Оптимальное и субоптимальное управление в односекторной модели экономического роста

Лукьянова Л.Н.
МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК

III Международный семинар "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби" (CGS'2020),
посвященный 75-летию академика А.И. Субботина
г.Екатеринбург

26-30 октября 2020 г.

Постановка задачи

В докладе приведено исследование варианта задачи о неоклассическом оптимальном росте для агрегированной замкнутой экономики с конечным горизонтом планирования и положительной нормой дисконтирования [1], при учете запаздывания введения новых фондов. Предполагается, что в момент времени $t > 0$ доступны для использования фонды, имеющиеся на момент $t - \tau, \tau > 0$ [2]. Рассматривается одна из форм моделей динамики процесса с запаздыванием τ, полученная методом введения дополнительных уравнений [3, 4], представляющая собой систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = u(t)f(v_2(t)) - \mu k(t), t \in [0, T], \\ 0 \leq u(t) \leq 1, k(0) = k_0 > 0, k(T) \geq k_T > 0, \\ \frac{\tau}{2}\dot{v}_1(t) = k(t) - v_1(t),\ v_1(0) = v_{01} \geq 0, \\ \frac{\tau}{2}\dot{v}_2(t) = v_1(t) - v_2(t),\ v_2(0) = v_{02} \geq 0, \\ \dot{y}(t) = e^{-\delta t}(1 - u(t))f(v_2(t)),\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где k, v_1, v_2, y — фазовые переменные, $f(k)$ — неокласическая производственная функция [1], $u(t)$ — управление, $\delta, \mu, k_0, k_T, T, \tau$ — положительные параметры. Исследуется задача оптмального управления

$$y(T) \to \max_{u(t) \in [0,1]}, \tag{2}$$

Приведем решение задачи (1),(2), которое найдено на основе Принципа максимума Понтрягина [5, 6] в классе измеримых по Лебегу функций.

Аналитическое решение задачи (1),(2)

Запишем краткую сводку результатов, полученных на основе Принципа максимума. Экстремальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} 1, & \eta(t) > 0, \\ 0, & \eta(t) < 0, \\ u^{**} \in [0,1], & \eta(t) \equiv 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\eta(t) = -\psi_4 e^{-\delta t} + \psi_1(t)$, ψ_1, ψ_4 — решения сопряженной системы.

Особый режим имеет место, если для $t \in [t_1, t_2]$ выполнено тождество $-e^{-\delta t} + \psi_1(t) \equiv 0$. Порядок особого режима [7, 8] равен 3; он характеризуется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \psi_1(t) &= e^{-\delta t}, \\ \psi_2(t) &= \frac{\tau}{2}(\mu+\delta)e^{-\delta t}, \\ \psi_3(t) &= (\mu+\delta)(\delta+\frac{\tau}{2})e^{-\delta t}, \\ f'_{v_2}(v_2^*) &= (\mu+\delta)(\delta+\frac{\tau}{2})(\delta+\frac{2}{\tau}), \\ v_1^* &= v_2^*, \\ k^* &= 2v_1^* - v_2^*, \\ u^{**} &= \frac{\mu k^*}{f(v_2^*)}. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через $\hat{v}_2$ решение уравнения $f(\hat{v}_2) = \mu\hat{v}_2$. Управление $u^{**} \in [0,1]$ допустимо в силу неоклассического условия для функции f. Для управления u^{**} выполнены необходимые условия Коппа – Мойера [7] оптимальности особого управления. В силу неоклассических условий $f(v_2) > 0$, $f''_{v_2} < 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^6}{dt^6}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{2}{\tau}e^{-\delta t}f''_{v_2}f^2(v_2) > 0.$$

Таким образом, особый режим (4) входит в число экстремальных управлений. Особое множество — множество $(k, v_1, v_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, удовлетворяющее уравнениям (4). Так как особое управление имеет прядок 3 и для особого участка выполнено усиленное условие Коппа – Мойера, то сопряжение неособых и особых участков выполняется посредством четтеринг режима поведения траектории при релейном управлении, при котором управление имеет бесконечное число переключений между ограничивающими его значениями [8]. На основании полученных характеристик экстремального управления численно построим управление, содержащее четтеринг режим. Учитывая его структуру, найдем аппроксимацию в форме субоптимального управления, при котором выполнены краевые условия для траектории, имеющей конечное число переключений граничных значений и промежуточных постоянных значений управления, и при котором значение функционала отличается от оптимального значения на величину менее 3%.

Результаты численных расчетов траекторий и управлений в задаче (1),(2) Приведем результаты численного расчета в системе BOCOP [9] задачи (1),(2) при $f(v_2) = \sqrt{v_2}, \tau = 1, \mu = 0.2, \delta = 0.01$, $T = 100$. Для этих параметров $\hat{k} = 25, v_2^* = 5.3947$. На рис. 1, 6 приведены траектория $k(t)$ и управление $u(t)$ для начальных условий $k(0) = 0.1$, $k(T) = 21$, $v_1(0) = 0.1$, $v_2(t) = 0.1$. Значение критерия качества $y(T) = 58.6602$.

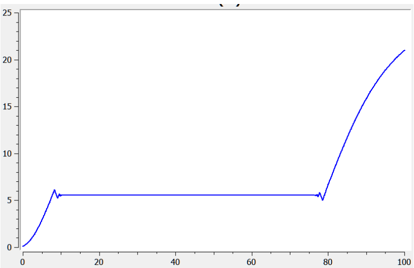

Figure 1: k(t)

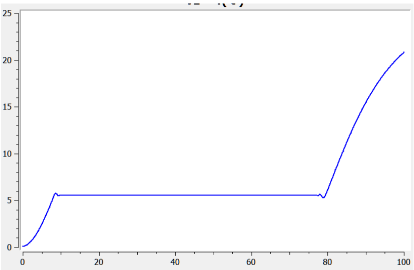

Figure 2: $v_1(t)$

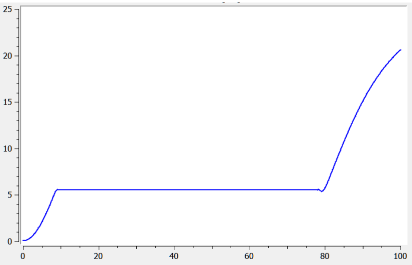

Figure 3: $v_2(t)$

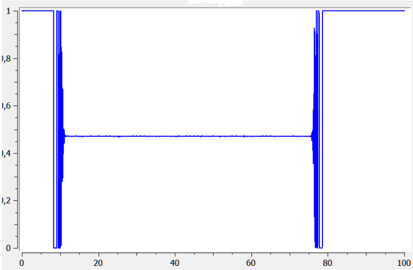

Figure 4: u(t)

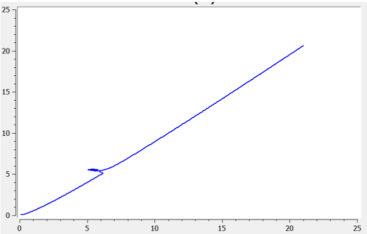

Figure 5: $v_2(k)$

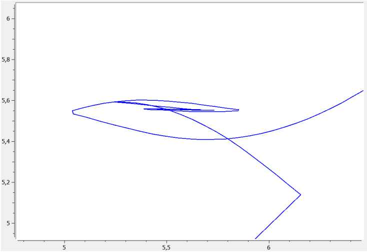

Figure 6: $v_2(k)$, окрестность особого множества

Значение критерия качества, которое близко к оптимальному, может быть достигнуто с помощью более простой структуры управления в форме

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t; t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u}) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ 0, & t \in [t_1, t_2], \\ \hat{u}, & t \in [t_2, t_3], \\ 0, & t \in [t_3, t_4], \\ 1, & t \in [t_4, T]\}, \end{cases} \tag{5}$$

где $t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u}$ — варьируемые параметры.
Рассмотрим следующую задачу на экстремум:

$$J_2 = J_2(\bar{u}(t; t_1, t_2, t_3, t_4, \hat{u})) \to \max_{\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}, \mathbf{t_3}, \mathbf{t_4}, \hat{u}: 0 \le \mathbf{t_1} \le \mathbf{t_2} \le \mathbf{t_3} \le \mathbf{t_4} \le T,\ \hat{u} \in [0,1]}, \tag{6}$$

$$J_2 = \int_0^T e^{-\delta t}(1 - \tilde{u}(t)) f(v_2(t)) dt,\ \dot{k}(t) = \bar{u}(t) f(v_2(t)) - \mu k(t),$$

$$\frac{\tau}{2}\dot{v}_1(t) = k(t) - v_1(t),\ v_1(0) = v_{01},\ \frac{\tau}{2}\dot{v}_2(t) = v_1(t) - v_2(t),\ v_2(0) = v_{02},$$

Решение задачи (6) на экстремум с граничными условиями $k(0)$, $k(T)$ и параметрически заданным управлением в системе BOCOP [9] имеет вид: $t_1 = 16.3129$, $t_2 = 27.9977$, $t_3 = 87.06082$, $t_4 = 87.147$, $\bar{u} = 0.621105$. На рис. 7, 8 приведено аппроксимирующее управление (5) и график соответствующей траектории $k(t)$ для тех же краевых условий. Значение критерия качества при таком управлении $y(T) = 56.9703$.

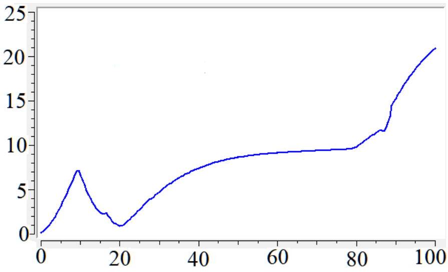

Figure 9: $k(t)$-аппроксимирующее

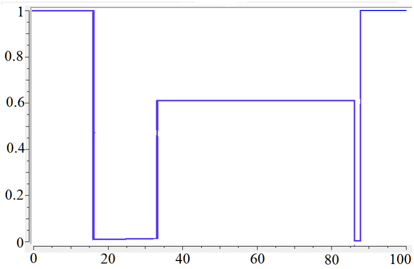

Figure 10: $u(t)$-аппроксимирующее

Литература

[1] *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

[2] *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: Юнити, 2005.

[3] *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1985.

[4] *Зуев С.М.* Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. М.: Наука, 1988.

[5] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 2004.

[6] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации // Прикладная математика и информатика. 2011. № 39. С. 107–129.

[7] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.

[8] *Schettler H., Ledzewicz U.* Optimal Control for Mathematical Models of Cancer Therapies. An Application of Geometric Methods. Springer, New York–Heidelberg–Dordrecht–London, 2015.

[9] *Team Commands, Inria Saclay.* BOCOP: an open source toolbox for optimal control. http://bocop.org, 2017.