Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи

С. Бенараб

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,

Екатеринбург, 26-30 октября 2020 года
III Международный семинар "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби" (CGS'2020)

Пусть $(X, \preceq)$ — частично упорядоченное пространство. Для элементов $x, u \in X$ пишем $x \prec u$, если $x \preceq u$ и $x \neq u$.
Пусть задано множество $Y \neq \emptyset$ и определены отображения $\psi, \varphi : X \times X \to Y$. Рассмотрим задачу о существовании элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению

$$\psi(x, x) = \varphi(x, x). \tag{1}$$

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X$. Определим множество $\Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ цепей S в пространстве X таких, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнено соотношение

$$\forall u \in S \;\; \exists x \in X \;\;\; x \preceq u, \;\;\; \psi(x, u) = \varphi(x, u). \tag{2}$$

Теорема 1.

Пусть выполнены следующие условия:

(a) *существуют* $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$ *такие, что* $x_0 \preceq u_0$ *и* $\psi(x_0, u_0) = \varphi(x_0, u_0)$;

(b) *для любых* $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ *таких, что* $x \prec u$, $\psi(x, u) = \varphi(x, u)$, *существуют* $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, *для которых* $w \preceq v \prec u$ *и* $\psi(w, v) = \varphi(w, v)$;

(c) *для произвольной бесконечной цепи* $S \in \Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ *существуют элементы* $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\forall u \in S \;\; \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \quad \psi(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = \varphi(\widetilde{w}, \widetilde{v}). \tag{3}$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ *уравнения* (1) *такое, что* $\xi \preceq u_0$.

Пусть задан элемент $y \in Y$. Рассмотрим частный случай уравнения (1) — уравнение

$$\psi(x, x) = y \tag{4}$$

Определим множество $\Xi_0(\mathcal{X}, \psi, y)$ цепей S в пространстве X таких, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнено соотношение

$$\forall u \in S \ \ \exists x \in X \ \ x \preceq u, \ \ \psi(x, u) = y. \tag{5}$$

Следствие.

Пусть существуют элементы $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$ такие, что $x_0 \preceq u_0$ и $\psi(x_0, u_0) = y$; для любых $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ таких, что $x \prec u$, $\psi(x, u) = y$, существуют $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, для которых $w \preceq v \prec u$ и $\psi(w, v) = y$; для произвольной бесконечной цепи $S \in \Xi_0(\mathcal{X}, \psi, y)$ существуют элементы $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, удовлетворяющие соотношениям

$$\forall u \in S \ \ \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \ \ \psi(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = y. \tag{6}$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ уравнения (4) такое, что $\xi \preceq u_0$.

Обозначим через AC^n пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций. Пусть заданы функции $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Для системы дифференциальных уравнений

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

в докладе сформулированы условия разрешимости периодической краевой задачи, полученные с помощью приведенного выше следствия из теоремы 1.

Пусть задана диагональная $n \times n$ матрица $\lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.

Пусть выполнены следующие условия:

- при $i = \overline{1,n}$, п.в. $t \in [0,1]$, ∀x,v $\in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не убывает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$, $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу $v_1, \ldots, v_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.
- для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что

$$\nu(0) - \nu(1) \geq \eta(0) - \eta(1), \quad \dot{\nu} - \lambda\nu \geq \dot{\eta} - \lambda\eta,$$

выполнены неравенства

$$f_i(t, \nu, v + \lambda\nu, y_i + \lambda_i\nu_i) \geq 0, f_i(t, \eta, v + \lambda\eta, y_i + \lambda_i\eta_i) \leq 0$$

при $i = \overline{1,n}$ и п.в. $t \in [0,1]$.

Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$\eta(0) - \eta(1) \le A \le \nu(0) - \nu(1),$$

существует решение $x \in AC^n$ краевой задачи для системы (7) с условием

$$x(0) - x(1) = A,$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} - \lambda\eta \le \dot{x} - \lambda x \le \dot{\nu} - \lambda\nu.$$

Сформулированная теорема обобщает теорему Чаплыгина [1] на периодическую краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

[0] **[1] Чаплыгин С.А.** Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919. Собрание сочинений I. Гостехиздат. 1948. С. 348–368.