ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ. ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ

М. С. Никольский[1]
e-mail: mni@mi-ras.ru

1. Общая информация

Управляемые процессы при наличии фазовых ограничений являются важным объектом изучения в математической теории оптимального управления (см., например, [1–4] и др.). Наличие фазовых ограничений существенно усложняет изучение соответствующих оптимизационных задач. Отметим, что важной характеристикой управляемого процесса являются его множества достижимости (см., например, [3–4]). Для линейных управляемых объектов при отсутствии фазовых ограничений была развита теория, позволяющая эффективно вычислять множества достижимости с помощью аппарата опорных функций (см., например, [4]). Для линейных управляемых объектов при наличии фазовых ограничений конструктивное вычисление множеств достижимости представляет значительные трудности.

Настоящая работа посвящена приближённому вычислению множеств достижимости для линейных управляемых объектов при наличии выпуклого фазового ограничения и выпуклости компакта P, ограничивающего векторное управление u.

Рассмотрим линейный управляемый объект вида (см. [1–4])

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ $(n \geqslant 1)$, $u \in R^p$ $(p \geqslant 1)$, A, B — матрицы размерности $n \times n$, $n \times p$ соответственно, причём $u \in P$ — выпуклому компакту из R^p. Для управляемого объекта (1) фиксированы фазовое ограничение $G \subset R^n$, начальное условие $x(0) = x_0 \in G$ и момент времени $T > 0$, причём G — непустой выпуклый компакт. Рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t) \in P$, $t \in \Delta = [0, T]$, называемые допустимыми управле-

[1]Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва, Россия

ниями. Обозначим через U множество таких функций. Каждому допустимому управлению $u(\cdot)$ и начальному условию $x(0)=x_0$ отвечает абсолютно непрерывное решение $x(t,u(\cdot),x_0)$, $t\in\Delta$, уравнения (1). Нас будут интересовать только такие $u(\cdot)\in U$, для которых $x(t,u(\cdot),x_0)\in G$ при всех $t\in\Delta$. Множество таких управлений обозначим W. В общем случае множество W может оказаться пустым. В дальнейшем предполагается, что $W\neq\varnothing$. Множество достижимости $D(T,x_0)$ для рассматриваемого управляемого объекта определим формулой

$$D(T,x_0)=\bigcup_{u(\cdot)\in W} x(T,u(\cdot),x_0). \tag{2}$$

Напомним, что при $u(\cdot)\in U$ для соответствующего решения $x(t)=x(t,u(\cdot),x_0)$, $t\in\Delta$, справедлива формула Коши вида

$$x(t)=e^{tA}x_0+\int\limits_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds,$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA, а интеграл понимается в смысле Лебега. С помощью этой формулы, используя выпуклость множеств P, G, нетрудно обосновать выпуклость множества $D(T,x_0)$ (см. (2)). Мы будем заниматься проблемой приближённого (в смысле метрики Хаусдорфа) вычисления выпуклого компакта $D(T,x_0)$.

Разобьём отрезок $\Delta=[0,T]$ на N равных частей ($N\geqslant 1$) точками $t_i=ih$, где $i=0,\dots,N$, $\;h=T/N$, и рассмотрим множество

$$E(h,K)=e^{hA}K+\int\limits_0^h e^{rA}BP\,dr, \tag{3}$$

где $h>0$, K — произвольный непустой компакт из R^n, $+$ означает алгебраическое сложение множеств, а интеграл от многозначного отображения $e^{rA}BP$ по отрезку $[0,h]$ понимается в смысле теории многозначных отображений (см. [4]). Отметим, что в случае выпуклости компакта K множество $E(h,K)$ (см. (3)) является выпуклым компактом.

Нам будет полезна следующая цепочка множеств F_i :

$$F_0=x_0,\;\; F_{i+1}=E(h,F_i)\cap G,$$

где $h > 0,\ i = 0, \ldots, N-1$.

Оказывается, что при сделанных выше предположениях все множества F_i, $i = 0, \ldots, N$, являются непустыми выпуклыми компактами.

В докладе обосновывается сходимость компактов F_N к компакту $D(T, x_0)$ при $N \to +\infty$ в метрике Хаусдорфа и также получена оценка сверху скорости этой сходимости при некотором добавочном предположении относительно управляемого объекта (1), вектора x_0 и множества G.

[1] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

[2] *Ф. П. Васильев* Методы оптимизации. Кн. 2. — М.: МЦНМО, 2011.

[3] *Э. Б. Ли, Л. Маркус* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.

[4] *В. И. Благодатских* Введение в оптимальное управление. Линейная теория. — М.: Высшая школа, 2001.