О существовании точек совпадения двух отображений, определенных на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве

В. Мерчела

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,
merchela.wassim@gmail.com

Екатеринбург, 26-30 октября 2020 года
III Международный семинар "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби" (CGS'2020)

Обозначения:

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $Y \neq \emptyset$ – пространство с расстоянием $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$, т.е.

$$\forall y_1, y_2 \in Y \qquad d(y_1, y_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 = y_2.$$

$X \neq \emptyset$ – пространство с расстоянием $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$.

Определение 1.

$q_1, q_2 > 0$. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая аксиоме тождества, называется (q_1, q_2)-квазиметрической, если выполняется (q_1, q_2)-обобщенное неравенство треугольника, т.е.

$$\rho(x, z) \leq q_1 \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad x, y, z \in X.$$

(X, ρ) называется (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством.
Если из $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\xi, x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, \xi) = 0$, то (q_1, q_2)-квазиметрику называют слабо симметрической.

Для отображения $X \to Y$ сформулируем определения, аналогичные приведенным в [2].

Определение 2.

Отображение $f : X \to Y$ называем *замкнутым,* $\Leftrightarrow$

$$\forall \{x_n\} \subset X \quad \lim_{n\to\infty} \rho(\xi, x_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d(y, f(x_n)) = 0 \;\Rightarrow\; f(\xi) = y.$$

Определение 3.

Отображение $f : X \to Y$ *α-накрывающее* $(\alpha > 0)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall x_0 \in X \ \forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \ \ \rho(x_0, x) \le \alpha^{-1} d\big(f(x_0), y\big).$$

Определение 4.

Отображение $f : X \to Y$ *β-липшицево* $(\beta \ge 0)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad d(f(x_1), f(x_2)) \le \beta \rho(x_1, x_2).$$

Точкой совпадения отображений $f, g : X \to Y$ называют элемент $\xi \in X$ такой, что

$$f(\xi) = g(\xi).$$

Для $r \in [0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S(r, n) = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Будем считать что $\alpha > \beta \geq 0$. Положим

$$m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid q_2\beta^j < \alpha^j\}.$$

Теорема.

X – полное (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство, $f : X \to Y$— α-накрывающее и замкнутое, $g : X \to Y$— β-липщицево. Тогда у f и g существует точка совпадения ξ

$$\lim_{\eta\to\xi} \rho_X(x_0, \eta) \leq \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}} d_Y(f(x_0), g(x_0)).$$

Если дополнительно (X, ρ)—слабо симметрическое, то

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}} d_Y(f(x_0), g(x_0)).$$

- *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155. DOI: 10.1134/S0869565207260015
- *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 82. No. 2. С. 3–32. DOI: 10.1070/im8546
- *Мерчела В.* К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-65-73