Управление стохастическими системами с цветными шумами

Л. Б. Ряшко[1], *И. А. Башкирцева*[1]
e-mail: Lev.Ryashko@urfu.ru, Irina.Bashkirtseva@urfu.ru

В исследованиях динамики реальных систем необходимо учитывать специфику неизбежно присутствующих случайных возмущений. Наряду с традиционно рассматриваемыми белыми шумами, часто возникает необходимость учитывать воздействие так называемых цветных шумов, имеющих те или иные корреляционные характеристики [1]. Важная роль цветных шумов была обнаружена во системах самой разной природы. Данная работа посвящена исследованию задачи управления в системе, возмущаемой цветными шумами.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = f(x, u, r), \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор состояния, u – l-мерный вектор управления, $f(x, u, r)$ – достаточно гладкая вектор-функция, $r(t)$ – m-вектор случайных возмущений.

Предполагается, что случайные возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$, $s = (s_1, \ldots, s_m)^\top$, имеющие интенсивность ε, формируются коррелированным цветным шумом с параметрами

$$\mathrm{E}s_i(t) = 0, \quad \mathrm{E}s_i(t)s_i(t') = \sigma_i^2 \exp\left(-a_i|t - t'|\right), \;\; \tau_i = \frac{1}{a_i}.$$

При этом значения a_i задают времена корреляции τ_i координат этого цветного шума. Тогда дисперсии $\mathrm{E}r_i^2(t) = \varepsilon^2\sigma_i^2$ координат случайного возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$ в системе (1) не зависят от параметров a_i.

Цветные шумы $s(t)$ с указанными выше характеристиками можно смоделировать следующей стохастической системой Ито:

$$ds_i = -a_i s_i dt + \sigma_i \sqrt{2a_i} dw_i, \quad a_i > 0, \tag{2}$$

[1]Уральский математический центр, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

где $w_i(t)$ $(i = 1, \dots m)$ – независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $\mathrm{E}(w_i(t) - w_i(t')) = 0,\ \mathrm{E}(w_i(t) - w_i(t'))^2 = |t - t'|$. Система (2) играет роль генератора цветных шумов, получая их из стандартных винеровских процессов.

Предполагается, что невозмущенная система без управления $(u = 0,\ r = 0)$ имеет равновесие $\bar{x}:\ f(\bar{x}, 0, 0) = 0$. Целью работы является управление стохастической динамикой системы (1) вблизи этого равновесия под воздействием малых цветных шумов.

Для изучения дисперсии решений $x^{\varepsilon}(t)$ системы (1) около равновесия $\bar{x}$ при малом цветном шуме будем использовать следующую асимптотику:

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{\varepsilon}(t) - \bar{x}}{\varepsilon}.$$

Динамика пары $y(t), s(t)$ задается следующей стохастической линейной системой:

$$\dot{y} = (F + BK)y + Gs \tag{3}$$

$$\dot{s} = -As + C\dot{w}, \tag{4}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0, 0), \quad K = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}), \quad G = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0, 0),$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \sigma_1\sqrt{2a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m\sqrt{2a_m} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Здесь, не теряя общности, можно считать, что управление формируется линейной обратной связью

$$u(x) = K(x - \bar{x}). \tag{5}$$

В этом регуляторе матрицы K выбираются из множества

$$\mathbb{K} = \{K | \mathrm{Re}\lambda_i(F + BK) < 0\},$$

где $\lambda_i(F + BK)$ – собственные числа матрицы $F + BK$. Предполагается, что множество $\mathbb{K}$ не пусто.

При каждом $K \in \mathbb{K}$ матрицы вторых моментов $W = \mathrm{E}\,yy^\top$, $M = \mathrm{E}\,ys^\top$, $N = \mathrm{E}\,ss^\top$ стационарных решений системы (3), (4) являются единственным решением алгебраической системы

$$
\begin{aligned}
&(F+BK)W + W(F+BK)^\top + GM^\top + MG^\top = 0\\
&(F+BK)M + GN - MA = 0\\
&AN + NA = 2AQ,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где

$$
Q = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m^2 \end{array}\right].
$$

Из этой системы сразу следует, что $N = Q$, поэтому матрицы W и M связаны системой

$$
\begin{aligned}
&(F+BK)W + W(F+BK)^\top + GM^\top + MG^\top = 0\\
&(F+BK)M + GQ - MA = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Матрица W характеризует стохастическую чувствительность [2] равновесия $\bar{x}$ системы (1) с цветными шумами (2) и регулятором (5). Система (7) задает алгебраическую связь матриц W и K. Варьируя матрицу K регулятора, мы можем управлять стохастической чувствительностью равновесия. В докладе обсуждаются возможности такого управления в зависимости от параметров системы, приводятся иллюстрационные примеры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00165

[1] *Hänggi P., Jung P.* Colored noise in dynamical systems // Advances in Chemical Physics. 2007. V. 89. P. 239–326. DOI: 10.1002/9780470141489.ch4

[2] *Bashkirtseva I.* Stochastic sensitivity of systems driven by colored noise // Physica A. 2018. V. 505. C. 729–736. DOI: 10.1016/j.physa.2018.03.095