Консервативные схемы решения нестационарных задач управления теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольнике

Б. Х. Хайиткулов[1]

e-mail: b.hayitqulov@mail.ru

В [1–3] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей.

В данной работе разработаны метод и алгоритм решения задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на прямоугольнике таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре.

В параллелепипеде $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ 0 \le t \le T\}$ требуется определить функцию $f(x, y, t) \ge 0$, доставляющую при каждом $t \in [0, T]$ минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y,t)dydx \to \min, \tag{1}$$

при следующих условия:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x,y,t), \\
a < x < b,\ c < y < d,\ 0 < t \le T, \\
u(x,y,0) = u_0(x,y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d, \\
u(a,y,t) = \mu_1(y,t),\ u(b,y,t) = \mu_2(y,t),\ c \le y \le d,\ 0 < t \le T, \\
u(x,c,t) = \mu_3(x,t),\ u(x,d,t) = \mu_4(x,t),\ a \le x \le b,\ 0 < t \le T,
\end{gathered} \tag{2}$$

$$m(x,y,t) \le u(x,y,t) \le M(x,y,t), \quad (x,y,t) \in D. \tag{3}$$

Здесь $u = u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) прямоугольника в момент времени t; $\chi(x, y, t) > 0$ – коэффициент теплопроводности; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные функции. Функции $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ имеют смысл функ-

[1]Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

ций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функций $f(x,y,t)$ в пространстве $L_2(D)$. Решение данной краевой задачи можно получить в аналитическом виде с использованием методов Фурье [4].

Введем в D равномерную по трем переменным разностную сетку $\overline{\omega}^{\tau}_{h_1 h_2} = \overline{\omega}_{h_1} \times \overline{\omega}_{h_2} \times \overline{\omega}^{\tau} = \{(x_i = ih_1,\, y_j = jh_2,\, t_k = k\tau),\, i = \overline{0, N_1},$ $j = \overline{0, N_2},\;\; k = \overline{0, N_3}\}$ с шагами $h_1 = (b-a)/N_1$, $h_2 = (d-c)/N_2$, $\tau = T/N_3$.

Для получения консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом. Рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной прямоугольной ячейке $x_{i-0.5} \le x \le x_{i+0.5}$, $y_{j-0.5} \le y \le y_{j+0.5}$ сетки за промежуток времени $t_k \le t \le t_{k+1}$:

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} u(x,y,t_{k+1}) dydx - \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} u(x,y,t_k) dydx =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} W(x_{i-0.5},y,t) dydt - \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} W(x_{i+0.5},y,t) dydt +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} W(x,y_{j-0.5},t) dxdt - \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} W(x,y_{j+0.5},t) dxdt +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} f(x,y,t) dydxdt,$$

где $W(x,y,t)$ – поток тепла, $W(x,y,t) = -\chi(x,y,t)\,\mathrm{grad}\,u$.

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [4]:

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} u(x,y,t_{j+1}) dydx \approx h_1 h_2 u_{ij}^{k+1},$$

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} W(x_{i-0.5}, y, t) dy dt \approx \tau h_2 W_{i-0.5j}^{k+1},$$

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} W(x, y_{j-0.5}, t) dx dt \approx \tau h_1 W_{ij-0.5}^{k+1},$$

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int\limits_{y_{j-0.5}}^{y_{j+0.5}} f(x, y, t) dy dx dt \approx \tau h_1 h_2 f_{ij}^{k+1},$$

$$W_{i-0.5j}^{k+1} = -\chi_{i-0.5j}^{k+1} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{h_1},\ W_{ij-0.5}^{k+1} = -\chi_{ij-0.5}^{k+1} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{h_2}.$$

При этом $\chi_{i\pm 0.5j}^{k+1}$, $\chi_{ij\pm 0.5}^{k+1}$ и f_{ij}^{k+1} определяются равенствами

$$\chi_{i-0.5j}^{k+1} = \chi\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, y_j, t_{k+1}\right),\ \chi_{ij-0.5}^{k+1} = \chi\left(x_i, \frac{y_j + y_{j-1}}{2}, t_{k+1}\right),$$

$$\chi_{ij}^{k+1} = \chi(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Неявная консервативная разностная схема для условия (2) имеет вид [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau} = \left[\chi_{i+0.5j}^{k+1} \dfrac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_1^2} - \chi_{i-0.5j}^{k+1} \dfrac{u_{ij}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2}\right] \\ + \left[\chi_{ij+0.5}^{k+1} \dfrac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_2^2} - \chi_{ij-0.5}^{k+1} \dfrac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2}\right] + f_{ij}^{k+1}, \\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ k = \overline{0, N_3 - 1}, \\ u_{ij}^{0} = u_0(x_i, y_j), \\ u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}),\ u_{N_1 j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}), \\ u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}),\ u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}), \\ i = \overline{0, N_1},\ j = \overline{0, N_2},\ k = \overline{0, N_3 - 1}. \end{cases} \qquad (4)$$

Оператор $Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\chi(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$ с начальным и краевым условием будет самосопряженным, положительно определенным в $L_2(D)$, а значит, он имеет ограниченный обратный оператор, которого обозначим через $G = L^{-1}$. С его помощью можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$\begin{gathered} m(x,y,t) \le (Gf)(x,y,t) \le M(x,y,t), \\ f(\cdot,\cdot,\cdot) \in L_2(D),\ f(x,y,t) \ge 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Введем следующие обозначения

$$XY = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\chi^{k+1}_{i\pm 0.5j}}{h_1^2} + \frac{\chi^{k+1}_{ij\pm 0.5}}{h_2^2}\right),\ X^+ = -\frac{\chi^{k+1}_{i+0.5j}}{h_1^2},\ X^- = -\frac{\chi^{k+1}_{i-0.5j}}{h_1^2},$$

$$Y^+ = -\frac{\chi^{k+1}_{ij+0.5}}{h_2^2},\ Y^- = -\frac{\chi^{k+1}_{ij-0.5}}{h_2^2}.$$

Имеем следующую матрицу,

$$A = \begin{bmatrix} XY & Y^+ & 0 & X^+ & \dots & \dots & 0 \\ Y^- & XY & Y^+ & 0 & X^+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & X^- & 0 & Y^- & XY & Y^+ \\ 0 & \dots & \dots & X^- & 0 & Y^- & XY \end{bmatrix}.$$

Тогда получим

$$G = A^{-1}.$$

Построим консервативную конечномерную аппроксимацию (1)–(5) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D по x, y, t соответственно на N_1, N_2, N_3 равных частей: $D = \bigcup\limits_{k=1}^{N_3}\bigcup\limits_{i=1}^{N_1}\bigcup\limits_{j=1}^{N_2} D^k_{ij}$, где $D^k_{ij} = \{(x,y,t),\ x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j,$ $t_{k-1} \le t \le t_k\}$, $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$, $k = \overline{1, N_3}$. Обозначим через $S^{N_3}_{N_1N_2}(D) \subset L_2(D)$ подпространство, в котором определены кусочно-постоянные функции вида $f(x,y,t) = f^k_{ij}$, $(x,y,t) \in D^k_{ij}$

$(i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1},\ k=\overline{1,N_3})$. Введём в $S_{N_1N_2}^{N_3}(D)$ базис, состоящий из функций $e_{ij}^k(x,y,t)=1$, $(x,y,t)\in D_{ij}^k$ и $e_{ij}^k(x,y,t)=0$, $(x,y,t)\notin D_{ij}^k$. Тогда $f(x,y,t)\approx\sum\limits_{k=1}^{N_3}\sum\limits_{i=1}^{N_1-1}\sum\limits_{j=1}^{N_2-1}f_{ij}^k e_{ij}^k(x,y,t)$. Пусть $N=(N_1-1)(N_2-1)$, $g_{pq}=(Ge_{pq}^k,e_{ij}^k)$, $(m(x,y,t),e_{ij}^k(x,y,t))=m_{ij}^k$, $(M(x,y,t),e_{ij}^k(x,y,t))=M_{ij}^k$, $\tilde f_q^k=f_{ij}^k$, $(p=q,\ q=(i-1)(N_2-1)+j)$, $p=\overline{1,N}$, $q=\overline{1,N}$, $i=\overline{1,N_1-1}$, $j=\overline{1,N_2-1}$, $k=\overline{1,N_3}$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение для $f(x,y,t)$ в (1) и скалярно умножим неравенства (5) на $e_{ij}^k(x,y,t)$ в $L_2(D)$. Получим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered}
J_k\{f\}=\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}(\mathrm{mes}D_{ij}^k)f_{ij}^k\to\min,\quad k=1,2,...,N_3,\\
m_{ij}^k\le\sum_{q=1}^{N}g_{pq}\tilde f_q^k\le M_{ij}^k,\\
p=\overline{1,N},\ i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1},\ k=\overline{1,N_3},\\
\tilde f_q^k\ge 0,\quad q=1,2,...,N,\ k=1,2,...,N_3.
\end{gathered}\tag{6}$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция $u_{ij}^k=\sum\limits_{q=1}^{N}g_{pq}\tilde f_q^k$, $(i=(p-1)\div(N_1-1)+1,\ j=(q-1)\bmod(N_2-1)+1)$ которая является решением краевой задачи (2) с $\tilde f_q^k$, где обозначение $\div$ есть символ целочисленного деления, а mod есть символ остатка от деления. При этом задача (6) решается симплекс-методом.

[1] *Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х.* Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне / Тез. докл. Междунар. конф. “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики”. Фергана: ФГУ, 2020. Т. 1. С. 346–348.

[2] *Хайиткулов Б.Х.* Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в параллелепипеде / Тез. докл. Респ. онлайн конф. “Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий”. Бухара: БухГУ, 2020. С. 343–345.

[3] *Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х.* Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне / Узбекско-Малайзийская междунар. онлайн конф. “Вычислительные модели и технологии (ВМТ2020)”. Ташкент: НУУз, 2020. С. 250–252.

[4] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.