О КРИТЕРИИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Попова С.Н., Федорова М.В.
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби» (CGS'2020), посвящённый 75-летию академика А. И. Субботина

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00293) и Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания № 075-00232-20-01 (проект 0827-2020-0010 “Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем”).

В докладе рассмотрена локальная задача управления асимптотикой решений линейных систем с дискретным временем под действием линейной обратной связи. Основной объект исследований — линейная нестационарная управляемая система с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Пусть управление $u(\cdot)$ в системе

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

формируется в виде линейной обратной связи

$$u(m) = U(m)x(m). \tag{2}$$

В итоге получаем замкнутую систему вида

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Речь идет о назначении асимптотики решений системы (3) в малой окрестности асимптотики решений свободной системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k. \qquad (1)$$

Всюду ниже будем предполагать, что функция $m \mapsto B(m)$ ограничена на $\mathbb{N}$, а функция $m \mapsto A(m)$ *вполне ограничена*[a] на $\mathbb{N}$, то есть при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a_0, что

$$\|A\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0. \qquad (5)$$

Здесь и ниже использовано обозначение

$$\|A\|_\infty \doteq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|A(m)\|. \qquad (6)$$

[a] Демидович В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Определение 1

Показателем Ляпунова произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (4) называется величина

$$\lambda[x] = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \|x(m)\|. \tag{7}$$

Показатель Ляпунова тривиального решения полагаем равным $-\infty$.

Для того чтобы каждое нетривиальное решение системы (4) обладало конечным показателем Ляпунова, достаточно потребовать полной ограниченности матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ этой системы.

Множество показателей Ляпунова всех нетривиальных решений системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

называется *спектром показателей Ляпунова* этой системы. Известно, что спектр показателей Ляпунова системы (4) расположен на отрезке $[-\ln a_0, \ln a_0]$ и состоит не более, чем из n различных чисел. Приписывая каждому элементу спектра его *кратность*, в итоге получим набор n чисел, который называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (4). Пусть $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (4). Будем предполагать, что выполнены неравенства $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, то есть $\lambda(A)$ является элементом множества $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Определим также ε-окрестность полного спектра $\lambda(A)$ равенством

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant} \colon |\nu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Определение 2

Показатели Ляпунова системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида

$$z(m+1) = A(m)R(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

удовлетворяющей условию

$$\|R - E\|_\infty < \delta, \tag{9}$$

выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Рассмотрим замкнутую систему

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3).

Определение 3

Матричное управление $U\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$ называется *допустимым* для системы (3), если матрица $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть $U(\cdot)$ — допустимое матричное управление. Тогда для замкнутой системы (3) определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A+BU) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Определение 4

Полный спектр показателей Ляпунова системы

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

называется *пропорционально локально управляемым*, если найдутся такие $\delta > 0$ и $\ell > 0$, что для каждого набора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ существует допустимое для системы (5) матричное управление $U\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющее оценке

$$\|U\|_\infty \leqslant \ell \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j| \tag{11}$$

и гарантирующее выполнение равенства

$$\lambda(A + BU) = \mu. \tag{12}$$

Определим *матрицу управляемости* (*матрицу Калмана*) системы

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

равенством

$$W(m_0, m) = \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1)B(j)B^*(j)X_A^*(m_0, j+1), \tag{13}$$

где $m > m_0$ — произвольные натуральные числа, $X_A(m, s)$ — матрица Коши системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Определение 5

Система

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \qquad (1)$$

называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие $K \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$, что

$$\xi^* W(m_0, m_0 + K)\xi \geqslant \gamma\|\xi\|^2 \qquad (14)$$

для каждых $m_0 \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Понятие равномерной полной управляемости линейных систем с непрерывным временем было введено Р. Калманом[a].

[a] Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5, no 1. Pp. 102–119.

Теорема (Е. Л. Тонков)

Система

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \qquad (1)$$

равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существуют такие $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $m_0 \in \mathbb{N}$ найдется управление $u\colon [m_0, m_0 + K - 1] \to \mathbb{R}^k$ такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (1) с выбранным $u(\cdot)$ и начальным условием

$$x(m_0) = x_0$$

удовлетворяет равенству $x(m_0 + K) = 0$, при этом

$$\max\bigl\{\|u(m)\| \colon m = m_0, m_0 + 1, \ldots, m_0 + K - 1\bigr\} \leqslant \alpha\|x_0\|. \qquad (15)$$

Имеют место следующие достаточные условия пропорциональной локальной управляемости спектра Ляпунова.

Теорема (И. Н. Банщикова, С. Н. Попова)

Пусть система

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

равномерно вполне управляема, а полный спектр показателей Ляпунова системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

устойчив. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

пропорционально локально управляем.

В работе[a] приведен пример системы вида

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2, \qquad (1)$$

показывающий, что найденные достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2, \qquad (5)$$

не являются необходимыми.

[a] Банщикова И. Н., Макаров Е. К., Попова С. Н. Об условиях пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, вып. 3. С. 301–311.

Вопрос о необходимых и достаточных условиях пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова рассматривался в работе[a]. Введем нужные определения.

[a] Банщикова И. Н., Попова С. Н. Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 1. С. 122–132.

Определение 6

Система

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

называется *системой с интегральной разделенностью*, если ее полный спектр показателей Ляпунова устойчив и некратен, то есть состоит из n различных чисел.

Систему

$$x(m+1)=A_0(m)x(m)+B_0(m)u(m), \quad m\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^k, \tag{16}$$

отождествим с функцией $m\mapsto\sigma_0(m)\doteq\big(A_0(m),B_0(m)\big)\in\mathbb{R}^{n\times(n+k)}$. Предполагаем, что $A_0(\cdot)$ вполне ограничена, а $B_0(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{N}$.

Обозначим $\sigma_s(m)\doteq\sigma_0(m+s)$ — сдвиг σ_0 на $s\in\mathbb{N}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ — замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot)\colon s\in\mathbb{N}\}$ в топологии, порожденной поточечной сходимостью на множестве $\mathbb{N}$. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ может быть задана равенством

$$\rho(\sigma,\widehat{\sigma})=\sup_{m\in\mathbb{N}}\ \min\{\|\sigma(m)-\widehat{\sigma}(m)\|,m^{-1}\}. \tag{17}$$

Пространство $\big(\mathfrak{R}(\sigma_0),\rho\big)$ компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы σ_0.

Каждый элемент $\sigma(\cdot) \doteq \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ отождествим с линейной управляемой системой

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема (И. Н. Банщикова, С. Н. Попова)

Пусть

$$x(m+1) = A_0(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

— система с интегральной разделенностью. Тогда система $\sigma_0(\cdot)$ равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ соответствующая замкнутая система

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Удалось ослабить условия предыдущей теоремы. Доказан следующий результат.

Теорема 1

Пусть показатели Ляпунова системы

$$x(m+1) = A_0(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

устойчивы. Тогда система $\sigma_0(\cdot)$ равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ соответствующая замкнутая система

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Пример

Рассмотрим скалярную функцию натурального аргумента

$$b(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = 1, \\ 1 & \text{при} \quad m \in [m_{2j-1}, m_{2j} - 1], \\ 0 & \text{при} \quad m \in [m_{2j}, m_{2j+1} - 1], \end{cases} \tag{19}$$

где последовательность $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ определяется рекуррентно равенствами:

$$m_1 = 1, \quad \begin{cases} m_{2j} = j m_{2j-1}, \\ m_{2j+1} = j + m_{2j} \end{cases} \quad \text{для } j \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Пример

Рассмотрим двумерную систему

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2, \tag{16}$$

где

$$A_0(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0(m) = \begin{pmatrix} b(m) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Пример

Свободная система

$$x(m+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

стационарна, поэтому ее показатели Ляпунова устойчивы. Полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A_0) = \big(\lambda_1(A_0), \lambda_2(A_0)\big)$ этой системы кратен и состоит из чисел $\lambda_1(A_0) = \lambda_2(A_0) = 0$, поэтому система (22) не является системой с интегральной разделенностью.

Пример

Для каждого $K \in \mathbb{N}$ существует номер $j \doteq K$ такой, что для матрицы Калмана системы

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2, \quad (16)$$

имеют место равенства

$$W(m_{2j}, m_{2j}+K) = \sum_{l=m_{2j}}^{m_{2j}+K-1} X_{A_0}(m_{2j}, l+1)B_0(l)B_0^*(l)X_{A_0}^*(m_{2j}, l+1) =$$

$$= \sum_{l=m_{2j}}^{m_{2j+1}-1} \begin{pmatrix} b^2(l) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Это означает, что система (16) не является равномерно вполне управляемой.

Пример

Оказывается, что полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(m+1) = \big(A_0(m) + B_0(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^2, \tag{24}$$

пропорционально локально управляем.

Действительно, возьмем любой набор чисел $\big(\mu_1, \mu_2\big) \in \mathcal{O}_{1/2}\big(\lambda(A_0)\big)$, положим

$$\alpha_1 = e^{\mu_1} - 1, \quad \alpha_2 = e^{\mu_2} - 1, \tag{25}$$

и подействуем на систему

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^2, \ u \in \mathbb{R}^2, \tag{16}$$

обратной связью $u(m) = U(m)x(m)$, где

$$U(m) = \mathrm{diag}\big(\alpha_1, \alpha_2\big).$$

Пример

Замкнутая система имеет диагональный вид

$$x(m+1) = \operatorname{diag}\big(1 + b(m)\alpha_1, 1 + \alpha_2\big)x(m) =$$

$$= \operatorname{diag}\big(1 + b(m)(e^{\mu_1} - 1), e^{\mu_2}\big)x(m). \tag{26}$$

Можно проверить, что полный спектр показателей Ляпунова этой системы состоит из чисел μ_1, μ_2. Норма матричного управления $U(\cdot)$ удовлетворяет оценке

$$\|U\|_\infty \leqslant 2(e^{1/2} - 1) \max_{j=1,2} |\mu_j - \lambda_j(A_0)|. \tag{27}$$

Пример

Из теоремы 1 следует, что оболочка Бебутова системы

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2, \tag{16}$$

содержит систему $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big)$ такую, что полный спектр показателей Ляпунова соответствующей замкнутой системы

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

не является пропорционально локально управляемым. Эта система имеет вид

$$x(m+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(m) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(m). \tag{28}$$

Пример

Для произвольного матричного управления $U(\cdot) = \{u_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^{2}$ замкнутая система

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

имеет вид

$$x(m+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_{21}(m) & 1 + u_{22}(m) \end{pmatrix} x(m). \tag{29}$$

Управление не влияет на первую координату решения. Управлять полным спектром показателей Ляпунова этой системы невозможно.