность измерений в точках $\{t_i, i = 1, \dots, N\}$ составляет $\delta = \delta_0 \sin(1 + 10t_i)$ при $\delta_0 = 10^{-1}$ и $\delta_0 = 10^{-2}$. Регуляризирующий параметр $\alpha = 0.2$. Результаты численной реализации метода СКТ для этих входных данных представлены на рис. 2. На графике пунктирной линией обозначено исходное управление, сплошной линией — восстановленное. Показатель качества аппроксимации составил 0.63 (для $\delta_0 = 10^{-1}$) и 0.11 (для $\delta = 10^{-2}$).

Анализ полученных результатов при сравнении с результатами, опубликованными в [1], указывает на перспективность дальнейшего развития методов, основанных на подходе СКТ.

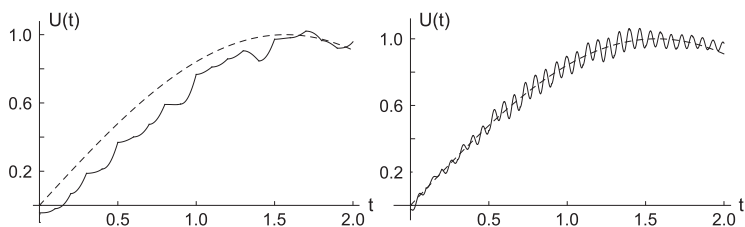


Рис. 1: Управления, восстановленные в примере 1 при $\delta = 10^{-2}$ и $\delta = 10^{-3}$ (пунктирная линия — исходное управление, сплошная — восстановленное)

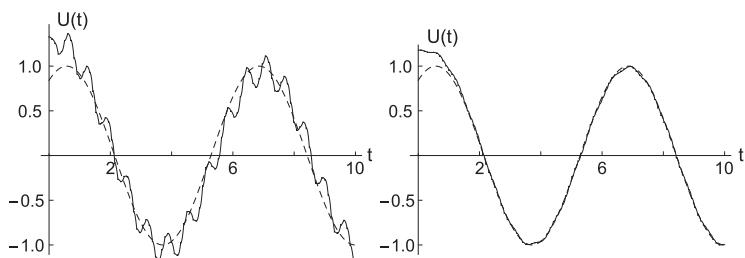


Рис. 2: Управления, восстановленные в примере 2 при $\delta_0 = 10^{-1}$ и $\delta_0 = 10^{-2}$ (пунктирная линия — исходное управление, сплошная — восстановленное)

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00362.

- [1] Осипов Ю.С., Кряжисмский А.В., Максимов В.И. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
- [2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [3] Subbotina N.N. Calculus of Variations in Solutions of Dynamic Reconstruction Problems / Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings. Springer, Cham. 2020.
DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_33.
- [4] Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Hamiltonian Systems for Dyna-

mic Control Reconstruction Problems // Minimax Theory and its Applications. 2020. Vol. 5, no. 2. P. 439–454.

- [5] *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР, 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

О пересечении α -множеств

О. А. Кувшинов¹, А. А. Ершов^{1,2}

e-mail: okuvshinov@inbox.ru, ale10919@yandex.ru

Определение α -множества было введено в 2000-х годах для классификации множеств достижимости управляемых систем по степени их невыпуклости [1]. Такое множество является одним из видов так называемых обобщенно выпуклых множеств, к которым также относятся сильно и слабо выпуклые множества по Виалю и по Ефимову – Стечкину [2], линейно выпуклые множества в пространстве над полем комплексных чисел [3], α -паравыпуклые множества Э. Майкла [4] и многие другие.

Определение 1. Пусть A — замкнутое множество в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Через $H_A(z^*) = \text{co}(\text{co} \Omega_A(z^*) - z^*)$ обозначим конус, натянутый на множество $\text{co} \Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \text{co} \Omega_A(z^*)\}$. Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем

$$\alpha_A = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi].$$

Множество A назовём α -множеством, где $\alpha = \alpha_A$.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Определение 2. Пусть A — замкнутое множество в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Определим функцию

$$\alpha_A(z^*) = \pi \text{ в случае, если } z^* \in \text{co } \Omega_A(z^*),$$

и

$$\alpha_A(z^*) = \max_{x, y \in \Omega_A(z^*)} \angle(x - z^*, y - z^*) \text{ в противном случае.}$$

Полагаем

$$\alpha_A = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi].$$

Множество A назовём α -множеством, где $\alpha = \alpha_A$.

Теорема. *Определения 1 и 2 равносильны для α -множеств в \mathbb{R}^2 .*

Экспериментальное измерение меры невыпуклости α у односвязного пересечения двух α -множеств проводилось на примере двух зеркально отраженных относительно вертикали кругов с вырезанным сектором. Пересечение данных фигур было представлено в виде многоугольников на плоскости с помощью компьютерной программы «Программный комплекс для вычисления пересечения двух многоугольников, аппроксимирующих два круга с вырезанными секторами» [5], вычисление значения α проводилось в помощью компьютерной программы «Программный комплекс для вычисления меры невыпуклости альфа для альфа-множеств» [6]. Результат представлен на рис. 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00221, и при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.А03.21.0006.

- [1] Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α -множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
- [2] Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006.
- [3] Зелинский Ю.Б. Выпуклость. Избранные главы. Киев: Институт математики НАН Украины, 2012.
- [4] Michael E. Paraconvex sets // Mathematica Scandinavica. 1959. Vol. 7, no. 2. P. 312–315.

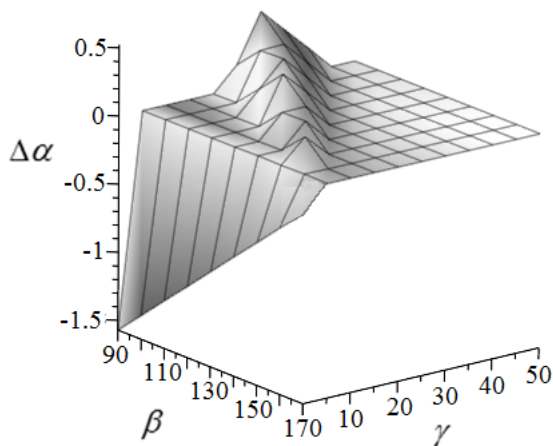


Рис. 1: Зависимость приращения $\Delta\alpha$ степени невыпуклости у пересечения в зависимости от угла поворота γ и углового размера β вырезанного сектора

- [5] *Кувшинов О.А.* Программный комплекс для вычисления пересечения двух многоугольников, аппроксимирующих два круга с вырезанными секторами / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Рег. № АААА-Г19-619112690043-6 от 26 ноября 2019 г.
<https://rosrid.ru/rid/HXS9TT4UKHOYVBFIUID8V8RM>
- [6] *Ершов А.А.* Программный комплекс для вычисления меры невыпуклости альфа для альфа-множеств / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Рег. № АААА-Г19-619112690042-9 от 26 ноября 2019 г.
<https://rosrid.ru/rid/83Q4GTFQO5CFTQOWXN0WWZ9N>

Скрытые колебания управляемой аэродинамическим сопротивлением формации двух спутников

Н. В. Кузнецов^{1,2}, *Б. Р. Андриевский*^{1,2,3}, *Е. В. Кудряшова*¹,
*О. А. Кузнецова*¹, *А. М. Попов*³
e-mail: nkuznetsov239@gmail.com, b.andrievsky@spbu.ru

1. Введение

В последние годы растет интерес к использованию дифференциальной силы (то есть разности приложенных к спутникам сил) аэродинамического сопротивления для устранения относительно дрейфа между движущимися «роем» спутниками в группе (без обязательного требования поддержания взаимного расположения). В [1] рассматривается задача построения роя наноспутников сразу после их отделения от ракеты-носителя. Для ее решения в [1] предложено децентрализованное управление с использованием силы аэродинамического сопротивления с целью устранения относительного дрейфа между спутниками. В докладе рассматривается система из двух спутников, для которой строится управление по рассогласованию между их обобщенными координатами и проводится анализ устойчивости системы и появления в ней скрытых колебаний.

2. Модель динамики относительного движения двух спутников по околокруговой орбите

Рассматриваются два спутника, движущихся по круговой околоземной орбите. Вывод уравнений динамики относительного движения опирается на метод Гамильтона – Якоби, при котором функция Лагранжа записывается относительно полярной равноденственной системы координат [2].

Линеаризованная модель относительного движения спутников

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

³Балтийский государственный технический университет (БГТУ «Военмех»), Санкт-Петербург

в плоскости OXZ имеет вид

$$\dot{\chi}_{12} = A\chi_{12} + Bu_{12}, \quad y = C\chi, \quad (1)$$

$$u_{12} = -\varphi(y), \quad (2)$$

где $\chi = [x_{12} \quad \dot{x}_{12} \quad z_{12} \quad \dot{z}_{12}]^T \in \mathbb{R}^4$ — вектор состояния системы, в котором через x_{12} обозначена разность координат второго и первого спутников по оси OX , $x_{12} = x_2 - x_1$; $z_{12} = z_2 - z_1$ — по оси OZ ; u_{12} — управление (разность действующих на спутники аэродинамических сил, в единицах ускорения). Управление ограничено по модулю значением u_{\max} ; $\varphi(\cdot)$ — нелинейная функция, описывающая ограничение управляющего воздействия, $\varphi(y) = \text{sat}_{u_{\max}}(y)$.

Матрицы модели динамики (1) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]. \quad (3)$$

Коэффициенты k_i , $i = 1, \dots, 4$ выбираются при синтезе закона управления; ω — угловая скорость движения по опорной траектории.

3. Алгоритм управления относительным движением спутников

Синтез регулятора (2) выполнен методом модального управления, в предположении, что сигнал управления не выходит за границы линейной области, $|u| \leq u_{\max}$. Уравнения состояния замкнутой системы (без учета внешних возмущений) тогда имеют вид

$$\dot{\chi}_{12} = (A - BC)\chi_{12}, \quad (4)$$

где матрицы A , B , C определены в (3). Задача синтеза состоит в выборе коэффициентов регулятора k_i так, чтобы обеспечить требуемый спектр $\{\lambda_{ABC}\}$ матрицы $(A - BC)$ замкнутой системы (4). Используем в качестве эталонного полином Баттерворта (*Butterworth*) четвертого порядка

$$D(s) = s^4 + 2.6131\Omega s^3 + 3.4142\Omega^2 s^2 + 2.6131\Omega^3 s + \Omega^4, \quad (5)$$

где параметр Ω — среднегеометрический корень характеристического многочлена, определяющий желаемое быстродействие замкнутой системы.

4. Результаты численного исследования и анализа скрытых колебаний

При синтезе алгоритма управления и моделировании использованы следующие параметры [1]: угловая скорость движения по опорной круговой орбите $\omega = 1.148 \cdot 10^{-3}$ рад/с, которая соответствует движению на высоте 340 км над Землей; максимальная величина управления $u_{\max} = 4.1 \cdot 10^{-6}$ м/с². При таком значении ω , собственные числа матрицы A невозмущенного движения $\lambda_A = \{0, 0, \pm i\omega\} = \{0, 0, \pm 1.148 \cdot 10^{-3}i\}$.

С учетом характерной длительности процессов изменения движения спутников по орбите, выберем в (5) значение $\Omega = 10^{-3}$ рад/с, при котором $\det(sI - A + BC) = s^4 + 2.613 \cdot 10^{-3} s^3 + 3.414 \cdot 10^{-6} s^2 + 2.613 \cdot 10^{-9} s + 10^{-12}$. С помощью стандартной процедуры `place`, входящей в Control Systems Toolbox системы MATLAB, найдены следующие коэффициенты регулятора (численные значения приведены в системе СИ): $k_1 = -2.53 \cdot 10^{-7}$, $k_2 = 2.613 \cdot 10^{-3}$, $k_3 = 5.64 \cdot 10^{-6}$, $k_4 = 1.02 \cdot 10^{-3}$.

В области малых отклонений от состояния равновесия, когда насыщение «неактивно», замкнутая система асимптотически устойчива. Возникает вопрос о границах асимптотической устойчивости (аттрактивности) состояния равновесия в пространстве (начальных) состояний системы, в том числе, выявления скрытых колебаний, чему посвящены работы [3–6].

Кривая Найквиста линейной части системы, имеющей передаточную функцию $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, не имеет точек пересечения с отрицательной вещественной полуосью, поэтому метод гармонического баланса не устанавливает возможность автоколебаний в рассматриваемой системе с насыщением. Более того, сектор устойчивости Гурвица системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью, имеет вид $\kappa \in (0, \infty)$. Поскольку методы абсолютной устойчивости тут напрямую не работают и не дают глобального притяжения к единственному состоянию равновесия, то актуальной является задача численного анализа границ устойчивости в фазовом пространстве. В проведенных численных экспериментах при больших начальных условиях ($x_{12}(0) = 10$ м, $\dot{x}_{12}(0) = 3.0$ м/с) вид-

ны длительные незатухающие колебательные процессы, что может отражать наличие в системе мультиустойчивости и скрытых нежелательных колебаний.

Заключение

В докладе рассмотрена задача управления относительным движением двух спутников по околокруговой орбите. Синтезирован закон управления изменением силы аэродинамического сопротивления. Дан анализ устойчивости системы и возможности возникновения в ней скрытых колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FZWF-2020-0015).

- [1] *Монахова У.В., Иванов Д.С.* Формирование роя наноспутников с помощью децентрализованного аэродинамического управления с учетом коммуникационных ограничений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 151.
- [2] *Крылов В.И.* Основы теории движения ИСЗ (часть первая: невозмущённое движение): учебное пособие. М.: МИИГАиК, 2015.
- [3] *Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана и Калмана и цепи Чуа // Изв. РАН. Теория и Системы Управления. 2011. № 4. С. 3–36.
- [4] *Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Методы подавления нелинейных колебаний в астатических системах автопилотирования летательных аппаратов // Изв. РАН. Теория и Системы Управления. 2017. № 3. С. 118–134.
- [5] *Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Кузнецова О.А., Леонов Г.А., Мокаев Т.Н.* Локализация скрытых колебаний в системах управления полетом // Труды СПИИРАН. 2016. Т. 6, № 49. С. 5–31.
- [6] *Kuznetsov N.* Theory of hidden oscillations and stability of control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59, no. 5. P. 647–668.

Активное гашение колебаний при помощи обратной связи

С. А. Кумакишев¹

e-mail: kumak@ipmnet.ru

1. Введение

Для крупногабаритных систем, подверженным неконтролируемым возмущениям, приводящим к нежелательным колебаниям, исследовано активное гашение колебаний полезной нагрузки. Система представляет собой длинную упругую балку, на конце которой размещен груз. Колебания гасятся путем перемещения внутренней массы (гасителя) по направляющей, перпендикулярной балке. За управляющую величину принята сила взаимодействия гасителя с грузом. В процессе управления парирование возмущений осуществляется путем линейной обратной связи по отклонению и скорости как гасителя относительно конца балки, так и груза относительно неподвижного основания. Коэффициенты обратной связи формируются таким образом, чтобы уменьшить время переходного процесса при ограничении на отклонение гасителя. Предложено комбинированное управление с переключением коэффициентов обратной связи. Данное исследование может быть использовано для гашения колебаний упругих крупногабаритных конструкций.

2. Геометрия задачи

Будем рассматривать плоское движение механической системы [1], изображенной на рис. 1. Эта система состоит из абсолютно твердого тела 1, материальной точки 2 с массой m_0 , соединенной с телом 1 упругим стержнем (балкой длиной l) 3, и материальной точки 4 с массой m_1 , которая может перемещаться вдоль направляющей 5 (η — смещение), жестко закрепленной на конце стержня (его смещение $u(l, t) = \xi$) и перпендикулярной его оси. Тело 1 моделирует космический аппарат, точечная масса 2 — платформу с измерительной аппаратурой, стержень 3 — соединительную штангу, а точечная масса 4 — тело гасителя. Предполагается, что движение тела гасителя происходит посредством электрического мотора, с характеристиками: V — управляющее напряжение, R — омическое

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

сопротивление обмотки якоря, k_1 и k_2 — постоянные параметры, характеризующие конкретный двигатель.

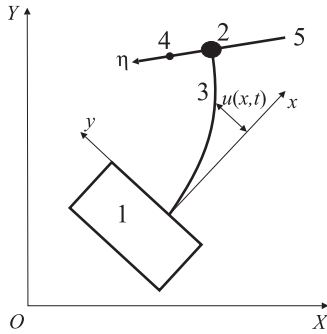


Рис. 1: Геометрия задачи

3. Модель в квазистатическом приближении

Предположим, что линейные и угловые скорости и ускорения космического аппарата равны нулю и на систему не действуют внешние силы и моменты. Тогда задача об управлении колебаниями системы с упругим стержнем сводится к задаче об управлении механической системой с двумя степенями свободы, уравнение движения которой можно представить в виде

$$\begin{aligned} (1 + \mu)\ddot{\xi} + \mu\ddot{\eta} + \xi &= 0, & \mu(\ddot{\xi} + \ddot{\eta}) + \sigma\dot{\eta} &= v, \\ \mu = m_1/m_0, & \quad \sigma = k_1 k_2 / m_0 R, & \quad v = k_2 V / m_0 R. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем искать управление v в виде линейной функции фазовых переменных этой системы

$$v = \mu \left[a\xi + b\dot{\xi} + \left(\frac{\sigma}{\mu} - c \right) \dot{\eta} - d\eta \right], \quad (2)$$

где a, b, c, d — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

4. Максимизация степени устойчивости

Быстроту затухания свободных колебаний системы (1), (2) будем характеризовать величиной, называемой степенью устойчиво-

сти, определяемой как взятый со знаком минус максимум вещественных чисел характеристического полинома системы. Можно показать, что степень устойчивости максимальна когда все корни одинаковы. В этом случае коэффициенты a, b, c, d связаны соотношениями

$$(1+\mu)c+\mu b=4d^{1/4}, \quad (1+\mu)d+\mu a+1=6d^{1/2}, \quad c=4d^{3/4}. \quad (3)$$

Из этих соотношений параметры a, b, c однозначно выражаются через d , и задача определения управления v в соответствии с (2) сводится к выбору параметра d . Этот параметр следует выбирать из условия «компромисса» между временем затухания колебаний $\tau \approx d^{-1/4}$ и амплитудой колебаний массы гасителя.

5. «Мягкое» гашение колебаний платформы

Предложенное выше управление допускает существенные отклонения тела гасителя, что объясняются весьма сильной обратной связью по переменным движения платформы (ξ и $\dot{\xi}$) при малых μ . Коэффициенты a и b имеют порядок $1/\mu$. Ослабим эту обратную связь, полагая $a=0$ и $b=1/\sqrt{\mu}$, а коэффициенты c и d будем выбирать так, чтобы нулевое решение системы было асимптотически устойчивым. Назовем такой способ настройки коэффициентов обратной связи «мягким» гашением колебаний платформы. Он приводит к меньшим отклонениям тела гасителя, но увеличивает время переходного процесса.

6. Комбинированное управление

Для того, чтобы избежать недостатков, свойственных управлениям, изложенным выше, можно предложить комбинированное управление. Оно состоит в том, что в процессе колебаний происходит переключение управления с мягкого гашения на режим максимизации степени устойчивости (см. рис. 2). При этом время переходного процесса не такое большое, как при мягком гашении колебаний, а амплитуда колебаний не такая большая, как при максимизации степени устойчивости.

7. Заключение

Подход, описанный в данной статье, можно применить в условиях неопределенности, что позволит парировать случайные возмущения и неточности измерения параметров системы. С его помо-

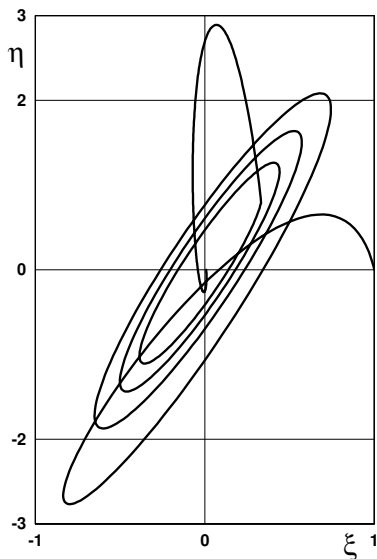


Рис. 2: Фазовые траектории при комбинированном управлении

стью можно также оценить возможность демпфирования упругих колебаний крупногабаритных несущих конструкций балочного или ферменного типа при помощи активного виброгасителя с поступательно перемещающейся массой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00812) и по теме государственного задания АААА-А17-117021310387-0.

- [1] *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакишев С.А., Чернов А.А.* Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 135–145.

Управление бесконфликтным движением беспилотных летательных аппаратов в районе аэродрома

С. И. Кумков¹, С. Г. Пятко², М. М. Овчинников¹

e-mail: kumkov@imm.uran.ru, psgatc@gmail.com, o-mm@bk.ru

Разработаны алгоритмы управления беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) для выявления и устранения создаваемых ими возможных конфликтных ситуаций (КС) с потоками прилетающих и вылетающих воздушных судов (ВС).

Управляемое движение каждого БПЛА по траектории и со скоростными режимами его полетного плана описывается стандартной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной земной системе координат

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_{\text{UAV}} \cos \theta \cos \psi, \quad \dot{z} = V_{\text{UAV}} \cos \theta \sin \psi, \\ \dot{y} &= V_{\text{UAV}} \sin \theta, \quad \dot{\psi} = \omega_{\text{max}} u_{\psi}, \\ \omega_{\text{max}} &= k/V_{\text{UAV}}, |u_{\psi}| \leq 1, \quad \dot{\theta} = \omega_{\text{max}} u_{\theta}, |u_{\theta}| \leq 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, z, y — координаты БПЛА по осям OX, OZ и OY системы координат управления воздушным движением, м; ψ, θ — курсовой и скоростной углы, рад; ω_{max} — максимально допустимая угловая скорость разворотов БПЛА по указанным углам, рад/с; u_{ψ}, u_{θ} — управления по курсу и скоростному углу, ограниченные по модулю, безразмерно; k — максимально допустимое ускорение по боковому и вертикальному каналам, м/с²; V_{UAV} — скорость БПЛА, м/с, полагается постоянной вдоль траектории каждого его полетного плана. Движение маневрирующих судов прилетающих и вылетающих потоков описывается аналогичной системой уравнений.

В соответствии с официальными документами на системы избежания столкновений [1, 2] и правилами для беспилотных летательных аппаратов, управляемых наземным оператором [3], маневр БПЛА должен удовлетворять следующим технологическим требованиям.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²ООО «Фирма «НИТА»», Санкт-Петербург

I. Прогнозирование и выявление КС должны выполняться заранее с запасом расстояния и времени, достаточными для выполнения разрешающего маневра.

II. Для снижения нагрузки на наземного оператора БПЛА и диспетчеров в рассматриваемой зоне УВД разрешение обнаруженной КС должно выполняться *только* маневром БПЛА. При этом ВС, с которым обнаруживается конфликт, продолжает движение по своему полетному плану и не участвует в разрешении КС.

III. В соответствии с правилами управления БПЛА, его маневр должен иметь простую стандартную структуру и состоять из: начального S-образного участка с величиной вариации курса (или скоростного угла), достаточной для обеспечения заданной величины расстояния (или разнесения по высоте) с конфликтующим ВС при последующем движении обоих судов; при этом данный участок реализуется на постоянном по модулю управлении $u_{\psi} = \pm 1$ (или $u_{\theta} = \pm 1$) в (1) с одним переключением с минимальной длительностью каждого интервала постоянства управления; последующего короткого технологического временного интервала движения по прямолинейному отрезку траектории (для обеспечения гарантированного безопасного расхождения судов); заключительного S-образного участка для возвращения БПЛА на его исходный полетный план на управлении указанного типа с соответствующим переключением по знаку.

IV. Для исключения наведения вторичных конфликтов (в горизонтальной или вертикальной плоскости) маневр БПЛА, по возможности, должен быть оптимальным: минимально отклоняться от своего исходного полетного плана, иметь минимальную длину и минимальную длительность по времени.

При разработке алгоритмов учитывалось применяемое в практике разрешения конфликтных ситуаций следующее неформальное правило для выбора маневра БПЛА: из возможных вариантов маневра предпочтительным является вариант, выводящий управляемое маневрирующее судно *в заднюю полусферу* неманеврирующего судна.

При разрешении КС глобальным критерием управления каждым БПЛА является обеспечение минимального безопасного расстояния (при разрешающем маневре в горизонтальной плоскости, рис. 1а) или минимального разнесения по высоте-эшелону (при разрешающем маневре в вертикальной плоскости, рис. 1б) между

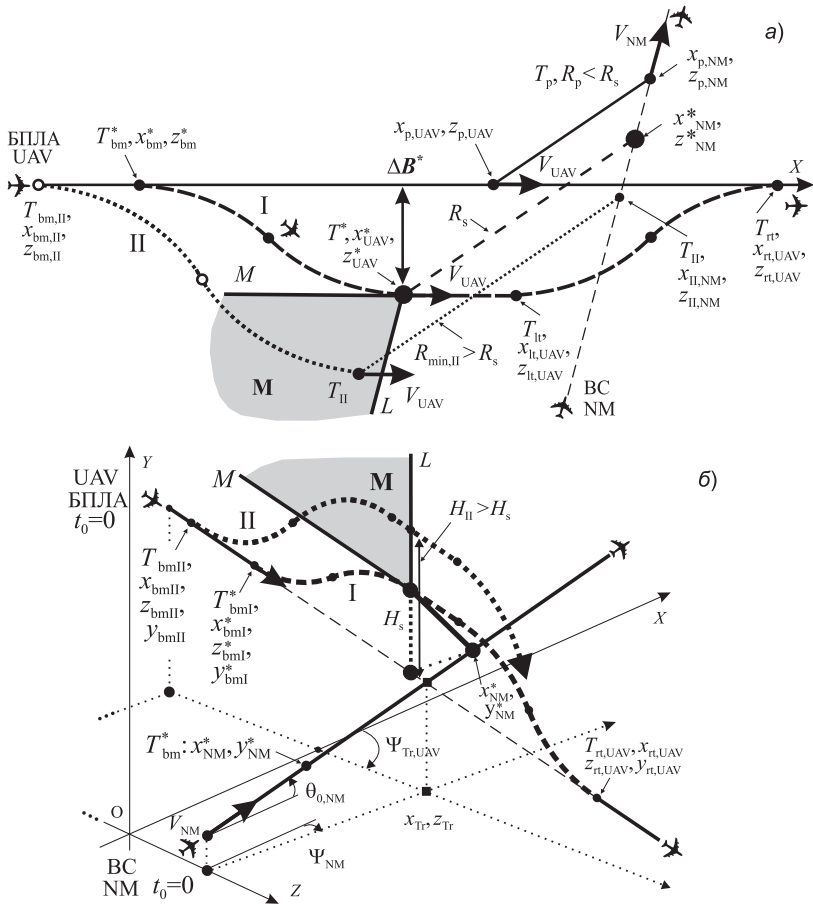


Рис. 1: Обнаруженные конфликты; варианты их разрешения маневром БПЛА а) в горизонтальной и б) вертикальной плоскости

БПЛА и конфликтующим ВС.

На рис. 1 приняты следующие обозначения: БПЛА (UAV) — беспилотный летательный аппарат, NM — не маневрирующее воздушное судно; суда обозначены маркерами “самолет”. Символами с нижним индексом “p” обозначены позиции БПЛА и NM в момент их конфликтного сближения — здесь фактическое расстояние (или высота) между ними меньше безопасных допусков R_s (или H_s , соот-

ответственно). Символами с нижним индексом “ bm ” отмечены позиции судов в момент начала оптимального маневра БПЛА. Частым штрихом обозначена траектория (с символом I) оптимального разрешающего маневра. Символами с верхней звездочкой обозначены параметры движения БПЛА и НМ при оптимальном маневре. Символами с нижним индексом “ t ” на траектории оптимального маневра отмечена позиция БПЛА в момент окончания его технологического безопасного выдерживания. Символами с нижним индексом “ rt ” на траектории оптимального маневра отмечена позиция БПЛА в момент его возвращения на исходный полетный план. Величина ΔB^* (или H_s) — минимально необходимое боковое отклонение (или отклонение по высоте) БПЛА от его исходного полетного плана. Пунктиром и символом II отмечена траектория неоптимального маневра БПЛА на специальное терминальное множество M с границами M и L ; такие неоптимальные траектории гарантированно (с запасом) обеспечивают безопасное расстояние (или высоту) между судами, больше заданного R_s (или H_s).

Для обоснования требований к системе прогнозирования движения БПЛА в разработанных алгоритмах прогнозирование выполняется постоянно циклически с разумным тактом 1–2 с. Этим обеспечивается непропуск возможной КС, а временной интервал прогноза “вперед” задается в соответствии с динамическими возможностями БПЛА, чтобы за оставшееся время до наступления обнаруженной конфликтной ситуации БПЛА смог (требование I) набрать минимально необходимое боковое отклонение ΔB^* (рис. 1а) или заданный эшелон с запасом H_s (рис. 1б).

Отметим, что задание типа разрешающего маневра с предписанным видом управления (требование III) позволяет свести задачу нахождения оптимального маневра (требование IV) от некоторой сложной строгой постановки (см., например, [4]) к простой задаче нахождения оптимального — минимально необходимого — бокового отклонения ΔB^* или заданного необходимого изменения высоты (H_s).

Информация о возможных разрешающих маневрах БПЛА и его управлении в форме рекомендаций предоставляются диспетчеру зоны УВД (для контроля) и наземному оператору БПЛА (для исполнения после утверждения диспетчером).

Алгоритмы предназначены для использования в перспективных автоматизированных системах управления воздушным движе-

нием и комплексных тренажерах, разрабатываемых ООО «Фирма «НИТА»», Санкт-Петербург.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00410.

- [1] *Королев Е.Н.* Технологии работы диспетчеров управления воздушным движением. М.: Воздушный транспорт, 2000.
- [2] Автоматизированные системы управления воздушным движением / Пятко С.Г., Красов А.И. (ред.). СПб.: Политехника, 2004.
- [3] Design of UAV Ground Control Station for Collision Avoidance (UAV Ground Control CAS).
<https://www.science.gov/topicpages/u/uav+ground+control>
- [4] *Tomlin C., Lygeros J., Sastry S.* Conflict Resolution for Air Traffic Management: a Study in Multi-Agent Hybrid Systems / Report of the Research under NASA Grant NAG-2-1039. University of California, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences. 1998.

О двойственности математических моделей проблем механики и теории электрических цепей

*А. Б. Куржанский*¹, *А. А. Усова*^{2,3}
e-mail: kurzhans@mail.ru, ausova@imm.uran.ru

Работа рассматривает волновое уравнение, которое возникает как в динамике струны (мембраны) так и в электрических цепях. Поведение струны (мембраны) можно смоделировать при помощи последовательности пружин с закрепленными на них массами.

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

³Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

В тоже время электрическая цепь заменяется набором контуров, состоящих из базовых элементов - катушки, сопротивления и конденсатора. В докладе обсуждается как по модели с пружинками можно построить аналогичную электрическую систему и наоборот. В качестве области применения, где данная аналогия оказывается полезной, рассматривается задача стабилизации взаимодействия двух механических систем. А именно, будет объяснена природа преобразования рассеивания, которое решает проблему неустойчивого соединения диссипативных подсистем при наличии постоянной задержки по времени.

Об одном способе построения программной траектории сферического движения твердого тела

А. Е. Ламоткин¹, Н. Е. Мисюра¹, Е. А. Митюшов¹
e-mail: alexey.lamotkin@urfu.ru, n_misura@mail.ru,
mityushov-e@mail.ru

1. Введение

Задача о терминальном управлении сферическим движением твердого тела имеет широкое приложение к техническим проблемам в области робототехники и космической навигации. В частности, она важна при управлении разворотом космических аппаратов под действием реактивных или гироскопических моментов [1].

Один из возможных путей решения этой задачи связан с постановкой обратной задачи динамики, когда сначала ищется программная траектория движения объекта управления, а затем находят управляющие воздействия, обеспечивающие движение по этой траектории [2].

В работе предлагается способ нахождения программной траектории, который обеспечивает «близость» программного движения твердого тела к эйлерову (то есть, плоскому) повороту. При этом

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

кинематическое описание сферического движения производится с помощью единичных кватернионов. Граничные условия, которым должно удовлетворять программное движение, выглядят следующим образом:

$$q(0) = q^0, \quad q(T) = q^T, \quad \Omega_k(0) = \Omega_k^0, \quad \Omega_k(T) = \Omega_k^T, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь T — заданный момент окончания движения; q^0 и q^T — кватернионы, определяющие начальное и конечное положение объекта управления; Ω_k — проекции вектора угловой скорости объекта управления на связанные с ним оси координат.

2. Образ программной траектории в трехмерном пространстве

При описании сферического движения твердого тела с помощью единичных кватернионов, программная траектория представляет собой кривую на единичной гипертеле $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ в четырехмерном пространстве. Данное представление лишено наглядности, поэтому при решении ряда прикладных задач может оказаться полезным перейти от программной траектории в четырехмерном пространстве к её образу в трехмерном пространстве.

Об отображении гипертели S^3 в шар радиусом π трехмерного евклидова пространства упоминается в работе [3]. Данное отображение не будет являться биективным, однако, получаемое таким образом конфигурационное многообразие может быть использовано для визуализации траекторий поворотов твердого тела.

Связь компонентов кватерниона с координатами точки в шаре радиусом π может быть выражена следующим образом [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = \cos \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_k = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \quad k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что

$$x_k = \frac{2q_k \arccos q_0}{\sqrt{1 - q_0^2}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Возникающая особенность в точке $q_0 = 1$ устраняется, если доопределить x_k её пределом

$$x_k|_{q_0=1, q_1=0, q_2=0, q_3=0} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_k = 0.$$

Таким образом, задача о построении программной траектории в четырехмерном пространстве вполне может быть заменена задачей о построении образа этой траектории в трехмерном пространстве.

3. Построение образа программной траектории в виде полинома четвертой степени

Эйлеров поворот твердого тела из положения q^0 в q^T на гиперсфере S^3 может быть задан с помощью линейной интерполяции кватернионов $\text{slerp}(q^0, q^T; u)$ [5]. При этом для равномерного поворота за время T достаточно положить $u = \frac{t}{T}$:

$$q_e(t) = \frac{\sin(\arccos(q^0 \cdot q^T)(1 - \frac{t}{T}))}{\sin(\arccos(q^0 \cdot q^T))} q^0 + \frac{\sin(\arccos(q^0 \cdot q^T) \frac{t}{T})}{\sin(\arccos(q^0 \cdot q^T))} q^T. \quad (4)$$

Чтобы обеспечить «близость» образа $\mathbf{r}(t)$ программной траектории $q(t)$ к образу эйлерова поворота (4) потребуем, чтобы точка $\mathbf{r}_{\frac{T}{2}} = \mathbf{r}(\frac{T}{2})$ являлась образом точки $q_e(\frac{T}{2})$.

Для построения образа $\mathbf{r}(t)$ воспользуемся распространенным приемом поиска программной траектории в виде полинома [6]. Для удовлетворения краевых условий и обеспечения «близости» получаемой траектории к эйлеровой достаточно представить её в виде полинома четвертой степени

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{a}_k \left(\frac{t}{T}\right)^k, \quad (5)$$

где \mathbf{a}_k , $k = 0, \dots, 4$ — постоянные трехмерные векторы, определяемые граничными условиями и условием «близости» к эйлеровой траектории.

С учетом (3) и условия «близости» к эйлеровой траектории можем записать

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2q_1(t) \arccos q_0(t)}{\sqrt{1-(q_0(t))^2}} \\ \frac{2q_2(t) \arccos q_0(t)}{\sqrt{1-(q_0(t))^2}} \\ \frac{2q_3(t) \arccos q_0(t)}{\sqrt{1-(q_0(t))^2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\frac{T}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{2q_{e1}(\frac{T}{2}) \arccos q_{e0}(\frac{T}{2})}{\sqrt{1-(q_{e0}(\frac{T}{2}))^2}} \\ \frac{2q_{e2}(\frac{T}{2}) \arccos q_{e0}(\frac{T}{2})}{\sqrt{1-(q_{e0}(\frac{T}{2}))^2}} \\ \frac{2q_{e3}(\frac{T}{2}) \arccos q_{e0}(\frac{T}{2})}{\sqrt{1-(q_{e0}(\frac{T}{2}))^2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) = & \\ = & \begin{pmatrix} 2q_1(t) \left(\frac{q_0(t) \arccos q_0(t)}{1-(q_0(t))^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1-(q_0(t))^2} \right) \dot{q}_0(t) + \frac{\arccos q_0(t)}{2\sqrt{1-(q_0(t))^2}} \dot{q}_1(t) \\ 2q_2(t) \left(\frac{q_0(t) \arccos q_0(t)}{1-(q_0(t))^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1-(q_0(t))^2} \right) \dot{q}_0(t) + \frac{\arccos q_0(t)}{2\sqrt{1-(q_0(t))^2}} \dot{q}_2(t) \\ 2q_3(t) \left(\frac{q_0(t) \arccos q_0(t)}{1-(q_0(t))^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1-(q_0(t))^2} \right) \dot{q}_0(t) + \frac{\arccos q_0(t)}{2\sqrt{1-(q_0(t))^2}} \dot{q}_3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Значения производных от координат кватернионной функции $q(t)$ находятся из кинематических уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}(q_1\Omega_1 + q_2\Omega_2 + q_3\Omega_3), \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(q_0\Omega_1 - q_3\Omega_2 + q_2\Omega_3), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_0\Omega_2 - q_1\Omega_3 + q_3\Omega_1), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(q_0\Omega_3 - q_2\Omega_1 + q_1\Omega_2). \end{aligned}$$

Зная граничные условия (1), находим граничные условия для образа (5): $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}(T)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0)$, $\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}}(T)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{a}_1 = T\dot{\mathbf{r}}_0, \\ \mathbf{a}_2 &= -5(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_0 - T\dot{\mathbf{r}}_0) + T(\dot{\mathbf{r}}_T - \dot{\mathbf{r}}_0) + 16(\mathbf{r}_{\frac{T}{2}} - \mathbf{r}_T - \frac{1}{2}T\dot{\mathbf{r}}_0), \\ \mathbf{a}_3 &= 14(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_0 - T\dot{\mathbf{r}}_0) - 3T(\dot{\mathbf{r}}_T - \dot{\mathbf{r}}_0) - 32(\mathbf{r}_{\frac{T}{2}} - \mathbf{r}_T - \frac{1}{2}T\dot{\mathbf{r}}_0), \\ \mathbf{a}_4 &= -8(\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_0 - T\dot{\mathbf{r}}_0) + 2T(\dot{\mathbf{r}}_T - \dot{\mathbf{r}}_0) + 16(\mathbf{r}_{\frac{T}{2}} - \mathbf{r}_T - \frac{1}{2}T\dot{\mathbf{r}}_0). \end{aligned}$$

Вычислив образ (5), можем, используя (2), найти программную траекторию $q(t)$.

4. Заключение

Рассмотренный в работе способ нахождения программной траектории разворота твердого тела с использованием образов этих траекторий в трехмерном пространстве, позволяет дать визуальную оценку траекториям, что может оказаться полезным при решении различных прикладных задач.

- [1] *Челмоков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М: Физматлит, 2011.
- [2] *Ermoshina O.V., Krishchenko A.P.* Synthesis of programmed controls for the orientation of a spacecraft // Journal of Computer and System Sciences International. 2000. Vol. 39, no. 2. P. 313–320.

- [3] *Арнольд В.И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2002.
- [4] *Lamotkin A.E., Misyura N.E., Mityushov E.A.* Designing the program trajectory for steering a spacecraft under arbitrary boundary conditions // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 747. P. 012087.1–012087.8.
DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012087
- [5] *Shoemake K.* Animating rotation with quaternion curves / Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH 85. 1985. P. 245–254.
DOI: 10.1145/325334.325242
- [6] *Велищанский М.А.* Реализация плоского поворота космического аппарата квазиоптимальным алгоритмом переориентации // Наука и образование. 2012. № 10. С. 397–412.
DOI: 10.7463/1012.0465320

Об упаковке пропорциональных шаров в компактное множество

А. А. Лемперт¹, А. Л. Казаков¹, Ч. Т. Та²

e-mail: lempert@icc.ru, kazakov@icc.ru, tatrungthanh@mail.ru

1. Введение

Классическая задача об упаковке шаров заключается в размещении шаров в множестве-контейнере предопределенной формы так, чтобы либо их количество, либо суммарный объем были максимальными [1]. В данной работе мы рассматриваем задачу с заданным количеством шаров, радиусы которых пропорциональны друг другу. Целью оптимизации является максимизация радиусов элементов упаковки, и при этом все шары должны быть размещены. Множество-контейнер может быть невыпуклым и даже неодносвязным.

¹Институт динамики систем и теории управления им. В.М.Матросова СО РАН, Иркутск

²Иркутский национальный исследовательский технический университет

Известно, что задача упаковки равных шаров в бесконечное пространство решена: оптимальными являются упаковки на основе гранецентрированной кубической или гексагональной плотноупакованной решетки [2, 3]. Для случая ограниченного множества задача упаковки остается, вообще говоря, открытой. Отметим, что в большинстве опубликованных работ рассматривается задача в евклидовом пространстве, а в качестве контейнера выбираются «простые» множества: куб, параллелепипед, шар, цилиндр и т.п. Наилучшие из известных результатов упаковок в различные контейнеры можно найти на сайте [4], который модерируется венгерскими математиками.

В отличие от известных работ, в настоящей статье рассматривается не только евклидова, но и специальная неевклидова метрика [5].

2. Постановка задачи

Пусть X — пространство с метрикой

$$\rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y, z)}, \quad (1)$$

где $G(a, b)$ — множество непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b , $0 < \alpha \leq f(x, y, z) \leq \beta$ — непрерывная функция, определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке пространства X . Пусть также заданы замкнутое ограниченное множество $P \subset X$, n шаров S_i с центрами $s_i(x_i, y_i, z_i)$ и пропорциональными радиусами $R_i, i = \overline{1, n}$. Необходимо найти такое расположение центров $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in P$, чтобы радиус первого шара R_1 (и, следовательно, все $R_j, j = \overline{2, n}$) достиг максимума. Шар с радиусом R_1 будем называть базовым. Тогда задачу можно записать как

$$R_1 \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$R_i = \frac{1}{k^{i-1}} R_1, k \in Q^+, \forall i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq \left(\frac{1}{k^{i-1}} + \frac{1}{k^{j-1}} \right) R_1, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (4)$$

$$\rho(s_i, \partial P) \geq \frac{1}{k^{i-1}} R_1, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$s_i \in P, \forall i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где $\rho(s_i, \partial P)$ — расстояние от точки s_i до границы множества P .

Соотношение (3) задает коэффициент пропорциональности радиусов шаров. Неравенства (4) и (5) гарантируют, что все шары полностью находятся внутри множества-контейнера и не пересекают друг друга, за исключением, быть может, точек границы.

3. О методе решения

Для отыскания решения предлагается численный метод, основанный на сочетании оптико-геометрического подхода [5], который позволяет заменить обычное расстояние между точками минимальным временем перемещения между ними, и метода бильярдного моделирования [6]. Его идея заключается в следующем: каждый шар рассматривается как жесткий бильярдный шарик, который имеет возможность двигаться свободно внутри заданного множества, причем радиус шаров увеличивается после каждого шага сдвига. Предложена комбинация двух алгоритмов сдвига: сначала каждый шар сдвигается как можно дальше от точек касания других шаров или от границы множества, затем переносится случайным образом в одну из соседних точек сетки. При этом, поскольку при использовании неевклидовой метрики нахождение расстояния между точками требует решения задачи вариационного исчисления (1), для получения граничных точек элементов упаковки (например, при упаковке шаров — ограничивающих их сфер) используется оптико-геометрический подход.

Предложенный метод программно реализован. Проведены вычислительные эксперименты по нахождению упаковок в различные контейнеры (выпуклые, невыпуклые, неодносвязные). Выполнено исследование влияния коэффициента пропорциональности на плотность упаковки. Результаты расчетов позволяют оценить работоспособность и эффективность предложенного алгоритма. Выполнена 3-D визуализация полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-010-00724.

- [1] *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.
- [2] *Слоэн Н.Дж.А.* Упаковка шаров // В мире науки. 1984. № 3. С. 72–82.

- [3] *Hales T.C.* The status of the kepler conjecture // The Mathematical Intelligencer. 1994. V. 16. P. 47–58. DOI: 10.1007/BF03024356
- [4] *Specht E.* Packomania. [Электронный ресурс].
<http://www.packomania.com>
- [5] *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Т. 72, № 7. С. 50–57. DOI: 10.1134/S0005117911070071
- [6] *Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Ostergard P.R.J.* Dense packings of congruent circles in a circle // Discrete Mathematics. 1998. V. 181. P. 139–154.

Оптимальное и субоптимальное управление в односекторной модели экономического роста

*Л. Н. Лукьянова*¹
e-mail: lln@cs.msu.ru

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о неоклассическом оптимальном росте для агрегированной замкнутой экономики с конечным горизонтом планирования и положительной нормой дисконтирования [1]. При учете запаздывания введения новых фондов, предполагается, что в момент времени $t > 0$ доступны для использования фонды, имеющиеся на момент $t - \tau, \tau > 0$ [2]. Модель динамики процесса с запаздыванием τ , полученная методом введения дополнительных уравнений [3, 4], представляет собой систему дифференциальных

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}(t) = u(t)f(v_2(t)) - \mu k(t), \\ 0 \leq u(t) \leq 1, k(0) = k_0 > 0, k(T) \geq k_T > 0, \\ \frac{\tau}{2} \dot{v}_1(t) = k(t) - v_1(t), v_1(0) = v_{01} \geq 0, \\ \frac{\tau}{2} \dot{v}_2(t) = v_1(t) - v_2(t), v_2(0) = v_{02} \geq 0, \\ \dot{y}(t) = e^{-\delta t}(1 - u(t))f(v_2(t)), y(0) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где k, v_1, v_2, y — фазовые переменные, $f(k)$ — неокласическая производственная функция [1], $u(t)$ — управление, $\delta, \mu, k_0, k_T, T, \tau$ — положительные параметры. Исследуется задача оптимального управления

$$y(T) \rightarrow \max_{u(t) \in [0,1]} . \quad (2)$$

Приведем решение задачи (1),(2), которое найдено на основе Принципа максимума Понтрягина [5, 6] в классе измеримых по Лебегу функций $u(t) \in [0, 1]$.

2. Аналитическое решение задачи (1),(2)

Запишем краткую сводку результатов, полученных на основе Принципа максимума. Экстремальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} 1, & \eta(t) > 0, \\ 0, & \eta(t) < 0, \\ u^{**} \in [0, 1], & \eta(t) \equiv 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\eta(t) = -\psi_4 e^{-\delta t} + \psi_1(t)$, ψ_1, ψ_4 — решения сопряженной системы.

Особый режим имеет место, если для $t \in [t_1, t_2]$ выполнено тождество $-e^{-\delta t} + \psi_1(t) \equiv 0$. Порядок особого режима [7, 8] равен 3; он характеризуется следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(t) = e^{-\delta t}, \\ \psi_2(t) = \frac{\tau}{2}(\mu + \delta)e^{-\delta t}, \\ \psi_3(t) = (\mu + \delta)(\delta + \frac{\tau}{2})e^{-\delta t}, \\ f'_{v_2}(v_2^*) = (\mu + \delta)(\delta + \frac{\tau}{2})(\delta + \frac{2}{\tau}), \\ v_1^* = v_2^*, \\ k^* = 2v_1^* - v_2^*, \\ u^{**} = \frac{\mu k^*}{f(v_2^*)}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Обозначим через \hat{v}_2 решение уравнения $f(\hat{v}_2) = \mu\hat{v}_2$. Управление $u^{**} \in [0, 1]$ допустимо в силу неоклассического условия для функции f . Для управления u^{**} выполнены необходимые условия Коппа – Мойера [7] оптимальности особого управления. В силу неоклассических условий $f(v_2) > 0$, $f''_{v_2} < 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^6}{dt^6} \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{2}{\tau} e^{-\delta t} f''_{v_2} f^2(v_2) > 0.$$

Таким образом, особый режим (4) входит в число экстремальных управлений. Особое множество — множество $(k, v_1, v_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, удовлетворяющее уравнениям (4). Так как особое управление имеет прядок 3 и для особого участка выполнено усиленное условие Коппа – Мойера, то сопряжение неособых и особых участков выполняется посредством четтеринг режима поведения траектории при релейном управлении, при котором управление имеет бесконечное число переключений между ограничивающими его значениями [8, Proposition A.3.3.]. На основании полученных характеристик экстремального управления численно построим управление, содержащее четтеринг режим. Учитывая его структуру, найдем аппроксимацию в форме субоптимального управления, при котором выполнены краевые условия для траектории, имеющей конечное число переключений граничных значений и промежуточных постоянных значений управления, и при котором значение функционала отличается от оптимального значения на некоторую допустимую величину.

3. Результаты численных расчетов траекторий и управлений в задаче (1),(2)

Приведем результаты численного расчета в системе VOCOP [9] задачи (1),(2) при $f(v_2) = \sqrt{v_2}$, $\tau = 1$, $\mu = 0.2$, $\delta = 0.01$, $T = 100$. Для этих параметров $\hat{k} = 25$, $v_2^* = 5.3947$.

На рис. 1, 2 показаны траектория $k(t)$ и управление $u(t)$ для начальных условий $k(0) = 0.1$, $k(T) = 21$, $v_1(0) = 0.1$, $v_2(t) = 0.1$. Значение критерия качества $y(T) = 58.6602$.

Значение критерия качества, которое близко к оптимальному, может быть достигнуто с помощью более простой структуры управ-

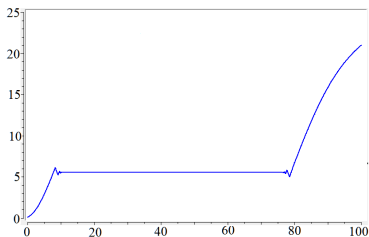


Рис. 1: $k(t)$

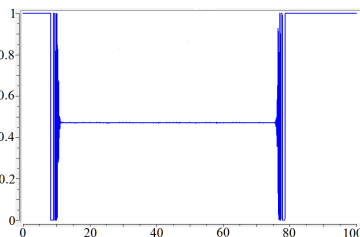


Рис. 2: $u(t)$

ления в форме

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t; t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u}) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ 0, & t \in [t_1, t_2], \\ \hat{u}, & t \in [t_2, t_3], \\ 0, & t \in [t_3, t_4], \\ 1, & t \in [t_4, T], \end{cases} \quad (5)$$

где $t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u}$ — варьируемые параметры.

Рассмотрим следующую задачу на экстремум:

$$J_2 = J_2(\tilde{u}(t; t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u})) \rightarrow \max_{t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u}: 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq T, \hat{u} \in [0, 1]}, \quad (6)$$

$$J_2 = \int_0^T e^{-\delta t} (1 - \tilde{u}(t)) f(v_2(t)) dt, \quad \dot{k}(t) = \tilde{u}(t) f(v_2(t)) - \mu k(t),$$

$$\frac{\tau}{2} \dot{v}_1(t) = k(t) - v_1(t), \quad v_1(0) = v_{01}, \quad \frac{\tau}{2} \dot{v}_2(t) = v_1(t) - v_2(t), \quad v_2(0) = v_{02},$$

Решение задачи (6) на экстремум с граничными условиями $k(0), k(T)$ и параметрически заданным управлением в системе ВОСОР [9] имеет вид: $t_1 = 16.3129, t_2 = 27.9977, t_3 = 87.06082, t_4 = 87.147, \bar{u} = 0.621105$. На рис. 3, 4 приведено аппроксимирующее управление (5) и график соответствующей траектории $k(t)$ для тех же краевых условий. Значение критерия качества при таком управлении $y(T) = 56.9703$.

[1] *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

[2] *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: Юнити, 2005.

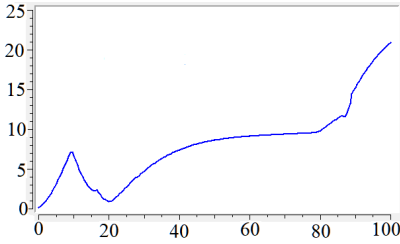


Рис. 3: $k(t)$ -аппроксимирующее

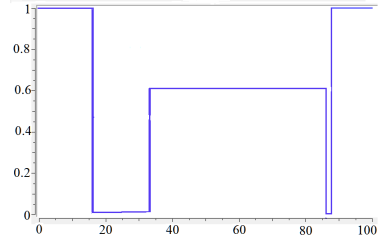


Рис. 4: $u(t)$ -аппроксимирующее

- [3] Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1985.
- [4] Зуев С.М. Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. М.: Наука, 1988.
- [5] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 2004.
- [6] Васильев Ф.П. Методы оптимизации // Прикладная математика и информатика. 2011. № 39. С. 107–129.
- [7] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
- [8] Schettler H., Ledzewicz U. Optimal Control for Mathematical Models of Cancer Therapies. An Application of Geometric Methods. N. Y.: Springer, 2015. DOI: 10.1007/978-1-4939-2972-6
- [9] Team Commands, Inria Saclay. BOCOP: an open source toolbox for optimal control. <http://bocop.org>, 2017.

О задачах управления для непрерывно-дискретных систем с последствием

*В. П. Максимов*¹

e-mail: maksimov@econ.psu.ru

1. Введение

Теория абстрактного функционально-дифференциального уравнения [1, 2] предлагает единую точку зрения на широкие классы уравнений, возникающих при моделировании реальных процессов. Это позволяет применять основные утверждения теории не только к дифференциальным уравнениям с запаздыванием, дифференциально-разностным и интегродифференциальным уравнениям, но и к гибридам таких уравнений с уравнениями динамики, где текущее время принимает заданные дискретные значения. В докладе предлагается краткий обзор результатов, полученных на этом пути для задач управления линейными гибридными системами на заданном конечном промежутке в случае, когда цель управления задается с помощью линейного целевого вектор-функционала ℓ , для каждой компоненты которого задается целевое значение. При этом рассматривается весьма широкий класс систем управления с вольтерровыми операторами [3]. При отсутствии ограничений на управление предлагаются условия управляемости относительно заданного вектор функционала, которые формулируются с использованием оператора Коши гибридной системы. При наличии точечных полиэдральных ограничений на управление предлагается подход к построению внешних и внутренних (верхних и нижних по включению, соответственно) оценок множества ℓ -достижимости [4, 5].

2. Непрерывно-дискретная функционально-дифференциальная система

При описании рассматриваемой системы мы следуем работе [3].

Зафиксируем отрезок $[0, T] \subset R$. Введем основные пространства: $L^n = L^n[0, T]$ — пространство суммируемых функций v :

¹Пермский государственный национальный исследовательский университет

$[0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|v\|_{L^n} = \int_0^T |v(s)|_n ds$, где $|\cdot|_n$ означает норму в пространстве R^n ; $L_2^n = L_2^n[0, T]$ — пространство квадратично суммируемых функций $u : [0, T] \rightarrow R^r$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_0^T u^\top(s)v(s) ds$, где символ $(\cdot)^\top$ означает транспонирование. Пространство $AC^n = AC^n[0, T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|_n$. Зафиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T$. Пусть $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$ — пространство функций $z : J \rightarrow R^\nu$ с нормой $\|z\|_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^\mu |z(t_i)|_\nu$.

Рассматривается линейная система управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + Fu + f, \\ z &= \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + Gu + g, \end{aligned} \quad (1)$$

где линейные вольтерровы [1] операторы \mathcal{T}_{ij} , $i, j = 1, 2$ действуют в соответствующих пространствах вполне непрерывно, линейные ограниченные вольтерровы операторы F, G действуют из пространства управлений L_2^n в пространства L^n и $FD^\nu(\mu)$ соответственно.

3. Задача управления относительно заданного вектор-функционала

Для системы (1) ставится следующая задача управления. При заданном начальном состоянии

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta \quad (2)$$

требуется найти программное управление $u : [0, T] \rightarrow R^r$, приводящее к достижению цели, заданной условием

$$\ell(x, z) = \beta \in R^N, \quad (3)$$

где $\ell : AC^n \times FD^\nu(\mu) \rightarrow R^N$ — заданный линейный ограниченный целевой вектор-функционал.

Для задачи (1)–(3) получены аналоги классических признаков управляемости, известных для систем управления с последствием и непрерывным временем. Обсуждаются возможности эффективной проверки этих признаков с использованием доказательного вычислительного эксперимента [6].

В случае поточечных полиэдральных ограничений на управление:

$$Lu(t) \leq \gamma \in R^{N_1}, \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

с заданной $(N_1 \times r)$ -матрицей Λ в предположении ограниченности и непустоты множества V решений системы неравенств $\Lambda v \leq \gamma$ возникает задача описания множества ℓ -достижимости — множества всех целевых значений β , для которых задача (1)–(4) разрешима в классе программных управлений. Для этой задачи предлагаются конструкции и алгоритмы построения внешних и внутренних оценок множества ℓ -достижимости. Основные построения опираются на систематическое использование оператора Коши гибридной системы (1), свойства которого подробно изучены в [7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00332.

- [1] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
- [2] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 1. С. 3–23.
- [3] *Chadov A.L., Maksimov V.P.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. V. 19, no. 1–2. P. 49–62.
- [4] *Maksimov V.P.* On the ℓ -attainability sets of continuous discrete functional differential systems // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51, no. 32. P. 310–313. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.401
- [5] *Максимов В.П.* Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики // Прикладная математика и вопросы управления. 2019. № 4. С. 124–135. DOI: 10.15593/2499-9873/2019.4.08
- [6] *Maksimov V.P.* Reliable computing experiment in the study of functional-differential equations: theory and applications // Journal of Mathematical Sciences. 2018. V. 230, no. 5. P. 712–716. DOI: 10.1008/s10958-018-3775-3
- [7] *Maksimov V.P.* The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Вестник Удмуртского

О существовании точек совпадения двух отображений, определенных на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве

*В. Мерчела*¹

e-mail: merchela.wassim@gmail.com

В теореме Арутюнова [1] утверждается, что существует точка совпадения двух отображений f, g , действующих из полного метрического пространства X в метрическое пространство Y , если отображение f является α -накрывающим, отображение g является β -липшицевым, $\alpha > \beta$. Это утверждение нашло применение в различных вопросах анализа, теории дифференциальных, интегральных уравнений и включений (см. [2, 3]). Распространению теоремы Арутюнова на отображения, действующие в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах, посвящена работа [4]. В работе [5] получено утверждение о точке совпадения отображений в случае, когда X — полное метрическое пространство, а расстояние в пространстве Y удовлетворяет только аксиоме тождества. В данном сообщении исследуются точки совпадения отображений в случае, когда X является полным (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, Y — пространством с расстоянием.

Пусть задано непустое множество Y , на котором определена функция расстояния — отображение $d_Y: Y^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее лишь аксиоме тождества

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d_Y(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2.$$

Пусть $X \neq \emptyset$.

¹Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Определение 1. [4] Пусть заданы положительные числа q_1, q_2 . Функция $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая аксиоме тождества, называется (q_1, q_2) -квазиметрической, если выполняется (q_1, q_2) -обобщенное неравенство треугольника, т.е.

$$\rho_X(x, z) \leq q_1 \rho_X(x, y) + \rho_X(y, z) \quad x, y, z \in X.$$

В этом случае, пара (X, ρ_X) называется (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством.

Если из $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(\xi, x_n) = 0$ вытекает $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(x_n, \xi) = 0$, то (q_1, q_2) -квазиметрику называют слабо симметрической.

Для отображений, действующих из X в Y , сформулируем определение, аналогичные приведенным в [4].

Определение 2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем *замкнутым*, если

$$\forall \{x_n\} \subset X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(\xi, x_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(y, f(x_n)) = 0 \Rightarrow f(\xi) = y.$$

Определение 3. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем α -*накрывающим*, если

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists u \in X \quad f(u) = y, \quad \rho_X(x, u) \leq \frac{1}{\alpha} d_Y(f(x), y).$$

Определение 4. Пусть $\beta \geq 0$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем β -*липшицевым*, если

$$\forall x, u \in X \quad d_Y(f(x), f(u)) \leq \beta \rho_X(x, u).$$

Точкой совпадения отображений $f, g : X \rightarrow Y$ называют элемент $\xi \in X$ такой, что

$$f(\xi) = g(\xi).$$

Для $r \in [0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S(r, n) = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Будем считать, что $\alpha > \beta \geq 0$. Положим

$$m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid q_2 \beta^j < \alpha^j\}.$$

Теорема 1. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является полным. Пусть отображение f является α -накрывающим и замкнутым, а отображение g является β -липцевым. Тогда у отображений f и g существует точка совпадения ξ , для которой имеет место оценка

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \rho_X(x_0, \eta) \leq \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} d_Y(f(x_0), g(x_0)).$$

Если дополнительно пространство (X, ρ_X) является слабо симметрическим, то для ξ также выполнено

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} d_Y(f(x_0), g(x_0)).$$

Доказательство теоремы 1 повторяет доказательство [4, теорема 4.5].

- [1] Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
DOI: 10.1134/S0869565207260015
- [2] Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
DOI: 10.1134/S0374064109050021
- [3] Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75, no. 3. P. 1026–1044. DOI: 10.1016/j.na.2011.03.038
- [4] Арутюнов А.В., Грешинов А.В. (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 2. С. 3–32.
DOI: 10.1070/im8546
- [5] Мерчела В. К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 65–73.
DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73

Дискретная задача управления с помехой и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств

С. А. Никитина¹, В. И. Ухоботов¹
e-mail: nikitina@csu.ru, ukh@csu.ru

Пусть задан управляемый процесс

$$z(k+1) = z(k) - \sum_{i=1}^N a_i(k)u_i + \sum_{j=1}^M b_j(k)v_j, \quad (1)$$

где $k = 0, \dots, p$, $z(k) \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in U_i$, $v_j \in V_j$, $a_i(k) \geq 0$, $b_j(k) \geq 0$, p — фиксированный момент времени; $U_i \subset \mathbb{R}^n$ и $V_j \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества.

Задано выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Цель выбора управления $u_i \in U_i$, $i = 1, \dots, N$ заключается в осуществлении включения

$$z(p) \in X \quad (2)$$

при любой допустимой реализации помехи v_j , $j = 1, \dots, M$.

Введем оператор T_k , который каждому числу $k = 0, \dots, p$ и каждому множеству Y ставит в соответствие множество $T_k(Y)$, определяемое следующим образом. Точка $z \in T_k(Y)$ тогда и только тогда, когда для любой реализации помехи $v_j(k) \in V_j$ существует управление $u_i(k) \in U_i$ такое, что $z(k+1) \in Y$.

Если с помощью $A * B$ обозначить геометрическую разность [1] множеств A и B из пространства \mathbb{R}^n , то оператор T_k запишется в виде

$$T_k(Y) = \left(X + \sum_{i=1}^N a_i(k)U_i \right) * \sum_{j=1}^M b_j(k)V_j.$$

Для дальнейших рассуждений потребуется следующее свойство [2]: пусть числа $\sigma_i \geq 0$, $\epsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, $\delta_j \geq 0$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \dots, M$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \leq \min_{1 \leq j \leq M} \frac{\delta_j}{\gamma_j}.$$

¹Челябинский государственный университет

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\left(X + \sum_{i=1}^N \epsilon_i U_i \right) * \sum_{j=1}^M \gamma_j(k) V_j + \sum_{i=1}^N \sigma_i U_i \right) * \sum_{j=1}^M \delta_j V_j = \\ & = \left(X + \sum_{i=1}^N (\epsilon_i + \sigma_i) U_i \right) * \sum_{j=1}^M (\gamma_j + \delta_j) V_j. \end{aligned}$$

В работе [3] доказана следующая лемма.

Лемма 3. Для любого выпуклого множества K и любых чисел $\alpha_j \geq \beta_j \geq l_j \geq 0, \alpha_j \geq \beta_j + f_j, f_j \geq 0, j = 1, \dots, M$ выполнено включение

$$\begin{aligned} & \left(K + \sum_{j=1}^M (\beta_j - l_j) V_j \right) * \sum_{j=1}^M f_j V_j \supset \\ & \supset K * \sum_{j=1}^M (\alpha_j - \beta_j) V_j + \sum_{j=1}^M (\alpha_j - l_j - f_j) V_j. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} W(k) = & \left(X + \sum_{i=1}^N \sum_{s=k}^p a_i(s) U_i \right) * \sum_{j=1}^M y_j(k) V_j + \\ & + \sum_{j=1}^M (y_j(k) - \sum_{s=k}^p b_j(s)) V_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема. Пусть числа $y_j(s), s = 0, \dots, p, j = 1, \dots, M$ в формуле (3) удовлетворяют условиям

$$y_j(p) = 0,$$

$$y_j(k+1) = y_j(k) - \max \left\{ b_j(k); y_j(k+1) \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^p a_i(s)} \right) \right\}.$$

Тогда для множеств (3) выполнено

$$W(p) = X, \quad W(k) \subset T_k(W(k+1)).$$

Построенное семейство множеств $W(k), k = 0, \dots, p$ позволяет записать условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение включения (2) в момент окончания процесса управления (1). Рассмотрен пример.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00264а.

- [1] *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР, 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.
- [2] *Ухоботов В.И.* К вопросу об окончании игры за первый момент поглощения // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, № 6. С. 892–897.
- [3] *Ухоботов В.И.* Стабильный мост в игре с вектограммами, зависящими линейно от заданных множеств // Известия высших учебных заведений. 1988. Т. 2. С. 63–65.

Линейные управляемые объекты с фазовыми ограничениями. Приближённое вычисление множеств достижимости

*М. С. Никольский*¹
e-mail: mni@mi-ras.ru

1. Общая информация

Управляемые процессы при наличии фазовых ограничений являются важным объектом изучения в математической теории оптимального управления (см., например, [1–4] и др.). Наличие фазовых ограничений существенно усложняет изучение соответствующих оптимизационных задач. Отметим, что важной характеристикой управляемого процесса являются его множества достижимости (см., например, [3–4]). Для линейных управляемых объектов при отсутствии фазовых ограничений была разработана теория, позволяющая эффективно вычислять множества достижимости с по-

¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

мощью аппарата опорных функций (см., например, [4]). Для линейных управляемых объектов при наличии фазовых ограничений конструктивное вычисление множеств достижимости представляет значительные трудности.

Настоящая работа посвящена приближённому вычислению множеств достижимости для линейных управляемых объектов при наличии выпуклого фазового ограничения и выпуклости компакта P , ограничивающего векторное управление u .

Рассмотрим линейный управляемый объект вида (см. [1–4])

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где $x \in R^n$ ($n \geq 1$), $u \in R^p$ ($p \geq 1$), A , B — матрицы размерности $n \times n$, $n \times p$ соответственно, причём u принадлежит выпуклому компакт P из R^p . Для управляемого объекта (1) фиксированы фазовое ограничение $G \subset R^n$, начальное условие $x(0) = x_0 \in G$ и момент времени $T > 0$, причём G — непустой выпуклый компакт. Рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t) \in P$, $t \in \Delta = [0, T]$, называемые допустимыми управлениями. Обозначим через U множество таких функций. Каждому допустимому управлению $u(\cdot)$ и начальному условию $x(0) = x_0$ отвечает абсолютно непрерывное решение $x(t, u(\cdot), x_0)$, $t \in \Delta$, уравнения (1). Нас будут интересовать только такие $u(\cdot) \in U$, для которых $x(t, u(\cdot), x_0) \in G$ при всех $t \in \Delta$. Множество таких управлений обозначим W . В общем случае множество W может оказаться пустым. В дальнейшем предполагается, что $W \neq \emptyset$. Множество достижимости $D(T, x_0)$ для рассматриваемого управляемого объекта определим формулой

$$D(T, x_0) = \bigcup_{u(\cdot) \in W} x(T, u(\cdot), x_0). \quad (2)$$

Напомним, что при $u(\cdot) \in U$ для соответствующего решения $x(t) = x(t, u(\cdot), x_0)$, $t \in \Delta$, справедлива формула Коши вида

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds,$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA , а интеграл понимается в смысле Лебега. С помощью этой формулы, используя выпуклость множеств P , G , нетрудно обосновать выпуклость множества $D(T, x_0)$

(см. (2)). Мы будем заниматься проблемой приближённого (в смысле метрики Хаусдорфа) вычисления выпуклого компакта $D(T, x_0)$.

Разобьём отрезок $\Delta = [0, T]$ на N равных частей ($N \geq 1$) точками $t_i = ih$, где $i = 0, \dots, N$, $h = T/N$, и рассмотрим множество

$$E(h, K) = e^{hA}K + \int_0^h e^{rA}BP \, dr, \quad (3)$$

где $h > 0$, K — произвольный непустой компакт из R^n , $+$ означает алгебраическое сложение множеств, а интеграл от многозначного отображения $e^{rA}BP$ по отрезку $[0, h]$ понимается в смысле теории многозначных отображений (см. [4]). Отметим, что в случае выпуклости компакта K множество $E(h, K)$ (см. (3)) является выпуклым компактом.

Нам будет полезна следующая цепочка множеств F_i :

$$F_0 = x_0, \quad F_{i+1} = E(h, F_i) \cap G,$$

где $h > 0$, $i = 0, \dots, N - 1$.

Оказывается, что при сделанных выше предположениях все множества F_i , $i = 0, \dots, N$, являются непустыми выпуклыми компактами.

В докладе обосновывается сходимость компактов F_N к компакту $D(T, x_0)$ при $N \rightarrow +\infty$ в метрике Хаусдорфа и также получена оценка сверху скорости этой сходимости при некотором добавочном предположении относительно управляемого объекта (1), вектора x_0 и множества G .

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
- [2] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2011.
- [3] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
- [4] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высшая школа, 2001.

О численном построении множеств выживаемости в задачах химиотерапии злокачественных опухолей

Н. Г. Новоселова^{1,2}

e-mail: n.g.novoselova@gmail.com

1. Основные результаты

В работе рассматривается математическая модель, описывающая процесс химиотерапии злокачественной опухоли. Модель имеет вид системы с кусочно монотонной динамикой, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, где время изменяется в пределах $t \in [0, T]$ [1]:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = g(m) - \gamma m f(h), & m(t_0) = m_0, \quad \gamma - \text{const} > 0, \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), & h(t_0) = h_0, \quad \alpha - \text{const} > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь m — число злокачественных клеток; h — количество лекарства, способного убивать клетки опухоли; $f(h)$ — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли; $u(t)$ — управление лекарством, вводимым в опухоль; $g(m)$ — функция, описывающая закон роста злокачественной опухоли.

Предполагается, что управление ограничено условием

$$0 \leq u(t) \leq Q,$$

где Q — максимальное количество лекарства, вводимого в опухоль в единицу времени. Также предполагается, что функция терапии $f(h)$ непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на отрезке $[0, L]$, L — максимальное допустимое количество лекарства в организме. Функция $f(h)$ имеет две точки максимума \hat{h}_1 и \hat{h}_3 и одну точку минимума \hat{h}_2 такие, что

$$0 < \hat{h}_1 < \hat{h}_2 < \hat{h}_3 < L, \quad F = \max_{h \in [0, L]} f(h) = f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3).$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

Исследуются случаи, когда опухоль растет по следующим законам:

1) $g(m) = rm - \theta m \ln(m)$ — закон Гомперца, $r, \theta - \text{const} > 0$.

2) $g(m) = rm \left[1 - \left(\frac{m}{\theta} \right)^\beta \right]$ — обобщенный логистический закон, $r, \theta, \beta - \text{const} > 0$.

Изучается задача оптимального управления, целью которой является минимизация злокачественных клеток в организме (минимизация терминальной функции платы) в конечный момент времени T [2]. А именно,

1) для закона Гомперца:

$$\sigma_1(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)}, \quad (2)$$

2) для обобщенного логистического закона:

$$\sigma_2(m(T)) = m^\beta(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)}. \quad (3)$$

В статье [3] была построена функция цены $\text{Val}_1(t_0, m_0, h_0)$ и оптимальный синтез $u_1^0(t, h)$ для случая злокачественной опухоли, растущей по закону Гомперца, а в статье [4] — функция цены $\text{Val}_2(t_0, m_0, h_0)$ и оптимальный синтез $u_2^0(t, h)$ для случая, когда опухоль растет по обобщенному логистическому закону.

В данной работе проводится построение множеств выживаемости W_1 и W_2 в задачах (1),(2) и (1),(3), соответственно. Эти множества состоят из таких начальных состояний модели, для которых оптимальное управление гарантирует рост количества злокачественных клеток вплоть до конечного момента времени в объеме, не превышающем предельный объем, совместимый с жизнью. Более точно,

1) в задаче (1),(2) для закона Гомперца множество W_1 определяется соотношением

$$W_1 = \{(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L] : \text{Val}_1(t_0, m_0, h_0) \leq M^2\},$$

$$M = e^{\frac{r - \gamma F}{\theta}},$$

2) в задаче (1),(3) для обобщенного логистического закона:

$$W_2 = \{(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L] : \text{Val}_2(t_0, m_0, h_0) \leq M^\beta\},$$

$$M = \theta \left(1 - \frac{\gamma F}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

В этих формулах символ M — максимальное допустимое количество злокачественных клеток в организме.

Показано, что множество $W \in \{W_1, W_2\}$ является максимальным множеством выживаемости для задач (1),(2) и (1),(3). Для обеих задач справедлива следующая теорема.

Теорема. *Выполняются следующие утверждения.*

1. Для любых точек $(t_0, m_0, h_0) \in W$ справедливо, что $m_0 \leq M$.
2. Множество W является слабо инвариантным относительно дифференциального включения $\dot{w} \in Y(w)$, где

$$w = (t, m, h) \mapsto Y(w) = \left(1, g(m) - \gamma m f(h), -\alpha h + [0, Q] \right).$$

3. Для любой точки $w_0 = (t_0, m_0, h_0) \notin W$ и любой измеримой функции $u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, Q]$ существует такой момент времени $t_* \in (t_0, T)$, что выполнено неравенство

$$m(t_*) = m(t_*; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) > M.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00362.

- [1] Братусь А.С., Чумерина Е.С. Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // ЖВММФ. 2008. Т. 48, вып. 6. С. 946–966.
- [2] Subbotin A.I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser. Boston, 1995.
- [3] Subbotina N.N., Novoselova N.G. The value function in a problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the Gompertz law // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51, iss. 32. P. 855–860.
- [4] Субботина Н.Н., Новоселова Н.Г. О приложениях уравнений Гамильтона – Якоби и теории оптимального управления к задачам химиотерапии злокачественных опухолей // Тр. МИРАН им. В.А. Стеклова. 2019. Т. 304. С. 273–284.

Аналитическое исследование трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса в случае двусторонних поворотов

В. С. Пацко¹, А. А. Федотов¹

e-mail: patsko@imm.uran.ru, andreyfedotov@mail.ru

1. Используем описание динамики для машины Дубинса в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2].\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения объекта; φ – угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x ; u – скалярное управление. Величина линейной скорости равна единице. Предполагается, что $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Не теряя общности, полагаем $u_2 = 1$. Величина u_1 ограничивает управление u снизу и является параметром задачи, который выбирается в полуинтервале $[-1, 0)$. Таким образом, при движении возможны как левый (против часовой стрелки), так и правый (по часовой стрелке) повороты. Если $u_1 = -1$, то такой случай называем симметричным; если $-1 < u_1 < 0$, – несимметричным.

Множеством достижимости $G(t_f)$ в момент t_f называем совокупность всех точек *трёхмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в силу системы (1) в момент t_f из заданного начального фазового состояния при помощи некоторого допустимого управления. Начальный момент и начальное фазовое состояние полагаем нулевыми. В качестве допустимых управлений принимаем кусочно-постоянные функции времени со значениями из отрезка $[u_1, u_2] = [u_1, 1]$.

В статье [1] для симметричного случая изучена структура управлений, удовлетворяющих Принципу максимума Понтрягина и ведущих на границу множества достижимости. В статье [2] для симметричного и несимметричного случаев представлено аналитическое описание двумерных φ -сечений множества достижимости в предположении, что $t_f \leq 2\pi$. В данной работе аналитическое описание сечений распространяется на любые значения t_f .

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

2. Известно [1], что в любую точку на границе множества достижимости $G(t_f)$ можно попасть при помощи программного управления, принимающего значения $u_1, 0, u_2$ и имеющего не более двух переключений. При этом можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$U1 : u_2, 0, u_2; \quad U2 : u_1, 0, u_2; \quad U3 : u_2, 0, u_1; \quad U4 : u_1, 0, u_1;$$

$$U5 : u_2, u_1, u_2; \quad U6 : u_1, u_2, u_1.$$

При зафиксированном φ каждый из указанных типов управлений образует *гладкую* однопараметрическую кривую (криволинейный сегмент) на плоскости x, y . Получаемые сегменты обозначим через $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ соответственно. Для каждого сегмента в работе получено аналитическое описание. Сегменты A_1, A_4, A_5, A_6 являются дугами окружностей. Сегменты A_2, A_3 имеют значительно более сложное описание.

При $\varphi > 0$ для построения границы φ -сечений множества $G(t_f)$ используются сегменты A_1, A_2, A_3, A_6 . Для $\varphi < 0$ применяются сегменты A_4, A_2, A_3, A_5 . Сечение для $\varphi = 0$ совпадает с пределом при $\varphi \rightarrow 0$ и образовано сегментами $A_2, A_3, A_5 = A_6$.

3. Установлено, что возможны лишь четыре варианта структуры φ -сечений. Перечислим их, полагая $\varphi > 0$.

I. Граница φ -сечения представляет собой замкнутую кривую без самопересечений, формируемую из четырёх криволинейных сегментов A_1, A_2, A_3, A_6 . Порядок следования сегментов при обходе границы φ -сечения против часовой стрелки следующий: A_1, A_3, A_6, A_2 .

II. В этом варианте φ -сечение не является односвязным. Внешняя граница формируется из сегмента A_1 и примыкающих к нему частей сегментов A_2 и A_3 . Внутренняя граница (граница “дырки”) формируется из сегмента A_6 и примыкающих к нему некоторых частей сегментов A_2 и A_3 .

III. Граница φ -сечения представляет собой замкнутую кривую, состоящую из сегмента A_1 и примыкающих к нему частей сегментов A_2 и A_3 .

IV. Круговое φ -сечение, граница которого образована сегментом A_1 .

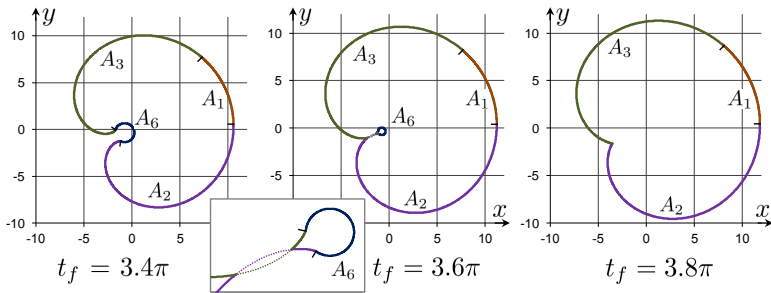


Рис. 1: Сечения множества достижимости $G(t_f)$ для $\varphi = \pi/4$ и трёх значений t_f . Параметр u_1 равен -1

Варианты I, II, III реализуются только для $\varphi < 2\pi$. При $\varphi \geq 2\pi$ имеет место вариант IV. Для вариантов I, II, III сегмент A_1 гладко сопрягается с сегментами A_2 и A_3 . Для вариантов I, II сегмент A_6 негладко стыкуется с сегментами A_2 и A_3 . В целом, граница любого φ -сечения является *симметричной* относительно оси, проходящей через начало координат и развёрнутой относительно оси ox против часовой стрелки на угол $\varphi/2$. Данное свойство справедливо для любых значений u_1 из полуинтервала $[-1, 0)$.

На рис. 1 при $u_1 = -1$ показаны φ -сечения для одного и того же угла $\varphi = \pi/4$ и трёх значений $t_f = 3.4\pi, 3.6\pi, 3.8\pi$. При $t_f = 3.4\pi$ φ -сечение имеет структуру варианта I (состоит из четырёх сегментов). Для $t_f = 3.6\pi$ φ -сечение является неодносвязным и относится к варианту II. Увеличенный фрагмент внутреннего контура границы показан слева. Для $t_f = 3.8\pi$ φ -сечение реализуется вариантом III.

При $\varphi < 0$ структура φ -сечений остаётся такой же, как при $\varphi > 0$, с заменой сегментов A_1 и A_6 на A_4 и A_5 соответственно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00410.

- [1] Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
- [2] Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества

Преследование группы убегающих в задаче с дробными производными и фазовыми ограничениями

Н. Н. Петров¹, А. И. Мачтакова¹

e-mail: kma3@list.ru, bichurina.alyona@yandex.ru

1. Постановка задачи

Одним из направлений современной теории дифференциальных игр преследования является разработка методов решения задач конфликтного взаимодействия группы преследователей с группой убегающих [1–3]. Следует отметить, что, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [4, 5] исследовалась задача преследования двух лиц, описываемая уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В данной работе рассматривается задача преследования группы убегающих группой преследователей с равными возможностями всех участников в дифференциальной игре, описываемой уравнениями с дробными производными. Целью преследователей является поимка заданного числа убегающих.

Определение 1. Пусть $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция, число $\alpha \in (0, 1)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m .

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

Динамика каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V.$$

Динамика каждого убегающего E_j аналогична:

$$D^{(\alpha)}y_j = ay_j + v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v_j \in V.$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$, $V = \{v \mid \|v\| \leq 1\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I$, $j \in J$.

Дополнительно предполагается, что каждый убегающий E_j , $j \in J$ не покидает пределы выпуклого конуса с непустой внутренностью

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k : (p_s, y) \leq 0, \quad s = 1, \dots, r\},$$

где p_1, \dots, p_r — единичные векторы \mathbb{R}^k . Если $\Omega = \mathbb{R}^k$, то считаем, что $r = 0$. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих.

2. Поимка заданного числа убегающих

Определение 2. В игре $G(n, m)$ происходит l -кратная поимка (при $l = 1$ — поимка) убегающего E_β , если существует $T_0 > 0$, при котором для любых допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$ убегающих E_j , $j \in J$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t, x_i^0, y_j^0, v_j(\tau), \tau \in [0, \infty), j \in J)$$

преследователей P_i , $i \in I$, моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_l \in [t_0, T_0]$ и попарно различные натуральные числа $i_1, \dots, i_l \in I$, что $x_{i_p}(\tau_p) = y_\beta(\tau_p)$, $p = 1, \dots, l$.

Определение 3. В игре $G(n, m)$ происходит l -кратная поимка (при $l = 1$ — поимка) не менее q убегающих, если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$ убегающих E_j , $j \in J$ найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(\tau), \tau \in [0, \infty), j \in J)$ преследователей P_i , $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad \{N_s, s \in M\}, \quad N_s \subset I, \quad |N_s| = l \quad \text{для всех } s \in M, \\ N_p \cap N_s = \emptyset \quad \text{для всех } p \neq s,$$

такие, что группа преследователей $\{P_s, s \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет l -кратную поимку убегающего E_β , причем, если преследователь P_s ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения: $\text{Int}A$, $\text{co}A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A . Пусть K — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел,

$$\Omega_K(s) = \{(i_1, \dots, i_s) \mid i_1, \dots, i_s \in K \text{ и попарно различны}\}.$$

Теорема 1. Пусть $a \leq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и выполнены следующие условия:

1. существует вектор $p_0 \in \mathbb{R}^k$ такой, что

$$\Omega \subset \Omega_0 = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p_0, y) \leq 0\},$$

2. для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ и для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sl$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$ такое, что при любом $\beta \in M$

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(|N|-l+1)} \text{Intco}\{x_\alpha^0 - y_\beta^0, \alpha \in \Lambda, p_0\}.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ происходит l -кратная поимка не менее q убегающих.

3. Поимка скоординированных убегающих

В данном пункте считаем, что убегающие используют одно и то же управление.

Определение 4. В игре $G(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей P_1, \dots, P_n , что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ найдутся номера $p \in I$, $j \in J$ и момент $\tau \in [0, T_0]$ такие, что $x_p(\tau) = y_j(\tau)$.

Теорема 2. Пусть $n \geq k$, $a \leq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и

$$0 \in \text{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, i \in I, j \in J, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Теорема 3. Пусть $a \leq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $r \geq 1$ и существуют $j, s \in J$, а также множества

$$J_1, J_2 \subset I, \quad I_1, I_2 \subset I \setminus (J_1 \cup J_2), \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

такие, что наборы векторов

$$\begin{aligned} & \{x_i^0 - y_j^0, i \in J_1, p_1, \dots, p_r, -(y_j^0 - y_s^0)\}, \\ & \{x_i^0 - y_s^0, i \in J_2, p_1, \dots, p_r, y_j^0 - y_s^0\}, \\ & \{x_l^0 - y_j^0, l \in J_1^0, x_p^0 - y_s^0, p \in J_2^0, p_1, \dots, p_r\} \end{aligned}$$

образуют положительный базис \mathbb{R}^k , причем

$$|J_1| \geq k, \quad |J_2| \geq k, \quad |J_1^0| + |J_2^0| \geq k,$$

где

$$J_1^0 = I_1 \cup (J_1 \setminus (J_1 \cap J_2)), \quad J_2^0 = I_2 \cup (J_2 \setminus (J_1 \cap J_2)).$$

Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка хотя бы двух убегающих.

Исследования первого автора выполнены при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00293), исследования второго автора выполнены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект № 0827-2020-0010 “Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем”.

- [1] *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
- [2] *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [3] *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
- [4] *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.
- [5] *Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.* Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // Украинский математический журнал. 2000. Том 52, № 11. С. 1566–1583.

Субградиенты функционала цены в дифференциальных играх для систем с запаздыванием

*А. Р. Плаксин*¹

e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

В теории оптимального управления и теории дифференциальных игр для обыкновенных дифференциальных систем известны [1–4] различные по форме, но эквивалентные по сути характеристики функции оптимального результата (функции цены), которые взаимно дополняют друг друга. Условно, среди них можно выделить два основных подхода. Первый базируется на исследовании производных функции цены по подходящим направлениям. Этот подход приводит к определению функции цены как минимаксного [3] решения соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби – Айзекса – Белмана (Г-Я-А-Б). Во втором подходе рассматриваются субградиенты функции цены. В рамках этого подхода функция цены определяется как вязкостное [5] решение уравнения Г-Я-А-Б. Связывает эти два подхода известный результат [6], который можно рассматривать [7] как обобщение на негладкий случай классической теоремы Лагранжа о среднем значении.

В задачах управления и дифференциальных играх для систем с запаздыванием наиболее полным и естественным образом получил развитие первый подход [8–12]. Данная работа направлена на развитие для таких систем второго подхода. В ней рассматривается позиционная антагонистическая дифференциальная игра, в которой движение динамической системы описывается нелинейным уравнением с запаздыванием. Получен критерий функционала цены игры в форме неравенств для суб- и суперградиентов. При этом, чтобы преодолеть трудности, возникающие при доказательстве подобного [6] результата, приходится рассматривать дифференциальную игру в пространстве кусочно-непрерывных историй движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых № МК-3566.2019.1.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

- [1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [3] *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
- [4] *Souganidis P.E.* Max-min representations and product formulas for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations with applications to differential games // *Nonlinear Analysis. Theory, Meth., Appl.* 1985. Vol. 9, no. 3. P. 217–257.
DOI: 10.1016/0362-546X(85)90062-8
- [5] *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Society.* 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42. DOI: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
- [6] *Субботин А.И.* Об одном свойстве субдифференциала // *Матем. сб.* 1991. Т. 182. № 9. С. 1315–1330.
- [7] *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S.* Mean Value Inequalities in Hilbert Space // *Trans. Amer. Math. Society.* 1994. Vol. 344, no. 1. P. 307–324. DOI: 10.2307/2154718
- [8] *Осинов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последствием // *Доклады АН СССР.* 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
- [9] *Wolenski P.R.* Hamilton-Jacobi theory for hereditary control problems // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.* 1994. V. 22, no. 7. P. 875–894.
DOI: 10.1016/0362-546X(94)90056-6
- [10] *Aubin J.P., Haddad G.* History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // *Positivity.* 2002. V. 6. P. 331–358. DOI: 10.1023/A:1020244921138
- [11] *Лукоянов Н.Ю.* Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последствием // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2006. Т. 12. № 2. С. 108–118.
- [12] *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона – Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.

О критерии пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова систем с дискретным временем

С. Н. Попова¹, М. В. Федорова¹

e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com, fedoro.masha2013@yandex.ru

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Будем предполагать, что матрица $B: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ограничена, а матрица $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ вполне ограничена [1], то есть $A(k)$ обратима при каждом $k \in \mathbb{N}$ и $\sup_{k \in \mathbb{N}} (\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|) < \infty$. Полный спектр показателей Ляпунова [2, с. 57] свободной системы

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

обозначим через $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$.

Управление $u(\cdot)$ в системе (1) выберем в виде линейной обратной связи $u(k) = U(k)x(k)$, получим замкнутую систему вида

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Назовем $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем говорить, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на \mathbb{N} .

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для (3) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы (3) с выбранным управлением $U(\cdot)$ определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$.

Определение 1 ([3]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством *пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова*, если найдутся такие $\ell > 0$ и $\delta > 0$, что для любого набора чисел $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$, удовлетворяющих

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

неравенству $\max_{i=1, \dots, n} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leq \delta$, существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U(k)\| \leq \ell \max_{i=1, \dots, n} |\mu_i - \lambda_i(A)|$$

и

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 2 ([4]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что матрица Калмана $W(k, k + K) \triangleq \sum_{j=k}^{k+K-1} X(k, j + 1)B(j)B^T(j)X^T(k, j + 1)$ системы (1) удовлетворяет неравенству $W(k, k + K) \geq \alpha E$ при всех $k \in \mathbb{N}$; здесь $X(k, s)$ — матрица Коши свободной системы (2), $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица.

Определение 3 ([5]). Показатели Ляпунова системы (2) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой вполне ограниченной функции $R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющей условию $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|R(k) - E\| < \delta$, выполнено неравенство $\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon$; здесь $\lambda_1(AR) \leq \dots \leq \lambda_n(AR)$ — полный спектр показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной системы $y(k + 1) = A(k)R(k)y(k)$.

В работе [3] установлено, что если система (1) равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы (1) устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы (3) пропорционально локально управляем. В свою очередь, в работе [6] построен пример, показывающий, что эти достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра не являются необходимыми. Для нахождения необходимых и достаточных условий пропорциональной локальной управляемости спектра в работе [7] применена концепция оболочки Бебутова линейной управляемой системы.

Систему (1) отождествим с функцией $k \mapsto \sigma(k) \triangleq (A(k), B(k)) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$. Обозначим через $\sigma_s(k) \triangleq \sigma(k + s)$ сдвиг σ на $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma)$ — замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot) : s \in \mathbb{N}\}$ в топологии, порожденной поточечной сходимостью на \mathbb{N} . Метрика

в $\mathfrak{A}(\sigma)$ может быть задана равенством

$$\rho(\tilde{\sigma}, \hat{\sigma}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \min\{\|\tilde{\sigma}(k) - \hat{\sigma}(k)\|, k^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{A}(\sigma), \rho)$ компактно [8, р. 34]. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы σ .

Каждую функцию $\hat{\sigma}(\cdot) = (\hat{A}(\cdot), \hat{B}(\cdot)) \in \mathfrak{A}(\sigma)$ отождествим с системой

$$x(k+1) = \hat{A}(k)x(k) + \hat{B}(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

В работе [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1 ([7]). *Пусть (2) — система с интегральной разделенностью (то есть полный спектр показателей Ляпунова этой системы устойчив и состоит из n различных чисел). Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Удалось ослабить условие этой теоремы.

Теорема 2. *Пусть показатели Ляпунова системы (2) устойчивы. Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00293) и Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания № 075-00232-20-01 (проект 0827-2020-0010 “Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем”).

- [1] Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.
- [2] Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

- [3] *Babiarz A., Bانشchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S.* Proportional Local Assignability of Lyapunov Spectrum of Linear Discrete Time-Varying Systems // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2019. Vol. 57, no. 2. P. 1355–1377. DOI: 10.1137/17M1141734
- [4] *Halanay A., Ionescu V.* Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1994.
- [5] *Банщицова И.Н., Попова С.Н.* О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2016. Т. 26, № 1. С. 15–26. DOI: 10.20537/vm160102
- [6] *Банщицова И.Н., Макаров Е.К., Попова С.Н.* Об условиях пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2019. Т. 29, вып. 3. С. 301–311. DOI: 10.20537/vm190301
- [7] *Банщицова И.Н., Попова С.Н.* Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // *Дифференциальные уравнения*. 2020. Т. 56, № 1. С. 122–132. DOI: 10.1134/S0374064120010148
- [8] *Sell G.R.* Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

Проблемы оптимального управления системами многих тел

С. А. Решмин^{1,2}

e-mail: reshmin@ipmnet.ru

1. Введение

Управляемые механические системы, состоящие из многих твердых тел, упругих элементов, демпферов, во многих случаях слишком сложны для анализа и моделирования. Даже на конечном интервале времени из-за действия сил трения, возмущений и других неопределенных факторов могут возникать неожиданные режимы движения, не обладающие желаемыми свойствами оптимальности. Проиллюстрируем это на конкретном примере. При быстром разгоне транспортного средства из-за проскальзывания ведущих колес возможен эффект, связанный с нарастанием колебаний колес в вертикальной плоскости и их последующим незатуханием. Как показано далее, наличие межколесного дифференциала приводит к тому, что колеса взаимодействуют с дорогой так, что автомобиль практически не в состоянии двигаться вперед. Решение этой проблемы важно для обеспечения безопасности движения обычных автомобилей, управляемых водителями, и, в особенности, беспилотных автомобилей, разработка которых интенсивно ведется во многих промышленно развитых странах.

2. Оптимальный разгон с проскальзыванием. Постановка задачи управления

Рассмотрим переднеприводное транспортное средство, имеющее неблокируемый межколесный дифференциал и не снабженное какими-либо электронно-механическими средствами, которые предотвращают пробуксовку. Далее рассмотрим только несколько режимов интенсивного старта с проскальзыванием и колебаниями ведущих колес в вертикальной плоскости, причем вид этих колебаний постепенно усложняется по мере их рассмотрения. Предполагаем, что возникающие колебания периодические и установившиеся, хотя, на самом деле, на коротких интервалах времени их амплитуда

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

нарастает из-за накачки энергией. Иными словами, короткие переходные процессы не рассматриваем; считаем, что действующие на колеса крутящие моменты не влияют на силы нормальной реакции дороги. Отметим, что плоские колебания колес хорошо описываются упрощенной двухмассовой моделью передней стойки [1]. Предполагаем, что продольные колебания колес относительно корпуса полностью отсутствуют из-за большой жесткости соответствующих элементов подвески, а момент инерции колес относительно мал. Это означает, что действие крутящих моментов с полуосей колес мгновенно передается на создание тяги в случае контакта колеса с дорогой, причем крутильная упругость шин на это не влияет.

Сформулируем задачу оптимального управления. В каждом из указанных режимов требуется определить максимально возможную в некотором смысле интенсивность разгона (ускорения автомобиля) при условии, что сила нормальной реакции для каждого колеса задана в виде кусочно-гладкой функции времени. При этом в случае отрыва колеса от дороги соответствующая функция имеет чередующиеся участки, где она либо равна нулю, либо положительна с четко выраженными пиками на графике. В качестве управления выступает приходящий на дифференциал крутящий момент $M(t)$, который определяется степенью открытия дроссельной заслонки и другими факторами. Назовем управление допустимым, если оно является кусочно-непрерывной функцией времени. Цель управления — максимизация суммарной средней тяги в процессе всего разгона:

$$\overline{F_1(t)} + \overline{F_2(t)} \rightarrow \max.$$

Здесь $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — силы тяги первого и второго ведущего колес соответственно, черта сверху означает усреднение на некотором достаточно большом заданном интервале времени, который намного больше периода колебаний колес. В начальный момент времени считаем равными нулю смещение по горизонтали центра масс системы, а также горизонтальную составляющую его вектора скорости.

3. Синхронные колебания всех ведущих колес

В случае синхронных колебаний двух ведущих колес переднеприводного транспортного средства их максимальная сила тяги

определяется из закона Амонтона – Кулона

$$F_1^{\max}(t) = F_2^{\max}(t) = fN(t),$$

где f — коэффициент сухого трения, который считаем постоянным, $N(t)$ — сила нормальной реакции, которая для обоих колес предполагается одинаковой и периодической с периодом T . Здесь и далее все равенства выполнены с некоторой точностью. Средняя максимальная сила тяги остается практически такой же, как и при отсутствии колебаний:

$$\overline{F_1^{\max}} = \overline{F_2^{\max}} = f\overline{N(t)} = \frac{f}{T} \int_0^T N(t)dt = fmg. \quad (1)$$

Поэтому данный хорошо известный режим не является проблемным или опасным.

4. Колебания одного ведущего колеса

Проблемы со средней тягой возникают в случае несимметрии, например, колебаний только одного колеса. Пусть колеблется только второе колесо:

$$N_1(t) \equiv mg, \quad N_2(t) \neq \text{const} \quad (\overline{N_2(t)} = mg). \quad (2)$$

Можно показать, что если момент инерции колес относительно мал, а мощность ограничена, то моменты, передаваемые с дифференциала на колеса, идут в основном на создание тяги [2]. Кроме того, эти моменты должны быть одинаковыми согласно основному свойству межколесного дифференциала (трением внутри дифференциала пренебрегаем). Таким образом, полагаем

$$M(t)/2 \approx RF_1(t) \approx RF_2(t)$$

(R — радиус колеса) и приходим к следующей задаче оптимизации:

$$F_1(t) = F_2(t), \quad F_1(t) \leq fN_1(t), \quad F_2(t) \leq fN_2(t), \\ F_1(t) \rightarrow \max, \quad F_2(t) \rightarrow \max.$$

Ее решение сводится к соотношению

$$F_1^{\max}(t) = F_2^{\max}(t) = fN_{\min}(t), \quad N_{\min}(t) = \min[N_1(t), N_2(t)], \quad (3)$$

из которого при условии (2) следует значительное уменьшение средней тяги по сравнению с рассмотренным выше случаем (1):

$$\overline{F_1^{\max}} = \overline{F_2^{\max}} \ll fmg.$$

Действительно, график $N_{\min}(t)$ получается из $N_2(t)$ путем срезки всех пиков до величины mg , из-за чего площадь под графиком значительно уменьшается. Если развитие подобных колебаний происходит быстро, то это приводит к резкой потере средней тяги.

5. Колебания двух ведущих колес в противофазе

Рассмотрим теперь периодические колебания обоих колес, такие, что соответствующие силы нормальной реакции сдвинуты по фазе на половину периода T :

$$N_1(t) \equiv N_2(t - T/2),$$

причем $N_2(t)$ имеет вид, аналогичный тому, который рассматривался ранее (см. (2)). Если ширина оснований пиков графиков $N_1(t)$ и $N_2(t)$, построенных в общих осях, достаточно мала и они не перекрываются, то, применяя формулу (3), справедливую и в этом случае, получим нулевую тягу [2]. В результате транспортное средство будет практически стоять на месте. При этом ведущие колеса будут интенсивно колебаться в вертикальной плоскости и вращаться. Для дальнейшего движения потребуется остановить процесс вращения колес, дождаться затухания колебаний и снова начать старт. Это приведет к потере нескольких секунд и может привести к аварии в ситуациях, требующих наискорейшего разгона.

6. Заключение

Исследованы режимы движения транспортного средства с проскальзыванием и колебаниями ведущих колес во время интенсивного старта. Объяснен физический механизм возможного резкого и значительного уменьшения среднего ускорения. Отмечена серьезная опасность этого редко возникающего эффекта, так как реальная тяга может оказаться намного меньше ожидаемой.

Работа выполнена в ИПМех РАН при поддержке РФФ, проект № 18-11-00307.

- [1] Hao D., Zhao C., Huang Y. A reduced-order model for active suppression control of vehicle longitudinal low-frequency

vibration // Shock and Vibration. 2018. Article ID 5731347.
P. 1–22. DOI: 10.1155/2018/5731347

- [2] *Решимин С.А.* Анализ условий потери тяги транспортного средства при интенсивном старте // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 24–33. DOI: 10.1134/S000233881903017X

О точках бифуркации решения уравнения Гамильтона – Якоби в модели молекулярной генетики

А. С. Родин^{1,2}

e-mail: alexey.rodin.ekb@gmail.com

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями

$$D_t\varphi(t, x) + H(x, D_x\varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(0, x) = \sigma(x), \quad (1)$$

$$D_x\varphi(t, x) = \left(\frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial x_n} \right),$$

где

$$H(x, s) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2s} - \frac{1-x}{2}e^{-2s}, \quad x \in [-1; 1], \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Обозначим $\Pi_T = (0; T) \times (-1; 1)$,

$$\Gamma_T = \{(t, x) | 0 < t < T, x = 1\} \cup \{(t, x) | 0 < t < T, x = -1\}.$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

Задачу (1),(2) будем рассматривать при следующих предположениях:

A1) функция $D\sigma(\cdot) : [-1; 1] \rightarrow R$ непрерывна и удовлетворяет неравенствам $D\sigma(-1) > 0$, $D\sigma(1) < 0$;

A2) функция $Df(\cdot) : [-1; 1] \rightarrow R$ непрерывна, монотонно убывает и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} 2Df(1) + e^{2D\sigma(1)} &< e^{-2D\sigma(1)}, \\ -2Df(-1) + e^{-2D\sigma(-1)} &< e^{2D\sigma(-1)}; \end{aligned}$$

A3) $D\sigma(1) \leq D\sigma(y) \leq D\sigma(-1)$, $\forall y \in [-1; 1]$.

Условия A1)–A3) были получены в работе [1], их выполнение влечет существование глобального обобщенного решения задачи (1),(2).

2. Определения

Обобщенное решение задачи (1),(2) будем понимать в следующем смысле [1].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1),(2) в области $\bar{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию и условиям

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \forall (a, s) \in D^+ \varphi(t, x), \quad (3)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \forall (a, s) \in D^- \varphi(t, x), \quad (4)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Gamma_T, \forall (a, s) \in D^- \varphi(t, x) \cap \partial_C \varphi(t, x). \quad (5)$$

Здесь $D^+ \varphi = D^+ \varphi(t_0, x_0)$, $D^- \varphi = D^- \varphi(t_0, x_0)$,

$$D^+ \varphi = co \left\{ (\alpha, s) \in R^2 : \limsup_{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0)} \frac{\varphi(t,x) - \varphi(t_0, x_0) - \langle (\alpha, s), (\Delta t, \Delta x) \rangle}{|\Delta t| + |\Delta x|} \leq 0 \right\},$$

$$D^- \varphi = co \left\{ (\alpha, s) \in R^2 : \liminf_{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0)} \frac{\varphi(t,x) - \varphi(t_0, x_0) - \langle (\alpha, s), (\Delta t, \Delta x) \rangle}{|\Delta t| + |\Delta x|} \geq 0 \right\},$$

$$\partial_C \varphi(t_0, x_0) = co \left\{ (a, s) : a = \lim_{i \rightarrow \infty} D_t \varphi(t_i, x_i), \quad s = \lim_{i \rightarrow \infty} D_x \varphi(t_i, x_i), \right.$$

$$\left. (t_i, x_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} (t_0, x_0), (t_i, x_i) \in \bar{\Pi}_T \cap Dif(\varphi) \right\},$$

$Dif(\varphi)$ — множество точек, в которых функция $\varphi(\cdot)$ дифференцируема.

Решение $\varphi(t, x)$ задачи (1),(2) можно построить с помощью метода характеристик Коши, решив следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -(1+x)e^{2s} + (1-x)e^{-2s}, \quad (6)$$

$$\dot{s} = Df(x) + \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2}, \quad (7)$$

$$\dot{z} = sD_s H(x, s) - H(x, s)$$

с начальными значениями $x(0, \xi) = \xi$, $s(0, \xi) = D\sigma(\xi)$, $z(0, \xi) = \sigma(\xi)$, $\xi \in [-1; 1]$. Здесь $x(t, \xi)$, $s(t, \xi)$, $z(t, \xi)$ — соответственно, фазовая, импульсная и ценовая компоненты характеристики.

Так как обобщенное решение задачи (1),(2) может иметь точки недифференцируемости, рассмотрим следующие определения.

Определение 2. Множеством сингулярности Q для обобщенного решения φ задачи (1),(2) является множество точек $(t, x) \in \Pi_T$, в которых функция φ недифференцируема.

Определение 3. Точкой бифуркации (t^*, x^*) называется точка, для которой выполнено условие $(t^*, x^*) \in \overline{Q} \setminus Q$, где \overline{Q} есть замыкание множества Q .

Данная работа направлена на исследование свойств, связанных с точками бифуркаций, и является развитием результатов, полученных в [2].

3. Основные результаты

Из системы дифференциальных уравнений (6),(7) можно вывести дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \pm \sqrt{x^2 - 1 + (1 - H(\xi) - f(x))^2}. \quad (8)$$

При этом $1 - H(\xi) - f(x) \geq \sqrt{1 - x^2}$. Заметим, что так как гамильтониан H зависит от фазовой и импульсной переменных, то $H(x, s) = H(\xi, D\sigma(\xi)) = H(\xi)$.

Из дифференциального уравнения (8) следует первое условие на точку бифуркации:

$$2t^* = \left| \int_{\xi^*}^{x^*} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1 + (1 - H(\xi^*) - f(y))^2}} \right|, \quad (9)$$

при этом $x^* = x(t^*, \xi^*)$. В данном случае, хотя подынтегральная функция положительна, мы не знаем, что больше: x^* или ξ^* . Поэтому ставим модуль, так как время t^* должно быть неотрицательным. Заметим, что (9) справедливо для любой фазовой компоненты характеристики. Важным фактом является то, что для точки бифуркации существует единственный краевой параметр ξ^* .

Второе условие для точки бифуркации — это некоторое предельное условие. Возьмем произвольную последовательность точек $(t_i, x_i) \in B(t^*, x^*, \varepsilon_i) \cap Q$, где $\varepsilon_i > 0$, которая сходится к точке (t^*, x^*) при $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Таким образом $x_i = x(t_i, \xi_1^i) = x(t_i, \xi_2^i)$, так как $(t_i, x_i) \in Q$. Воспользуемся условием (9) и предположим, что $\xi_1^i > \xi^* > \xi_2^i > x^*$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{x^*}^{\xi_1^i} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1 + (1 - H(\xi_1^i) - f(y))^2}} &= \\ &= \int_{x^*}^{\xi_2^i} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1 + (1 - H(\xi_2^i) - f(y))^2}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $\xi_1^i, \xi_2^i \rightarrow \xi^*$, несложными преобразованиями можно получить следующее условие:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\xi^{*2} - 1 + (1 - H(\xi^*) - f(\xi^*))^2}} &= \\ &= \int_{x^*}^{\xi^*} \frac{DH(\xi^*)(1 - H(\xi^*) - f(y))dy}{(y^2 - 1 + (1 - H(\xi^*) - f(y))^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Данное условие справедливо только для точки бифуркации.

Третье условие состоит в том, что должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(t^*, \xi^*) = 0. \quad (11)$$

Это условие справедливо для точек $(t, x) \in \overline{Q}$. Если выполнены условия (9),(10), то условие (11) для задачи (1),(2) эквивалентно условию $\dot{x} = 0$.

Таким образом, для точки бифуркации (t^*, x^*) справедливы условия (9),(10) и $\dot{x} = 0$.

Заметим, что из условий (9), (10) следует $x^* \neq \xi^*$. Поэтому могут быть два случая: либо $x^* \geq \xi^*$, либо $x^* \leq \xi^*$.

Из третьего условия $\dot{x} = 0$ и (8) следует, что

$$f(x^*) + \sqrt{1 - x^{*2}} = 1 - H(\xi^*). \quad (12)$$

Введем функцию $N(x) = f(x) + \sqrt{1 - x^2}$. Если $N(x)$ строго монотонная функция, то существует обратная к ней функция N^{-1} . Учитывая условие (12), можно получить $x^* = N^{-1}(1 - H(\xi^*))$. Предполагаем, что функция $N(x)$ строго монотонная.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если функция $N(x)$ строго монотонно возрастающая, то $x^* > \xi^*$. Если функция $N(x)$ строго монотонно убывающая, то $x^* < \xi^*$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00362.

- [1] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 220–235.
- [2] *Rodin A.S., Shagalova L.G.* Bifurcation points of the generalized solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 866–870.

Динамическая реконструкция внешних воздействий при дефиците информации в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении

*В. Л. Розенберг*¹

e-mail: rozen@imm.uran.ru

1. Постановка задачи

Задача восстановления неизвестных внешних воздействий в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении (СДУ) изучается с позиций подхода теории динамического обращения, предложенного в работах А. В. Кряжковского, Ю. С. Осипова и их коллег [1, 2]. Рассматривается постановка, в которой одновременная реконструкция возмущений в детерминированном и стохастическом членах уравнения проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций части координат случайного процесса. Работа фактически продолжает исследования [3], где аналогичная задача была решена для линейного СДУ посредством применения метода моментов и модификации алгоритма восстановления неизвестных параметров в частично наблюдаемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Квазилинейная система СДУ с диффузией, зависящей от фазового состояния, описывается следующим образом:

$$dx(t, \omega) = (A(t)x(t, \omega) + B(t)u_1(t) + f(t)) dt + U_2(t)x(t, \omega) d\xi(t, \omega),$$
$$t \in T = [0, \vartheta], \quad x(0, \omega) = x_0. \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$; x_0 — известный детерминированный или случайный (нормально распределенный, с независимыми координатами) вектор начальных условий; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t, \omega)$ — стандартный скалярный винеровский процесс (то есть выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной t); $f(t) = \{f_i(t)\}$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ и $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$ — непрерывные

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

матричные функции размерности $n \times 1$, $n \times n$, и $n \times r$ соответственно. На систему действуют два внешних возмущения: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \dots, u_{2n}(t)\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, принимающие значения в заданных выпуклых компактах S_{u_1} и S_{u_2} и имеющие ограниченную на T вариацию. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 x d\xi = (u_{21}x_1 d\xi, u_{22}x_2 d\xi, \dots, u_{2n}x_n d\xi)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n})$ характеризует амплитуду случайных помех.

Решение уравнения (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. При сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(\tau_i)$, причем измерению доступны только q ($q \leq n$) первых координат, то есть вектор (x_1, x_2, \dots, x_q) .

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, определяющих случайный процесс $x(t)$, по неполной дискретной информации о его реализациях, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искоемых входов в метрике соответственно пространств $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ и $L_2(T; \mathbb{R}^n)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

2. Схема алгоритма решения

Специфика квазилинейного уравнения (1) допускает сведение сформулированной задачи для СДУ к задаче для нелинейной системы ОДУ, которой удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Для решения последней конструируется конечношаговый программно реализуемый разрешающий алгоритм, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей. В связи с неполнотой информации, согласно методике решения обратных задач в таких условиях [2], в модель вво-

дится блок динамической аппроксимации неизвестных координат, который играет роль поставщика информации о текущем полном фазовом состоянии системы. Эта информация оперативно передается в блок, формирующий по закону обратной связи модельные управления, приближающие реальные возмущения.

Уравнение, описывающее динамику математического ожидания процесса $m(t) = Mx(t, \omega)$, имеет следующий вид:

$$\dot{m}(t) = A(t)m(t) + B(t)u_1(t) + f(t), \quad m \in \mathbb{R}^n, \quad m(0) = m_0. \quad (2)$$

Можно показать, что ковариационная матрица $D(t) = M(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))'$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) &= A(t)D(t) + D(t)A'(t) + U_2(t)(D(t) + m(t)m'(t))U_2'(t), \\ D &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad D(0) = D_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Лемма. *Стандартные оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$, построенные по N ($N > 1$) реализациям $x^1(\tau_i), x^2(\tau_i), \dots, x^N(\tau_i)$ случайных величин $x(\tau_i)$, $i \in [1 : l(N)]$, по правилам*

$$m_i^N = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x^r(\tau_i), \quad D_i^N = \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (x^r(\tau_i) - m_i^N)(x^r(\tau_i) - m_i^N)',$$

обеспечивают выполнение оценок m_{qi}^N q -подвектора $m_q(t) = \{m_j(t)\}$, $j \in [1 : q]$, и D_{qi}^N ($q \times q$)-подматрицы $D_q(t) = \{d_{jp}(t)\}$, $j, p \in [1 : q]$, таких что

$$\begin{aligned} P\left(\max_{i \in [1 : l(N)]} \left\{ \|m_{qi}^N - m_q(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^q}, \|D_{qi}^N - D_q(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \right\} \leq h(N)\right) = \\ = 1 - g(N), \end{aligned}$$

причем $h(N)$, $g(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и выписываются явно.

Таким образом, задача для исходного СДУ (1) с измерениями его траекторий трансформируется в задачу для системы ОДУ (2), (3) с неточными дискретными измерениями q координат вектора m и q^2 элементов матрицы D .

Потребуем выполнения некоторых дополнительных условий на динамику исходного СДУ. В частности, полагаем, что размерность

неизвестной функции $u_1(\cdot)$ и количество неизвестных компонент функции $u_2(\cdot)$ не превосходят количества измеряемых координат вектора $x(\cdot)$. В этом случае строится вспомогательная управляемая система-модель и конечношаговый ($l(N)$ однотипных шагов) конструктивный алгоритм управления ею по принципу обратной связи. Обозначим выход алгоритма через $(u_1^N(\cdot), u_2^N(\cdot))$, подчеркивая зависимость всех его параметров от числа доступных измерений траекторий уравнения (1). Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *При выполнении некоторых условий согласования параметров алгоритма для его выхода $(u_1^N(\cdot), u_2^N(\cdot))$ имеет место следующая оценка качества аппроксимации:*

$$P(\max\{\|u_1^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}, \|u_2^N(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)} \leq H(N)\} = 1 - G(N), \quad (4)$$

где $H(N), G(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и выписываются явно.

Работа предложенного алгоритма, подбор его параметров и характер сходимости в оценке (4) проиллюстрированы модельным примером.

- [1] *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
- [2] *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
- [3] *Розенберг В.Л.* Восстановление амплитуды случайной помехи в линейном стохастическом уравнении по измерениям части координат // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 3. С. 377–386. DOI: 10.7868/S0044466916030169

Управление стохастическими системами с цветными шумами

Л. Б. Ряшко¹, И. А. Башкирцева¹

e-mail: Lev.Ryashko@urfu.ru, Irina.Bashkirtseva@urfu.ru

В исследованиях динамики реальных систем необходимо учитывать специфику неизбежно присутствующих случайных возмущений. Наряду с традиционно рассматриваемыми белыми шумами, часто возникает необходимость учитывать воздействие так называемых цветных шумов, имеющих те или иные корреляционные характеристики [1]. Важная роль цветных шумов была обнаружена в системах самой разной природы. Данная работа посвящена исследованию задачи управления в системе, возмущаемой цветными шумами.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = f(x, u, r), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор состояния, u — l -мерный вектор управления, $f(x, u, r)$ — достаточно гладкая вектор-функция, $r(t)$ — m -вектор случайных возмущений.

Предполагается, что случайные возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$, $s = (s_1, \dots, s_m)^\top$, имеющие интенсивность ε , формируются коррелированным цветным шумом с параметрами

$$Es_i(t) = 0, \quad Es_i(t)s_i(t') = \sigma_i^2 \exp(-a_i|t - t'|), \quad \tau_i = \frac{1}{a_i}.$$

При этом значения a_i задают времена корреляции τ_i координат этого цветного шума. Тогда дисперсии $Er_i^2(t) = \varepsilon^2 \sigma_i^2$ координат случайного возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$ в системе (1) не зависят от параметров a_i .

Цветные шумы $s(t)$ с указанными выше характеристиками можно смоделировать следующей стохастической системой Ито:

$$ds_i = -a_i s_i dt + \sigma_i \sqrt{2a_i} dw_i, \quad a_i > 0. \quad (2)$$

¹Уральский математический центр, Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Здесь $w_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) — независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $E(w_i(t) - w_i(t')) = 0$, $E(w_i(t) - w_i(t'))^2 = |t - t'|$. Система (2) играет роль генератора цветных шумов, получая их из стандартных винеровских процессов.

Предполагается, что невозмущенная система без управления ($u = 0, r = 0$) имеет равновесие \bar{x} : $f(\bar{x}, 0, 0) = 0$. Целью работы является управление стохастической динамикой системы (1) вблизи этого равновесия под воздействием малых цветных шумов.

Для изучения дисперсии решений $x^\varepsilon(t)$ системы (1) около равновесия \bar{x} при малом цветном шуме будем использовать следующую асимптотику:

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}.$$

Динамика пары $y(t), s(t)$ задается стохастической линейной системой

$$\dot{y} = (F + BK)y + Gs, \quad (3)$$

$$\dot{s} = -As + C\dot{w}, \quad (4)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0, 0), \quad K = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}), \quad G = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0, 0),$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1 \sqrt{2a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m \sqrt{2a_m} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Здесь, не теряя общности, можно считать, что управление формируется линейной обратной связью

$$u(x) = K(x - \bar{x}). \quad (5)$$

В этом регуляторе матрицы K выбираются из множества

$$\mathbb{K} = \{K | \operatorname{Re} \lambda_i(F + BK) < 0\},$$

где $\lambda_i(F + BK)$ — собственные числа матрицы $F + BK$. Предполагается, что множество \mathbb{K} непусто.

При каждом $K \in \mathbb{K}$ матрицы вторых моментов $W = Eyy^\top$, $M = Eys^\top$, $N = Ess^\top$ стационарных решений системы (3), (4) являются единственным решением алгебраической системы

$$\begin{aligned}(F + BK)W + W(F + BK)^\top + GM^\top + MG^\top &= 0, \\ (F + BK)M + GN - MA &= 0, \\ AN + NA &= 2AQ\end{aligned}\tag{6}$$

при

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}.$$

Из этой системы сразу следует, что $N = Q$, поэтому матрицы W и M связаны системой

$$\begin{aligned}(F + BK)W + W(F + BK)^\top + GM^\top + MG^\top &= 0, \\ (F + BK)M + GQ - MA &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Матрица W характеризует стохастическую чувствительность [2] равновесия \bar{x} системы (1) с цветными шумами (2) и регулятором (5). Система (7) задает алгебраическую связь матриц W и K . Варьируя матрицу K регулятора, можем управлять стохастической чувствительностью равновесия. В докладе обсуждаются возможности такого управления в зависимости от параметров системы, приводятся иллюстрационные примеры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00165.

- [1] *Hänggi P., Jung P.* Colored noise in dynamical systems // *Advances in Chemical Physics*. 2007. V. 89. P. 239–326.
DOI: 10.1002/9780470141489.ch4
- [2] *Bashkirtseva I.* Stochastic sensitivity of systems driven by colored noise // *Physica A*. 2018. V. 505. P. 729–736.
DOI: 10.1016/j.physa.2018.03.095

К методу программных итераций

Д. А. Серков¹

e-mail: d.a.serkov@gmail.com

1. Введение

Рассматривается игровая задача удержания движений динамической системы в заданном подмножестве расширенного фазового пространства — частный случай задачи сближения [1]. В методе программных итераций (см., например, [2, гл. IV, V] и библиографический комментарий к ним) известна модернизация, заменяющая оператор программного поглощения конструкцией с постоянными управлениями игроков [2, гл. V, §4]. Это изменение дает существенное упрощение шага итерационной процедуры. Другой способ упрощения шага итерации — переход к итерациям семейства операторов поглощения для отдельных помех. В заметке на примере абстрактной задачи удержания рассматривается случай, когда семейство таких операторов поглощения коммутативно. В этих условиях итерационная процедура существенно упрощается и «укорачивается» по сравнению с общим случаем.

2. Постановка абстрактной задачи удержания в классе квазистратегий

В качестве пространства позиций выберем непустое множество пар $D \triangleq I \times X$, где $I \subset \mathbb{R}$ — аналог временного интервала, а X соответствует фазовому пространству. Если $t \in I$, то $I^t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leq t\}$ и $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geq t\}$. Пусть B^A — множество отображений из A в B ; $\mathcal{P}(T)$ ($\mathcal{P}'(T)$) — семейство всех (всех непустых) подмножеств T . Если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f|C)(x) \triangleq f(x) \forall x \in C$. Когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $(F|C) \triangleq \{(f|C) : f \in F\}$. Множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$ рассматриваем как траектории системы. Пусть $Y \neq \emptyset$ и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$ — множество допустимых помех. Динамику системы описывает отображение $\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C})$. При $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$, $\mathcal{S}((t, x), \omega)$ суть траектории, отвечающие начальной позиции (t, x) и помехе ω .

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Квазистратегии. Для всякой $(t, x) \in D$ обозначим $\mathbb{M}_{(t,x)}$ множество квазистратегий (неупреждающих непустозначных отображений) вида

$$\mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \left\{ \alpha \in \mathcal{P}'(\mathbf{C})^\Omega \mid \forall \omega \in \Omega \left(\alpha(\omega) | \mathbf{I}_t \right) \subset \left(\mathcal{S}((t, x), \omega) | \mathbf{I}_t \right), \right. \\ \left. \forall \omega, \omega' \in \Omega \forall \xi \in \mathbf{I}_t \right. \\ \left. \left((\omega | I^\xi) = (\omega' | I^\xi) \right) \Rightarrow \left((\alpha(\omega) | I^\xi) = (\alpha(\omega') | I^\xi) \right) \right\}. \quad (1)$$

Элементы $\mathbb{M}_{(t,x)}$ рассматриваем в качестве допустимых процедур управления, отвечающих позиции (t, x) .

Задача удержания. Пусть $\mathcal{N} \subset D$ — заданные ограничения. Скажем, что задача удержания в \mathcal{N} разрешима для позиции (t_0, x_0) , если найдется $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t_0, x_0)}$ такая, что $(\tau, s(\tau)) \in \mathcal{N}$ для всех $\tau \in \mathbf{I}_{t_0}$, $s \in \alpha_0(\omega)$ и $\omega \in \Omega$.

3. Оператор программного поглощения и решение задачи удержания

Для $H \in \mathcal{P}(D)$, $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$ обозначим $\Pi(\omega | (t, x), H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}((t, x), \omega) \mid (\xi, s(\xi)) \in H \forall \xi \in \mathbf{I}_t\}$. Обозначим через \mathbf{A}_ω оператор поглощения при помехе $\omega \in \Omega$: $\mathbf{A}_\omega(H) \triangleq \{(t, x) \in H \mid \Pi(\omega | (t, x), H) \neq \emptyset\}$, $H \in \mathcal{P}(D)$. Посредством семейства $\mathfrak{A} \triangleq (\mathbf{A}_\omega)_{\omega \in \Omega}$ введем оператор программного поглощения: для всякого $H \in \mathcal{P}(D)$

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A(H) = \{(t, x) \in H \mid \Pi(\omega | (t, x), H) \neq \emptyset \forall \omega \in \Omega\}.$$

Известно [3, 4], что множество разрешимости в такой задаче удержания при достаточно общих условиях совпадает с наибольшей неподвижной точкой $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ оператора \mathbf{A} . При этом, если позиция (t_0, x_0) из \mathcal{M} , то отображение $\alpha_0(\cdot)$, определенное соотношением $\alpha_0(\omega) \triangleq \Pi(\omega | (t_0, x_0), \mathcal{M})$, $\omega \in \Omega$, удовлетворяет включению $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t_0, x_0)}$ и (по построению) удерживает все движения в \mathcal{N} . Иначе говоря, $\alpha_0(\cdot)$ есть квазистратегия, разрешающая задачу удержания.

Отметим, что в зависимости от свойств рассматриваемой задачи неподвижную точку \mathcal{M} оператора \mathbf{A} можно описать в терминах того или иного «количества» итераций оператора \mathbf{A} или операторов

из семейства \mathfrak{A} над множеством \mathcal{N} . Разумеется, целью этих вариаций в построениях является упрощение получаемой итерационной процедуры. Наиболее благоприятным в этом отношении случаем являются так называемые регулярные задачи [1, 2]: для получения \mathcal{M} достаточно одной итерации \mathbf{A} : $\mathcal{M} = \mathbf{A}(\mathcal{N})$. В приводимой ниже теореме дана итерационная конструкция, описывающая \mathcal{M} в терминах семейства \mathfrak{A} при условии коммутативности последнего. Когда это сравнительно редкое свойство задачи выполняется, мы видим значительное упрощение итерационной процедуры по сравнению с общим случаем.

Пусть β — ординал, $\phi = (A_\iota)_{\iota \prec \beta}$ — β -последовательность операторов из \mathfrak{A} и $\phi_\beta(H)$ — значение (индуктивно определяемой) композиции операторов этой β -последовательности в точке $H \in \mathcal{P}(D)$. Скажем, что такая β -последовательность *сюръективна*, если сюръективно отображение $\{\iota : \iota \prec \beta\} \ni \iota \mapsto A_\iota \in \mathfrak{A}$. Пусть семейство \mathfrak{A} коммутативно: $A(A'(H)) = A'(A(H)) \forall A, A' \in \mathfrak{A} \forall H \in \mathcal{P}(D)$.

Теорема. *Для всякого $H \in \mathcal{P}(D)$ и всякой сюръективной β -последовательности $\psi = (A_\iota)_{\iota \prec \beta}$ операторов из \mathfrak{A} выполнено $\mathbf{A}(\psi_\beta(H)) = \psi_\beta(H)$. В частности, $\psi_\beta(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$.*

Таким образом, для построения основного элемента разрешающей квазистратегии стратегии — множества \mathcal{M} — в итерационной процедуре достаточно «перечислить» в любом порядке операторы семейства \mathfrak{A} , отвечающие множеству допустимых помех Ω .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-01-00573.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
- [3] Серков Д.А., Ченцов А.Г. Реализация метода программных итераций в пакетах пространств // Известия ИМИ УдГУ. 2016. № 2(48). С. 42–67.
- [4] Серков Д.А. Трансфинитные последовательности в методе программных итераций // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 228–240. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-228-240

Адаптивная субоптимальная стабилизация дискретного минимально фазового объекта с неопределенностями по выходу и управлению

В. Ф. Соколов¹

e-mail: sokolov@ipm.komisc.ru, vfsok@yandex.ru

1. Постановка задачи

Пусть объект управления с дискретным временем описывается моделью

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени t , q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$), $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, $b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \dots + b_m\lambda^{m-1}$. Неизвестное суммарное возмущение v в модели (1) удовлетворяет ограничениям

$$|v_t - c_w| \leq \delta_w w_t + \delta_y p_t^y + \delta_u p_t^u, \quad \|w\|_{\ell_\infty} = \sup_{t \geq 0} |w_t| \leq 1. \quad (2)$$

Здесь c_w — смещение внешнего ограниченного возмущения $\delta_w w \in \ell_\infty$ с нормой $\delta_w \geq 0$; $\delta_y \geq 0$ и $\delta_u \geq 0$ — коэффициенты усиления *неопределенностей по выходу и управлению*; нормализованные неопределенности по выходу и управлению определяются формулами

$$p_t^y := \max_{t-\mu \leq k < t} |y_k|, \quad p_t^u := \max_{t-\mu \leq k < t} |u_k|.$$

Конечная память неопределенностей μ выбирается конструктором достаточно большой без ущерба для гарантируемого качества управления. Набор параметров $(c_w, \delta_w, \delta_y, \delta_u)$ внешнего возмущения и неопределенностей предполагается *неизвестным*.

Априорная информация о *неизвестном векторе коэффициентов* $\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^T$ состоит во включении $\xi \in \Xi$, где Ξ — известный многогранник, заданный набором линейных

¹Коми научный центр, Сыктывкар

неравенств. Предполагается, что для любого $\xi \in \Xi$ корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Это предположение о минимально-фазовости объекта (1) гарантирует, что из ограниченности выхода y следует ограниченность управления u .

Нас будет интересовать задача построения обратной связи, минимизирующей с заданной точностью показатель качества

$$J_\mu(\theta) := \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \rightarrow \min,$$

где \sup вычисляется по возмущениям, удовлетворяющим ограничениям (2), и $\theta := (\xi^T, c_w, \delta_w, \delta_y, \delta_u)^T$ — вектор всех неизвестных параметров модели (1).

Для модели с известным вектором коэффициентов ξ регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} \quad (3)$$

гарантирует равенство $y_{t+1} = v_{t+1}$ и, в силу непредсказуемости суммарного возмущения v , является *оптимальным* для показателя качества $J_\mu(\theta)$.

Обозначим через $\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|$ индуцированную норму линейной стационарной системы $G : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ с устойчивой передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$. Известно, что для замкнутой системы (1), (3)

$$J_\mu(\theta) \nearrow J(\theta) := \frac{\delta_w}{1 - \delta_y - \delta_u \| (a(\lambda) - 1)/b(\lambda) \|} \quad (\mu \rightarrow +\infty), \quad (4)$$

где символ \nearrow означает монотонную сходимость снизу [1]. Поскольку точное значение $J_\mu(\theta)$ в теории робастного управления неизвестно, мы будем далее рассматривать *задачу минимизации с заданной точностью показателя качества J* .

Сложность рассматриваемой задачи заключается в требовании почти оптимальности управления в условиях *неидентифицируемости* вектора коэффициентов ξ , который необходимо знать для использования оптимального регулятора (3). Неидентифицируемость ξ является следствием использования модели детерминированных, а не стохастических возмущений. Такие модели возмущений использовались в задачах адаптивной стабилизации в рамках метода рекуррентных целевых неравенств [2] и в задачах оптимального управления с гарантированным результатом на конечном

интервале времени [3]. Для оптимизации управления в [3] и многих других работах Екатеринбургской математической школы использовались множественные оценки состояний управляемых систем, согласованные с данными измерений и априорной информацией. В теории идентификации систем также широко используются, вне контекста задач управления, множественные оценки неизвестных параметров (так называемый set-membership approach). При этом множественные оценки (полиэдральные, эллипсоидальные и др.) всегда являются ограниченными в силу предположений об известных верхних границах возмущений. В рассматриваемой задаче верхние границы внешнего возмущения и неопределенностей предполагаются неизвестными, в результате чего любой вектор ξ согласован с измерениями на любом конечном интервале времени при достаточно большом внешнем возмущении. Ключом к решению задачи является использование показателя качества J в качестве идентификационного критерия.

2. Метод решения задачи

Решение задачи базируется на использовании метода рекуррентных целевых неравенств, полиэдральных оценок неизвестного вектора θ и выборе показателя качества J в качестве идентификационного критерия. Полная информация о векторе θ к моменту t имеет вид

$$\theta \in \Theta_t^{max} := \{ \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_{k+1} - \hat{b}(q^{-1})u_k| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{k+1}^y + \hat{\delta}_u p_{k+1}^u \quad \forall k < t \}, \quad (5)$$

где

$$\Theta_0 := \{ \hat{\theta} \mid \hat{\xi} \in \Xi, 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \hat{\delta}_w \geq 0 \}$$

есть априорное множество допустимых неизвестных параметров. В [4] описан метод построения внешних аппроксимаций Θ_t полиэдров (5), образованных частью линейных неравенств из описании Θ_t^{max} и сходящихся за конечное время благодаря использованию мертвой зоны при обновлении полиэдров Θ_t . Текущие оптимальные оценки вычисляются формуле

$$\theta_t := \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t} J(\hat{\theta}). \quad (6)$$

Задача (6) является вычислительно сложной, и в настоящее время не известны методы ее решения. Если в объекте отсутствует

неопределенность по управлению, т.е. $\delta_u = 0$, то задача (6) становится задачей дробно-линейного программирования, которая стандартным способом сводится к задаче линейного программирования путем добавления дополнительной переменной и может решаться в режиме онлайн при современном программном обеспечении [5].

В данной работе предлагается метод сведения рассматриваемой задачи к задаче для системы без неопределенности по управлению с помощью введения вместо неизвестных параметров δ_y и δ_u нового неизвестного параметра $\delta_y + \|(a(\lambda) - 1)/b(\lambda)\|\delta_u$. При некотором дополнительном техническом предположении доказывается субоптимальность адаптивного управления, основанного на оптимальном оценивании (6). Результаты моделирования предлагаемого адаптивного субоптимального управления иллюстрируют его высокую эффективность и обоснованность используемого дополнительного предположения.

Теория адаптивного оптимального управления при стохастических внешних возмущениях базируется на оценивании с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Однако ее обобщения для систем с неопределенностью, даже стохастической, не построены. Для сравнения в настоящей работе приводятся результаты моделирования, иллюстрирующие возможную неприемлемую динамику адаптивного управления на основе МНК для объектов с неопределенностью.

- [1] *Соколов В.Ф.* Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в ℓ_1 -метрике // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 101–112.
- [2] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981.
- [3] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука. 1977.
- [4] *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в ℓ_1 -постановке // Автоматика и телемеханика. 1998. № 3. С. 107–131.
- [5] *Соколов В.Ф.* Моделирование адаптивной субоптимальной стабилизации дискретного минимально-фазового объекта с неопределенностью в канале выхода // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2019. Т. 37, № 1. С. 9–11.

Слияние потоков воздушных судов с учётом их типизации

А. А. Спиридонов¹, С. С. Кумков¹

e-mail: spiridonov.arseniy@gmail.com, sskumk@gmail.com

1. Введение

В настоящее время движение воздушного транспорта происходит по воздушным трассам, расположенным в выделенных эшелонах (по вертикали) и воздушных коридорах (в плане). Трассы могут расщепляться или соединяться. В точках соединения трасс возникает задача слияния потоков воздушных судов (ВС). Основное требование при слиянии — выдерживание минимального безопасного интервала между судами в слитой очереди. Интервал зависит от типов судов и обуславливается интенсивностью возмущения воздушной среды, создаваемого впередиидущим ВС.

Кроме этого, диспетчеры управления воздушным движением (УВД) могут предъявлять и другие требования к назначаемым моментам прибытия ВС в точку слияния трасс. Дополнительные требования могут включать: минимизацию отклонения назначенных моментов от номинальных (что обуславливается минимизацией расхода топлива на маневры ВС); уменьшение количества судов, изменяющих свои моменты прибытия (что уменьшает количество взаимодействий диспетчеров и пилотов); уменьшение изменения позиций судов в слитой очереди по сравнению с их исходным порядком (что ведёт к уменьшению возможных наведённых конфликтов между ВС) и др.

В целом, задача слияния потоков судов рассматривается как дискретно-непрерывная. Дискретная часть состоит в поиске порядка судов в слитой очереди, оптимального с точки зрения того или иного критерия. Непрерывная часть заключается в поиске оптимальных моментов прибытия отдельных ВС при их порядке, зафиксированном после решения дискретной части задачи. Понятие «оптимальность» подразумевает тот или иной скалярный критерий, который чаще всего выбирается в виде суммы штрафов по всем ВС. Эти штрафы, в свою очередь, отражают конкретные тре-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

бования к слитой очереди. Критерий может быть как детерминированным, так и стохастическим. Иногда рассматриваются задачи с векторным критерием.

Понятно, что дискретная часть задачи не может решаться при помощи полного перебора на не слишком маленьких ансамблях судов. Поэтому применяются те или иные эвристические подходы, сокращающие перебор (см., например, [4, 7] и ссылки в них), те или иные версии метода ветвей и границ, детерминированные или стохастические [3, 11]. Также используются разные варианты метода динамического программирования [1, 10].

В свою очередь, выбор оптимальных моментов прибытия ВС в точку слияния требует того или иного метода многомерной оптимизации. Здесь применяется широкий спектр процедур: дискретные и непрерывные процедуры теории расписаний (см., например, [6]), смешанно-целочисленное линейное программирование [9], генетические алгоритмы [5, 8] и т. д. Хороший обзор работ по задаче регулирования воздушного движения приведён в [2].

2. Постановка задачи

Пусть в исследуемой точке слияния трасс сходится некоторое количество потоков ВС. Предположим, что в пределах выбранного горизонта событий в точку прибывает N судов, номинальные моменты прибытия которых образуют набор $\mathbf{t}^{\text{nom}} = \{t_i^{\text{nom}}\}_{i=1}^N$. Считаем, что это набор упорядочен по возрастанию; возможны совпадения номинальных моментов прибытия двух или более судов.

Целью является получение нового набора $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1}^N$ моментов прибытия ВС. Новый набор уже, вообще говоря, не является отсортированным, поскольку суда из разных потоков достаточно легко могут менять взаимный порядок прибытия.

Набор \mathbf{t} должен удовлетворять следующим условиям. Во-первых, для каждого $t_i \in \mathbf{t}$ верно, что $t_i \in [t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}]$. Здесь величины t_i^{acc} и t_i^{dec} показывают, насколько i -е судно может ускориться или замедлиться при движении по своему маршруту. Изменение момента прибытия может обеспечиваться как изменением скорости движения ВС, так и изменением траектории его движения: для ускорения — на так называемых «участках спрямления», для замедления — на схемах задержки.

Кроме того, новый набор должен удовлетворять требованиям безопасности: для всех пар индексов $1 \leq i, j \leq N$, $t_i < t_j$, должно

быть выполнено неравенство $t_j - t_i \geq \tau_{i,j}^{\text{safe}}$. Здесь $\tau_{i,j}^{\text{safe}}$ — величина минимального промежутка времени, обеспечивающего безопасный проход j -го судна после i -го с учётом их типов.

При этом должен минимизироваться некоторый критерий $F(\mathbf{t}, \mathbf{t}^{\text{ном}})$ оптимальности набора \mathbf{t} , который описывает требования диспетчеров УВД.

3. Полученные результаты

Авторами предложены различные функции штрафа на момент прибытия ВС в точку слияния трасс. Рассматривались кусочно-линейные и нелинейные функции — как выпуклые, так и невыпуклые. Исследовалась применимость различных методов оптимизации к поиску минимума получаемого функционала качества слитой очереди и эффективность их работы на различных наборах данных (как модельных, так и реальных).

Основной вывод состоит в том, что работа с нелинейными функциями штрафа является весьма непродуктивной, поскольку получаемый минимизируемый критерий (после перехода к задаче безусловной минимизации) обладает большим количеством узких «оврагов», в которых «вязнут» процедуры, давая ответы далёкие от оптимального.

При работе с выпуклыми кусочно-линейными функциями штрафа получаемая задача успешно сводится к задаче линейного программирования и решается симплекс-методом. Однако при этом требуется фиксация порядка прибытия ВС в точку слияния трасс. Поэтому требуется дополнительная процедура частичного перебора порядков ВС, отражающая конкретные запросы диспетчеров УВД.

- [1] *Bayen A., Callantine T., Tomlin C., Ye Y., Zhang J.* Optimal arrival traffic spacing via dynamic programming / AIAA Conference on Guidance, Navigation and Control, Providence, Rhode Island, August 16–19, 2004. AIAA. 2004. Paper AIAA-2004-5228. DOI: 10.2514/6.2004-5228
- [2] *Bennell J.A., Mesgarpour M., Potts C.N.* Airport runway scheduling // 4OR – Q. J. Oper. Res. 2011. V. 9, no. 2. P. 115–138. DOI: 10.1007/s10288-011-0172-x
- [3] *Bianco L., Rinaldi G., Sassano A.* A combinatorial optimization approach to aircraft sequencing problem / Flow Control of Congested Networks, NATO ASI Series (Series F: Computer and

- Systems Sciences), V. 38, A.R. Odoni, L. Bianco, G. Szegö (eds.), Berlin, Heidelberg: Springer. 1987. P. 323–339.
DOI: 10.1007/978-3-642-86726-2_20
- [4] *Boursier L., Favennec B., Hoffman E., Trzmiel A., Vergne F., Zeghal K.* Merging arrival flows without heading instructions / Proceedings of the 7th USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar. Barcelona, Spain, July 2007. 2007. 8 pages.
- [5] *Ciesielski V., Scerri P.* Real time genetic scheduling of aircraft landing times / Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC98). New York: IEEE. 1998. P. 360–364. DOI: 10.1109/ICEC.1998.699759
- [6] *Li Q., Zhang Y., Su R.* A flow-based flight scheduler for en-route air traffic management / Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems, May 18–20, 2016, Istanbul, Turkey. IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. P. 353–358. DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.07.059
- [7] *Liang M., Delahaye D., Maréchal P.* Integrated sequencing and merging aircraft to parallel runways with automated conflict resolution and advanced avionics capabilities / Transportation Research, *Part C: Emerging Technologies*. Elsevier. 2017. V. 85. P. 268–291. DOI: 10.1016/j.trc.2017.09.012
- [8] *Murata A., Delahaye D., Takadama K.* Merging flows and optimizing aircraft scheduling in terminal maneuvering area based on GA / Proceedings of the 8th International Conference for Research in Air Transportation (ICRAT 2018), June 2018, Barcelone, Spain. 2018. 4 pages.
- [9] *Murça M.C.R., Müller C.* Control-based optimization approach for aircraft scheduling in a terminal area with alternative arrival routes // Transportation Research, *Part E: Logistics and Transportation Review*. Elsevier. 2015. V. 73, P. 96–113.
DOI: 10.1016/j.tre.2014.11.004
- [10] *Simão H.P., Day J., George A.P., Gifford T., Nienow J., Powell W.B.* An approximate dynamic programming algorithm for large-scale fleet management: A case application // Transportation Science. 2009. V. 43, no. 2. P. 178–197.
DOI: 10.1287/trsc.1080.0238

- [11] *Sölveling G., Clarke J.P.* Scheduling of airport runway operations using stochastic branch and bound methods // *Transportation Research, Part C: Emerging Technologies*. Elsevier. 2014. V. 45. P. 119–137. DOI: 10.1016/j.trc.2014.02.021

Метод обращения главной части начально-краевых задач в теории оптимального управления распределенными системами

В. И. Сумин^{1,2}

e-mail: v_sumin@mail.ru

Ранее автором предложена (см., например, [1]) достаточно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(\theta) = f(\theta, A[z](\theta), v(\theta)), \quad \theta \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m, \quad (1)$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^N$ и $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе \mathbf{T} подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in \mathbf{T}$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$ (это прямое многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра); $p, q, k \in [1, +\infty]$.

К ВФУ (1) обращением главной части приводятся самые разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др., см., например, [2], обзоры в [3, 4]); обычно управление $v(\cdot)$ в (1) так или иначе соответствует распределенному и/или начальному управлению в УНКЗ, а, например, наличие управляемых старших коэффициентов или управляемых запаздываний в основном уравнении УНКЗ означает, что управляем и оператор A .

¹Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

²Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации (получение условий сохранения глобальной разрешимости УНКЗ при возмущении управлений; обоснование численных методов оптимального управления; вывод *необходимых условий оптимальности* (НУО) и, в частности, «сингулярных систем оптимальности» в смысле Ж.-Л. Лионса [5]; вырождение НУО, изучение соответствующих «особых управлений»; расширение оптимизационных задач и др., см., например, [2], обзоры в [3, 4]). Как эквиваленты УНКЗ в теории оптимизации бывают удобны и другие ВФУ, отметим здесь результаты А. В. Чернова (см., например, обзор [3]).

Доклад посвящен обзору результатов теории оптимизации распределенных систем, полученных методом обращения главной части УНКЗ. Проиллюстрируем метод на примере УНКЗ для полупараболического уравнения.

Пусть заданы $n, r \in \mathbf{N}$, $T > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($\partial\Omega \in C_2$), элементы которой обозначаем $x = \{x^1, \dots, x^n\}$. На цилиндре $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S_T \equiv \partial\Omega \times (0, T)$ рассмотрим УНКЗ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &\equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t) y'_{x^j})'_{x^i} = \\ &= g(x,t, y(x,t), y'_x(x,t), u(x,t)), \quad \{x,t\} \in Q_T; \end{aligned} \quad (2)$$

$$y(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad y(x,t) = 0, \quad \{x,t\} \in S_T, \quad (3)$$

где $a_{ij}(x,t) : Q_T \rightarrow \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$), $g(\{x,t\}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) : Q_T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ заданы, а $u(x,t) : Q_T \rightarrow \mathbf{R}^r$ — управление. Предположения: g , g'_y и g'_q измеримы по $\{x,t\}$, непрерывны по $\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{u}$, ограничены на любом ограниченном множестве; a_{ij} и $(a_{ij})'_{x^i}$, $1 \leq i, j \leq n$, принадлежат классу $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q_T})$ (используем обозначения функциональных пространств [6, гл. 1, § 1]); выполняется условие равномерной параболичности (см. [6, С. 20]); допустимы $u(\cdot)$ из некоторого ограниченного множества $\mathbf{D} \subset L^\infty(Q_T)$.

Чтобы ввести понятие решения УНКЗ (2),(3) и привести (2),(3) к ВФУ вида (1) обращением главной части, рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\mathcal{L}[y](x,t) = z(x,t), \quad \{x,t\} \in Q_T, \quad (4)$$

где $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$. Для любых $y(\cdot) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, $\eta(\cdot) \in W_2^{1,1}(Q_T)$, $\xi \in [0, T]$, $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$ обозначаем через $J[y, \eta, z, \xi]$ выражение

$$\int_0^\xi dt \int_\Omega \left\{ -y\eta'_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y'_{x_j}\eta'_{x_i} - \eta z \right\} dx + \int_\Omega y(x, \xi)\eta(x, \xi)dx.$$

Следуя [6, гл. 3, § 1], функцию $y(\cdot) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ назовем решением задачи (3),(4), если она при почти всех (п.в.) $\xi \in [0, T]$ удовлетворяет тождеству: $J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] = 0$, $\eta \in W_2^{1,1}(Q_T)$. Такое решение существует и единственно [6, гл. 3, теоремы 2.1, 4.2, 8.1].

Воспользуемся функцией Грина задачи (3),(4) [6, гл. IV, § 16]. Пусть Q_{τ_1, τ_2} — цилиндр $\Omega \times (\tau_1, \tau_2)$, $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$, а S_{τ_1, τ_2} — его боковая поверхность. Функция $G(x, t; \zeta, \tau) \equiv G(\{x, t\}; \{\zeta, \tau\}) : Q_T \times Q_T \rightarrow \mathbf{R}$ — функция Грина задачи (3),(4), если, какова бы ни была точка $\{\zeta, \tau\} \in Q_T$, имеем: $G(x, t; \zeta, \tau) = 0$, $\{x, t\} \in Q_{0, \tau}$; функция $G(\cdot; \zeta, \tau) : Q_{\tau, T} \rightarrow \mathbf{R}$ — решение начально-краевой задачи: $G'_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t)G'_{x_j})'_{x_i} = \delta(x - \zeta)\delta(t - \tau)$, $\{x, t\} \in Q_{\tau, T}$; $G(x, \tau; \zeta, \tau) = 0$, $x \in \Omega$; $G(x, t; \zeta, \tau) = 0$, $\{x, t\} \in S_{\tau, T}$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, и решение понимается в смысле теории обобщенных функций. Функция $G(x, t; \zeta, \tau)$ имеет первые производные по переменным x [6, гл. 4, § 16]. Из [6, гл. 4, теорема 16.3] следует, что при каждой функции $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$ выражения $\mathcal{A}_0[z](x, t) \equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega G(x, t; \zeta, \tau)z(\zeta, \tau) d\zeta$, $\mathcal{A}_1[z](x, t) \equiv \int_0^t d\tau \int_\Omega (G'_x(x, t; \zeta, \tau))z(\zeta, \tau) d\zeta$, $\{x, t\} \in Q_T$, ограничены на Q_T . Решение $y(\cdot)$ задачи (3),(4) представимо в виде

$$y(x, t) = \mathcal{A}_0[z](x, t), \quad \{x, t\} \in Q_T, \quad (5)$$

при этом $y'_x(x, t) = \mathcal{A}_1[z](x, t)$, $\{x, t\} \in Q_T$. Пусть W — класс тех функций из $V_2^{1,0}(Q_T)$, каждая из которых является при некотором $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$ решением задачи (3),(4). Каждая функция класса W ограничена на Q_T вместе со своей производной по x .

Функцию $y(\cdot) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ назовем решением УНКЗ (2),(3), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathbf{D}$, если $y(\cdot)$ и $y'_x(\cdot)$ ограничены на Q_T и для п.в. $\xi \in [0, T]$ выполняется тождество:

$J[y(\cdot), \eta(\cdot), g(\cdot, y(\cdot), y'_x(\cdot), u(\cdot)), \xi] = 0, \quad \eta \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Так как формула (5) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом W функций $y(\cdot)$ и пространством $L_\infty(Q_T)$ функций $z(\cdot)$, то при каждом $u(\cdot) \in \mathbf{D}$ УНКЗ (2),(3) эквивалентна уравнению

$$z(x, t) = g(x, t, \mathcal{A}_0[z](x, t), \mathcal{A}_1[z](x, t), u(x, t)), \quad \{x, t\} \in Q_T, \quad (6)$$

относительно $z(\cdot) \in L_\infty(Q_T)$. Уравнение (6) это ВФУ вида (1), в котором $\Pi = Q_T$, $N = n + 1$, $m = 1$, $l = n + 1$, $v(\cdot) = u(\cdot)$, $p = q = k = \infty$, оператор $A[z] \equiv \{\mathcal{A}_0[z], \mathcal{A}_1[z]\}$, $z \in L_\infty(Q_T)$, вольтерров на системе цилиндров $\mathbf{T} = \{Q_{0,\tau}, \tau \in (0, T]\}$. Каждому $u(\cdot) \in \mathbf{D}$ не может отвечать более одного в $L_\infty(Q_T)$ решения ВФУ (6), а потому не может отвечать и более одного решения УНКЗ (2),(3).

Свойства ВФУ (6) позволяют доказать, например, следующую теорему об устойчивости (при возмущении управления) существования глобальных решений УНКЗ (2),(3) (результат получен автором совместно с М. С. Коржавиной). Пусть \mathcal{R} — класс тех $u(\cdot) \in \mathbf{D}$, каждому из которых отвечает единственное глобальное решение y_u УНКЗ (2),(3). Для $y(\cdot) \in W$, $u(\cdot), u_0(\cdot) \in \mathbf{D}$ положим $\mathbf{r}(y, u, u_0) \equiv \underset{\{x,t\} \in Q_T}{\text{vraisup}} \{|\mathcal{A}_0[\Delta g(\{\cdot\}, y, u, u_0)](x, t)| + |\mathcal{A}_1[\Delta g(\{\cdot\}, y, u, u_0)](x, t)|\}$, $\Delta g(\{\cdot\}, y, u, u_0) \equiv g(\{\cdot\}, y(\cdot), y'_x(\cdot), u(\cdot)) - g(\{\cdot\}, y(\cdot), y'_x(\cdot), u_0(\cdot))$.

Теорема 1. Для любого $u_0(\cdot) \in \mathcal{R}$ существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что, если $\mathbf{r}(y_{u_0}, u, u_0) < \delta$ для некоторого $u(\cdot) \in \mathbf{D}$, то $u(\cdot) \in \mathcal{R}$ и $\|y_u - y_{u_0}\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leq C \mathbf{r}(y_{u_0}, u, u_0)$.

Аналогичное утверждение верно и при ненулевом начальном условии $u(x, 0) = w(x)$, $x \in \Omega$, если $w(\cdot) \in L_2(\Omega)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00199_а.

- [1] Сумин В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Доклады АН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.
- [2] Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
- [3] Sumin V. Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 759–764. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.454

- [4] *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 262–278. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
- [5] *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
- [6] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Регуляризация классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимизации распределенных систем

М. И. Сумин^{1,2}

e-mail: m.sumin@mail.ru

Введение. Многие задачи оптимального управления, в том числе и распределенными системами, естественным образом могут быть записаны в форме соответствующих эквивалентных задач условной оптимизации с ограничениями, задаваемыми, в зависимости от конкретной задачи, операторами как с конечномерными, так и с бесконечномерными образами. Это относится и к обратным задачам современного естествознания, которые часто разумно трактовать как задачи оптимального управления. Вместе с тем, следует признать, что применение главного теоретического результата всей теории условной оптимизации — принципа Лагранжа (ПЛ) для непосредственного практического решения задач этого класса и, в частности, задач оптимального управления и многих сводящихся к ним задач, встречается с трудностями принципиального характера, обусловленными неразрывно связанными с ПЛ свойствами некорректности. Таким образом, ПЛ, с одной стороны, обязанный своим появлением более двухсот лет назад потребностям решения

¹Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

практических экстремальных задач (подробности см. в [1, гл. 1]), с другой стороны, оказывается “малозффективным” при практическом решении “тех же” экстремальных задач, но на современном этапе развития науки. Здесь, говоря о некорректности ПЛ, подразумеваем его неустойчивость и невыполнимость. Мы говорим о неустойчивости ПЛ в задаче условной оптимизации, если выделяемые им в задачах, “сколь угодно близких” к исходной (невозмущенной) задаче, “приближенные” оптимальные элементы могут сколь угодно сильно отличаться от своего невозмущенного аналога как по аргументу, так и по функции [2–4]. В свою очередь, невыполнимость ПЛ, в той или иной конкретной задаче на условный экстремум, понимается как принципиальная невозможность записать его для этой конкретной задачи в той “привычной” форме, в которой он записывается в “большинстве” других аналогичных задач этого класса (см. [1, с. 260], а также [2–4]).

В работе обсуждается как ситуация с применимостью ПЛ для непосредственного практического решения задач условной выпуклой оптимизации, выпуклого оптимального управления и многих сводящихся к ним задач принципиально изменяется, если вместо “привычного” ПЛ при их решении опираться на его различные регуляризованные варианты [2–4]. Для иллюстрации мы рассматриваем выпуклую задачу граничного оптимального управления для линейного параболического уравнения. Ее постановка максимально упрощена в целях компактности изложения.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального граничного управления с операторным ограничением–равенством в $L_2(\Omega)$

$$(P) \quad f(w) \equiv \int_{\Omega} A(x)(z[w](x, T))^2 dx \rightarrow \inf, \quad g(w) = 0 \in L_2(\Omega), \quad w \in \mathcal{D},$$

где $g(w) \equiv G_1(\cdot)z[w](\cdot, T) + G_2(\cdot) \in L_2(\Omega)$, $z[w] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L_{\infty}(Q_T)$ есть решение [5] третьей начально–краевой задачи для линейного параболического уравнения

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x, t)z_{x_j}) + a(x, t)z = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x, t)z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T,$$

$\mathcal{D} \subseteq L_2(S_T)$ — выпуклое замкнутое множество, Ω — ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей S , $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $S_T \equiv \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$. Здесь: $A \in L_\infty(\Omega)$, $G_1, G_2 \in L_\infty(\Omega)$, $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, $a \in L_\infty(Q_T)$, $\sigma \in L_\infty(S_T)$, коэффициенты $a_{i,j}$ подчиняются обычному условию [5, гл. III] равномерной параболичности. Подразумевается, что все функции из набора исходных данных $\{A, G_1, G_2, a_{i,j}, i, j = 1, \dots, n, a, \sigma\}$ задаются с определенной погрешностью и известны оценки отклонения возмущенных данных от точных в соответствующих метриках. Введем обозначение $\mathcal{D}^\epsilon \equiv \{w \in \mathcal{D} : \|g(w)\|_{2,\Omega} \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$, и определим обобщенное (β) и классическое (β_0) значения задачи (P): $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf_{w \in \mathcal{D}^\epsilon} f(w)$, $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^\epsilon = \emptyset$, $\beta_0 \equiv \inf_{w \in \mathcal{D}^0} f(w)$. Ниже центральным понятием будет понятие обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП). Под ОМП в задаче (P) понимается последовательность $w^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, если $f^0(w^k) \rightarrow \beta$, $w^k \in \mathcal{D}^{\epsilon^k}$, $\epsilon^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Очевидно, в общей ситуации $\beta \leq \beta_0$. В математическом программировании применяемые в работе ОМП известны под названием обобщенных планов [6]. В оптимальном управлении они получили название минимизирующих приближенных решений [7, гл. III]. Широко используемое в оптимизации понятие ОМП органично учитывает запросы как строгой математической оптимизационной теории [6], [7, гл. IV–VIII], так и инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и по выполнению ограничений задачи, и по приближению значений функционала цели к его нижней грани [7, гл. III].

Краткая характеристика результатов. В работе показывается как подход к регуляризации ПЛ в задачах выпуклого программирования [2–4] при общих условиях на исходные данные задачи (P) порождает в ней соответствующую регуляризацию ПЛ, а, как следствие, и регуляризацию Принципа максимума Понтрягина (ПМП). По традиции теории некорректных задач [8, 9] регуляризация классических условий оптимальности (КУО) в работе согласована с соответствующим ей понятием регуляризирующего оператора (алгоритма). Это понятие для задачи условной оптимизации (P), а также производное от него понятие ОМП-образующего оператора, введенные ранее в [10], существенно “привязаны” именно к понятию ОМП. Они “встраиваются” в формулировки регуляри-

зованных КУО, трансформируя классические аналоги в регуляризующие алгоритмы — универсальные инструменты устойчивого построения ОМП в задаче (P) . Их отличительной особенностью является то, что генерируемые в соответствии с ними приближенные решения задачи “аппроксимируют” ее точное решение одновременно как по функции, так и “по ограничениям”, но без обязательного требования приближения по аргументу. Такой подход к регуляризации в задачах, подобных задаче (P) , требует минимальных дополнительных предположений об их исходных данных и позволяет позиционировать его как промежуточный между “привычными” понятиями регуляризации (сходимости) по функции и по аргументу [9, гл. 9]. Регуляризация КУО в задаче (P) проводится в случае, когда ее целевой функционал не является, вообще говоря, сильно выпуклым, а на множество допустимых элементов \mathcal{D} не накладывается условие ограниченности. Одновременно предполагается, что в задаче (P) априори имеет место равенство $\beta = \beta_0$. В этой ситуации вместо привычного одного используются два параметра регуляризации и два соответствующих условия согласования одновременно. Один из этих параметров, как и в [2–4], “отвечает” за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклой регуляризующей добавке к функционалу цели исходной задачи. Ранее подобный подход к регуляризации КУО в выпуклой задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с применением двух параметров регуляризации был предложен в [10], однако, в [10] предполагалась ограниченность множества \mathcal{D} .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 19-07-00782_а, № 20-01-00199_а, № 20-52-00030 Бел_а.

- [1] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [2] *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна – Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
- [3] *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Том 54, № 1. С. 25–49.

- [4] *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 1. С. 279–296.
- [5] *Ладьяженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [6] *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
- [7] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
- [8] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
- [9] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011.
- [10] *Сумин М.И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Том. 26, № 2. С. 252–269.

О приближенном вычислении дробной производной типа Капуто по неточным данным, поступающим непрерывно

*П. Г. Сурков*¹

e-mail: spg@imm.uran.ru

1. Введение. Постановка задачи

Задача нахождения производной функции является одной из старейших “классических” задач математического анализа. Существует большое количество разнообразных подходов к решению

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

этой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Одна из ранних постановок задачи была сделана с позиций теории приближений, как приближение неограниченного линейного оператора — задача Стечкина [1], в том числе рассматривался оператор численного дифференцирования. Развитие указанного подхода отражено в обзорной статье [2]. Такой подход оказался тесно связан с решением некорректной задачи оптимального равномерного восстановления значений оператора по данным с погрешностью [3]. Различные варианты применения методов теории некорректных задач для задачи нахождения производной функции базируются на работах [4, 5].

Суть рассматриваемой нами задачи заключается в следующем. Пусть известно, что функция $x(\cdot)$ со значениями $x(t) \in \mathbb{R}^n$ определена на конечном отрезке $T = [\sigma, \theta]$, но ее значения заранее не заданы, кроме $x(\sigma) = x_\sigma$. Измерения этих значений поступают непрерывно с течением времени с некоторой погрешностью $h \in (0, 1)$, то есть имеются векторы $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие неравенству

$$\|x(t) - \xi^h(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq h, \quad t \in T.$$

Требуется построить некоторое приближение $[D_*^\gamma x](\cdot)$, где для функции $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ и произвольного действительного $\gamma \in (0, 1)$ выражение

$$[D_*^\gamma x](t) = \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}(x - x(\sigma))](t), \quad t \in T,$$

задает дробную производную Капуто [6]. Здесь интеграл дробного порядка $\gamma \in (0, 1)$ с началом в точке σ от произвольной функции $f \in L_1(T, \mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$[I^\gamma f](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{\sigma}^t (t-s)^{\gamma-1} f(s) ds, \quad t \in T,$$

и $\Gamma(\cdot)$ обозначает Гамма-функцию Эйлера.

Ввиду наличия погрешности, нахождение точного значения производной невозможно, поэтому обсуждаемую задачу можно отнести к классу некорректных. Впервые развиваемый в работе подход был предложен в [7] и получил свое распространение в [8, 9], в том

числе на системы с запаздыванием, с распределенными параметрами и стохастические системы. В его основу было положено сочетание методов теории гарантированного управления [10] и методов теории некорректных задач, в частности, классический метод регуляризации А. Н. Тихонова со сглаживающим функционалом. Будем придерживаться методики исследования подобных задач, предложенной в [11] и успешно примененной для приближенного вычисления производной [12], а также для восстановления управляющего воздействия, без априорного ограничения на него, при непрерывном измерении части координат [13].

2. Алгоритм решения

Введем фиктивное управление $u(t) := [D_*^\gamma x](t)$. Тогда получаем систему

$$[D_*^\gamma x](t) = u(t)$$

с начальным условием $x(\sigma) = x_\sigma$. Назовем эту систему *реальной*. Применяя метод позиционного управления с моделью, введем вспомогательную систему (*модель*) вида

$$[D_*^\gamma y](t) = v^h(t), \quad y(\sigma) = x_\sigma.$$

Зафиксируем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, такую что для $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in (0, 1)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \frac{h^{\beta_1}}{\alpha^2} \rightarrow 0, \quad \frac{h^{2-\beta_2}}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \frac{h^{\beta_1+\beta_2}}{\alpha^3} \rightarrow 0, \\ \frac{h^{2+\beta_2}}{\alpha^3} \rightarrow 0, \quad h^{\beta_1-\beta_3} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1)$$

и будем строить управление v^h в модели по правилу

$$v^h(t) = -\alpha^{-1}(y(t) - \xi^h(t)), \quad t \in T.$$

Для реальной системы и модели можно доказать следующие две леммы.

Лемма 4. Пусть $u(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (1). Тогда можно указать в явном виде постоянные $a_i > 0$, $b_i > 0$, не зависящие от h и α такие, что справедливы неравенства

$$\|y(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq a_1 h^{\beta_1} + a_2 \alpha, \quad t \in T;$$

$$[I^\gamma \|v^h\|_{\mathbb{R}^n}^2](t) \leq [I^\gamma \|u\|_{\mathbb{R}^n}^2](t) + \rho(h), \quad t \in T,$$

где

$$\rho(h) = \alpha^{-1}(b_1 h + b_2 h^{2-\beta_2} + b_3 h^{2+\beta_2} \alpha^{-2} + b_4 h^{\beta_1+\beta_2} \alpha^{-2} + b_5 h^{\beta_1} \alpha^{-1}).$$

Лемма 5. Пусть $u(\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (1). Тогда можно указать в явном виде постоянные $d_i > 0$, не зависящие от h и α такие, что справедливо неравенство

$$\|u(\cdot) - v^h(\cdot)\|_{L_2(T, \mathbb{R}^n)}^2 \leq d_1 h^{\beta_3} + d_2 h^{\beta_1 - \beta_3} + d_3 \alpha + d_4 \rho(h).$$

Из лемм 1 и 2 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема. Пусть $[D_*^\gamma x](\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (1). Тогда имеет место сходимость

$$v^h(\cdot) \rightarrow [D_*^\gamma x](\cdot) \quad \text{в } L_2(T, \mathbb{R}^n) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

- [1] Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.
- [2] Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124. DOI: 10.4213/rm1019
- [3] Васин В.В. Об устойчивом вычислении производной в пространстве $C(-\infty, \infty)$ // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1973. Т. 13, № 6. С. 1383–1389. DOI: 10.1016/0041-5553(73)90002-5
- [4] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
- [5] Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems: Theory and Application. Berlin: De Gruyter, 2011.
- [6] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. New York: Elsevier Science. 2006.
- [7] Кряжмский А.В., Осипов Ю.С. О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 192–199. DOI: 10.1007/BF01156754

- [8] *Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995.
- [9] *Максимов В.М., Пандолфи Л.* О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 4. С. 385–390.
- [10] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [11] *Осипов Ю.С., Кряжжиский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
- [12] *Максимов В.И.* О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243. DOI: 10.1134/S0371968515040172
- [13] *Максимов В.И.* Уравнения непрерывного оценивания возмущенных динамических систем // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, № 5. С. 771–780.

Управление спросом на транспортные услуги как игровая задача со случайным вторым игроком

*Г. А. Тимофеева*¹, *Д. С. Завалицин*^{1,2}
e-mail: GTimofeeva@usurt.ru, zav@imm.uran.ru

Рассматривается задача о формировании ценовой политики при назначении цены перевозки (пассажиров, грузов) для случая, когда у пассажира есть выбор между несколькими конкурирующими маршрутами (видами транспорта). Выбор оптимального маршрута

¹Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

пассажирами рассматривается в рамках предложенного ранее авторами бикритериального подхода. Моделирование выбора отдельного (случайно выбранного) пассажира осуществляется как вероятностное решение задачи со случайной целевой функцией, которая является линейной сверткой критериев, а весовые коэффициенты носят случайный характер и зависят от пассажира [1, 2].

Обозначим через $f_j(x)$, $j = \overline{1, k}$, критерии оценки маршрута пассажиром (время перемещения, цена перевозки, комфорт, вероятность отклонения от расписания и т.п.), в качестве целевой функции для пассажира будем рассматривать линейную свертку нормализованных критериев $\tilde{f}_j(x)$,

$$F(\xi, x) = \sum_{j=1}^k \xi_j \tilde{f}_j(x), \quad (1)$$

где случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ отражает предпочтения случайно выбранного пассажира. Таким образом, выбор пассажира $X(\xi)$ является вероятностным решением задачи стохастической оптимизации (1). Определение и некоторые свойства вероятностных решений изучались в [3].

Следует отметить, что распределение вектора ξ , вообще говоря, неизвестно и его можно оценить на основе наблюдения за распределением предпочтений пассажиров, то есть по распределению случайного вектора (или случайного множества) $X(\xi)$ [4].

В докладе рассматривается задача о назначении цены как игровая задача со случайным вторым игроком (случайно выбранным пассажиром). Решение первого игрока состоит в выборе цены (например, c_1) на один из конкурирующих маршрутов, цены остальных маршрутов остаются неизменными и не зависят от решений игроков. Выбор отдельного (случайно выбранного) пассажира в такой постановке является случайным вектором (множеством), зависящим от решения первого игрока $X(\xi, c_1)$. Целевая функция первого игрока $g(c_1)$ описывает прибыль от обслуживания пассажиров на заданном (например, первом) маршруте и зависит от среднего ожидаемого значения вероятностного решения

$$g(E(X(\xi, c_1))) \rightarrow \max. \quad (2)$$

Изучаются свойства задачи, рассмотрен модельный пример.

Работа выполнена при поддержке средств федерального бюджета в рамках проекта «Оптимизация структуры транспортных сетей и транспортных услуг с учетом анализа пространственной структуры сети и прогнозирования спроса на основе стохастической модели предпочтения потребителей».

- [1] *Timofeeva G., Martynenko A., Zavalishchin D.* Probabilistic modeling of passengers and carriers preferences via bicriterial approach // 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018), IFAC-PapersOnLine, 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 496–498. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.469
- [2] *Zavalishchin D.S., Timofeeva G.A.* Multicriterial Optimization of Transportation Based on Customers Probabilistic Preferences // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2186, iss. 1. P. 050002.1–050002.4. DOI: 10.1063/1.5137935
- [3] *Тимофеева Г.А.* Вероятностные решения задач условной оптимизации // Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 198–211.
- [4] *Timofeeva G.A.* Investigation of mathematical model of passenger preferences / AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172, iss. 1. P. 080001.1–080001.7.

Максимальная монотонность оператора Немыцкого и неявные эволюционные включения

*А. А. Толстоногов*¹
e-mail: aatol@icc.ru

Исходя из зависящего от времени максимально монотонного оператора, возможно многозначного, со значениями в гильбертовом пространстве на пространстве суммируемых с квадратом функций, рассматривается оператор суперпозиции — оператор Немыцкого. При достаточно общих предположениях доказывается, что этот

¹Институт динамики систем и теории управления им. В.М.Матросова СО РАН, Иркутск

оператор является максимально монотонным. Этот результат является основополагающим при изучении эволюционного включения с зависящим от времени максимально монотонным оператором и многозначными возмущениями. Включение является неявным в том смысле, что скорости входят в максимально монотонный оператор: значения максимально монотонного оператора зависят не от состояния, а от функции, переменными у которой являются скорость и состояние.

Рассматриваются два класса возмущений: возмущение, значениями которого являются замкнутые, невыпуклые множества и новый класс многозначных возмущений с наследственностью (history-dependent). Доказаны теоремы существования решения. Когда возмущения являются однозначными, то при естественных предположениях решения являются единственными.

Выведены обыкновенные явные дифференциальные включения, множества решений которых совпадают с множествами решений исходных неявных эволюционных включений с тем или иным видом возмущения. Как следствие получены теоремы существования решений неявных выпуклых процессов выметания с многозначными возмущениями.

Для неявных эволюционных включений с максимально монотонными операторами результаты являются новыми и не имеют аналогов. Для неявных процессов выметания с однозначными возмущениями полученные результаты обобщают большинство известных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00026а.

Алгоритм построения кусочно-квадратичных оценок функции цены в задаче разрешимости для нелинейной системы

П. А. Точилин¹, И. А. Чистяков¹

e-mail: tochilin@cs.msu.ru, chistyakov.ivan@yahoo.com

Работа посвящена приближённому решению задачи целевого управления на конечном интервале времени для системы дифференциальных уравнений при наличии нелинейных членов, зависящих от фазовых переменных.

Внутри фиксированной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, на конечном интервале времени рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

Пусть \mathcal{X}_1 — некоторое компактное множество в Ω , $x_0 = x(t_0)$ — фиксированное начальное состояние системы (1). Предполагается, что для любой траектории, выпущенной из точки x_0 , для любого $t \in [t_0, t_1]$ выполнено условие $x(t) \in \Omega$. На управление u наложено поточечное ограничение: $u \in \mathcal{P}(t) \equiv \mathcal{E}(p(t), P(t))$ — эллипсоид с параметрами, непрерывно зависящими от t .

Требуется построить управляющую стратегию $u = u(t, x) \in \mathcal{P}(t)$, для которой выполнено включение

$$x(t_1; t_0, x_0)|_u \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0),$$

где $B_\mu(0)$ — шар радиуса μ с центром в нуле, а значение $\mu \geq 0$ необходимо минимизировать.

Рассматриваемый в работе метод решения данной задачи предполагает разбиение области Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, с дальнейшим переходом к эквивалентной задаче управления для системы с кусочно-линейной динамикой и ограниченной помехой v (погрешностью линеаризации):

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u + \tilde{C}(t)v, \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2)$$

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

При этом используются методы динамического программирования: в частности, построение кусочно-заданных функций цены и принцип сравнения [1, 2]. В работе [3] в каждой вершине симплексов задавалась однопараметрическая функция цены, а её значения внутри симплексов были получены в результате линейной интерполяции. В предложенном же методе функция цены является непрерывной кусочно-квадратичной функцией и в вершинах симплексов задаётся как аффинная функция от всех фазовых переменных. Это усовершенствование позволяет более точно найти численное приближение решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса (ГЯБА) и, соответственно, снизить погрешность метода.

Кусочно-квадратичные функции ранее использовались в [4, 5]. Однако указанные работы имели недостатки, связанные с реализацией численного метода, а также с ограничениями на характер нелинейности в (1). Предложенный способ лишён этих недочётов, и в качестве основного результата выступает следующая теорема:

Теорема. Пусть множество \mathcal{X}_1 представимо в виде

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq 0\}, \quad \phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K}\tilde{x} \rangle, \quad \hat{K} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)},$$

и $\|x\| \leq C$ для всех $x \in \Omega$. Пусть матричные функции $K^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, являются решениями системы матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}, \dots, K^{(N)}) = \Delta^{(i)}(t), & i = \overline{1, N}, t \in [t_0, t_1], \\ K^{(i)}(t_1) = \hat{K}\tilde{G}^{(i)}, & i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где $\hat{Z}^{(i)}(\cdot)$ – матричные функции, специальным образом зависящие от параметров кусочно-линейной системы (2), матрицы $G^{(i)}$ определяются геометрией симплексов $\Omega^{(i)}$, а $\Delta^{(i)}(t)$ – произвольные непрерывные матричные функции. Пусть также $V(t, \tilde{x})$ – непрерывная кусочно-квадратичная функция, для каждой области $\Omega^{(i)}$ определённая как

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)(\tilde{G}^{(i)})^{-1}\tilde{x} \rangle, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}.$$

Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) = \left\{ x \in \Omega \mid V(t_0, x) \leq \mu - \sqrt{C^2 + 1} \int_{t_0}^{t_1} \max_{1 \leq i \leq N} \|\Delta^{(i)}(t)\| dt \right\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости:

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Помимо алгоритма построения функции цены, также предложено позиционное управление, переводящее траекторию системы в окрестность заданного целевого множества. Теоретические результаты подтверждены вычислительными примерами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00613 а) и содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

- [1] *Куржанский А.Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона – Якоби в теории управления // Труды института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183. DOI: 10.1134/S0081543806050130
- [2] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Birkhäuser, 2014.
- [3] *Tochilin P.A.* Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem // Preprints of the 21st IFAC World Congress, Berlin, 2020. P. 6205–6210.
- [4] *Маянцев К.С., Точилин П.А.* Об одном методе построения кусочно-квадратичных функций цены для задачи управления системой с переключениями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 11. С. 1497–1507. DOI: 10.1134/S0374064118110080
- [5] *Чистяков И.А., Точилин П.А.* Приближённое решение задачи целевого управления в случае нелинейности по одной переменной // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 11. С. 1560–1571. DOI: 10.1134/S0012266119110107
- [6] *Точилин П.А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Труды института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 223–238. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-223-238
- [7] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

Асимптотическая устойчивость по первому приближению гамильтоновых систем

А. А. Усова¹, А. М. Тарасьев^{1,2}

e-mail: ausova@imm.uran.ru, tam@imm.uran.ru

В работе проводится анализ качественного поведения решений гамильтоновых систем, которые возникают вследствие применения Принципа максимума Понтрягина для задач на бесконечном промежутке времени. Данные задачи возникают во многих прикладных областях, в которых осуществляется моделирование долгосрочных процессов, таких, например, как экономика, финансовый анализ, демографические процессы, экология. Свойство стабилизируемости гамильтоновых систем приобретает особую значимость, поскольку позволяет построить субоптимальные стратегии развития изучаемых процессов. Последние достаточно точно предсказывают «идеальное» (оптимальное) поведение решений. В итоге, полученные стабилизированные траектории служат основой для построения оптимальных решений, по крайней мере, для задач относительно небольшой размерности.

1. Задача управления

Модели роста, которые позволяют описать взаимосвязи между основными факторами x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в различных прикладных областях, во многих случаях выражают полученные зависимости в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = F(x(t))u(t) + G(x(t)) = \Phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор изучаемых основных факторов, $F(x) = \{f_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n,m}$ и $G(x) = \{g_i(x)\}_{i=1}^n$ — матричная и вектор-функции, которые дважды непрерывно дифференцируемы. Символ $u = (u_1, \dots, u_m)$ означает управление. Качество процесса управления

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

оценивается функционалом

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(x(t), u(t)) dt, \quad (2)$$

где функция $c(x, u)$ приближенно вычисляется по формуле

$$c(t) = \prod_{i=1}^m (1 - u_i(t) - w_i(x(t))) f(x(t)). \quad (3)$$

Функции $f(x)$ и $w_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) дважды непрерывно дифференцируемы. В задачах экономического роста функция $f(x)$ называется *производственной*.

В уравнении (3) каждый сомножитель строго положителен, что накладывает ограничения на параметры управления u_i (3), то есть

$$0 < \sum_{i=1}^m u_i(t) < 1 \Rightarrow \exists \bar{u}_i \in (0, 1) : u_i(t) \in [0, \bar{u}_i], \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

На основе динамики (1) и функционала качества (2), мы ставим следующую задачу управления.

Требуется построить такой управляемый процесс $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, который на траекториях $\mathbf{x}(t)$ системы (1) максимизирует значение функционала качества (2) в условиях ограничений (4) на управляющие параметры $\mathbf{u}(t)$.

2. Исследование задачи

Для анализа задачи управления в рамках Принципа максимума Понтрягина составляется гамильтонова функция

$$H(\cdot) = \sum_{i=1}^m \ln(1 - u_i - w_i(x)) + \ln f(x) + \psi^T \Phi(x, u), \quad (5)$$

где $\psi \in \mathbb{R}^n$ — вектор сопряженных переменных.

Гамильтониан (5) строго вогнут по переменной управления u [4], что обеспечивает существование такого управления \mathbf{u} , которое удовлетворяет ограничениям (4) и доставляет максимум гамильтониану (5), вычисляемый по формуле

$$\mathbf{H}(x, \psi) = H(x, \psi, \mathbf{u}). \quad (6)$$

Гамильтониан (6) — гладкая функция переменных x и ψ , на основе которой составляется гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial \mathbf{H}(x, \psi)}{\partial \psi}, & x(0) = x_0, \\ \dot{\psi}(t) = \rho\psi - \frac{\partial \mathbf{H}(x, \psi)}{\partial x}, & \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} (x(t))^\top \psi(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Предположение. Система (7) имеет единственное установившееся состояние $P^* = (x^*, \psi^*)$ с положительными фазовыми $x_i^* \in \mathbb{R}_{>0}^n$ и ненулевыми сопряженными $\psi_i^* \neq 0$ координатами ($i \in \{1, \dots, n\}$).

В условиях такого предположения система (7) линеаризуется в окрестности O_δ^* стационарной точки P^* :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{\psi}, & \tilde{x}(t) = x(t) - x^*, \\ \dot{\tilde{\psi}} = C\tilde{x} + (\rho\mathbb{E}_n - A^\top)\tilde{\psi}, & \tilde{\psi}(t) = \psi(t) - \psi^*. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь матрицы A , B , и C — блоки матрицы Якоби, вычисленной по формуле

$$J^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \rho\mathbb{E}_n - A^\top \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(x^*, \psi^*)}{\partial \psi \partial x} & \frac{\partial^2 \mathbf{H}(x^*, \psi^*)}{\partial \psi^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{H}(x^*, \psi^*)}{\partial x^2} & \rho\mathbb{E}_n - \frac{\partial^2 \mathbf{H}(x^*, \psi^*)}{\partial x \partial \psi} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Далее будут выписаны условия стабилизируемости гамильтоновой системы (7), полученные на основе свойств матрицы Якоби (9).

3. Стабилизируемость гамильтоновой системы

Собственные значения матрицы Якоби (9) определяют качественное поведение системы (7) вблизи стационарной точки P^* . Опираясь на результаты, полученные Ю. С. Ледеяевым [2], для задачи стабилизации линеаризованной динамики (8) требуется построение такой матрицы X , которая линейно связывает фазовые и сопряженные переменные $\tilde{\psi} = X\tilde{x}$ в окрестности O_δ^* положения равновесия P^* и обеспечивает асимптотическую устойчивость системе

$$\dot{\tilde{x}} = (A + BX)\tilde{x}, \quad \dot{\tilde{\psi}} = X\tilde{x}.$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \left(A - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n\right)\xi + Bz, & \xi = \tilde{x} e^{-\rho/2t}, \\ \dot{z} = C\xi - \left(A^\top - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n\right)z, & z = \tilde{\psi} e^{-\rho/2t}. \end{cases} \quad (10)$$

Матрица $M = \begin{pmatrix} A - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n & B \\ C & \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n - A^\top \end{pmatrix}$ данной системы является

гамильтоновой (см. [3, 4]), и ее собственные значения симметричны относительно мнимой оси. В работе [4] авторы показывают, что матрицы J^* (9) и M связаны равенством $J^* = M + \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_{2n}$.

Лемма 6 обосновывает существование матрицы X (см. [5]).

Лемма 6. *Матрица X , стабилизирующая динамику (10), существует и находится из решения матричного уравнения Риккати $C - X\left(A - \frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n\right) + \left(\frac{\rho}{2}\mathbb{E}_n - A^\top\right)X - XBX = 0$, если матрица M не имеет чисто мнимых собственных значений.*

Из леммы 6 следует асимптотическая устойчивость системы (8), что влечет справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Существование матрицы X , построенной в лемме 6, гарантирует асимптотическую устойчивость по первому приближению системы*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), \psi(t))}{\partial \psi} \Bigg|_{\psi(t) = \psi^* + X(x(t) - x^*)}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00264.

- [1] *Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V.* The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems // Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255.
DOI: 10.1134/S0081543807020010
- [2] *Ledyayev Yu.* On analytical solutions of matrix Riccati equations // Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2011. Vol. 273, no. 1. P. 214–228.
DOI: 10.1134/S0081543811040109
- [3] *Paige C., Loan C.V.* A Schur decomposition for Hamiltonian matrices // Linear Algebra and its Applications. 1981. No. 41. P. 11–32.

- [4] *Tarasyev A., Usova A.* Structure of the Jacobian in economic growth models // In Proc. of the 16th IFAC Workshop CAO. 2015. Vol. 48, no. 25. P. 191–196. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.083
- [5] *Usova A.A., Tarasyev A.M.* Structure of a Stabilizer for the Hamiltonian Systems / Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Proceedings. Springer, Cham. 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_32

Численно-аналитические методы построения сингулярных множеств решений в классе плоских задач управления по быстрдействию

А. А. Успенский¹, П. Д. Лебедев¹

e-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения Гамильтона – Якоби

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + 1 = 0, \quad u_\Gamma = 0. \quad (1)$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ – норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$. Краевое условие определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого и, в общем случае, невыпуклого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Кривая $\Gamma = \{\mathbf{x} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2: t \in T\}$, где $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывное отображение числового промежутка $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty \leq \hat{t} < \check{t} \leq \infty$, на плоскость. Граница краевого множества не имеет точек самопересечения и регулярна в точках дифференцируемости. В рассмотрение также включены контуры – кривые, заданные на отрезках $T = [\hat{t}, \check{t}]$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < \infty$, и такие, что $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$.

Минимаксное решение $u = u(x_1, x_2)$ [1] краевой задачи (1) совпадает с функцией оптимального результата в задаче управления

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

по быстрдействию с целевым множеством $M \subset \mathbb{R}^2$ для динамической системы с круговой вектограммой скоростей, не превышающих по норме единицу [2]. В случае невыпуклости целевого множества функция $u = u(x_1, x_2)$ не является всюду дифференцируемой, причем она претерпевает «градиентную катастрофу» даже в случае высокого порядка гладкости границы $M \subset \mathbb{R}^2$ [3]. Указанные особенности решения задачи (1) существенно затрудняют его отыскание в аналитическом виде.

Авторами развиваются численно-аналитические методы конструирования $u = u(x_1, x_2)$. Аналитическая часть подхода к построению решения связана с выявлением псевдовершин краевого множества — особых его точек, ответственных за зарождение сингулярности функции $u = u(x_1, x_2)$ [4]. Здесь отметим, что постановка рассматриваемой задачи допускает переменную гладкость границы краевого множества. Это означает, что Γ может содержать конечное число точек негладкой склейки и точек гладкой склейки с конечными разрывами производных второго либо более высокого порядка от координатных функций. В общей ситуации перечисленные типы точек относятся к псевдовершинам $M \subset \mathbb{R}^2$. Отвечающие им ветви сингулярного множества строятся численными методами. При этом для формирования каждой ветви прежде необходимо найти значение числового маркера псевдовершины. Предложены как аналитические, так и численные процедуры отыскания маркеров псевдовершин [3–5].

Примером численной процедуры является алгоритм вычисления маркера $\lambda_* = \lambda_*(x(t_0))$ псевдовершины $x(t_0) \in \Gamma$ для случая, когда кривая $\Gamma = \partial M$ в указанной точке дважды дифференцируема, при этом имеет разрыв гладкости кривизны. Тогда маркер удовлетворяет уравнению

$$\lambda = \frac{-\lambda^3 k'_+ + (3\lambda^2 - 3\lambda + 1)k'_-}{-(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda)k'_+ + k'_-}. \quad (2)$$

Пусть выполняется неравенство

$$\sigma = \frac{k'_+}{k'_-} < 0, \quad (3)$$

относительно односторонних производных кривизны $k'_+ = k'(t_0 + 0)$ и $k'_- = k'(t_0 - 0)$ в точке $x(t_0) \in \Gamma$, то есть псевдовершина является

точкой негладкого экстремума кривизны границы краевого условия.

Теорема 1. При соблюдении условия (3) существует единственное неположительное решение уравнения (2).

Теорема 2. При соблюдении условия (3) маркер $\lambda = \lambda_*$ является пределом числовой последовательности

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - (\lambda_n - 1) \times \frac{(\sigma \lambda_n^3 - 3\sigma \lambda_n^2 + 3\lambda_n - 1)(1 - \sigma \lambda_n(\lambda_n^2 - 3\lambda_n + 3))}{3(1 - \sigma)(2\lambda_n - 1 + \sigma \lambda_n^3(\lambda_n - 2)) - (1 - \sigma \lambda_n(\lambda_n^2 - 3\lambda_n + 3))^2},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\lambda_0 = 1 - \sqrt{1 - \sigma^{-1}}. \quad (5)$$

Итерационный процесс (4), (5) построен на основе рекуррентной формулы классического метода Ньютона нахождения неподвижной точки гладкого отображения.

Ветвь сингулярного множества совпадает с дугой интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения в нормальной форме, для которого начальное условие определяется маркером псевдовершины, а правая часть — локальным диффеоморфизмом, порождающим эту псевдовершину (подробнее [5]). Построение ветвей сингулярного множества осуществляется в общем случае численными методами. Отметим, что сингулярное множество решения задачи (1) имеет много общего со «скелетом» [6] плоского множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus M$, построение которого требует отыскания объединения характеристических нуль- и одномерных многообразий, на которых мера невыпуклости [7] краевого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ отлична от нуля.

Развиваемые методы нашли отражение в реализованных вычислительных алгоритмах, с помощью которых осуществлено моделирование решений для конкретных примеров задач управления по быстродействию с невыпуклыми целевыми множествами, имеющими границы с различным порядком гладкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 18-01-00264_а и № 18-01-00221_а.

- [1] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003.
- [2] *Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.* Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008. Vol. 263, no. 2. P. 191–201.
- [3] *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Построение решения задачи управления по быстродействию при нарушении гладкости кривизны границы целевого множества // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 53. С. 98–114.
- [4] *Lebedev P.D., Uspenskii A.A.* On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2011. Vol. 263, no. 2. P. 255–270.
- [5] *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2018. Т. 28, вып. 1. С. 59–73.
- [6] *Местецкий Л.М.* Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009.
- [7] *Успенский А.А.* Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Деп. в ВИНТИ 07.02.07, № 104-В2007. Екатеринбург, 2007. 38 С.

Об одной импульсной задаче управления с помехой и возможной поломкой в динамике

В. И. Ухоботов^{1,2}, *В. Н. Ушаков*¹, *И. В. Изместьев*^{1,2}
e-mail: ukh@csu.ru, ushak@imm.uran.ru, j748e8@gmail.com

Особенностью задач импульсного управления и дифференциальных игр с импульсным управлением является тот факт, что фазовое состояние системы может изменяться скачкообразно [1–3].

В докладе рассматривается задача импульсного управления

$$\dot{z} = -a(t, \tau)\dot{\phi}(t)u + b(t)v, \quad t \leq p, \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

с неизвестным заранее моментом времени $\tau \leq p$, когда происходит поломка [4]:

$$a(t, \tau) = c(t) \text{ при } t < \tau, \quad a(t, \tau) = 0 \text{ при } \tau \leq t < \min(\tau + \delta; p),$$

$$a(t, \tau) = c(t) \text{ при } \min(\tau + \delta; p) \leq t \leq p.$$

Числа p и $\delta > 0$ заданы; функция $c(t)$ непрерывна и не возрастает при $t \leq p$, причем $c(t) > 0$ для $t < p$; функция $b(t) \geq 0$ при $t \leq p$ суммируема на каждом отрезке.

Управлением являются произвольная функция $u(t, z) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|u(t, z)\| = 1$ и функция $\phi(t) \in \mathbb{R}$, на формирование которой тратится некоторое количество ресурсов. Начальный запас ресурсов $\mu_0 \geq 0$ задан.

Помехой является произвольная функция $v(t, z) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|v(t, z)\| \leq 1$.

При построении функции $\phi(t)$ можно осуществлять её коррекцию. В момент коррекции $\tau_i \in [t_0, p)$, зная реализовавшееся состояние $z(\tau_i)$ и оставшийся запас ресурсов $\mu(\tau_i) \geq 0$, выбираются абсолютно непрерывная неубывающая функция $\phi_i : [\tau_i, p] \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int_{\tau_i}^t \dot{\phi}_i(r) dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq p.$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Челябинский государственный университет

Мгновенно изменяется фазовый вектор

$$z(\tau_i + 0) = z(\tau_i) - \Delta_i a(\tau_i, \tau) u(\tau_i, z(\tau_i)). \quad (2)$$

Движением системы (1), порожденным на отрезке $[\tau_i, p]$ управлением $u(t, z)$, $\phi_i(t)$ и помехой $v(t, z)$, с начальным условием (2) является равномерный предел последовательности ломаных [5]. При выборе следующего момента коррекции $\tau_{i+1} \in (\tau_i, p)$ становится известно, произошла поломка или нет. Если да, то становится известным момент поломки.

Задано число $\varepsilon > 0$. Цель выбора управления заключается в осуществлении неравенства

$$\|z(p)\| \leq \varepsilon + \mu(p)a(p, \tau) \quad (3)$$

при любом моменте поломки $\tau \in [t_0, p]$ и любой допустимой помехе.

Положим

$$m(t, \tau) = \max_{t \leq r \leq p} a(r, \tau), \quad t(\varepsilon) = \inf \left\{ t < p : \varepsilon \geq \int_t^p b(r) dr \right\}.$$

Считаем, что время необходимое на устранение поломки, удовлетворяет неравенству $\delta < p - t(\varepsilon)$.

Зафиксируем начальное состояние системы $t_0 < p$, $z_0 = z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\mu_0 = \mu(t_0) \geq 0$.

Теорема 1. Пусть $t(\varepsilon) \leq t_0 < p$. Управление, осуществляющее неравенство (3) при любом моменте поломки и любой допустимой помехе, существует тогда и только тогда, когда

$$\|z_0\| \leq m(t_0, \tau)\mu_0 + \varepsilon - \int_{t_0}^p b(r) dr$$

для любого $\tau \in [t_0, p]$.

Теорема 2. Пусть $t_0 < t(\varepsilon)$. Управление, осуществляющее неравенство (3) при любом моменте поломки и любой допустимой помехе, существует тогда и только тогда, когда

$$\|z_0\| \leq m(t_0, \tau) \left(\mu_0 - \int_{t_0}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{m(r, \tau)} dr \right)$$

для любого $\tau \in [t_0, t(\varepsilon)]$.

Эти управления строятся в явном виде.

Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 19-11-00105.

- [1] Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599.
- [2] Пожарицкий Г.К. Импульсное преследование точки с ограниченной тягой // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 217–227.
- [3] Субботина Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
- [4] Никольский М.С. Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 1937–1940.
- [5] Ухоботов В.И., Изместьев И.В. Импульсная дифференциальная игра со смешанным ограничением на выбор управления первого игрока // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 209–222.
DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-209-222

Оптимальный выбор пробных управлений для восстановления неопределённых параметров в управляемой системе

В. Н. Ушаков¹, А. А. Ершов¹

e-mail: ushak@mail.uran.ru, ale10919@yandex.ru

Пусть на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < \infty$) задана управляемая система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t), \alpha), \\ x(t_0) = x^{(0)}, \end{cases} \quad (1)$$

где t — время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $(t_0, x^{(0)})$ — начальное положение системы, $u(t)$ — допустимое управление, α — постоянный параметр из компакта $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^q$.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, понимаем измеримую по Лебегу вектор-функцию со значениями в компакте $P \subset \mathbb{R}^p$. Каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует движение $x(t)$, являющееся решением системы (1) в классе абсолютно непрерывных функций.

Предполагаем выполненными следующие условия.

A1. Вектор-функция $f(t, x, u, \alpha)$ определена, непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}$ и для любой ограниченной замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдётся такая константа $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$\begin{aligned} \|f(t, x^{(1)}, u, \alpha) - f(t, x^{(2)}, u, \alpha)\| &\leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}, u, \alpha) &\in \Omega \times P \times \mathcal{L}, \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

A2. Найдётся такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, \alpha)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u, \alpha) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}.$$

A3. Пусть N — некоторое натуральное число, $\Delta > 0$. Вектор-функция $f(t, x, u, \alpha)$ дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных t и x на $[t_0, t_0 + N\Delta] \times \mathbb{R}^n$ при любых $u \in P$ и $\alpha \in \mathcal{L}$.

A4. Пусть задан набор $\{u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ векторов (пробных управлений) из P . При некотором $\alpha \in \mathcal{L}$ кусочно-постоянное управление $u(t) = u^{(k)}$ при $t \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$, $k = \overline{1, N}$, порождает движение $x(t)$ на промежутке $[t_0, t_0 + N\Delta]$. Введем многозначную функцию $F(t, x, u) = \{f(t, x, u, \bar{\alpha}) : \bar{\alpha} \in \mathcal{L}\}$. Предположим, что существует такое семейство однозначных отображений

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}[x_*^{(1)}, \dots, x_*^{(N)}](\cdot, \dots, \cdot) : F\left(t_0 + \frac{\Delta}{2}, x_*^{(1)}, u^{(1)}\right) \times \dots \times \\ \times F\left(t_0 + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta, x_*^{(N)}, u^{(N)}\right) \mapsto \mathcal{L}, \end{aligned}$$

что

$$f\left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta, x_*^{(1)}, u^{(1)}, \hat{\alpha}[x_*^{(1)}, \dots, x_*^{(N)}](f_*^{(1)}, \dots, f_*^{(N)})\right) = f_*^{(k)}$$

для любых $f_*^{(k)} \in F\left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta, x^{(k)}, u^{(k)}\right)$ и точек $x_*^{(k)}$ из достаточно больших окрестностей точек $x\left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\right)$, $k = \overline{1, N}$.

Кроме того условимся, что существует функция $\varkappa(\lambda) \downarrow 0$ при $\lambda \downarrow 0$ такая, что

$$\begin{aligned} & \|\hat{\alpha}[x_*^{(1)}, \dots, x_*^{(N)}](f_*^{(1)}, \dots, f_*^{(N)}) - \alpha\| \leq \\ & \leq \varkappa \left(\sum_{k=1}^N b_k \left\| x_*^{(k)} - x \left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta \right) \right\| + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \beta_k \left\| f_*^{(k)} - f \left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta \right), x \left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta, u^{(k)}, \alpha \right) \right\| \right), \end{aligned}$$

где коэффициенты $b_k \geq 0$ и $\beta_k \geq 0$ для всех $k = \overline{1, N}$.

В начальный момент времени t_0 промежутка $[t_0, \vartheta]$ в системе (1) реализовано некоторое значение $\alpha \in \mathcal{L}$, и именно оно присутствует в системе (1) в течение всего промежутка $[t_0, \vartheta]$; в то же время в начальный момент времени t_0 это значение α неизвестно лицу, управляющему системой (1), т.е. лицу, осуществляющему выбор управления u . Считаем, что ему известно лишь само ограничение \mathcal{L} .

Сформулируем алгоритм приближённого восстановления неопределённого параметра $\alpha \in \mathcal{L}$.

Алгоритм 1.

1) Выбираем набор пробных управлений $\{u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ и последовательно применяем их на промежутках $[t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta]$, $k = \overline{1, N}$. На промежутке времени $[t_0, t_0 + N\Delta]$ будет реализовано некоторое движение системы (1), которое обозначим через $x(t)$.

2) В моменты времени $t_0 + \frac{j}{2}\Delta$, $j = \overline{0, 2N}$, измеряем фазовую переменную системы (1). В результате получаем значения $x^* \left(t_0 + \frac{j}{2}\Delta \right)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left\| x^* \left(t_0 + \frac{j}{2}\Delta \right) - x \left(t_0 + \frac{j}{2}\Delta \right) \right\| \leq \delta, \quad j = \overline{0, 2N}.$$

3) Для каждого $k = \overline{1, N}$ вычисляем вектор

$$f^{(k)} = \frac{x^*(t_0 + k\Delta) - x^*(t_0 + (k-1)\Delta)}{\Delta}$$

и его проекцию $f_*^{(k)}$ на множество

$$F \left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta, x^* \left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta \right), u^{(k)} \right).$$

В зависимости от вида этого множества выбираем аналитический или численный способ построения проекций с погрешностью

$$\|f_*^{(k)} - f_{pr}^{(k)}\| < p,$$

где $f_{pr}^{(k)}$ — точная проекция, $f_*^{(k)}$ — приближённая проекция.

4) Находим приближённое значение $\alpha^* \in \mathcal{L}$ параметра $\alpha \in \mathcal{L}$ из системы уравнений

$$f\left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta, x^*\left(t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\right), u^{(k)}, \alpha^*\right) = f_*^{(k)}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Для формулировки результата введём обозначения следующих постоянных:

$$\begin{aligned} K_1 &= \max\{\|f(t, x, u, \bar{\alpha})\| : t \in [t_0, t_0 + N\Delta], u \in P, \\ &x \in B(x^*(t_0), (\|x^*(t_0)\| + \delta + 1)(e^{\gamma\Delta N} - 1) + \delta), \bar{\alpha} \in \mathcal{L}\}, \\ K_2 &= \max\left\{\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x, u, \bar{\alpha}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x, u, \bar{\alpha}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, u, \bar{\alpha}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, u, \bar{\alpha})f(t, x, u, \bar{\alpha})\right\| : \right. \\ &\quad \left. (t, x, u, \bar{\alpha}) \in [t_0, t_0 + N\Delta] \times B(x^*(0), K_1 N\Delta) \times P \times \mathcal{L}\right\}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(t, x, u, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u, \alpha) \cdot f(t, x, u, \alpha).$$

Теорема. Пусть α^* — восстановленное с помощью алгоритма 1 значение параметра α в системе (1).

Тогда

$$\|\alpha^* - \alpha\| \leq \varkappa \left(\delta \sum_{k=1}^N b_k + (p + L\delta + r(\Delta)) \sum_{k=1}^N \beta_k \right),$$

где

$$r(\Delta) = \frac{4\delta}{\Delta} + \frac{\Delta^3}{12} K_2.$$

Исследование выполнено за счёт средств гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10018).

Задачи импульсного управления при неопределенности

Т. Ф. Филиппова¹
e-mail: ftf@imm.uran.ru

1. Введение

Рассматриваются задачи управления и оценивания состояний нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным и параметрам. Предполагается, что значения неопределенных начальных состояний, неизвестные возмущения в матрице линейных членов фазовых скоростей и величины допустимых управлений стеснены соответствующими эллипсоидальными ограничениями.

Исследования управляемых систем данного класса мотивированы многочисленными проблемами динамики в условиях неопределенности и нелинейности, возникающими в различных прикладных областях, в том числе в задачах робототехники, экономическом моделировании, в проблемах экологии и биологии и других областях. В данной работе решается задача управления системой с неопределенной динамикой в случае, когда динамические уравнения содержат два вида нелинейностей, а именно, в фазовых скоростях системы одновременно присутствуют как квадратичные функции фазовых координат, так и неопределенные матрицы коэффициентов. Наличие импульсных составляющих в управляющих воздействиях значительно усложняет анализ соответствующих многозначных движений нелинейной системы.

2. Постановки задач и основные результаты

Рассматривается нелинейная управляемая система ($t_0 \leq t \leq T$, $x \in R^n$)

$$dx(t) = (A(t)x(t) + x' Bx \cdot d + u(t))dt + Cdv(t), \quad (1)$$

где матрица B предполагается симметричной и положительно определенной, векторы $d, C \in R^n$ заданы. Управляющими воздействиями в системе (1) являются пары функций $u(\cdot), v(\cdot)$ со следующими

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

ограничениями на возможный выбор управлений. Именно, предполагается, что обобщенное (импульсное) управление $v : [t_0, T] \rightarrow R$ монотонно возрастает, непрерывно справа и имеет ограниченную вариацию на $[t_0, T]$:

$$Var_{t \in [t_0, T]} v(t) = \sup_{\{t_i\}} \sum_{i=1}^k |v(t_i) - v(t_{i-1})| \leq \mu,$$

$t_i : t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = T, \mu > 0$.

Управляющие функции $u(t)$ измеримы по Лебегу на $[t_0, T]$ и удовлетворяют ограничению $u(t) \in U$ для п.в. $t \in [t_0, T]$, где $U = E(\hat{a}, \hat{Q})$. Здесь и далее используется обозначение (x, y) для скалярного произведения векторов $x, y \in R^n$ и

$$E(a, Q) = \{x \in R^n : (Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1\}$$

для эллипсоида в пространстве R^n с центром $a \in R^n$ и положительно определенной $n \times n$ -матрицей Q .

Матрица $A(t)$ в (1) имеет следующий вид

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{2}$$

где A^0 — известная $n \times n$ -матрица, а $n \times n$ -матрица $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена, причем дана априорная оценка $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ ($t \in [t_0, T]$).

Рассматривается два типа неопределенности в задании матрицы $A(t)$ динамической системы (1), при этом каждый из исследуемых случаев имеет свои специфические особенности в анализе и порождает различные алгоритмы построения внешних оценивающих трубок для многозначных движений исходных систем с неопределенностью и нелинейностью.

Предположение 1. Пусть задан специальный класс ограниченных $\mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1$, где

$$\mathcal{A}^1 = \left\{ A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n} : a_{ij} = 0 \text{ для } i \neq j \text{ и } a_{ii} = a_i, \ i = 1, \dots, n, \ a = (a_1, \dots, a_n), \ a'Da \leq 1 \right\}, \tag{3}$$

здесь $D \in R^{n \times n}$ — известная симметричная и положительно определенная матрица.

Предположение 2. Ограничение $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 + \mathcal{A}^1$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}^1 = \{ A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n} : |a_{ij}| \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \}, \quad (4)$$

где неотрицательные числа c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) заданы.

Считаем также, что задан эллипсоид $X_0 = E(a_0, Q_0)$ с симметричной и положительно определенной матрицей Q_0 и центром $a_0 \in R^n$.

В данных информационных условиях возникает задача управления трубками траекторий следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t; u(\cdot)) = \{ x \in R^n : \exists x_0 \in X_0, \exists A(\cdot) \in \mathcal{A}, \\ x = x(t) = x(t; u(\cdot), A(\cdot), x_0) \}, \quad t \in [t_0, T], \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для каждого из указанных выше классов ограничений в данной работе найдены внешние оценки траекторных трубок и их сечений — множеств достижимости рассматриваемой нелинейной системы с неопределенными параметрами.

Отметим, что задачи точного построения траекторных трубок в нелинейном случае являются весьма сложными, поэтому в литературе развиты подходы, в основе которых лежат идеи и методы математической теории управления и принципы гарантированного оценивания множеств достижимости систем с неопределенностью [1, 2].

На основе теории эллипсоидального оценивания для многозначных движений систем рассматриваемого типа в данной работе исследуются проблемы гарантированного управления трубкой траекторий нелинейной системы с неопределенностью. Предлагаются алгоритмы гарантированного приведения многозначного состояния системы в минимальную окрестность заданного целевого множества, результаты иллюстрируются рядом модельных примеров. Исследования продолжают тематику, развитую в работах [2, 3], и используют результаты [4].

Алгоритмы оценивания множеств достижимости для некоторых специальных типов систем с импульсным управлением, в частности, для систем Лотки – Вольтерры, описывающих динамику взаимодействия хищников и их жертв в условиях неопределенности, были предложены в работе [5].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А19-

119022690096-9) и при поддержке Научно-образовательного центра (НОЦ ИММ УрО РАН), действующего в рамках Уральского математического центра.

- [1] *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser, Boston, 1995.
- [2] *Kurzhanski A.B., Daryin A.N.* Dynamic Programming for Impulse Feedback and Fast Controls. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag London, 2020.
- [3] *Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.* Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2018.
- [4] *Filippova T.F.* Description of Dynamics of Ellipsoidal Estimates of Reachable Sets of Nonlinear Control Systems with Bilinear Uncertainty / Nikolov G., Kolkovska N., Georgiev K. (eds), Numerical Methods and Applications (NMA 2018). Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham. Vol. 11189, 2019. P. 97–105. DOI: 10.1007/978-3-030-10692-8_11
- [5] *Filippova T.F., Matviychuk O.G.* Approaches to Estimating the Dynamics of Interacting Populations with Impulse Effects and Uncertainty / Skiadas C., Dimotikalis Y. (eds), 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2019). Springer Proceedings in Complexity. Springer, Cham, 2020. P. 85–99. DOI: 10.1007/978-3-030-39515-5_8

Консервативные схемы решения нестационарных задач управления теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольнике

*Б. Х. Хайиткулов*¹

e-mail: b.hayitqulov@mail.ru

В [1–3] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей.

В данной работе разработаны метод и алгоритм решения задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на прямо-

¹Национальный Университет Узбекистана, Ташкент

угольнике таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре.

В параллелепипеде $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq t \leq T\}$ требуется определить функцию $f(x, y, t) \geq 0$, доставляющую при каждом $t \in [0, T]$ минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t) dy dx \rightarrow \min \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \\ a &< x < b, \quad c < y < d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(a, y, t) &= \mu_1(y, t), \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t), \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, c, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, d, t) = \mu_4(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

$$m(x, y, t) \leq u(x, y, t) \leq M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D. \quad (3)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$ — температура в точке (x, y) прямоугольника в момент времени t ; $\chi(x, y, t) > 0$ — коэффициент теплопроводности; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ — заданные функции. Функции $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$. Решение данной краевой задачи можно получить в аналитическом виде с использованием методов Фурье [4].

Введем в D равномерную по трем переменным разностную сетку $\bar{\omega}_{h_1 h_2}^\tau = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \times \bar{\omega}^\tau = \{(x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau), i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, k = \overline{0, N_3}\}$ с шагами $h_1 = (b - a)/N_1$, $h_2 = (d - c)/N_2$, $\tau = T/N_3$.

Для получения консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом. Рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной прямоугольной ячейке

$x_{i-0.5} \leq x \leq x_{i+0.5}$, $y_{j-0.5} \leq y \leq y_{j+0.5}$ сетки за промежутков времени $t_k \leq t \leq t_{k+1}$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} u(x, y, t_{k+1}) dy dx - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} u(x, y, t_k) dy dx = \\
 & = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} W(x_{i-0.5}, y, t) dy dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} W(x_{i+0.5}, y, t) dy dt + \\
 & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} W(x, y_{j-0.5}, t) dx dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} W(x, y_{j+0.5}, t) dx dt + \\
 & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} f(x, y, t) dy dx dt.
 \end{aligned}$$

Здесь $W(x, y, t)$ — поток тепла, $W(x, y, t) = -\chi(x, y, t) \text{ grad } u$.

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [4]:

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} u(x, y, t_{j+1}) dy dx \approx h_1 h_2 u_{ij}^{k+1},$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} W(x_{i-0.5}, y, t) dy dt \approx \tau h_2 W_{i-0.5j}^{k+1},$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} W(x, y_{j-0.5}, t) dx dt \approx \tau h_1 W_{ij-0.5}^{k+1},$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} f(x, y, t) dy dx dt \approx \tau h_1 h_2 f_{ij}^{k+1},$$

$$W_{i-0.5j}^{k+1} = -\chi_{i-0.5j}^{k+1} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{h_1}, \quad W_{ij-0.5}^{k+1} = -\chi_{ij-0.5}^{k+1} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{h_2}.$$

При этом $\chi_{i\pm 0.5j}^{k+1}$, $\chi_{ij\pm 0.5}^{k+1}$ и f_{ij}^{k+1} определяются равенствами

$$\chi_{i-0.5j}^{k+1} = \chi\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, y_j, t_{k+1}\right), \quad \chi_{ij-0.5}^{k+1} = \chi\left(x_i, \frac{y_j + y_{j-1}}{2}, t_{k+1}\right),$$

$$\chi_{ij}^{k+1} = \chi(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Неявная консервативная разностная схема для условия (2) имеет вид [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \left[\chi_{i+0.5j}^{k+1} \frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_1^2} - \chi_{i-0.5j}^{k+1} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} \right] \\ + \left[\chi_{ij+0.5}^{k+1} \frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_2^2} - \chi_{ij-0.5}^{k+1} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} \right] + f_{ij}^{k+1}, \\ i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{0, N_3 - 1}, \\ u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \\ u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}), \quad u_{N_1j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}), \\ u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}), \quad u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}), \\ i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{0, N_3 - 1}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Оператор $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\chi(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$ с начальным и краевым условиями будет самосопряженным, положительно определенным в $L_2(D)$, а значит, он имеет ограниченный обратный оператор, который обозначим через $G = L^{-1}$. С его помощью можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$\begin{aligned} m(x, y, t) \leq (Gf)(x, y, t) \leq M(x, y, t), \\ f(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, y, t) \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем обозначения

$$XY = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\chi_{i\pm 0.5j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{\chi_{ij\pm 0.5}^{k+1}}{h_2^2} \right), \quad X^+ = -\frac{\chi_{i+0.5j}^{k+1}}{h_1^2}, \quad X^- = -\frac{\chi_{i-0.5j}^{k+1}}{h_1^2},$$

$$Y^+ = -\frac{\chi_{ij+0.5}^{k+1}}{h_2^2}, \quad Y^- = -\frac{\chi_{ij-0.5}^{k+1}}{h_2^2}.$$

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} XY & Y^+ & 0 & X^+ & \dots & \dots & 0 \\ Y^- & XY & Y^+ & 0 & X^+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & X^- & 0 & Y^- & XY & Y^+ \\ 0 & \dots & \dots & X^- & 0 & Y^- & XY \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G = A^{-1}.$$

Построим консервативную конечномерную аппроксимацию (1)–(5) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D по x, y, t соответственно на N_1, N_2, N_3 равных частей: $D = \bigcup_{k=1}^{N_3} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} D_{ij}^k$, где $D_{ij}^k = \{(x, y, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, t_{k-1} \leq t \leq t_k\}$, $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$, $k = \overline{1, N_3}$. Обозначим через $S_{N_1 N_2}^{N_3}(D) \subset L_2(D)$ подпространство, в котором определены кусочно-постоянные функции вида $f(x, y, t) = f_{ij}^k(x, y, t) \in D_{ij}^k$ ($i = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$, $k = \overline{1, N_3}$). Введём в $S_{N_1 N_2}^{N_3}(D)$ базис, состоящий из функций $e_{ij}^k(x, y, t) = 1$, $(x, y, t) \in D_{ij}^k$ и $e_{ij}^k(x, y, t) = 0$, $(x, y, t) \notin D_{ij}^k$. Тогда $f(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij}^k e_{ij}^k(x, y, t)$. Пусть $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$, $g_{pq} = (Ge_{pq}^k, e_{ij}^k)$, $(m(x, y, t), e_{ij}^k(x, y, t)) = m_{ij}^k$, $(M(x, y, t), e_{ij}^k(x, y, t)) = M_{ij}^k$, $\hat{f}_q^k = f_{ij}^k$, ($p = q$, $q = (i-1)(N_2-1) + j$), $p = \overline{1, N}$, $q = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$, $k = \overline{1, N_3}$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение

для $f(x, y, t)$ в (1) и скалярно умножим неравенства (5) на $e_{ij}^k(x, y, t)$ в $L_2(D)$. Получим задачу линейного программирования

$$J_k\{f\} = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\text{mes} D_{ij}^k) f_{ij}^k \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \dots, N_3,$$

$$m_{ij}^k \leq \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k \leq M_{ij}^k, \quad (6)$$

$$p = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3},$$

$$\tilde{f}_q^k \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_3.$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция

$$u_{ij}^k = \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k, \quad (i = (p-1) \div (N_1 - 1) + 1, \quad j = (q-1) \bmod (N_2 - 1) + 1)$$

которая является решением краевой задачи (2) с \tilde{f}_q^k , где обозначение \div есть символ целочисленного деления, а \bmod есть символ остатка от деления. При этом задача (6) решается симплекс-методом.

- [1] Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне / Тез. докл. Междунар. конф. “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”. Фергана: ФГУ, 2020. Т. 1. С. 346–348.
- [2] Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в параллелепипеде / Тез. докл. Респ. онлайн конф. “Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий”. Бухара: БухГУ, 2020. С. 343–345.
- [3] Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне / Узбекско-Малайзийская междунар. онлайн конф. “Вычислительные модели и технологии (ВМТ2020)”. Ташкент: НУУз, 2020. С. 250–252.
- [4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.

Дифференциальная игра сближения-уклонения: проблема релаксации и программные конструкции

А. Г. Ченцов^{1,2}

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

1. Введение

Рассматривается дифференциальная игра (ДИ), для которой Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным была установлена фундаментальная теорема об альтернативе [1, 2]. В данной ДИ параметрами являются целевое множество (ЦМ) и множество, формирующее фазовые ограничения (ФО) в задаче игрока I (задача сближения). Задача игрока II противоположна. В [1, 2] множества — параметры ДИ — предполагались замкнутыми в пространстве позиций. В докладе обсуждается случай, когда ЦМ замкнуто, а множество, формирующее ФО, имеет замкнутые сечения, отвечающие фиксации момента времени. Для этого случая установлен вариант альтернативы в специальных классах стратегий. Рассматривается релаксация задачи сближения, при которой ЦМ и множество, задающее ФО, заменяются окрестностями, причем размеры этих окрестностей могут быть различными, но связанными линейной зависимостью, определяемой специальным параметром приоритетности. В рамках данных построений каждой позиции сопоставляется аналог наименьшего размера окрестностей, при которых игрок I гарантирует успешное решение задачи сближения при ослабленных упомянутым образом условиях окончания игры (при этом сами окрестности ЦМ и множества, задающего ФО, определяются по-разному). Привлекая метод программных итераций (МПИ) [3, 4] для возникающей в процессе релаксации функции позиции определяем аппроксимирующую последовательность функций, реализуемую посредством итерационной процедуры в функциональном пространстве. При этом сама искомая функция является неподвижной точкой

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Институт радиоэлектроники и информационных технологий Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

оператора, определяющего упомянутую процедуру, и, вместе с тем, функцией цены для системы ДИ со специальными функционалами качества. Основным методом исследования является МПИ, реализуемый в двух вариантах: 1) итерационная процедура на семействе множеств, точками которых являются позиции игры; 2) аналогичная процедура на пространстве функций позиции. Предполагается, что управляемая система удовлетворяет условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений, подобных используемым А. В. Кряжимским в [5] при доказательстве альтернативы для случая системы, не удовлетворяющей условию Липшица по фазовой переменной.

2. Общая структура работы

1) Исследование вопросов, связанных с альтернативной разрешимостью ДИ сближения-уклонения в условиях, когда ЦМ замкнуто, а множество, определяющее ФО, имеет замкнутые сечения (оно является, однако, замкнутым в другой метризуемой топологии пространства позиций; упомянутая топология сильнее топологии покоординатной сходимости). Игрок I использует (многозначные обобщенные) квазистратегии, а игрок II — специальные стратегии (стратегии-тройки [4]) с неупреждающим формированием моментов коррекции реализующегося управления.

2) Построение релаксации задачи сближения в условиях линейной зависимости параметров, определяющих размеры окрестностей ЦМ и множества, задающего ФО. Сами окрестности соответствуют двум сравнимым топологиям пространства позиций, слабейшая из которых — топология покоординатной сходимости. Линейная зависимость характеризуется коэффициентом (параметром) приоритетности и фактически реализует некоторую скаляризацию при различных, вообще говоря, размерах окрестностей. Определяется аналог наименьшего размера окрестностей множеств-параметров, при котором игрок I гарантирует (для заданной позиции) осуществление сближения при упомянутом ослаблении условий окончания игры. Тем самым реализуется функция позиции, которую сейчас назовем основной.

3) Определяется система вспомогательных функционалов качества со следующим свойством: для каждой позиции минимакс соответствующего функционала в классе квазистратегий совпадает со значением основной функции (аналогичное равенство имеет ме-

сто при использовании только специальных квазистратегий, имеваемых квазипрограммами и обладающих улучшенными топологическими свойствами).

4) Вводится специальный оператор, действующий в пространстве неотрицательных функций позиции. Показано, что последовательность функций позиции, определяемая первоначально на основе варианта МПИ, реализуемого на пространстве множеств, и сходящаяся поточечно к основной функции, может быть получена на основе “прямой” итерационной процедуры, порождаемой упомянутым оператором. Устанавливается, что сама основная функция является неподвижной точкой данного оператора, обладающей экстремальностью в порядковом смысле.

5) Исследуется связь с задачей игрока II, использующего стратегии-тройки [4]. Показывается, что значения основной функции определяют при фиксации (начальной) позиции значение задачи на максимум соответствующего вспомогательного функционала из 3) в классе упомянутых стратегий. В итоге каждое значение основной функции совпадает с ценой игры на минимакс-максимум данного функционала.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. Т. 34, № 6, 1970. С. 1005–1022.
- [2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [3] Ченцов А.Г. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 22, № 2, 2016. С. 304–321.
- [4] Ченцов А.Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Тр. ИММ УрО РАН, Т. 23, № 2, 2017. С. 285–302.
- [5] Кряжсимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Доклады АН СССР, Т. 239, № 4, 1978. С. 779–782.

Заметки о дифференциальных играх

С. В. Чистяков

e-mail: svch50@mail.ru

Интерес к задачам, относящимся теперь к дифференциальным играм, возник у естествоиспытателей задолго до возникновения самой теории игр. В этой связи достаточно упомянуть великого Леонардо да Винчи, который ввел понятие кривой погони, а задачи преследования как раз и являются одним из основных объектов исследования теории дифференциальных игр.

Характеризуя иерархию основных классов теоретико-игровых моделей – классов антагонистических, бескоалиционных и кооперативных игр, – инициатор развития теории игр в Советском Союзе Николай Николаевич Воробьев говорил, что теория бескоалиционных игр получается факторизацией по множеству антагонистических игр, а теория кооперативных игр – факторизацией по множеству бескоалиционных игр. В соответствии с этим можно сказать, что центральное место в теории дифференциальных игр занимают именно антагонистические дифференциальные игры, т.е. дифференциальные игры двух лиц с противоположными интересами игроков. Поэтому Андрея Измайловича Субботина, как и его выдающегося учителя Николая Николаевича Красовского – двух основных творцов теории (антагонистических) позиционных дифференциальных игр [1], наряду с Р. Айзексом, У. Флемингом и Л. С. Понтрягиным естественно считать основоположниками теории дифференциальных игр в целом.

Удивительно легко и глубоко А. И. Субботин входил в проблематику самых разных направлений исследования дифференциальных игр, в том числе и тех, которыми он сам вплотную не занимался. Об этом автор этих строк имел возможность убедиться лично во время нескольких своих встреч с ним в Екатеринбурге. Своими последними работами [2, 3] он стимулировал исследования в области обобщенных решений уравнения Гамильтона – Якоби в возглавлявшемся им отделе динамических систем Института математики и механики УрО РАН, которые успешно продолжаются в нем и поныне.

Начало развития теории дифференциальных игр принято свя-

зывать с выходом в свет книги Р. Айзекса [4], в которой он в общих чертах описал свой метод решения антагонистических дифференциальных игр, при этом выделил два основных их класса: игры степени и игры качества. Далее речь пойдет только о первом из них.

Как известно, метод Айзекса состоит в сведении решения дифференциальной игры к решению уравнения типа Гамильтона – Якоби, которое теперь обычно называют уравнением Айзекса или уравнением Беллмана – Айзекса.

Реализация метода Айзекса наталкивается на принципиальную проблему. Как установлено на многочисленных примерах, функция значения (цены) дифференциальной игры (или, иначе, потенциал ее 1-го игрока), в общем случае, не является гладкой, а техника решения основного уравнения «в большом», т.е. техника поиска кусочно-гладких его решений, в сколько-либо завершенном виде, Айзексом разработана не была. Назревала смена парадигмы развития теории дифференциальных игр, которая была подготовлена возникшими во многих работах геометрическими идеями исследования, связанными с такими понятиями как момент первого поглощения и гипотетическое рассогласование [5] или, иначе, функция программного максимина. Альтернативой послужила теория позиционных дифференциальных игр Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [1].

Ядро этой теории составляют предложенное ее авторами оригинальное понятие оптимальности позиционных стратегий, установленная ими теорема об альтернативе и разработанная ими экстремальная конструкция, которая является обобщением и развитием правила экстремального прицеливания, описанного ранее Н. Н. Красовским для линейных игр сближения. Как показано авторами позиционной теории, теорема об альтернативе позволяет установить теорему о существовании оптимальных позиционных стратегий, а экстремальная конструкция дает эффективный инструмент построения оптимальных позиционных стратегий, правда, наиболее легко только в регулярных случаях игры.

В нерегулярных играх реализация экстремальной конструкции наталкивается на проблему построения специальных множеств позиций — максимальных стабильных мостов. Определенный подход к ее решению был предложен А. Г. Ченцовым [6] и назван им методом программных итераций.

Метод допускает свое описание как в теоретико-множественной, так и в функциональной форме, представляющей собой негладкую версию метода динамического программирования, при этом возникающее в ней уравнение можно назвать обобщенным уравнением Беллмана — Айзекса.

Функциональная форма метода программных итераций имеет и самостоятельное значение, ибо на ее основе может быть построена теория дифференциальных игр в целом, охватывающая не только антагонистические, но также бескоалиционные и кооперативные дифференциальные игры, что иллюстрируют работы [7–16].

При построении на этой основе теории антагонистических дифференциальных игр центральное место занимает теорема о существовании и единственности решения обобщенного уравнения Беллмана — Айзекса [9], а также теорема о существовании при любом $\epsilon > 0$ универсальных ϵ -оптимальных позиционных стратегий [10].

В основе теории бескоалиционных дифференциальных игр, строящейся на базе упомянутой выше теории антагонистических дифференциальных игр, лежит теорема (или основная лемма) о существовании управляемой игроками траектории системы, вдоль которой потенциал каждого игрока в определенной, своей для него, антагонистической дифференциальной игре является неубывающей функцией. Следствием основной леммы является теорема о существовании решения бескоалиционной дифференциальной игры в классе рекурсивных стратегий [14].

Среди всех равновесных траекторий в бескоалиционной дифференциальной игре особую роль играют так называемые стабильно равновесные траектории, о существовании которых и идет речь в основной лемме теории бескоалиционных дифференциальных игр. Сужение в каждой возможной текущей позиции множества всех стабильно равновесных траекторий по аналогии с работами [15, 16] составляет суть теории кооперативных дифференциальных игр, ориентированной на преодоление недостатков бескоалиционной теории.

В докладе приводятся некоторые примеры и комментарии к очерченной выше теории дифференциальных игр.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

- [2] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991.
- [3] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [4] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [5] *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [6] *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // *Мат. сб.* 1976. Т. 99, вып. 3. С. 394–420.
- [7] *Chistiakov S. V.* On functional equations in games of encounter at a prescribed instant // *J. of Appl. Math. and Mech.* 1982. Vol. 46, iss. 5. P. 704–706. DOI: 10.1016/0021-8928(82)90023-5
- [8] *Chistyakov S., Nikitin F.* On value operators in differential games // *Appl. Math. Sci.* 2015. Vol. 9, no. 59. P. 2941–2952. DOI: 10.12988/ams.2015.52133
- [9] *Nikitin F.F., Chistyakov S.V.* Existence and uniqueness theorem for a generalized Isaacs–Bellman equation // *Differential Equations.* June 2007. Vol. 43, iss. 6. P. 757–766. DOI: 10.1134/S0012266107060031
- [10] *Чистяков С.В.* Программные итерации и универсальные ϵ -оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 319, № 6. С. 1333–1335.
- [11] *Chentsov A.G., Subbotin A.I.* An iterative procedure for constructing minimax and viscosity solutions to the Hamilton–Jacobi equations and its generalization // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 224(1999). P. 286–309.
- [12] *Nikitin F.F.* Viscosity solutions and programmed iteration method for Isaacs–Bellman equation // *Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10.* 2014. Iss. 2. P. 84–92.
- [13] *Chistyakov S. V.* On Equations of the Program Iteration Method // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* July 2019. Vol. 305, 1. P. S40–S48. DOI: 10.1134/S0081543819040060
- [14] *Чистяков С.В.* О бескоалиционных дифференциальных играх // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 259, № 5. С. 1052–1055.

- [15] Чистяков С.В. О построении сильно динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр // Вестник СПбГУ, сер. 1, № 1. 1992. С. 50–54.
- [16] Адрианов А.А., Чистяков С.В. К теории кооперативных дифференциальных игр // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2008. Вып. 1. С. 3–15.

О построении обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби с трехкомпонентным гамильтонианом

*Л. Г. Шагалова*¹

e-mail: shag@imm.uran.ru

Рассматривается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0, T), x \in R, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Здесь $T > 0$ — заданный момент времени, $u_0(\cdot)$ — непрерывная функция.

Предполагается, что заданы непрерывно дифференцируемые функции $f(\cdot) : R \rightarrow R$ и $g(\cdot) : R \rightarrow R$ такие, что $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей, а $g(\cdot)$ — монотонно убывающей. Пусть точки x_* и x^* — нули функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ соответственно: $f(x_*) = 0$, $g(x^*) = 0$. Будем считать, что справедливо неравенство $x_* < x^*$. Обозначим

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad g^+(x) = \max\{g(x), 0\}, \quad x \in R.$$

Задача (1),(2) рассматривается в предположении, что гамильтониан $H(x, p)$ имеет вид

$$H(x, p) = f^+(x)e^p + g^+(x)e^{-p}. \quad (3)$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Таким образом, область $(0, T) \times R$ разбивается на три подобласти, во внутренности каждой из которых гамильтониан (3) непрерывен:

$$H(x, p) = \begin{cases} g(x)e^{-p}, & (t, x) \in G_- = \{(t, x) | x \leq x_*\}, \\ f(x)e^p + g(x)e^{-p}, & (t, x) \in G_0 = \{(t, x) | x_* < x < x^*\}, \\ f(x)e^p, & (t, x) \in G_+ = \{(t, x) | x \geq x^*\}. \end{cases}$$

При стремлении фазовой переменной x к значениям x_* и x^* слева и справа импульсная переменная p может стремиться к бесконечным значениям разных знаков. Поэтому на линиях $\{(t, x) | 0 < t < T, x = x_*\}$ и $\{(t, x) | 0 < t < T, x = x^*\}$ гамильтониан может быть разрывным.

В области G_0 выполнено условие коэрцитивности гамильтониана

$$H(x, p) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

а в областях G_- и G_+ это условие нарушается.

На основе минимаксного [1] и вязкостного [2] подходов в задаче (1),(2) с гамильтонианом вида (3) осуществляется построение обобщенного решения.

Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона – Якоби. Вместе с тем, такие уравнения возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике [3]. Ранее уравнение с гамильтонианом вида (3) исследовалось (см., например, [4]) в ограниченной по фазовой переменной x области $G_0 = \{(t, x) | 0 < t < T, -1 \leq x \leq 1\}$ в случае $f(x) = (x + 1)/2$, $g(x) = (1 - x)/2$. В данной работе в задаче нет фазовых ограничений, но область, в которой рассматривается уравнение Гамильтона – Якоби, разбивается на три подобласти, в которых гамильтониан задается разными формулами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00362.

- [1] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991.
- [2] *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.

- [3] *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // *Physical Review E*. 2008. Vol. 78, 041908.
- [4] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана с непродолжимыми характеристиками // *Труды ИММ УрО РАН*. 2014. Т. 20, № 4. С. 247–257.

Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением космических аппаратов

А. Ф. Шориков¹, А. Ю. Горанов²

e-mail: afshorikov@mail.ru, goranovayu@mail.ru

1. Описание динамической системы

В работе рассматривается процесс управления сближением двух космических аппаратов (КА) на околоземной орбите. Предполагается, что все необходимые маневры выполняет один из КА (активный КА), который для изменения своей траектории имеет двигательную установку с достаточным запасом топлива, а другой КА в процессе сближения не маневрирует и называется пассивным КА (станцией). Основной целью рассматриваемого процесса управления является сближение этих двух КА при обеспечении в финальный (терминальный) момент времени минимальных значений их относительных дальности и скоростей [1–4].

На промежутке времени $[0, T]$ (T — финальный момент времени для процесса управления, $T \in \mathbb{N}$, \mathbb{N} — множество всех натуральных чисел) рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая движение активного КА в системе координат,

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

связанной с центром масс пассивного КА. Система имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_* & -2\omega_c \dot{y}_* - \omega_c^2 x_* - \dot{\omega}_c y_* + \\ & + r_c^4 \omega_c^2 p^{-1} \left(\sqrt{x_*^2 + (r_c + y_*)^2 + z_*^2} \right)^{-3} x_* = u_{x_*}, \\ \ddot{y}_* & +2\omega_c \dot{x}_* - \omega_c^2 y_* + \dot{\omega}_c x_* + \\ & + r_c^4 \omega_c^2 p^{-1} \left(\sqrt{x_*^2 + (r_c + y_*)^2 + z_*^2} \right)^{-3} (y_* + r_c) = u_{y_*}, \\ \ddot{z}_* & + r_c^4 \omega_c^2 p^{-1} \left(\sqrt{x_*^2 + (r_c + y_*)^2 + z_*^2} \right)^{-3} z_* = u_{z_*}, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_*(t), y_*(t), z_*(t)$ — декартовы геометрические координаты активного КА; $u_{x_*}(t), u_{y_*}(t), u_{z_*}(t)$ — проекции управляющего воздействия на оси относительной системы координат (относительное ускорение); $\omega_c(t)$ — угловая скорость вращения станции вокруг Земли; $r_c(t)$ — радиус-вектор, соединяющий центр масс станции с центром масс Земли; $t \in [0, T]$; p — фокальный параметр эллиптической орбиты.

Исходная нелинейная система (1) может быть линеаризована относительно наперед заданного движения пассивного КА [1, 3], рассматриваемого как опорное движение (которое, по предположению, является допустимым, с заданной точностью, для активного КА), и представлена с помощью системы уравнений Клохесси – Уилтшира:

$$\begin{cases} \ddot{x}_* - 2\omega_c \dot{y}_* + \omega_c^2 (r_c p^{-1} - 1) x_* - \dot{\omega}_c y_* = u_{x_*}, \\ \ddot{y}_* + 2\omega_c \dot{x}_* - \omega_c^2 (2r_c p^{-1} + 1) y_* + \dot{\omega}_c x_* = u_{y_*}, \\ \ddot{z}_* + \omega_c^2 r_c p^{-1} z_* = u_{z_*}. \end{cases} \quad (2)$$

Сформированной системе линейных дифференциальных уравнений (2) ставится в соответствие ее дискретная аппроксимация, которая может быть записана в векторно-матричной форме Коши [5]:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

Здесь t — целочисленный момент времени, $t \in \overline{0, T-1} = \{0, 1, \dots, T-2, T-1\}$; $x(t)$ — фазовый вектор системы, $x(t) \in \mathbb{R}^6$; x_0 — заданное начальное значение фазового вектора; $u(t)$ — вектор управляющего воздействия (управления), $u(t) \in \mathbb{R}^3$; $A(t)$ — матрица состояния, $A(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ (предполагается, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$ для матрицы $A(t)$ существует обратная к ней матрица $A^{-1}(t)$); $B(t)$ — матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$.

Считаем, что фазовый вектор, характеризующий относительное расстояние между активным КА и станцией, а также вектор управления $u(t)$ удовлетворяют следующим заданным геометрическим ограничениям:

$$\forall t \in \overline{0, T}, x(t) \in \mathbf{X}^*(t) \subset \mathbb{R}^6, \forall t \in \overline{0, T-1}, u(t) \in \mathbf{U}^*(t) \subset \mathbb{R}^3, \quad (4)$$

где множества $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ — выпуклые многогранники-компакты (с конечным числом вершин) в пространствах \mathbb{R}^6 и \mathbb{R}^3 соответственно.

2. Постановка задачи управления

Пусть $\mathbf{U}(\overline{0, T})$ — множество всех допустимых программных управлений на фиксированном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T}$, соответствующих ограничениям (4) [8].

Тогда для допустимого программного управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$ качество процесса управления в динамической системе (3), (4) оценивается значением выпуклого терминального функционала $J_{(\overline{0, T}, x_0)} : \mathbf{U}(\overline{0, T}) \rightarrow \mathbb{R}^1$, определяемого по формуле

$$J_{(\overline{0, T}, x_0)}(u(\cdot)) = \|\bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot))\|_6 = \|x(T)\|_6, \quad (5)$$

где $x(T) = \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(T)$ — фазовый вектор, описывающий местоположение и скорость активного КА относительно пассивного КА в финальный момент времени T ; $\|\cdot\|_6$ — евклидова норма в векторном пространстве \mathbb{R}^6 .

Целью рассматриваемого процесса программного терминального управления сближением двух КА на рассматриваемом промежутке времени $\overline{0, T}$ является нахождение такого допустимого программного управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$, при котором терминальный функционал вида (5) принимал бы наименьшее возможное значение.

Основываясь на вышеизложенном, можно сформулировать следующую задачу оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА.

Задача. Для дискретной управляемой динамической системы (3), (4), описывающей динамику процесса сближения двух КА на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T}$ при фиксированном начальном фазовом векторе $x(0) = x_0$, требуется найти множество оптимальных программных терминальных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0, T}) \subseteq \mathbf{U}(\overline{0, T})$ таких, что для любого управления

$u^{(e)}(\cdot) \in \mathbf{U}^{(e)}(\overline{0, T})$ терминальный критерий качества $J_{(\overline{0, T}, x_0)}$ вида (5) принимал бы наименьшее значение $J^{(e)}$, а именно, выполнялось следующее условие оптимальности:

$$\begin{aligned} J^{(e)} &= J_{(\overline{0, T}, x_0)}(u^{(e)}(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})} \|\bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot))\|_6 = \\ &= \|\bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot))\|_6 = \|x^{(e)}(T)\|_6 = \bar{J}(x^{(e)}(T)). \end{aligned}$$

Здесь $x^{(e)}(T) = \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(T)$ — оптимальный финальный фазовый вектор, характеризующий местоположение и скорость активного КА относительно пассивного КА в финальный момент времени T , который является финальным сечением фазовой траектории $x^{(e)}(\cdot) = \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(\cdot)$ активного КА, соответствующей набору $(\overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot))$; функция $\bar{J} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$ для всех $x(T) \in \mathbf{X}^*(T)$ определяется по формуле

$$\bar{J}(x(T)) = \|x(T)\|_6.$$

Предлагаемый в докладе алгоритм решения сформулированной задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА основывается на методе прямых и обратных конструкций и на общем рекуррентном алгебраическом методе построения областей достижимости [8–10], которые разработаны Шориковым А.Ф. применительно к линейным дискретным управляемым системам при наличии геометрических ограничений в виде выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) на векторы управляющих воздействий, а также решении задачи выпуклого математического программирования. Полученные результаты демонстрируются на модельных примерах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00544.

- [1] *Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г.* Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987.
- [2] *Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., Пантюшин С.В.* Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука, 1977.
- [3] *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Мартынов А.И.* Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом. М.: Машиностроение, 1981.

- [4] *Лебедев А.А., Соколов В.Б.* Встреча на орбите: динамика полета и управление космическим аппаратом. М.: Машиностроение, 1969.
- [5] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [6] *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [7] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [8] *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
- [9] *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1994. № 4. С. 115–127.
- [10] *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы / Негладкие задачи оптимизации и управление. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 55–61.

Равновесие по Бержу

*В. И. Жуковский*¹

e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Излагаются истоки и составные части формирующейся математической теории равновесия по Бержу. Дано детальное сравнение с общепризнанным равновесием по Нэш.

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

A tree structure algorithm for optimal control problems with state constraints

*M. Falcone*¹

e-mail: `falcone@mat.uniroma1.it`

We present a tree structure algorithm for optimal control problems with state constraints. The Dynamic Programming approach is developed by a discretization in time leading to a tree structure in space derived by the controlled dynamics. In this construction, the state constraints are taken into account to cut several branches of the tree.

Moreover, an additional pruning is obtained to reduce the complexity of the tree as in the case without state constraints. Since the method does not use an a priori space grid, no interpolation is needed for the reconstruction of the value function and the accuracy essentially relies on the time step h .

The synthesis of optimal feedback controls is based on the values on the tree and an interpolation of the values obtained on the tree will be necessary if a different discretization in the control space is adopted, *i.e.* to improve the accuracy of the method in the reconstruction of the optimal trajectories.

We prove a convergence result for the approximate value function in the case of convex constraints.

Several examples show how this algorithm can be applied to problems in low dimension even for non convex constraints and compare it to a classical DP method on a grid.

This is a work in collaboration with A. Alla (PUC, Rio de Janeiro) and L. Saluzzi (Sapienza Università di Roma).

¹Università di Roma “La Sapienza”

Список авторов

- Andryushechkina N. A., 50
Averboukh Yu., 35
- Bardi M., 38
Barron E. N., 41
Basar T., 41
- Cardaliaguet P., 38
- Davydov A., 41
Dzhafarov V., 42
- Falcone M., 342
- Guseinov Kh. G., 42
- Huseyin A., 42
Huseyin N., 42
- Khlopin D. V., 45
Kim A. V., 50
Kolpakova E. A., 52
Krasovskii A. N., 55
Kuchkarov I. I., 66
- Ledyayev Y. S., 56
Lokutsievskiy L., 57
- Maksimov V. I., 58
- Ovseevich A., 61
- Pankratova Ya., 72
Petrosian O. L., 66, 70
Petrosyan L., 72
Pimenov V. G., 78
- Rettieva A. N., 82
- Shananin A., 85
Shima T., 91
Subbotina N. N., 86
- Tarasenko M., 85
Tashirova E. E., 78
Troeva M. S., 90
Trusov N., 85
Turetsky V., 91
Tur A., 70
- Weiss M., 91
- Yeung D., 72
- Zhou J., 70
- Азамов А. А., 95
Ананьев Б. И., 96
Андриевский Б. Р., 207
Арутюнов А. В., 99
Асеев С. М., 99
- Багно А. Л., 99
Башкирцева И. А., 104, 272
Бегалиев А. О., 95
Бедин Д. А., 107, 111
Бенараб С., 115
Братусь А. С., 117
Бурлаков Е. О., 119
- Васёв П. А., 122
- Гомоюнов М. И., 126
Горанов А. Ю., 337
Гребенщиков Б. Г., 129
Григоренко Н. Л., 133
Григорьева Э. В., 133

- Гриних А. Л., 137
Гусев М. И., 142
- Дмитрук А. В., 146
Долгий Ю. Ф., 149
Дрожжин С. В., 117
Дыхта В. А., 153
- Ершов А. А., 156, 204, 315
- Желонкина Н. И., 158
Жуковская Л. В., 161
Жуковский В. И., 161, 341
Жуковский Е. С., 119
- Завалищин Д. С., 298
Зайцев В. А., 164
Зыков И. В., 167
- Иванов А. Г., 111
Изместьев И. В., 171, 313
- Казаков А. Л., 224
Калев В. И., 174
Камнева Л. В., 179
Кандоба И. Н., 183
Ким И. Г., 164
Клейменов А. Ф., 187
Клименкова А. Д., 133
Козьмин И. В., 183
Колокольцов В. Н., 188
Корнеев В. А., 189
Костоусова Е. К., 193
Красовский Н. А., 198
Крупенников Е. А., 200
Кувшинов О. А., 204
Кудрявцев К. Н., 161
Кудряшова Е. В., 207
Кузнецов Н. В., 207
Кузнецова О. А., 207
- Кумакшев С. А., 211
Кумков С. И., 215
Кумков С. С., 282
Куржанский А. Б., 219
- Ламоткин А. Е., 220
Лебедев П. Д., 309
Лемперт А. А., 224
Ложников А. Б., 129
Лукьянова Л. Н., 227
- Максимов В. П., 232
Мачтакова А. И., 249
Мерчела В., 235
Мисюра Н. Е., 220
Митюшов Е. А., 220
- Никитина С. А., 238
Никольский М. С., 240
Новиков Д. А., 183
Новоселова Н. Г., 243
- Овчинников М. М., 215
Осипов И. О., 142
- Пацко В. С., 246
Петров Н. Н., 249
Петросян Л. А., 137
Плаксин А. Р., 183, 253
Попов А. М., 207
Попова С. Н., 255
Пятко С. Г., 215
- Решмин С. А., 259
Родин А. С., 263
Розенберг В. Л., 268
Ряшко Л. Б., 272
- Самыловский И. А., 146
Серков Д. А., 275

Серова И. Д., 119
Сесекин А. Н., 149, 158
Соколов В. Ф., 278
Спиридонов А. А., 282
Сумин В. И., 286
Сумин М. И., 290
Сурков П. Г., 294

Та Ч. Т., 224
Тарасьев А. М., 99, 198, 305
Тимофеева Г. А., 298
Толстоногов А. А., 300
Точилин П. А., 302

Усова А. А., 219, 305
Успенский А. А., 309
Ухоботов В. И., 238, 313
Ушаков А. В., 156
Ушаков В. Н., 156, 171, 313,
315

Федорова М. В., 255
Федотов А. А., 122, 246
Филишова Т. Ф., 319

Хайиткулов Б. Х., 322
Хайлов Е. Н., 133

Ченцов А. Г., 328
Чистяков И. А., 302
Чистяков С. В., 331

Шагалова Л. Г., 335
Шориков А. Ф., 174, 337

Якушкина Т. С., 117

List of authors

- Ananyev B. I., 96
Andrievsky B. R., 207
Andryushechkina N. A., 50
Arutyunov A., 99
Aseev S. M., 99
Averboukh Yu., 35
Azamov A. A., 95
- Bagno A. L., 99
Bardi M., 38
Barron E. N., 41
Basar T., 41
Bashkirtseva I. A., 104, 272
Bedin D. A., 107, 111
Begaliev A. O., 95
Benarab S., 115
Bratus A., 117
Burlakov E. O., 119
- Cardaliaguet P., 38
Chentsov A. G., 328
Chistiakov I. A., 302
Chistyakov S. V., 331
- Davydov A., 41
Dmitruk A. V., 146
Dolgi Yu. F., 149
Drozhdzhin S., 117
Dykhta V. A., 153
Dzhafarov V., 42
- Ershov A. A., 156, 204, 315
- Falcone M., 342
Fedorova M. V., 255
Fedotov A. A., 122, 246
Filippova T. F., 319
- Gomoyunov M. I., 126
Goranov A. Y., 337
Grebenshchikov B. G., 129
Grigorenko N. L., 133
Grigorieva E. V., 133
Grinikh A. L., 137
Guseinov Kh. G., 42
Gusev M. I., 142
- Huseyin A., 42
Huseyin N., 42
- Ivanov A. G., 111
Izmest'ev I. V., 171, 313
- Kalev V. I., 174
Kamneva L. V., 179
Kandoba I. N., 183
Kazakov A. L., 224
Khailov E. N., 133
Khayitkulov B. Kh., 322
Khlopin D. V., 45
Kim A. V., 50
Kim I. G., 164
Kleimenov A. F., 187
Klimenkova A. D., 133
Kolokoltsov V. N., 188
Kolpakova E. A., 52
Korneev V. A., 189
Kostousova E. K., 193
Kozmin I. V., 183
Krasovskii A. N., 55
Krasovskii N. A., 198
Krupennikov E. A., 200
Kuchkarov I. I., 66
Kudryashova E. V., 207
Kudryavtsev K. N., 161

- Kumakshev S. A., 211
Kumkov S. I., 215
Kumkov S. S., 282
Kurzanskii A. B., 219
Kuvshinov O. A., 204
Kuznetsova O. A., 207
Kuznetsov N. V., 207
- Lamotkin A. E., 220
Lebedev P. D., 309
Ledyayev Y. S., 56
Lempert A. A., 224
Lokutsievskiy L., 57
Lozhnikov A. B., 129
Lukianova L. N., 227
- Machtakova A. I., 249
Maksimov V. I., 58
Maksimov V. P., 232
Merchela W., 235
Misyura N. E., 220
Mityushov E. A., 220
- Nikitina S. A., 238
Nikolskii M. S., 240
Novikov D. A., 183
Novoselova N. G., 243
- Osipov I. O., 142
Ovchinnikov M. M., 215
Ovseevich A., 61
- Pankratova Ya., 72
Patsko V. S., 246
Petrosian O. L., 66, 70
Petrosyan L., 72
Petrosyan L. A., 137
Petrov N. N., 249
Pimenov V. G., 78
Plaksin A. R., 183, 253
- Popova S. N., 255
Popov A. M., 207
Pyatko S. G., 215
- Reshmin S. A., 259
Rettieva A. N., 82
Rodin A. S., 263
Rozenberg V. L., 268
Ryashko L. B., 272
- Samylovskiy I. A., 146
Serkov D. A., 275
Serova I. D., 119
Sesekin A. N., 149, 158
Shagalova L. G., 335
Shananin A., 85
Shima T., 91
Shorikov A. F., 174, 337
Sokolov V. F., 278
Spiridonov A. A., 282
Subbotina N. N., 86
Sumin M. I., 290
Sumin V. I., 286
Surkov P. G., 294
- Tarasenko M., 85
Tarasyev A. M., 99, 198, 305
Tashirova E. E., 78
Ta T. T., 224
Timofeeva G. A., 298
Tochilin P. A., 302
Tolstonogov A. A., 300
Troeva M. S., 90
Trusov N., 85
Turetsky V., 91
Tur A., 70
- Ukhobotov V. I., 238, 313
Ushakov A. V., 156

Ushakov V. N., 156, 171, 313,
315

Usova A. A., 219, 305

Uspenskii A. A., 309

Vasev I. I., 122

Weiss M., 91

Yakushkina T., 117

Yeung D., 72

Zaitsev V. A., 164

Zavalishchin D. S., 298

Zhelonkina N. I., 158

Zhou J., 70

Zhukovskaya L. V., 161

Zhukovskiy E. S., 119

Zhukovskiy V. I., 161, 341

Zykov I. V., 167

Научное издание

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
И ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОВИ

Материалы III Международного семинара, посвящённого
75-летию академика А. И. Субботина

Ответственный за выпуск *А. Г. Иванов*

Подписано в печать 15.10.2020. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 22.00. Тираж 140 экз. Заказ 6991.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук.
620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

Отпечатано ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, д. 35а, оф. 2.

