Дискретная задача управления с помехой и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств

С.А.Никитина,
В.И.Ухоботов

ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

г. Екатеринбург,
26—30 октября 2020

Пусть задан управляемый процесс

$$z(k+1) = z(k) - \sum_{i=1}^{N} a_i(k)u_i + \sum_{j=1}^{M} b_j(k)v_j, \qquad (1)$$

где $k = 0, \dots, p,\ z(k) \in \mathbb{R}^n, u_i \in U_i, v_j \in V_j, a_i(k) \geq 0, b_j(k) \geq 0,$
p — фиксированный момент времени;

$U_i \subset \mathbb{R}^n$ и $V_j \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества.

Задано выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Цель выбора управления $u_i \in U_i, i = 1, \ldots, N$ заключается в осуществлении включения

$$z(p) \in X \qquad (2)$$

при любой допустимой реализации помехи $v_j, j = 1, \ldots, M$.

Введем оператор T_k

$$T_k(Y) = \left(X + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} b_j(k)V_j. \tag{3}$$

Здесь с помощью $A \overset{*}{-} B$ обозначена геометрическую разность [1] множеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$.

[1] Понтрягин, Л. С. Линейные дифференциальные игры, II / Л. С. Понтрягин. // Докл.АН СССР, — 1967. —Т.175, — № 4. — С. 764–766.

Известно [2], что выполнено следующее свойство: пусть множество X является выпуклым, а числа $\sigma_i \geq 0, \epsilon_i > 0, i = 1, \dots, N,\ \delta_j \geq 0, \gamma_j > 0, j = 1, \dots, M$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \leq \min_{1 \leq j \leq M} \frac{\delta_j}{\gamma_j}.$$

Тогда

$$\left(\left(X + \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i U_i\right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} \gamma_j(k) V_j + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i U_i\right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} \delta_j V_j =$$

$$= \left(X + \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_i + \sigma_i) U_i\right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (\gamma_j + \delta_j) V_j. \qquad (4)$$

[2] В. И. Ухоботов К вопросу об окончании игры за первый момент поглощения. Прикладная математика и механика. 1984. Том 48, № 6, с. 892–897.

В работе [3] доказана следующая лемма.
Лемма. Для любого выпуклого множества K и любых чисел $\alpha_j \geq \beta_j \geq l_j \geq 0,\ \alpha_j \geq \beta_j + f_j, f_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, M$ выполнено включение

$$\left(K + \sum_{j=1}^{M} (\beta_j - l_j) V_i \right) \stackrel{*}{-} \sum_{j=1}^{M} f_j V_j \supset$$

$$\supset K \stackrel{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_j - \beta_j) V_j + \sum_{j=1}^{M} (\alpha_j - l_j - f_j) V_j .$$

[3] В. И. Ухоботов Стабильный мост в игре с вектограммами, зависящими линейно от заданных множеств. Известия высших учебных заведений. 1988. Том 2, с. 63–65.

Обозначим

$$W(k) = \left(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k}^{p} a_i(s) U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k) V_j + \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - \sum_{s=k}^{p} b_j(s)) V_j \qquad (5)$$

Теорема. Пусть $y_j(s), s = 0, \ldots, p, j = 1, \ldots, M$ в формуле (5) удовлетворяет условиям

$$y_j(p) = 0 \text{ и}$$

$$y_j(k+1) = y_j(k) - \max\left\{ b_j(k); y_j(k+1) \cdot \max_{1 \le i \le N} \left(\frac{a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)} \right) \right\}. \tag{6}$$

Тогда для множеств (5) выполнено

$$W(p) = X; \; W(k) \subset T_k(W(k+1)). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Равенство $W(p) = X$ следует из (5) и условия $y_j(p) = 0$.
Далее из (6) следует, что

$$y_j(k+1) - y_j(k) \le -\frac{y_j(k+1)\cdot a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)},$$

$$i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, M.$$

Поэтому

$$(y_j(k) - y_j(k+1)) \sum_{s=k+1}^{p} a_i(s) \ge y_j(k+1)\cdot a_i(k),$$

$$i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, M.$$

Следовательно, выполняются неравенства

$$\min_{1\le j\le M} \frac{y_j(k) - y_j(k+1)}{y_j(k+1)} \ge \max_{1\le i\le N} \frac{a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)}. \qquad (8)$$

Из (6) получим, что

$$y_j(k) - y_j(k+1) \geq b_j(k), j = 1, \ldots, M. \qquad (9)$$

Обозначим

$$\alpha_j = y_j(k),\ \beta_j = y_j(k+1),$$

$$l_j = \sum_{s=k}^{p} b_j(s),\ \ f_j = b_j(k),\ j = 1, \ldots, M.$$

Тогда из неравенств (9) следует, что эти числа удовлетворяют неравенствам, содержащимся в формулировке леммы.

Рассмотрим множество $T_k(W(k+1))$ и покажем, что выполнено $W(k) \subset T_k(W(k+1))$. Из (3) и (5) следует, что

$$T_k(W(k+1)) = \left(W(k+1) + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i\right) \stackrel{*}{-} \sum_{j=1}^{M} b_j(k)V_j =$$

$$= [(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)U_i) \stackrel{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k+1)V_j + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} (y_j(k+1) - \sum_{s=k+1}^{p} b_j(s))V_j] \stackrel{*}{-} \sum_{j=1}^{M} b_j(k)V_j.$$

Отсюда, используя лемму, получим

$$T_k(W(k+1)) \supset$$

$$\supset [(X+\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)U_i) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k+1)V_j + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M}(y_j(k)-y_j(k+1))V_j + \sum_{j=1}^{M}(y_j(k)-\sum_{s=k}^{p} b_j(s))V_j.$$

Применим к множеству, стоящему в правой части последнего включения, равенство (4), используя при этом неравенство (8). Тогда

$$T_k(W(k+1)) \supset [(X + \sum_{i=1}^{N}(\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s) + a_i(k))U_i)] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M}(y_j(k+1)+y_j(k)-y_j(k+1))V_j + \sum_{j=1}^{M}(y_j(k)-\sum_{s=k}^{p} b_j(s))V_j =$$

$$= [(X+\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=k}^{p} a_i(s)U_i)] \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k)V_j + \sum_{j=1}^{M}(y_j(k)-\sum_{s=k}^{p} b_j(s))V_j.$$

С учетом обозначений (5) получим требуемое включение $W(k) \subset T_k(W(k+1))$. Таким образом, условия (7) выполнены. Теорема доказана.

Построенное семейство множеств $W(k), k = 0, \ldots, p$ позволяет записать условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение включения (2) в момент окончания процесса управления (1).

Рассмотрим задачу управления запасами [4]

$$x(k+1) = x(k) + a(k) \cdot u - \sum_{j=1}^{M} b_j(k) v_j^*, k = 0, 1, \ldots, p. \quad (10)$$

Предполагаем, что $a(k) \geq b_j(k), j = 1, \ldots, M$.

Пусть $x(k) = \left(x^1(k); x^2(k)\right)$, где $x^1(k), x^2(k)$ - количество товаров первого и второго вида, имеющихся в наличии на складе в k - ый период времени, $x^1(k) \geq 0, x^2(k) \geq 0$.

$u = (u^1; u^2),\ a(k) \cdot u^1(k), a(k) \cdot u^2(k)$ - количество товара первого и второго вида, произведенного за период k.

Величина $\sum_{j=1}^{M} b_j(k) v_j^*$ - определяется спросом на продукцию в k - й период.

[4] Пропой, А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М.: Наука, 1973. —256 с.

Пусть к концу p - го периода требуется, чтобы выполнялось условие

$$c_1 x^1(p) + c_2 x^2(p) \leq \epsilon, \tag{11}$$

$c_1, c_2 > 0, x^1(p) \geq 0, x^2(p) \geq 0.$

Это условие можно рассматривать как ограничение на ёмкость склада.

Введем управления $u_1 = (-u^1; 0)$, $u_2 = (0; -u^2)$, и $v_j = -v_j^*$.
Тогда (10) можно записать в виде (1).
Обозначим множества

$$U_1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u = (u^1; 0) \right\},$$

$$U_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u = (0; u^2) \right\},$$

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^1 + x^2 \le \epsilon, x^1 \ge 0, x^2 \ge 0 \right\}.$$

Цель (11) процесса управления (10) запишется в виде

$$x(p) \in X.$$

Из неравенства $a(k) \geq b_j(k),\ j = 1, \ldots, M$ следует, что

$$y_j(k) = \sum_{s=k}^{p} a(s), k = 0, ..., p-1,\ y_j(p) = 0,\ \forall j = 1, \ldots M$$

удовлетворяет условиям (6).
Тогда, подставляя $y_j(k)$ в (5), получим

$$W(k) = \left(X + \sum_{s=k}^{p} a(s)(U_1 + U_2) \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} \sum_{s=k}^{p} a(s) V_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \sum_{s=k}^{p} \left(a(s) - b_j(s)\right) V_j.$$

Таким образом, чтобы к концу заданного периода времени ограничения на ёмкость склада были выполнены, в начальный момент времени запас товаров на складе должен удовлетворять условию $x(0) = \big(x^1(0), x^2(0)\big) \in W(0)$.

Спасибо за внимание!