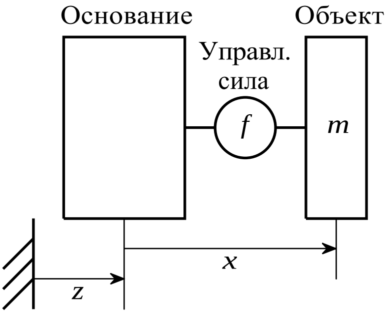
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИПМех РАН)

Гарантирующее управление упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании.

Корнеев Всеслав Александрович

Москва, 2020 г.



Уравнение движения:

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = -\frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z}$$

Нач. условия и ограничение:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad |u| \leqslant u_0$$

Возмущение:

$$v(t) = \begin{cases} V(t - t_0), & t_0 \geqslant 0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

$u(t), V(t)$ - кусочно-непр., допустимо $V(t - t_0) = \beta\delta(t - t^*), \ t^* \geqslant t_0$.

Минимизируемый функционал:

$$J(u, t_0) = \sup_{V \in \Omega} \max_{t \in R_{0+}} |x(t; u, V, t_0)| \to \min_{u, t_0}, \quad R_{0+} = [0, \infty)$$

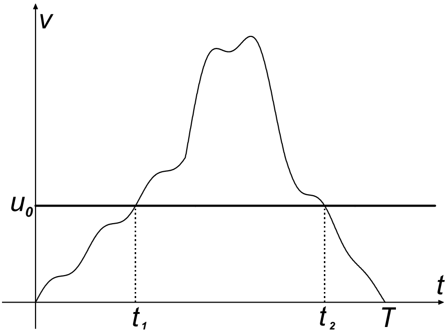
Первые публикации по оптимальной противоударной изоляции

- Гурецкий В.В. Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №1. С. 159-162.
- Гурецкий В.В. О задаче минимизации максимального смещения // Труды ЛПИ. Механика и процессы управления. 1969. №307. С. 11-21.
- Sevin E. and Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971.

Книги по оптимальной противоударной изоляции

- Sevin E. and Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971.
- Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976.
- Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983.
- Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001.
- Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R., and Purtsezov S.V. Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010.

Класс внешних возмущений V_* (ударных воздействий) $V(t)$



1. $V(t) \geqslant 0$.
2. $V(t) \equiv 0$, если $t > T$
3. $V(t) > u_0$ не более чем на одном интервале $(t_1, t_2) \subset [0, T]$
4. $$\int_0^T V(\tau)\, d\tau = v_0$$

Безразмерные переменные

$$x' = \frac{u_0}{v_0^2}\, x, \quad t' = \frac{u_0}{v_0}\, t, \quad T' = \frac{u_0}{v_0} T,$$

$$v'(t') = \frac{1}{v_0}\, v\left(\frac{v_0}{u_0}\, t'\right), \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad J' = \frac{u_0}{v_0^2}\, J$$

Задача управления в безразмерных переменных

Уравнение движения:	$\ddot{x} + u = v(t)$
Начальные условия:	$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$
Ограничение:	$\lvert u \rvert \leqslant 1$
Минимизируемый функционал:	$J = \sup\limits_{V \in \Omega} \max\limits_{t \in R_{0+}} \lvert x(t; u, V, t_0) \rvert$
Интеграл от возмущения:	$\int\limits_0^T v(t) dt = 1$

Задачи оптимизации

Задача 1 (при фиксированном возмущении).

$$J(u,V,t_0)=\max_{t\in R_{0+}}|x(t;u,V,t_0)|\to\min_{u,t_0},$$

$$J_V=\min_{u(t),t_0}\ \max_{t\in R_{0+}}|x(t;u,V,t_0)|.$$

Задача 2 (о наихудшем возмущении).

$$J_u(u,t_0)=\max_{t\in R_{0+}}|x(t;u,V,t_0)|\to\sup_{V\in V_*}.$$

Задача 3 (об оптимальном упреждении).

$$J(u,t_0)=\sup_{V\in V_*}\ \max_{t\in R_{0+}}|x(t;u,V,t_0)|\to\min_{t_0}.$$

Задача 4 (параметрическая оптимизация).

$$J(u_s,t_0)=\sup_{V\in V_*}\ \max_{t\in R_{0+}}|x(t;u_s,V,t_0)|\to\min_{u_s,t_0},\quad u_s(t)\in U_s.$$

Наихудшее возмущение $V \in V_*$ для функционала

$$J(u,V,t_0) = \max_{t \in R_{0+}} |x(t;u,V,t_0)|,$$

$$J_u(u,t_0) = \sup_{v \in V_*} \max_{t \in R_{0+}} |x(t;u,V,t_0)|.$$

Лемма. *Среди возмущений заданной длительности* T $(V \in V_*)$ *наихудшее возмущение есть либо* $V(\xi) = v_0\delta(\xi)$ *либо* $V(\xi) = v_0\delta(\xi - T)$ $\left(\int\limits_0^T V(t)dt = v_0 = 1\right)$.

Иными словами, наихудшее возмущение есть мгновенный удар интенсивности v_0, подаваемый в начальный или в конечный момент допустимого интервала возмущения.

Вспомогательные функции $x_u^+(t)$, $x_u^-(t)$, $t \in R_{0+}$,

$$x(t; u, V, t_0) = \int_0^t (t-\xi)\,(V(\xi - t_0) - u(\xi))\,d\xi,$$

$$x_u^+(t) = x(t, u, v_0\delta(\xi), t_0), \quad x_u^-(t) = x(t, u, v_0\delta(\xi - T), t_0),$$

$$x_u^-(t) \leqslant x(t; u, V, t_0) \leqslant x_u^+(t),$$

$$J_u = \max\left\{\max_{t\in R_{0+}} |x_u^-(t)|,\ \max_{t\in R_{0+}} |x_u^+(t)|\right\}$$

Оптимальное управление для мгновенного удара[1] и класс управлений U_c

Класс управлений $U_c = \{u_c\}$, $u_c(t) = u_\delta(t - c)$

$$u_\delta(t) = \begin{cases} -1, \ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ \ \ 1, \ t_1 < t \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ \ \ 0, \ t > \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ -1, & c \leqslant t \leqslant 1/4 + c, \\ 1, & 1/4 + c < t \leqslant 3/2 + c, \\ 0, & t > 3/2 + c, \end{cases} \qquad c \geqslant 0.$$

[1] Balandin D.V., Bolotnik N.N., and Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001.

Постоянное управление и управление с одним переключением, классы управлений U_d и U_τ

$u_0(t)$ оптимально для задачи 1 без упреждения при $V(\xi) = \delta(\xi)$

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Класс управлений $U_d = \{u_d\}$, $u_d(t) = u_0(t - d)$

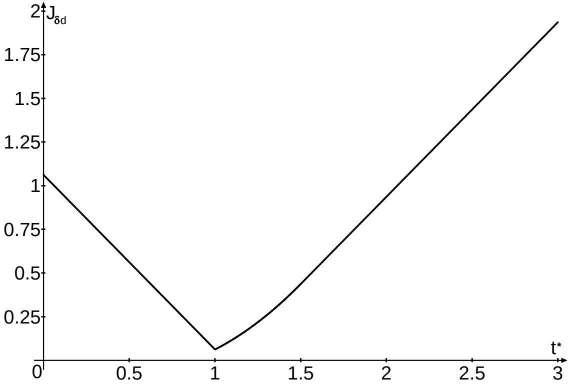
$$u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d, \\ 1, & d \leqslant t \leqslant 1 + d, \\ 0, & t > 1 + d, \end{cases} \quad d \geqslant 0.$$

Параметрическое семейство допустимых управлений $u_\tau(t) \in U_\tau$

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ +1, & \tau \leqslant t \leqslant 1 + 2\tau, \\ 0, & t > 1 + 2\tau, \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{x}(t; u_\tau, V, t_0) \equiv 0, \\ t \geqslant \max\left(t_0 + T,\, 1 + 2\tau\right). \end{array} \right.$$

Смещение при $u_\delta(t)$-управлении с временем упреждения t^*

$$u_\delta(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 0.25, \\ 1, & 0.25 < t \leqslant 1.5, \\ 0, & t > 1.5, \end{cases} \qquad J_{\delta d}(t^*) = \begin{cases} 17/16 - t^*, & 0 \leqslant t^* < 1, \\ (t^{*2} - t^*)/2 + 1/16, & 1 \leqslant t^* < 1.5, \\ t^* - 17/16, & t^* \geqslant 1.5. \end{cases}$$



Управление $u_c(t) = u_\delta(t-c)$, $J_{cd}(t^*){=}J_{\delta d}(t^*-c)$ при $t^* \geqslant c$,

$$J_{cd}(t^*){=}\begin{cases} 17/16 - t^* + c, & 0 \leqslant t^* < c+1, \\ ((t^*-c)^2 - (t^*-c))/2 + 1/16, & c+1 \leqslant t^* < c+3/2, \\ t^* - c - 17/16, & t^* \geqslant c+3/2. \end{cases}$$

График функции $J_{cd}(t^*)$ это смещение графика $J_{\delta d}(t^*)$ на величину c вдоль оси абсцисс с доопределением на $[0, c)$.

Согласно лемме, для заданного T нужно найти минимум

$$f_c(t_0, T) = \max\left[J_{cd}(t_0),\, J_{cd}(t_0+T)\right] \to \min_{t_0, c}, \quad t_0 \geqslant 0, c \geqslant 0.$$

Минимум величины $f_c(t_0, T)$ достигается при

$$c \geqslant \max\left[0, \frac{T}{2} - \frac{17}{16}\right], \quad J_{cd}(t_0) = J_{cd}(t_0+T), \quad t_0 \geqslant 0.$$

Решение задачи 4 для класса управлений U_c

$$t_c^* = \begin{cases} c^* + \sqrt{9/4 + 2T} - 1/2 - T, & T \leqslant 7/8, \\ c^* + 17/16 - T/2, & T > 7/8, \end{cases} \qquad c^* \geqslant \max\left[0, \frac{T}{2} - \frac{17}{16}\right],$$

$$J_c(T) = J(u_c, t_c^*) = \begin{cases} 25/16 - \sqrt{9/4 + 2T} + T, & T \leqslant \frac{7}{8}, \\ T/2, & T > \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Минимальные момент упреждения t_c^* и величина запаздывания c^*

$$t_c^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{9}{4} + 2T} - \frac{1}{2} - T, & T < \frac{7}{8}, \\ \frac{17}{16} - \frac{T}{2}, & \frac{7}{8} \leqslant T < \frac{17}{8}, \\ 0 & T \geqslant \frac{17}{8} \end{cases} \qquad c^* = \begin{cases} 0, & T \leqslant \frac{17}{8}, \\ \frac{T}{2} - \frac{17}{16}, & T > \frac{17}{8}. \end{cases}$$

Значение функционала J_0 для класса управлений U_0 и функция смещения J_{dd} при u_d-управлении

Постоянное управление заданной длительности

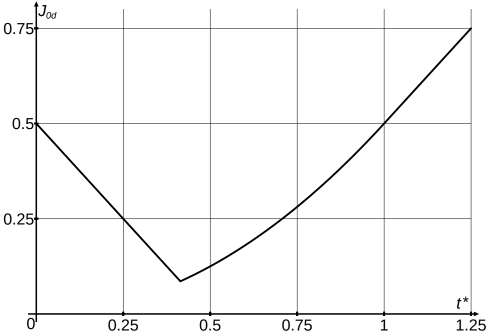
$$u_0(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1, & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ 0, & t>1, \end{cases} \qquad u_d(t)=\begin{cases} 0, & t<d, \\ 1, & d\leqslant t\leqslant 1+d, \\ 0, & t>1+d. \end{cases} \qquad d\geqslant 0.$$

Значение функционала J_0 для u_0 и функция смещения J_{dd}

$$J_0(T)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & T\leqslant 1, \\ T-\dfrac{1}{2}, & 1<T. \end{cases} \qquad J_{dd}(t^*)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-t^*+d, & 0\leqslant t^*<d+\sqrt{2}-1, \\ \dfrac{(t^*-d)^2}{2}, & d+\sqrt{2}-1\leqslant t^*<d+1, \\ t^*-\dfrac{1}{2}-d, & t^*\geqslant d+1. \end{cases}$$

Функция смещения J_{0d} и ее график

$$J_{0d}(t^*)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-t^*, & 0 \leqslant t^* < \sqrt{2}-1, \\ \dfrac{t^{*2}}{2}, & \sqrt{2}-1 \leqslant t^* < 1, \\ t^*-\dfrac{1}{2}, & t^* \geqslant 1. \end{cases}$$



Построение оптимального u_d-управления

Согласно лемме, для заданного T нужно найти минимум

$$f_d(t_0, T) = \max\left[J_{dd}(t_0),\ J_{dd}(t_0+T)\right] \to \min_{t_0, d}, \quad t_0 \geqslant 0, d \geqslant 0.$$

Минимум величины $f_d(t_0, T)$ достигается при

$$d \geqslant \max\left[0, \frac{T-1}{2}\right], \quad J_{dd}(t_0) = J_{dd}(t_0+T), \quad t_0 \geqslant 0.$$

Решение задачи 4 для класса управлений U_d:

$$t_d^* = \begin{cases} d^* + \sqrt{2T+2} - T - 1, & T \leqslant 1, \\ d^* + 1/2 - T/2, & 1 < T, \end{cases} \qquad d^* \geqslant \max\left[0, \frac{T-1}{2}\right],$$

$$J_d(T) = J(u_{d^*}, t_d^*) = \begin{cases} 3/2 - \sqrt{2T+2} + T, & T \leqslant 1, \\ T/2, & 1 < T. \end{cases}$$

Одно из решений Задачи 4 с минимальными t_d^*, d^*

Минимальный момент упреждения t_d^*

$$t_d^* = \begin{cases} \sqrt{2T+2} - T - 1, & T < 1, \\ 0 & T \geqslant 1. \end{cases}$$

Минимальная величина запаздывания d^*

$$d^* = \begin{cases} 0, & T \leqslant 1, \\ (T-1)/2, & 1 < T. \end{cases}$$

Значение функционала

$$J_d(T) = J(u_{d^*}, t_d^*) = \begin{cases} 3/2 - \sqrt{2T+2} + T, & T \leqslant 1, \\ T/2, & 1 < T. \end{cases}$$

$$\tau \geqslant \frac{1}{2}: \; J_{d\tau}(t^*,\tau) = \begin{cases} 1/2+\tau^2+2\tau-t^*, & 0 \leqslant t^* < 1/2+2\tau, \\ \tau^2, & 1/2+2\tau \leqslant t^* < 1/2+2\tau+2\tau^2, \\ t^*-2\tau-\tau^2-1/2, & t^* \geqslant 1/2+2\tau+2\tau^2, \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} \leqslant \tau < \frac{1}{2}: \; J_{d\tau}(t^*,\tau) = \begin{cases} 1/2+\tau^2+2\tau-t^*, & 0 \leqslant t^* < 1/2+2\tau, \\ \tau^2, & 1/2+2\tau \leqslant t^* < 4\tau, \\ t^{*2}/2-2t^*\tau+\tau^2, & 4\tau \leqslant t^* < 1+2\tau, \\ t^* - 2\tau-\tau^2-1/2, & t^* \geqslant 1+2\tau, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \tau < \frac{1}{4}: J_{d\tau}(t^*,\tau) = \begin{cases} 1/2+\tau^2+2\tau-t^*, & 0 \leqslant t^* < 2\tau+\sqrt{2+4\tau^2}-1, \\ t^{*2}/2-2t^*\tau+\tau^2, & 2\tau+\sqrt{2+4\tau^2}-1 \leqslant t^* < 1+2\tau, \\ t^*-2\tau-\tau^2-1/2, & t^* \geqslant 1+2\tau. \end{cases}$$

Построение оптимального u_τ-управления

$$g(t_0,\tau) = \max\left[J_{d\tau}(t_0,\tau), J_{d\tau}(t_0+T,\tau)\right] \to \min_{\tau,t_0}. \qquad (1)$$

Необходимые условия минимума $g(t_0,\tau)$

$$J_{d\tau}(t_0,\tau) = J_{d\tau}(t_0+T,\tau), \quad t_0 \geqslant 0, \quad J_{d\tau}(t_0,\tau) \geqslant \tau^2. \qquad (2)$$

Построение решения задачи 4 для u_τ-управления

t_0 вычисляется как функция τ из уравнения (2), а затем минимизируется величина $J_{d\tau}(t_0(\tau),\tau)$ по τ.

При $T \leqslant 7/2$ решение задачи 4 единственно.

При $T > 7/2$ функционал $J_\tau = T/2$ и моменты τ и t_0 неединственны и удовлетворяют соотношениям

$$\max\{\sqrt{(1+T)/2}-1, 0\} \leqslant \tau \leqslant \sqrt{T/2}, \;\; t_0 = 1/2+\tau^2+2\tau-T/2.$$

Одно из решений Задачи 4 с минимальными t_0^*, τ^*

Оптимальное смещение

$$J_\tau(T) = \begin{cases} (T/2+1/4)^2 & \text{при } T \leqslant 1/2, \\ T/2 & \text{при } T > 1/2. \end{cases}$$

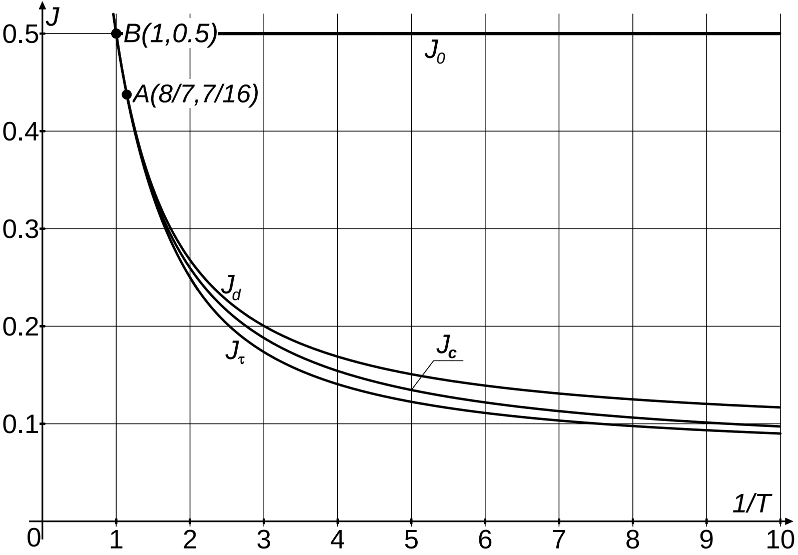
Минимальный момент переключения

$$\tau_* = \begin{cases} T/2+1/4 & \text{при } T \leqslant 1/2, \\ 1/2 & \text{при } 1/2 < T \leqslant 7/2, \\ \sqrt{(1+T)/2}-1 & \text{при } T > 7/2. \end{cases}$$

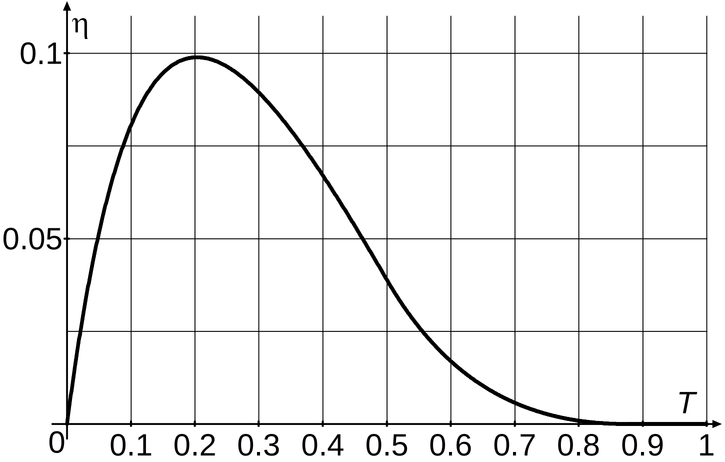
Минимальный момент упреждения

$$t_0^* = \begin{cases} T+1 & \text{при } T \leqslant 1/2, \\ 7/4 - T/2 & \text{при } 1/2 < T \leqslant 7/2, \\ 0 & \text{при } T > 7/2. \end{cases}$$

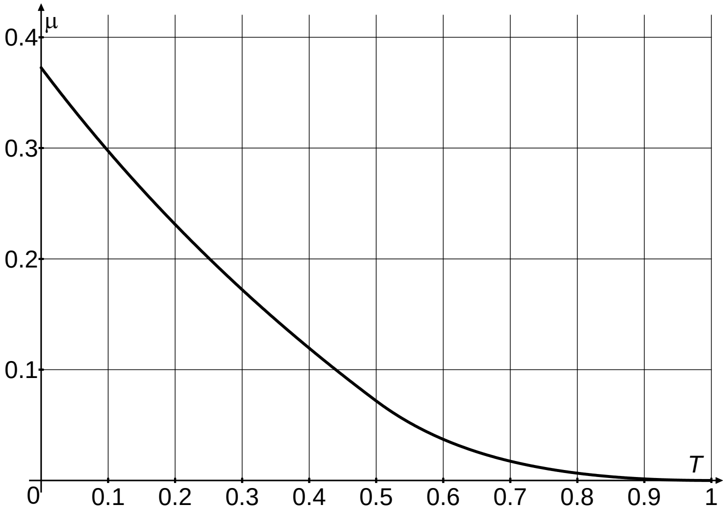
Сравнение различных способов управления



Относительная разность величин J_c и J_τ



$$\eta = (J_c - J_\tau)/J_\tau < 0.1$$



$$\mu = (J_d - J_\tau)/J_\tau < 0.372$$

Решение задачи 1

$$u(t) = u_\delta(t), \quad t_\delta = 1, \quad J_\delta = 1/16 = 0.0625.$$

Решение задачи 2 при управлении $u_0(t)$ без упреждения

$$d^* = 0, \;\; t^* = 0, \;\; J_{00} = 1/2.$$

Решение задачи 3 при управлении $u_0(t)$ с упреждением

$$d^* = 0, \;\; t_0^* = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4143, \;\; J_0 = 3/2 - \sqrt{2} \approx 0.0857.$$

Сравнение решений задач 1-3

$$\eta = \frac{J_0 - J_\delta}{J_\delta} 100\% \approx 37.14\%, \;\; \frac{J_{00}}{J_0} \approx 5.8, \;\; \frac{J_{00}}{J_\delta} = 8.$$

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА

- **Болотник Н.Н., Корнеев В.А.** Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. №1. С. 147 – 168.

- **Болотник Н.Н., Корнеев В.А.** Гарантирующее упреждающее управление в задаче противоударной изоляции // Доклады академии наук, 2018, том 481, № 4. С. 381-385.

- **Болотник Н.Н., Корнеев В.А.** Противоударная изоляция с упреждающим управлением для внешних возмущений различной формы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 3. С. 48-63.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА

- Корнеев В.А. Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 89-97.

- Корнеев В.А. Оптимизация управления с упреждением и запаздыванием в задаче противоударной защиты объекта на подвижном основании // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 30-38.

- Корнеев В.А. Использование постоянного управления с упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 147-158.