РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю.Ф. Долгий, А.Н. Сесекин

Уральский федеральный университет
ИММ УрО РАН
Екатеринбург
jury.dolgy@urfu.ru, sesekin@list.ru

Введение

Объект управления описывается автономной линейной системой с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + B\frac{dv(t)}{dt}, \qquad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, A_0, A_1, B — постоянные матрицы, $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^r$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке.
Предполагается, что $rankB = r \leq n$.
Под решением импульсной системы (1) понимается решение интегрального уравнения

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t (A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau))\, ds$$

$$+B\left(v(t) - v(0)\right), \; t \in \mathbb{R}^+.$$

Введение

Для любой начальной функции $\varphi \in \mathbb{H}_1$ существует единственное решение $x(t, \varphi, v)$, $t > 0$, этого уравнения, удовлетворяющее условию $x(t, \varphi, v) = \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$. Здесь $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_H = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$. Из метода последовательных приближений следует, что решение интегрального уравнения является функцией с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке положительной полуоси $\mathbb{R}^+$.

Введение

Рассматривается задача оптимальной стабилизации с критерием качества переходных процессов

$$J = \int\limits_0^{+\infty} (x^\top(t) C_x x(t) + \alpha v^\top(t) v(t)) dt, \tag{2}$$

где C_x — положительно определенная матрица, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. В предельном случае $\alpha = 0$ критерий качества переходных процессов является вырожденным.
В результате замены

$$y(t) = x(t) - Bv(t),\ t \geq -\tau, \tag{3}$$

получим задачу оптимальной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t-\tau) + A_0 B v(t) + A_1 B v(t-\tau),\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Введение

Критерий качества переходных процессов будет иметь вид

$$\hat{J} = \int\limits_0^{+\infty} \omega[x(t), v(t)]dt =$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(y^\top(t)C_{yy}y(t) + y^\top(t)C_{yv}v(t) + v^\top(t)C_{yv}^\top y(t) + v^\top(t)C_{vv}v(t)\right) dt, \tag{5}$$

где $C_{yy} = C_x$, $C_{yv} = C_xB$, $C_{vv} = B^\top C_xB + \alpha I_r$.
При решении невырожденной задачи оптимальной стабилизации (4), (5) используется принцип динамического программирования Беллмана [1]. Определяющая система уравнений оптимальной стабилизации построена в [2]. В настоящей работе предлагается метод ее решения. Другой метод решения этой задачи предложен в [3].

Задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

Используем описание постановки задачи оптимальной стабилизации (4), (5) в функциональных пространствах состояний $\mathbb{H}$ и управлений $\mathbb{E} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^r$ [4]. В гильбертовом пространстве $\mathbb{E}$ скалярное произведение определяется формулой $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_E = \mathbf{u}^\top(0)\mathbf{v}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{u}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta$.
Системе (4) ставится в соответствие дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}_t}{dt} = \mathfrak{A}\mathbf{y}_t + \mathfrak{B}\mathbf{v}_t,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{y}_t(\vartheta) = y(t+\vartheta)$, $\mathbf{v}_t(\vartheta) = v(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\mathbf{y}_t \in \mathbb{H}$, $\mathbf{v}_t \in \mathbb{E}$.
Неограниченный оператор $\mathfrak{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{H} : \mathbf{y} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\}$ определяется формулами

$$(\mathfrak{A}\mathbf{y})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{y}(\vartheta)}{d\vartheta},\ \vartheta \in [-\tau, 0),\ (\mathfrak{A}\mathbf{y})(0) = A_0\mathbf{y}(0) + A_1\mathbf{y}(-\tau).$$

Задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

Неограниченный оператор $\mathfrak{B} : \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathfrak{B}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E} : \mathbf{v}(-\tau) \in \mathbb{R}^r\}$ определяется формулами

$$(\mathfrak{B}\mathbf{v})(\vartheta) = 0,\ \vartheta \in [-\tau, 0),\ (\mathfrak{B}\mathbf{v})(0) = A_0 B\mathbf{v}(0) + A_1 B\mathbf{v}(-\tau).$$

Критерий качества переходных процессов имеет вид

$$\mathbf{J} = \int\limits_0^{+\infty} \omega[\mathbf{y}_t, \mathbf{v}_t]dt. \tag{7}$$

Здесь
$\omega[\mathbf{y}, \mathbf{v}] = \langle \mathbf{C}_{\mathbf{yy}}\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle_H + \langle \mathbf{C}_{\mathbf{yv}}\mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle_H + \langle \mathbf{y}, \mathbf{C}_{\mathbf{yv}}\mathbf{v}\rangle_H + \langle \mathbf{C}_{\mathbf{vv}}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_E.$

Задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

Ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathbf{C_{yy}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{C_{yy}y})(\vartheta) = 0,\ \vartheta \in [-\tau, 0),\ (\mathbf{C_{yy}y})(0) = C_x\mathbf{y}(0).$$

Ограниченный оператор $\mathbf{C_{yv}} : \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{C_{yv}v})(\vartheta) = 0,\ \vartheta \in [-\tau, 0),\ (\mathbf{C_{yv}v})(0) = C_xB\mathbf{v}(0).$$

Ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор $\mathbf{C_{vv}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ определяется формулами

$$(\mathbf{C_{vv}v})(\vartheta) = 0,\ \vartheta \in [-\tau, 0),\ (\mathbf{C_{vv}v})(0) = B^\top C_xB\mathbf{v}(0).$$

Уравнение Беллмана

Постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональных пространствах состояний и управлений облегчает ее решение. При решении задачи оптимальной стабилизации (6), (7) используется уравнение Беллмана [?]

$$\min_{\mathbf{v}_t(0)}\{\frac{dV}{dt}|_{(5)}(\mathbf{y}_t,\mathbf{v}_t)+\omega[\mathbf{y}_t,\mathbf{v}_t]\}=0. \tag{8}$$

Для квадратичного функционала Беллмана используется представление

$$V[\mathbf{y},\mathbf{v}]=\langle\mathbf{U}_1\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle_H+\langle\mathbf{U}_2\mathbf{v},\mathbf{y}\rangle_H+\langle\mathbf{y},\mathbf{U}_2\mathbf{v}\rangle_H+\langle\mathbf{U}_3\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_2, \tag{9}$$

где скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$ определяется формулой $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_2=\int_{-\tau}^{0}\mathbf{u}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta$.

Уравнение Беллмана

Ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{U}_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{U}_1\mathbf{y})(\vartheta) = K_1(\vartheta, 0)\mathbf{y}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} K_1(\vartheta, s)\mathbf{y}(s)ds, \ \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$K_1^{\top}(\vartheta, s) = K_1(s, \vartheta), \ \vartheta, s \in [-\tau, 0].$$

Ограниченный оператор $\mathbf{U}_2 : \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r) \to \mathbb{H}$ определяется формулой

$$(\mathbf{U}_2\mathbf{v})(\vartheta) = \int\limits_{-\tau}^{0} K_2(\vartheta, s)\mathbf{v}(s)ds, \ \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{U}_3 : \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r) \to \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r)$ определяется формулами

$$(\mathbf{U}_3\mathbf{v})(\vartheta) = \int\limits_{-\tau}^{0} K_3(\vartheta, s)\mathbf{v}(s)ds,\ \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$K_3^\top(\vartheta, s) = K_3(s, \vartheta),\ \vartheta, s \in [-\tau, 0].$$

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

В уравнении Беллмана квадратичный функционал $\omega[\mathbf{y},\mathbf{v}]$ ограничен на пространствах функций $\mathbb{H}$ и $\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$. Находим производную функционала Беллмана

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}|_{(5)}(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{U}_1\left(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\right),\mathbf{y}\rangle_H$$

$$+\langle \mathbf{U}_2\mathbf{v},\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}\rangle_H + \langle \mathbf{y},\mathbf{U}_2\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_H + \langle \mathbf{v},\mathbf{U}_3\mathbf{D}\mathbf{v}\rangle_2, \qquad (10)$$

где $\mathbf{D}:\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)\to\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$ — неограниченный оператор дифференцирования, $(\mathbf{D}\mathbf{v})(\vartheta)=d\mathbf{v}(\vartheta)/d\vartheta$, $-\tau\le\vartheta\le 0$.
Квадратичный функционал, определяемый этой производной, неограничен на пространствах функций $\mathbb{H}$ и $\mathbb{L}_2([-\tau,0],\mathbb{R}^r)$.
Введем гильбертовые пространства функций
$\mathbb{H}_2=\mathbb{R}^n\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}_2=\mathbb{R}^r\times\mathbb{L}_2((-\tau,0),\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}^r$ со скалярными произведениями
$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{H2}=\mathbf{y}^\top(-\tau)\mathbf{x}(-\tau)+\mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0)+\int_{-\tau}^0\mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$,
$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{E2}=\mathbf{v}^\top(-\tau)\mathbf{u}(-\tau)+\mathbf{v}^\top(0)\mathbf{v}(0)+\int_{-\tau}^0\mathbf{v}^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta$.

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

Найдем сужение квадратичного функционала, определяемого производной функционала Беллмана, на пространства $\mathbb{H}_2$, $\mathbb{E}_2$. Имеют место формулы

$$(\mathbf{U}_1(\mathfrak{A}\mathbf{y}+\mathfrak{B}\mathbf{v}))(\vartheta)=(K_1(\vartheta,0)A_0+K_1(\vartheta,-0))\,\mathbf{y}(0)+K_1(\vartheta,0)A_0B\mathbf{v}(0)$$

$$+(K_1(\vartheta,0)A_1-K_1(\vartheta,-\tau))\,\mathbf{y}(-\tau)+K_1(\vartheta,0)A_1B\mathbf{v}(-\tau)-\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial K_1(\vartheta,s)}{\partial s}\mathbf{y}(s)ds$$

$$(\mathbf{U}_2\mathbf{D}\mathbf{v})(\vartheta)=K_2(\vartheta,-0)\mathbf{v}(0)-K_2(\vartheta,-\tau)\mathbf{v}(-\tau)-\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial K_2(\vartheta,s)}{\partial s}\mathbf{v}(s)ds,$$

$$(\mathbf{U}_3\mathbf{D}\mathbf{v})(\vartheta)=K_3(\vartheta,-0)\mathbf{v}(0)-K_3(\vartheta,-\tau)\mathbf{v}(-\tau)-\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{\partial K_3(\vartheta,s)}{\partial s}\mathbf{v}(s)ds,$$

$$-\tau\le\vartheta<0.$$

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

Лемма 1.

Коэффициенты представления квадратичного функционала Беллмана удовлетворяют системе определяющих уравнений

$$\frac{\partial K_1(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial K_1(\vartheta,s)}{\partial s}$$
$$+\left(K_2(\vartheta,-0)+K_1(\vartheta,0)A_0B\right)C_{vv}^{-1}\left(K_2^\top(s,-0)+B^\top A_0^\top K_1^\top(s,0)\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial K_2(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial K_2(\vartheta,s)}{\partial s}$$
$$+\left(K_2(\vartheta,-0)+K_1(\vartheta,0)A_0B\right)C_{vv}^{-1}\left(K_3^\top(s,-0)+B^\top A_0^\top K_2(0,s)\right)=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial K_3(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial K_3(\vartheta,s)}{\partial s}$$
$$+\left(K_3(\vartheta,-0)+K_2^\top(0,\vartheta)A_0B\right)C_{vv}^{-1}\left(K_3^\top(s,-0)+B^\top A_0^\top K_2(0,s)\right), \tag{13}$$

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

Лемма 1.

$$-\tau \leq \vartheta, s < 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1(0,\vartheta)}{\partial \vartheta} &= A_0^\top K_1(0,\vartheta) + K_1(-0,\vartheta) \\ &- \left(K_2(0,-0) + \left(C_x + K_1(0,0)A_0\right)B\right)C_{vv}^{-1} \\ &\times \left(K_2^\top(\vartheta,-0) + B^\top A_0^\top K_1(0,\vartheta)\right), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_2(0,\vartheta)}{\partial \vartheta} &= A_0^\top K_2(0,\vartheta) + K_2(-0,\vartheta) \\ &- \left(K_2(0,-0) + \left(C_x + K_1(0,0)A_0\right)B\right)C_{vv}^{-1} \\ &\times \left(K_3^\top(\vartheta,-0) + B^\top A_0^\top K_2(0,\vartheta)\right), \end{aligned} \tag{15}$$

$$K_1(\vartheta,-\tau) = A_1^\top K_1(0,\vartheta),\ K_2(-\tau,\vartheta) = A_1^\top K_2(0,\vartheta), \tag{16}$$

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

Лемма 1.

$$K_2^\top(\vartheta,-\tau) = B^\top A_1^\top K_1(0,\vartheta),\ K_3(-\tau,\vartheta) = B^\top A_1^\top K_2(0,\vartheta), \tag{17}$$

$$-\tau \le \vartheta < 0,$$

$$K_1(0,-\tau) = K_1(0,0)A_1,\ K_2(0,-\tau) = K_1(0,0)A_1B, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} A_0^\top K_1(0,0) + K_1(0,0)A_0 + K_1^\top(0,-0) + K_1(0,-0) + C_x \\ - \left(K_2(0,-0) + (C_x + K_1(0,0)A_0)\,B\right) C_{vv}^{-1} \\ \times \left(K_2^\top(0,-0) + B^\top\left(C_x + A_0^\top K_1(0,0)\right)\right) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

Доказательство

Элемент $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0(0)$ минимизирующий квадратичный функционал определяется формулой

$$C_{vv}\mathbf{v}^0(0) + \left(K_2^\top(0,-0) + B^\top\left(C_x + A_0^\top K_1(0,0)\right)\right)\mathbf{y}(0)$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(K_2^\top(\vartheta,-0) + B^\top A_0^\top K_1(\vartheta,0)\right)\mathbf{y}(\vartheta)d\vartheta$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\left(K_3^\top(\vartheta,-0) + B^\top A_0^\top K_2(0,\vartheta)\right)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta = 0. \qquad (20)$$

Определяющая система уравнений для квадратичного функционала Беллмана

Доказательство.

Для уравнения Беллмана справедливо тождество

$$\left(\frac{dV}{dt}|_{(5)}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + \omega[\mathbf{y}, \mathbf{v}] \right) |_{\mathbf{v}=\mathbf{v}^0(0)} \equiv 0, \ \mathbf{y} \in \mathbb{H}_2, \ \mathbf{v} \in \mathbb{E}_2.$$

Оно выполняется, когда коэффициенты представления квадратичного функционала Беллмана удовлетворяют системе определяющих уравнений (11–19).

Определяющая система уравнений для оптимального стабилизирующего управления

Систему определяющих уравнений (11)–(19) можно заменить более простой. Введем обозначения $X_1(\vartheta) = K_2(0,\vartheta)$, $X_2(\vartheta) = K_1(0,\vartheta)$, $X_3(\vartheta) = K_3(\vartheta,-0) + K_2^\top(0,\vartheta)A_0B$, $X_4(\vartheta) = K_2(\vartheta,-0) + K_1^\top(0,\vartheta)A_0B$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$. Представление минимизирующего элемента (20) описывается формулой

$$C_{vv}\mathbf{v}^0(0) + D^\top\mathbf{y}(0) + \int_{-\tau}^{0} X_4^\top(\vartheta)\mathbf{y}(\vartheta)d\vartheta + \int_{-\tau}^{0} X_3^\top(\vartheta)\mathbf{v}(\vartheta)d\vartheta = 0. \quad (21)$$

где $D = X_1(-0) + (C_x + KA_0)\,B$, $K = K_1(0,0)$.

Определяющая система уравнений для оптимального стабилизирующего управления

Лемма 2.

Коэффициенты представления минимизирующего элемента (21) удовлетворяют системе определяющих уравнений

$$X_1'(\vartheta) = A_0^\top X_1(\vartheta) + X_2^\top(-\vartheta-\tau)A_1 B$$

$$+ DC_{vv}^{-1} X_3^\top(\vartheta) + \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s-\vartheta)C_{vv}^{-1} X_3^\top(s)ds, \tag{22}$$

$$X_2'(\vartheta) = A_0^\top X_2(\vartheta) + X_2^\top(-\vartheta-\tau)A_1$$

$$+ DC_{vv}^{-1} X_4^\top(\vartheta) + \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s-\vartheta)C_{vv}^{-1} X_4^\top(s)ds, \tag{23}$$

Определяющая система уравнений для оптимального стабилизирующего управления

Лемма 2.

$$X_3(\vartheta) = X_1^\top(\vartheta)A_0B + B^\top A_1^\top X_1(-\vartheta-\tau) + \int_{-\tau}^{\vartheta} X_3(s)C_{vv}^{-1}X_3^\top(s-\vartheta)ds, \tag{24}$$

$$X_4(\vartheta) = X_2^\top(\vartheta)A_0B + A_1^\top X_1(-\vartheta-\tau) + \int_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s)C_{vv}^{-1}X_3^\top(s-\vartheta)ds, \tag{25}$$

с краевыми условиями

$$X_1(-\tau) = KA_1B,\ X_2(-\tau) = KA_1. \tag{26}$$

Здесь K удовлетворяет матричному уравнению

$$A_0^\top K + KA_0 + DC_{vv}^{-1}D^\top + X_2(-0) + X_2^\top(-0) + C_x = 0. \tag{27}$$

Определяющая система уравнений для оптимального стабилизирующего управления

Теорема

Оптимальное стабилизирующее управление задачи (1), (2) определяется формулой

$$v(t) = -\left(C_{vv} - B^{\top}\hat{D}^{\top}B\right)^{-1} B^{\top}\left(\hat{D}^{\top}x(t) + \int_{-\tau}^{0}\hat{X}_4^{\top}(s)x(t+s)ds\right), \ t > 0. \tag{28}$$

Асимптотика регуляризованных решений задачи оптимальной стабилизации

Ограничимся построением асимптотики для случая $rank B = n$. Решение уравнения

$$\hat{D} + \hat{D}^\top - C_x - \hat{D}\tilde{C}_{vv}\hat{D}^\top = 0,\ \tilde{C}_{vv} = BC_{vv}^{-1}B^\top$$

определяем асимптотической формулой

$$\hat{D} = \hat{D}_0 + \hat{D}_1\alpha^{1/2} + \hat{D}_2\alpha + \hat{D}_3\alpha^{3/2} + O(\alpha^2), \tag{29}$$

коэффициенты которой находятся из следующих систем уравнений

$$\hat{D}_0 + \hat{D}_0^\top - C_x - \hat{D}_0 C_x^{-1}\hat{D}_0^\top = 0,$$
$$\hat{D}_1 + \hat{D}_1^\top - \hat{D}_1 C_x^{-1}\hat{D}_0^\top - \hat{D}_0 C_x^{-1}\hat{D}_1^\top = 0,$$
$$\hat{D}_2 + \hat{D}_2^\top - \hat{D}_1 C_x^{-1}\hat{D}_1^\top - \hat{D}_0 C_x^{-1}\hat{D}_2^\top - \hat{D}_2 C_x^{-1}\hat{D}_0^\top - \hat{D}_0\tilde{C}_{vv}^1\hat{D}_0^\top = 0,$$

Асимптотика регуляризованных решений задачи оптимальной стабилизации

$$\hat{D}_3+\hat{D}_3^\top-\hat{D}_1C_x^{-1}\hat{D}_2^\top-\hat{D}_2C_x^{-1}\hat{D}_1^\top-\hat{D}_3C_x^{-1}\hat{D}_0^\top-\hat{D}_0C_x^{-1}\hat{D}_3^\top-\hat{D}_1\tilde{C}_{vv}^1\hat{D}_0^\top-$$

$$-\hat{D}_0\tilde{C}_{vv}^1\hat{D}_1^\top=0,$$

где $\tilde{C}_{vv}^1=-C_x^{-1}B^{-1\top}B^{-1}C_x^{-1}$.
Из первого уравнения этой системы находим $\hat{D}_0=C_x$. Второе уравнение выполняется тождественно, а третье и четвертые уравнения после преобразований принимают вид

$$\hat{D}_1C_x^{-1}\hat{D}_1^\top=B^{-1\top}B^{-1}, \tag{30}$$

$$\hat{D}_1C_x^{-1}\hat{D}_2^\top+\hat{D}_2C_x^{-1}\hat{D}_1^\top=\hat{D}_1C_x^{-1}B^{-1\top}B^{-1}+B^{-1\top}B^{-1}C_x^{-1}\hat{D}_1^\top.$$

Асимптотика регуляризованных решений задачи оптимальной стабилизации

Решение уравнения

$$\hat{X}_4(\vartheta) = A_1^\top \left(\hat{D} - C_x\right) + \int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s)ds \left(I_n - \tilde{C}_{vv}\hat{D}^\top\right) A_0 -$$

$$-A_1^\top \left(I_n - \hat{D}\tilde{C}_{vv}\right) \int\limits_{-\vartheta-\tau}^{0} \hat{X}_4^\top(s)ds$$

$$-\int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4(s)\tilde{C}_{vv}\hat{X}_4^\top(s-\vartheta)ds,\ \vartheta \in [-\tau, 0]. \tag{31}$$

определяем асимптотической формулой

$$\hat{X}_4(\vartheta) = \hat{X}_4^0(\vartheta) + \hat{X}_4^1(\vartheta)\alpha^{1/2} + O(\alpha),\ \vartheta \in [-\tau, 0],$$

Асимптотика регуляризованных решений задачи оптимальной стабилизации

Учитывая коэффициенты разложения (29), первое уравнение преобразуется к виду

$$\hat{X}_4^0(\vartheta) = -\int\limits_{-\tau}^{\vartheta} \hat{X}_4^0(s) C_x^{-1} \hat{X}_4^{0\top}(s-\vartheta) ds, \; \vartheta \in [-\tau, 0],$$

решение которого $\hat{X}_4^0(\vartheta) \equiv 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Тогда решение второго уравнения определяется формулой $\hat{X}_4^1(\vartheta) = A_1^\top \hat{D}_1$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Из уравнения

$$\hat{D} = K\left(A_0 + A_1\right) + C_x + \left(I_n - \hat{D}\tilde{C}_{vv}\right) \int\limits_{-\tau}^{0} \hat{X}_4^\top(s) ds$$

находим коэффициенты асимптотического разложения

$$K = K_0 + K_1 \alpha^{1/2} + O(\alpha).$$

Асимптотика регуляризованных решений задачи оптимальной стабилизации

Имеем $K_0 = 0$, $K_1\left(A_0 + A_1\right) = \hat{D}_1$. Тогда (30) можно заменить уравнением

$$K_1\left(A_0 + A_1\right) C_x^{-1}\left(A_0 + A_1\right)^\top K_1^\top = B^{-1\top} B^{-1}, \tag{32}$$

для которого требуется найти решение $K_{1^\top} = K_1 > 0$.
Используя полученные асимптотические разложения и формулу (28), находим асимптотическое представление для оптимального стабилизирующего управления задачи (1), (2)

$$v(t) = \alpha^{-1/2} B^{-1} \hat{D}_1^{\top -1} C_x x(t) + B^{-1}\Big(I_r + \hat{D}_1^{\top -1}\left(B^{\top -1} B^{-1} - \right.$$

$$\left. - \hat{D}_2\right) \hat{D}_1^{\top -1} C_x\Big) x(t) + B^{-1} A_1 \int\limits_{-\tau}^{0} x(t+s)ds + O(\alpha^{1/2}),\ t > 0. \tag{33}$$

Асимптотика регуляризованных решений задачи оптимальной стабилизации

Пример.

Пусть $n = r = 1$, $B \neq 0$ и $A = A_0 + A_1 \neq 0$. Имеем
$\hat{D}_1 = C_x^{1/2}|B|^{-1} sgn A$, $\hat{D}_2 = B^{-2}$.
Используя формулу (33), находим асимптотическое представление для оптимального стабилизирующего управления задачи (1), (2)

$$v(t) = \alpha^{-1/2} sgn(AB) C_x^{1/2} x(t) + B^{-1} x(t) +$$

$$+ B^{-1} A_1 \int\limits_{-\tau}^{0} x(t+s) ds + O(\alpha^{1/2}),\ t > 0.$$

Библиография

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 336 с.
2. Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Импульсная линейно-квадратичная задача оптимизации в системах с последействием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 10–14.
3. Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н. Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып.11. С. 39–48.
4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 550 с.

Спасибо за внимание