РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Сумин М.И.

Тамбовский госуниверситет им. Г.Р. Державина
Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
УрО РАН,
Екатеринбург, CGS-2020

Задачи оптимального управления как задачи условной оптимизации

Многие задачи оптимального управления, в том числе и распределенными системами, естественным образом могут быть записаны в форме соответствующих эквивалентных задач условной оптимизации с ограничениями, задаваемыми, в зависимости от конкретной задачи, операторами как с конечномерными, так и с бесконечномерными образами. Это относится и к обратным задачам современного естествознания, которые часто разумно трактовать как задачи оптимального управления. Вместе с тем, применение главного теоретического результата всей теории условной оптимизации — принципа Лагранжа (ПЛ) для непосредственного практического решения задач этого класса и, в частности, задач оптимального управления и многих сводящихся к ним задач, встречается с трудностями принципиального характера, обусловленными свойствами некорректности ПЛ.

Проблема некорректности классических условий оптимальности (КУО)

Здесь имеются ввиду такие проявления некорректности ПЛ и, более общо, некорректности классических условий оптимальности (КУО) в целом, как их неустойчивость и невыполнимость. Мы говорим о неустойчивости КУО в задаче условной оптимизации, если выделяемые ими в задачах, “сколь угодно близких” к исходной (невозмущенной) задаче, “приближенные” оптимальные элементы могут сколь угодно сильно отличаться от их невозмущенных аналогов как по аргументу, так и по функции (СуминМ2011,СуминМ2014,СуминМ2019). В свою очередь, невыполнимость КУО, в той или иной конкретной задаче на условный экстремум, понимается как принципиальная невозможность записать их для нее в той “привычной” форме, в которой они записывается в “большинстве” других аналогичных задач этого класса (см. (АТФ, с. 260), а также (СуминМ2011,СуминМ2014,СуминМ2019)).

Преодоление некорректности КУО в задаче оптимального управления как главная цель работы

В работе продолжается линия работы (СуминМ2020) и обсуждается как ситуация с применимостью КУО для непосредственного практического решения задач выпуклого оптимального управления принципиально меняется, если вместо “привычных” КУО (ПЛ, принцип максимума Понтрягина (ПМП)) при решении задач опираться на различные регуляризованные аналоги КУО (СуминМ2011,СуминМ2014,СуминМ2019). Для иллюстрации сказанного мы рассматриваем выпуклую задачу граничного оптимального управления для линейного параболического уравнения. Ее целевой функционал, как и в (СуминМ2020), не является, вообще говоря, сильно выпуклым. В отличие от (СуминМ2020) здесь рассматривается, во-первых, распределенная управляемая система и, во-вторых, множество допустимых управлений оптимизационной задачи, вообще говоря, не является ограниченным.

Постановка задачи оптимального управления для параболического уравнения

Пусть $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S_T \equiv \{(x,t):\ x \in S,\ t \in (0,T)\}$, $S \equiv \partial\Omega$, Ω — ограниченная область в R^n, $\mathcal{D} \subseteq L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество. Рассмотрим выпуклую задачу оптимального управления (ее постановка максимально упрощена для компактности презентации)

$$(P) \qquad f(w) \to \min,\ g(w) = 0,\ w \in \mathcal{D} \in \mathcal{H},$$

$$f(w) \equiv \int_\Omega A(x)(z[w](x,T))^2\,dx,\ g(w) \equiv G_1(\cdot)z[w](\cdot,T) + G_2(\cdot),$$

где $z[w]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T)$ (см. (ЛСУ1967, гл. III) третьей начально-краевой задачи

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z = 0, \tag{1}$$

$$z(x,0) = 0,\ x \in \Omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T.$$

Условия на исходные данные задачи

а) функции $A : \Omega \to R^1$, $G_1 : \Omega \to R^1$, $G_2 : \Omega \to R^1$ измеримы по Лебегу, $A(\cdot)$ — неотрицательная функция;
б) выполняются условия (L — некоторая постоянная)

$$\|A\|_{\infty,\Omega} \leq L, \ \|G_i\|_{\infty,\Omega} \leq L, \ \ i = 1, 2;$$

в) функции $a_{i,j}$, $a : \Omega \times (0, T) \to R^1$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma : \ S \times (0, T) \to R^1$ измеримы по Лебегу;
г) справедливы оценки (K_1, K_2 — некоторые постоянные)

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{i,j}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0;$$

$$\|a\|_{\infty,Q_T} \leq K_1, \quad \|\sigma\|_{\infty,S_T} \leq K_2;$$

д) граница S является кусочно-гладкой.

Условия на отклонение возмущенной задачи от точной

Определим точную (P^0), $(\delta = 0,\ f^0,\ g^0)$, и возмущенную (P^δ), $(\delta \in (0, \delta_0),\ f^\delta,\ g^\delta)$, задачи, определяемые соответственно наборами невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных:
$\mathsf{f}^0 \equiv \{A^0,\ G_i^0,\ i = 1, 2,\ a_{i,j}^0,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n,\ a^0,\ \sigma^0\}$ и
$\mathsf{f}^\delta \equiv \{A^\delta,\ G_i^\delta,\ i = 1, 2,\ a_{i,j}^\delta,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n,\ a^\delta,\ \sigma^\delta\}$,
$\delta_0 > 0$ — некоторое число. Для них выполняются условия а), б), в), г), д), с независящими от $\delta \geq 0$ постоянными $\nu,\ \mu,\ L,\ K_1,\ K_2$. Будем считать, что

$$\|A^\delta - A^0\|_{\infty,\Omega},\ \|G_i^\delta - G_i^0\|_{\infty,\Omega} \leq \delta,\ \ i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,Q_T},\ \|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T},\ \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \leq \delta.$$

Обобщенная минимизирующая последовательность (ОМП), регуляризирующий оператор

Обозначим: $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{w \in \mathcal{D} : \|g^\delta(w)\|_{2,\Omega} \le \epsilon\}$, $\epsilon \ge 0$, $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \equiv \mathcal{D}^\epsilon$, и определим обобщенное значение β задачи (P^0)

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{w \in \mathcal{D}^\epsilon} f^0(w), \qquad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^\epsilon = \emptyset.$$

Очевидно, $\beta \le \beta_0 \equiv \inf\limits_{w \in \mathcal{D}^0} f^0(w)$, β_0 — классическое значение.

Определение 1. *Обобщенной минимизирующей последовательностью (ОМП) в задаче (P^0), называется последовательность $w^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что $f^0(w^i) \le \beta + \delta^i$, $w^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}$ с $\delta^i \to 0$, $\epsilon^i \to 0$, $i \to \infty$, $\delta^i \ge 0$, $\epsilon^i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Определение 2. *Зависящий от $\delta \in (0, \delta_0)$, оператор $R(\cdot, \delta)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^δ, удовлетворяющих оценкам (2), элемент $w^\delta \in \mathcal{D}$, называется регуляризирующим в задаче (P^0), если $f^0(w^\delta) \to \beta$, $\|g^0(w^\delta)\|_{2,\Omega} \to 0$, $\delta \to 0$.*

Фундаментальность понятия ОМП

В математическом программировании применяемые в работе ОМП известны под названием обобщенных планов (Гольштейн1971). В оптимальном управлении они получили название минимизирующих приближенных решений (Варга1977, гл. III). Широко используемое в оптимизации понятие ОМП органично учитывает запросы как строгой математической оптимизационной теории (Гольштейн1971), (Варга, гл. IV–VIII), так и инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и по выполнению ограничений задачи и по приближению значений функционала цели к ее нижней грани (Варга1977, гл. III). Введенное понятие регуляризирующего оператора (СуминМ2020), а также производное от него понятие ОМП-образующего оператора, существенно “привязаны” именно к понятию ОМП.

Особенности введенного понятия регуляризирующего оператора для задачи условной оптимизации

Введенное понятие регуляризирующего оператора "встраивается" в формулировки регуляризованных КУО, трансформируя классические аналоги в регуляризирующие алгоритмы — универсальные инструменты устойчивого построения ОМП в задаче (P). Отличительной особенностью такого понятия является то, что генерируемые в соответствии с ним приближенные решения задачи "аппроксимируют" ее точное решение, одновременно, как по функции, так и "по ограничениям", но без обязательного требования приближения по аргументу. Такой подход к регуляризации в задачах, подобных задаче (P), требует минимальных дополнительных предположений об их исходных данных и позволяет позиционировать его как промежуточный между "привычными" понятиями регуляризации (сходимости) по функции и по аргументу (Васильев2011).

Еще одно (вспомогательное) понятие ОМП

Помимо ОМП из определения 2 нам понадобятся также и последовательности $w^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что

$$f^0(w^i) \le \beta_0 + \delta^i, \ w^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}, \ i = 1, 2, \dots \qquad (3)$$

с $\delta^i \to 0$, $\epsilon^i \to 0$, $i \to \infty$, $\delta^i \ge 0$, $\epsilon^i \ge 0$, $i = 1, 2, \dots$. Такие последовательности мы называем ниже ОМП в смысле (3). Определим и соответствующее понятие регуляризирующего оператора в задаче (P^0).

Определение 3. *Зависящий от $\delta \in (0, \delta_0)$, оператор $R(\cdot, \delta)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^δ, удовлетворяющих оценкам (2), элемент $w^\delta \in \mathcal{D}$, называется регуляризирующим в смысле (3) в задаче (P^0), если $f^0(w^\delta) \le \beta_0 + \gamma(\delta)$, $\gamma(\delta) \ge 0$, $\gamma(\delta) \to 0$, $\|g^0(w^\delta)\|_{2,\Omega} \to 0$, $\delta \to 0$.*

ОМП-образующий оператор

Основное предназначение регуляризованных КУО — генерирование ОМП в задаче (P^0). В этой связи важное методологическое значение имеет следующее определение — “след” определений 2 и 3.

Определение 4. *Пусть* $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — *сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от* δ^k, $k = 1, 2, \ldots,$ *оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие каждому набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам (2) при* $\delta = \delta^k$, *элемент* $w^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, *называется ОМП-образующим в задаче* (P^0), *если последовательность* w^{δ^k}, $k = 1, 2, \ldots,$ *есть ОМП в этой задаче. Если же эта последовательность есть ОМП в смысле (3), то оператор* $R(\cdot, \delta^k)$ *будем соответственно называть ОМП-образующим в смысле (3).*

Априорная оценка для решений начально-краевой задачи (1)

Обозначим решения $z[w]$ начально-краевой задачи (1), соответствующее набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через $z^\delta[w]$. Можно утвержать, что
1. Для любого $w \in L_2(S_T)$ существует единственное решение $z^\delta[w]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1) и имеет место априорная оценка

$$|z^\delta[w]|_{Q_T} + \|z^\delta[w]\|_{2,S_T} \leq C_T \|w\|_{2,S_T}, \tag{4}$$

где постоянная C_T не зависит от $w \in L_2(S_T)$ и набора исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$.

Априорная оценка для отклонений решений начально-краевой задачи (1)

2. Для любых двух управлений w^1, $w \in \mathcal{H}$

$$|z^\delta[w^1] - z^0[w]|_{Q_T} + \|z^\delta[w^1] - z^0[w]\|_{2,S_T} \leq \tag{5}$$

$$C_T(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|z^0_{x_j}[w]\|_{2,Q_T}\|a^\delta_{i,j}(\cdot,\cdot) - a^0_{i,j}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} +$$

$$\|z^0[w]\|_{2,Q_T}\|a^\delta(\cdot,\cdot) - a^0(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} +$$

$$\|w^1 - w\|_{2,S_T} + \|z^0[w]\|_{2,S_T}\|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T}),$$

в которой постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$ и управлений w, $w^1 \in \mathcal{H}$.

Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования (ВП)

В силу последних двух утверждений с оценками (4), (5) и с учетом оценок (2) задача (P^δ) при $\delta \in [0, \delta_0]$ переписывается в форме задачи выпуклого программирования (ВП)

$$f^\delta(w) \to \inf, \quad A^\delta w = -G_2^\delta(\cdot) \equiv h^\delta, \; w \in \mathcal{D} \tag{6}$$

с выпуклым функционалом $f^\delta : \mathcal{D} \to R^1$ и с линейным ограниченным оператором $A^\delta[w] \equiv A^\delta w \equiv G_1^\delta(\cdot) z^\delta[w](\cdot, T)$ $(g^\delta(w) = A^\delta[w] + G_2^\delta(\cdot))$, причем справедливы оценки отклонения возмущенных исходных данных $(\delta > 0)$ задачи (6) от точных $(\delta = 0)$

$$|f^\delta(w) - f^0(w)| \le C\delta(1 + \|w\|) \; \forall\, w \in \mathcal{D}, \tag{7}$$

$$\|A^\delta w - A^0 w\| \le C\delta(1 + \|w\|) \; \forall\, w \in \mathcal{D}, \; \|h^\delta - h^0\| \le C\delta, \tag{8}$$

где $C > 0$ не зависит от δ и управления $w \in \mathcal{D}$.

Регуляризация ПЛ в задаче ВП и ее “расшифровка” в терминах задачи оптимального управления

Задача оптимального управления (P^0) сведена к задаче ВП (6), функционал цели которой не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Для нее на основе результатов работ (СуминМ2011, СуминМ2020) могут быть получены различные версии регуляризованных ПЛ. На этом пути вместо привычного одного используется два параметра регуляризации и два соответствующих условия согласования одновременно. Один из этих параметров, как и в (СуминМ2011,СуминМ2014,СуминМ2019), “отвечает” за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к функционалу цели исходной задачи. “Расшифровка” этих регуляризованных ПЛ для задачи (6) ведет к получению соответствующих регуляризованных КУО для исходной задачи оптимального управления (P^0). Формулируем далее результаты этой расшифровки.

Функционал Лагранжа в задаче оптимального управления, двойственная задача

Определим далее функционал Лагранжа

$$L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \equiv f^\delta(w) + \varepsilon\|w\|^2 + \langle \lambda, A^\delta w - h^\delta \rangle = f^\delta(w) +$$

$$\varepsilon\|w\|^2 + \langle \lambda, g^\delta(w)\rangle = \int_\Omega A^\delta(x)(z^\delta[w](x,T))^2 dx +$$

$$\int_\Omega \lambda(x)(G_1^\delta(x) z^\delta[w](x,T) + G_2^\delta(x))dx, \quad w \in \mathcal{D}, \ \lambda \in L_2(\Omega)$$

и двойственную задачу

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) \equiv \min_{w\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \to \sup, \ \lambda \in L_2(\Omega), \quad V^{0,0}(\lambda) \equiv V^0(\lambda).$$

Примем обозначения $W^0 \equiv \mathrm{Argmin}\{f^0(w) : w \in \mathcal{D}^0\}$,
$\mathcal{D}^0 \equiv \{w \in \mathcal{D} : \ g^0(w) = 0\}$,
$w^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \equiv \mathrm{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) : \ w \in \mathcal{D}\}$,
$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{w \in \mathcal{D} : \ \|g^\delta(w)\| \le \epsilon\}$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$.

Условия согласования в задаче оптимального управления

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}$ точку максимума в задаче

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 \to \sup, \ \lambda \in L_2(\Omega).$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \ \alpha(\delta) \to 0, \ \delta \to 0. \tag{9}$$

Пусть, кроме того, выполняется условие

$$f^\delta(w) \geq F \quad \forall\, w \in \mathcal{D}, \ \delta \in [0, \delta_0], \tag{10}$$

а также еще одно условие согласования

$$\frac{\delta}{\varepsilon(\delta)} \to 0, \ \ \varepsilon(\delta) \to 0, \ \ \delta \to 0. \tag{11}$$

Теорема сходимости алгоритма двойственной регуляризация в задаче оптимального управления

Следующая теорема обобщает теоремы сходимости алгоритмов двойственной регуляризации (СуминМ2011,СуминМ2014,СуминМ2020) на случай задач выпуклой условной оптимизации с, вообще говоря, не сильно выпуклыми целевыми функционалами.

Теорема 1. *Пусть решение задачи* (P^0) *существует и выполняются условия согласования (9) и (11),* $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— последовательность сходящихся к нулю чисел. Пусть также выполняется условие (10). Оператор* $R(\mathsf{f}^\delta, \delta)$*, ставящий в соответствие любому набору исходных данных* f^δ*, удовлетворяющих оценкам* (2)*, элемент* $R(\mathsf{f}^\delta, \delta) \equiv w^{\delta,\varepsilon(\delta)}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon(\delta)}]$ *является регуляризирующим в задаче* (P^0) *в смысле определения 3.*

На основе теоремы 1 доказываются следующие два варианта регуляризованных ПЛ для задачи (P^0).

Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления в случае равенства $\beta = \beta_0$

Теорема 2. *Пусть* $\beta = \beta_0$*, выполняется условие (10) и* $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, *— произвольная фиксированная последовательность. Тогда справедливы два утверждения:*
1. Для существования в задаче (P^0) *ограниченной ОМП необходимо чтобы существовали последовательность сходящихся к нулю положительных чисел* ε^k, $k = 1, 2, \ldots$ *и последовательность* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполнялись соотношения*

$$w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \ \gamma^k \to 0, \ k \to \infty, \tag{12}$$

$$\langle \lambda^k, g^{\delta^k}(w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]) \rangle \to 0, \ k \to \infty, \tag{13}$$

а последовательность $w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является (возможно неограниченной) ОМП.*

Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления в случае равенства $\beta = \beta_0$

Продолжение теоремы 2.

Другими словами, оператор, задаваемый равенством

$$R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k], \tag{14}$$

является ОМП-образующим (см. определение 4), причем каждая слабая предельная точка последовательности $w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *в случае ее ограниченности есть решение задачи* (P^0).

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$ *может быть взята, например, последовательность* $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, *с* $\varepsilon^k = \varepsilon(\delta^k)$ *при условиях согласования (9) и (11), вырабатываемая ОМП-образующим алгоритмом теоремы 1.*

Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления в случае равенства $\beta = \beta_0$

Продолжение теоремы 2.

2. И, наоборот, для того, чтобы в задаче (P^0) *существовало ограниченное ОМП достаточно, чтобы существовали последовательность сходящихся к нулю положительных чисел* ε^k, $k = 1, 2, \ldots$ *и последовательность двойственных переменных* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются включения (12) и предельное соотношение (13), причем, последовательность* $w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$ *является ограниченной. В этом случае задаваемый равенством (14) оператор является ОМП-образующим, причем каждая слабая предельная точка последовательности* $w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *есть решение задачи* (P^0).

Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления в случае ограниченного $\mathcal{D}$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{D}$ ограничено, $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, — произвольная фиксированная последовательность. Тогда справедливо утверждение: Для существования ОМП в задаче (P^0) необходимо и достаточно существование последовательности сходящихся к нулю положительных чисел ε^k, $k = 1, 2, \ldots,$ и последовательности двойственных переменных $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots,$ таких, что $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, и выполняются соотношения*

$$w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \ \gamma^k \to 0, \ k \to \infty, \tag{15}$$

$$\langle \lambda^k, g^{\delta^k}(w^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]) \rangle \to 0, \ k \to \infty. \tag{16}$$

Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления в случае ограниченного $\mathcal{D}$

Продолжение теоремы 3.

Указанная последовательность $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *является искомым ОМП. Другими словами, оператор, задаваемый равенством* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, *является ОМП-образующим в задаче* (P^0). *Одновременно с предельным соотношением* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$ *и соотношениями* (15), (16), *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda \in L_2(\Omega)} V^0(\lambda) = \min_{w \in \mathcal{D}^0} f^0(w). \tag{17}$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$ *может быть взята последовательность* $\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *вырабатываемая ОМП-образующим алгоритмом теоремы 1. При этом условие согласования (11) не нужно.*

Принцип максимума Понтрягина в задаче минимизации функционала Лагранжа

Регуляризованные принципы Лагранжа теорем 2 и 3 могут быть трансформированы в соответствующие регуляризованные принципы максимума Понтрягина.
Преобразуем, например, теорему 3.
Пусть в дополнение к условиям а), б), в), г), д) исходные данные задачи (P^0) таковы, что
$\mathcal{D} \equiv \{w \in L_2(S_T) : \; w(x,t) \in W \;$ п.в. на $S_T\}$, $W \subset R^1$ — выпуклый компакт,

$$a_{i,j}^\delta \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}), \;\gamma > 0, \;a_{i,j}^\delta(x) = a_{j,i}^\delta(x), \tag{18}$$

$$\Omega - \text{область класса } C^{2,\gamma},$$

а вместо оценки $\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,Q_T} \leq \delta$, входящей в определение (2) отклонения возмущенных исходных данных f^δ от невозмущенных f^0 выполняется оценка

$$\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{C^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \delta.$$

Принцип максимума Понтрягина в задаче минимизации функционала Лагранжа

Центральную роль здесь играет задача минимизации функции Лагранжа

$$L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \to \min, \quad w \in \mathcal{D}, \tag{19}$$

единственным решением которой является управление $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \in \mathcal{D}$. Введем стандартное обозначение $H^{\varepsilon}(w,\eta) \equiv w\eta - \varepsilon w^2$. Приведем критерий оптимальности в форме поточечного ПМП для выпуклой задачи (19) с компактным множеством W и при дополнительных условиях (18). Эти дополнительные предпорложения позволяют организовать полноценное игольчатое варьирование управления $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ в задаче (19), следствием которого и является следующая лемма.

Поточечный принцип максимума Понтрягина в задаче минимизации функционала Лагранжа

Лемма 1. *Управление* $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ *удовлетворяет при* $w = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ *для п.в.* $(s,t) \in S_T$ *равенству*

$$H^{\varepsilon}(w(s,t), \eta^{\delta}[w](s,t)) = \max_{r \in W} H^{\varepsilon}(r, \eta^{\delta}[w](s,t)), \qquad (20)$$

где $\eta^{\delta}[w] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *— решение сопряженной задачи*

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a^{\delta}_{i,j}(x,t)\eta_{x_i} + a^{\delta}(x,t)\eta = 0, \qquad (21)$$

$$\eta(x,T) = -2A^{\delta}(x)z^{\delta}[w](x,T) - \lambda(x)G_1^{\delta}(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^{\delta}(x,t)\eta = 0, \quad (x,t) \in S_T.$$

И, обратно, любой элемент $w \in \mathcal{D}$*, удовлетворяющий вместе с некоторой* $\lambda \in L_2(\Omega)$ *соотношениям* (20), (21)*, доставляет минимум в задаче* (19)*, т.е.* $w = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$.

Регуляризованный поточечный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления

Обозначим через $W_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП леммы 1 в задаче (19). Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости функции $f^\delta(\cdot) + \varepsilon\|\cdot\|^2$, это множество состоит из одного элемента $W_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \equiv w_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ и справедливо равенство $w_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda] = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 3 и леммы 1 является регуляризованный поточечный ПМП для задачи (P^0).

Теорема 4. *[Регуляризованный поточечный ПМП в задаче оптимального управления] При сделанных дополнительных предположениях все утверждения теоремы 3 остаются справедливыми, если в них $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$ заменяется везде на $w_m^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$.*

Цитированная литература

СуминМ2011 *М. И. Сумин* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве . Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Том 51, № 9, сс. 1594–1615.

СуминМ2014 *М. И. Сумин* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач. Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Том 54, № 1, сс. 25–49.

СуминМ2019 *М. И. Сумин* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 1, сс. 279–296.

АТФ1979 *В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Цитированная литература

СуминМ2020 *М. И. Сумин* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Том. 26, № 2, сс. 252—269.

ЛСУ1967 *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Гольштейн1971 *Е. Г. Гольштейн* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.

Варга1977 *Дж. Варга* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

Васильев2011 *Ф. П. Васильев* Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011.