

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ



## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ

Тезисы Международной (51-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции  
3 — 7 февраля 2020 г.

Екатеринбург  
2020

УДК 51

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (51-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2020.

Настоящее издание включает тезисы Международной (51-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции, прошедшей с 3 по 7 февраля 2020 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим направлениям: алгебра и комбинаторика (теория групп, алгебраическая теория графов, алгебра и ее приложения); компьютерные науки, анализ данных и искусственный интеллект; математическая биология; математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных; оптимальное управление и дифференциальные игры; теория вероятностей и случайные процессы; теория функций. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Ответственный редактор  
д.ф.-м.н. Н.Ю. Антонов.

Ответственный за выпуск:  
Н.А. Минигулов.

© Институт математики и механики УрО РАН,  
авторы тезисов, 2020

## *Предисловие*

Этот сборник включает тезисы докладов Международной (51-й Всероссийской) школы-конференции «Современные проблемы математики и её приложений», СоПроМат-2020, организованной Институтом математики и механики им. Н.Н. Красовского (ИММ УрО РАН) в городе Екатеринбурге 3 – 7 февраля 2020 года. СоПроМат ставит своей целью объединить исследователей в области чистой и прикладной математики и компьютерных наук. Математические секции конференции включали такие направления, как алгебра и комбинаторика (теория групп, алгебраическая теория графов, алгебра и ее приложения); компьютерные науки, анализ данных и искусственный интеллект; математическая биология; математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных; оптимальное управление и дифференциальные игры; теория вероятностей и случайные процессы; теория функций.

Мы получили тезисы 60 секционных докладов в девяти секциях. Кроме этого, было прочитано 12 приглашённых пленарных лекций. Мы хотим поблагодарить лекторов, программный комитет, авторов тезисов и докладов и участников конференции, так как без них конференция не могла бы состояться.

Организационный комитет:

Председатель — Антонов Николай Юрьевич

Секретарь — Чистяков Павел Александрович

Заместитель председателя — Хлопин Дмитрий Валерьевич

Борбунов Алексей Николаевич

Ефимов Константин Сергеевич

Ильенко Кристина Альбертовна

Кабанов Владислав Владимирович

Минигулов Николай Александрович

Родин Алексей Семенович

Ямковой Дмитрий Анатольевич

5 июля 2020

## О КОНЕЧНЫХ НЕРАЗРЕШИМЫХ 4-ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ БЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 6

А. С. Кондратьев, Н. А. Минигулов

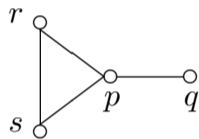
Графом Грюнберга–Кегеля (или графом простых чисел) конечной группы  $G$  называется граф  $\Gamma(G)$ , в котором вершинами являются все простые делители порядка группы  $G$  и две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда в группе  $G$  есть элемент порядка  $pq$ .

В [1] и [2] первый автор описал конечные группы с графами Грюнберга–Кегеля как у групп  $Aut(J_2)$  и  $A_{10}$  соответственно. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп как абстрактные графы изоморфны.

Нами поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны графу  $\Gamma(A_{10})$ .

В рамках решения этой задачи в [3] нами доказано, что если  $G$  – конечная неразрешимая группа и граф  $\Gamma(G)$  как абстрактный граф изоморфен графу  $\Gamma(A_{10})$ , то фактор-группа  $G/S(G)$  группы  $G$  по ее разрешимому радикалу  $S(G)$  почти проста, и классифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны подграфам графа  $\Gamma(A_{10})$ .

Пусть  $G$  – конечная неразрешимая группа и граф  $\Gamma(G)$  как абстрактный граф изоморфен графу  $\Gamma(A_{10})$ . Тогда граф  $\Gamma(G)$  имеет вид



для подходящих простых чисел  $p, q, r, s$ .

В данной работе мы доказываем следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если  $|G|$  не делится на 3,  $S = S(G) \neq 1$  и  $\bar{G} = G/S$ , то с точностью до перестановки чисел  $r$  и  $s$  выполняется одно из следующих утверждений:*

(1)  $\bar{G} \cong Aut(Sz(32))$ ,  $\{r, s\} = \{2, 5\}$ ,  $\{p, q\} = \{31, 41\}$ ,  $p \in \pi(S) \subseteq \{2, p\}$ , силовская 2-подгруппа  $T$  группы  $S$  элементарная абелева,  $S = O_{2', 2, 2'}(S)$ ,  $F^*(G/O_{2', 2}(S)) = P \times E$ , где  $P$  –  $p$ -группа и  $E \cong Aut(Sz(32))$ , и либо  $T = 1$ , либо группа  $E$  индуцирует на  $O_{2', 2}(S)/O_{2'}(S)$  прямую сумму модулей, изоморфных естественному 4-мерному  $GF(32)Sz(32)$ -модулю;

(2)  $\bar{G} \cong Sz(8)$ ,  $r = 2$ ,  $\{p, s\} = \{5, 7\}$ ,  $q = 13$ ,  $\pi(S) = \{r, p\}$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  как  $\bar{G}$ -модуль изоморфен 4-мерному или 16-мерному неприводимому  $GF(8)Sz(8)$ -модулю, причем вторая возможность всегда появляется;

(3)  $\bar{G} \cong Sz(32)$  или  $Aut(Sz(32))$ ,  $r = 2$ ,  $\{p, s\} \subseteq \{5, 31, 41\}$ ,  $q \in \{31, 41\}$ ,  $\pi(S) = \{r, p\}$ , каждый 2-главный фактор группы  $G'$  как  $\bar{G}'$ -модуль изоморфен

либо 4-мерному, либо одному из двух 16-мерных, либо одному из двух 64-мерных неприводимых  $GF(32)Sz(32)$ -модулей;

(4)  $\bar{G} \cong Sz(8)$ ,  $\{r, s\} = \{5, 7\}$ ,  $p = 2$ ,  $q = 13$ ,  $\pi(S) = \{5, p\}$ ,  $G/O^2(S) = P \circ E$ , где  $P$  — 2-группа и  $E \cong 2 \cdot Sz(8)$  или  $(2 \times 2) \cdot Sz(8)$ , группа  $E$  индуцирует на каждый 5-главный фактор группы  $G$  точный неприводимый 8-мерный  $GF(5)2 \cdot Sz(8)$ -модуль;

(5)  $\bar{G} \cong Sz(8)$  или  $Sz(32)$ ,  $p = 2$ ,  $q = 5$ ,  $\{p, r\} \subseteq \pi(S) \subseteq \{p, r, s\}$ ,  $q = 5$ , группа  $S/O^2(S)$  экстраспециальна и  $F^*(G/O^2(S)) = S/O^2(S)$ .

Заметим, что каждый из пунктов (1)–(4) теоремы реализуется, а вопрос реализуемости ее пункта (5) остается открытым.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — конечная неразрешимая группа,  $\bar{G} \cong G/S(G)$  и граф  $\Gamma(G)$  как абстрактный граф изоморфен графу  $\Gamma(A_{10})$ . Если  $|G|$  делится на 3 и  $G$  не содержит элементов порядка 6, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1)  $S = O_{2', 2}(G)$ ,  $O(G) = O_p(G)$ ,  $q = 2$ ,  $S/O(G)$  — элементарная абелева группа,  $\bar{G} \cong L_2(2^n)$ , причем либо  $n = 4$ ,  $p = 17$  и  $\{r, s\} = \{3, 5\}$ , либо  $n$  — простое число,  $n \geq 5$ ,  $p = 2^n - 1$  и  $\{r, s\} = \{3, (2^n - 1)/3\}$ , группа  $S/O(G)$  либо тривиальна, либо как  $\bar{G}$ -модуль изоморфна прямой сумме естественных  $GF(2^n)$ -модулей;

(2)  $S = O_p(G)$ ,  $q = 2$ ,  $\bar{G} \cong L_2(p)$ ,  $p \geq 31$ ,  $p \equiv \varepsilon 5 \pmod{12}$ ,  $\varepsilon \in \{+, -\}$ ,  $p - \varepsilon 1 = 2^k$ , и  $3 \in \{r, s\} = \pi((t + \varepsilon 1)/2)$ ;

(3)  $S = O_p(G)$ ,  $q = 3$  и выполняется одно из утверждений:

(3a)  $\bar{G} \cong PGL_2(9)$ ,  $p > 5$  и  $\{r, s\} = \{2, 5\}$ ;

(3b)  $\bar{G} \cong L_2(81)$ ,  $PGL_2(81)$  или  $L_2(81).2_3$ ,  $p = 41$  и  $\{r, s\} = \{2, 5\}$ ;

(3c)  $\bar{G} \cong L_2(3^n)$  или  $PGL_2(3^n)$ ,  $n$  — нечетное простое число,  $p = (3^n - 1)/2$  и  $\{r, s\} = \pi(3^n + 1)$ .

Каждый из пунктов заключения теоремы реализуется.

Наши обозначения можно найти в [4].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.С. Кондратьев, *Конечные группы с графом простых чисел, как у группы  $Aut(J_2)$* , Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **18:3** (2012), 131–138.
- [2] А.С. Кондратьев, *Конечные группы с графом простых чисел, как у группы  $A_{10}$* , Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **19:1** (2013), 136–143.
- [3] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group  $A_{10}$* , Siberian Electr. Math. Rep., V. **15**, 2018, 1378–1382.
- [4] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Н. КРАСОВСКОГО УРО РАН, ЕКАТЕРИНБУРГ (Россия)

E-mail address: a.s.kodratiev@imm.uran.ru, nikola-minigulov@mail.ru

## Classification of 4-regular integral graphs

K. A. Kaushan, N. O. Rukhlyada  
Novosibirsk State University

Let  $\Gamma$  be an undirected simple graph. The spectrum  $\text{Spec}(\Gamma) = [\lambda_1^{x_1}, \dots, \lambda_s^{x_s}]$  of the graph  $\Gamma$  is the set of eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  of its adjacency matrix together with their multiplicities  $x_1, \dots, x_s$ . A graph is said to be integral if all of its eigenvalues are integers. The search for integral graphs was formulated by F. Harary and A. J. Schwenk in 1974 [4]. Solution of this problem in general is unknown, however, during the years this problem was studied in a lot of important classes of graphs, in particular, in regular graphs.

For a given  $k \geq 1$  the set of all  $k$ -regular connected integral graphs is known to be finite [2]. Moreover, if  $k = 3$  then the set of all connected 3-regular integral graphs is explicitly found in [1] and contains only 13 graphs. The problem of finding all 4-regular integral graphs was introduced by D. Cvetković, S. Simić and D. Stevanović in 1998 [3]. Since then a number of results have been obtained in this direction, including a complete list of feasible spectra of such graphs [3,5].

In the talk the current classification status of 4-regular integral graphs will be discussed.

1. *F. C. Bussemaker, D. M. Cvetković.* There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. 1976 — P. 43–48.
2. *D. M. Cvetković.* Cubic intergal graphs. // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. 1975 — P. 107–113.
3. *D. Cvetković, S. Simić, D. Stevanović.* 4-regular integral graphs. // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. 1998 — P. 109–123.
4. *F. Harary, A.J. Schwenk.* Which graphs have integral spectra? // Graphs and Combinatorics. Springer, Berlin, Heidelberg. 1974 — P. 45–51.
5. *D. Stevanović, N. de Abreu, M. de Freitas, R. Del-Vecchio.* Walks and regular integral graphs. // Linear Algebra and Its Applications. 2007 — P. 119–135.

# Nonexistence of some $Q$ -polynomial graphs \*

A. A. Makhnev, M. P. Golubyatnikov

I.N. Belousov, A.A. Makhnev and M.S. Nirova found the description of  $Q$ -polynomial distance-regular graphs  $\Gamma$  of diameter 3 such that  $\Gamma_2$  and  $\Gamma_3$  are strongly regular. Set  $a = a_3$ .  $\Gamma$  is the graph of type (I), if  $c_2 + 1$  divides  $a$ , graph of type (II), if  $c_2 + 1$  divides  $a + 1$ , graph of type (III), if  $c_2 + 1$  does not divide  $a$  and does not divide  $a + 1$ . Graph of type (Ii) has intersection array

$$\left\{ \frac{(s^2 + su - 1)(u^2 - 1)}{s^2 - 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 - 1}, u^2; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 - 1}, \frac{su^3 - su}{s^2 - 1} \right\}.$$

These graphs are formally self-dual, in particular, the Krein parameters coincide with the intersection numbers  $q_{ij}^l = p_{ij}^l$ . It is proved that for  $u = s^2$  graphs do not exist.

In the class of graphs of type (Ii), for  $s = 2$ , there is a series of intersection arrays  $\{(2u - 3)(u^2 - 1)/3, 2u(u^2 - 4)/3, u^2; 1, (u^2 - 4)/3, 2u(u^2 - 1)/3\}$ . In the paper, we consider the minimum admissible parameters  $u = 5$  and  $u = 7$ .

Using the method of triple intersection numbers described in the paper by Coolsaet and Jurišić, we prove that graphs with intersection arrays  $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$  and  $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$  do not exist.

## References

- [1] **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-Regular Graphs, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
- [2] **I. N. Belousov, A. A. Makhnev, M. S. Nirova,** On  $Q$ -polynomial distance-regular graphs  $\Gamma$  with strongly regular graphs  $\Gamma_2$  and  $\Gamma_3$  // Sib. Elektron. Mat. Izv., **16** (2019), 1385–1392
- [3] **Coolsaet K., Jurishich A.** Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Ser. A. 2008. V. 115. P, 1086–1095.

---

\*The work is supported by Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

# МИНИМАЛЬНЫЕ НОСИТЕЛИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ГРАФЕ ХЭММИНГА

А. А. Валюженич

Проблема поиска минимальной мощности носителя произвольной собственной функции (с фиксированным собственным значением) заданного графа изучалась для графа Дуба [1], для графа Пэли [2], для Star графа [3], для кубических дистанционно регулярных графов [4] и для графа Джонсона [6]. В данной работе мы рассматриваем проблему поиска минимальной мощности носителя собственных функций графа Хэмминга  $H(n, q)$  для  $q \geq 2$  (см. [5]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00126.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. A. Beshpalov, *On the minimum supports of some eigenfunctions in the Doob graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports. **15** (2018), 258–266.
- [2] S. Goryainov, V. V. Kabanov, L. Shalaginov, A. Valyuzhenich, *On eigenfunctions and maximal cliques of Paley graphs of square order*, Finite Fields and Their Applications. **52** (2018), 361–369.
- [3] V. Kabanov, E. Konstantinova, L. Shalaginov, A. Valyuzhenich, *Minimum supports of eigenfunctions with the second largest eigenvalue of the Star graph*, October 2019. arXiv:1910.01374.
- [4] E. V. Sotnikova, *Eigenfunctions supports of minimum cardinality in cubical distance-regular graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports. **15** (2018), 223–245.
- [5] A. Valyuzhenich, K. Vorob'ev, *Minimum supports of functions on the Hamming graphs with spectral constraints*, Discrete Mathematics. **342**:5 (2019), 1351–1360.
- [6] K. Vorob'ev, I. Mogilnykh, A. Valyuzhenich, *Minimum supports of eigenfunctions of Johnson graphs*, Discrete Mathematics. **341**:8 (2018), 2151–2158.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА, НОВОСИБИРСК (РОССИЯ)  
E-mail address: graphkipер@.ru



## СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ ДЕЗА

В. В. Кабанов

Графом Деца  $G$  с параметрами  $(n, k, b, a)$  называется  $k$ -регулярный граф на  $n$  вершинах такой, что любые две из его вершин имеют  $b$  или  $a$  общих соседей, где  $b$  не меньше  $a$ . Если  $a$  не равно  $b$ , то дочерние графы Деца  $G_A$  и  $G_B$  определяются как два графа на том же множестве вершин  $V(G)$ , такие что для каждых двух различных вершины  $u_1, u_2$ , они смежны в  $G_A$  тогда и только тогда, когда имеют " $a$ " общих соседей в  $G$  и смежны в  $G_B$  тогда и только тогда, когда имеют " $b$ " общих соседей в  $G$ . В докладе мы исследуем спектры графов Деца, чьи дочерние графы являются сильно регулярными графами.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УРО РАН, Екатеринбург (Россия)

# Decomposition of Aperiodic Automata and Their Shortest Reset Word

David Fernando Casas Torres

A complete deterministic finite automaton (DFA)  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$  is called *aperiodic* if there exists a positive integer  $k$  such that  $\delta(q, w^k) = \delta(q, w^{k+1})$  for all  $q \in Q$  and  $w \in \Sigma^*$ . This is equivalent to saying that the transformation semigroup  $T(\mathcal{A}) := \{\delta(-, w) \mid w \in \Sigma^*\}$  on the set  $Q$  is aperiodic in the sense of semigroup theory, that is,  $T(\mathcal{A})$  has only trivial subgroup. Here  $\delta(-, w)$  stands for the transformation  $q \mapsto \delta(q, w)$ .

A DFA  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$  is called *synchronizing* if there exists a word  $w \in \Sigma^*$  such that  $\delta(-, w)$  is a constant transformation:  $\delta(q, w) = \delta(q', w)$  for all  $q, q' \in Q$ . Any word with this property is said to be a *reset* word for the automaton. The minimum length of reset words for  $\mathcal{A}$  is called the *reset threshold* of  $\mathcal{A}$ .

A well-known open problem is to determine the maximum reset threshold for aperiodic synchronizing automata with a given number  $n$  of states. The best upper bound for this quantity known so far is  $\frac{n(n-1)}{2}$  [4] while the best lower bound is linear, namely  $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$  [1].

We suggest a new approach to the aforementioned problem. Our approach relates it to the so-called cascade decomposition of transformation semigroups [2, 3] which is a version of the classical Krohn–Rhodes decomposition. Let  $m$  be a positive integer. We define  $\bar{\mathbf{m}}$  as the transformation semigroup on the set  $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$  consisting of all constant transformations on  $[m]$  and the identity transformation. It is known (see [2, 3]) that every aperiodic transformation semigroup  $T$  divides the cascade product of several semigroups of the form  $\bar{\mathbf{m}}$ . We refer to the least number of factors of the form  $\bar{\mathbf{m}}$  in such a decomposition as the *cascade height* of  $T$ .

Our main result is the following

**Theorem 1** *Let  $\mathcal{A}$  be an aperiodic synchronizing automaton. The reset threshold of  $\mathcal{A}$  does not exceed the cascade height of the transformation semigroup  $T(\mathcal{A})$ .*

Thus, in order to improve upper bounds for the maximum reset threshold for aperiodic synchronizing automata with a given number of states, it suffices to find “economic” cascade decompositions for the corresponding transformation semigroups.

## References

- [1] D. S. Ananichev, The mortality threshold for partially monotonic automata, in C. De Felice and A. Restivo (eds.), *Developments in Language Theory [Lect. Notes Comput. Sci., 3572]*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2005, 112–121.
- [2] A. Egri-Nagy, C. L. Nehaniv. Computational holonomy decomposition of transformation semigroups. arXiv preprint, arXiv:1508.06345, 2015.
- [3] A. Egri-Nagy, C. L. Chrystopher L. Cascade product of permutation groups. arXiv preprint, arXiv:1303.0091, 2013
- [4] A. N. Trahtman, The Černý conjecture for aperiodic automata, *Discrete Math. Theoret. Comp. Sci.* 9(2) (2007) 3–10.

# Coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of non-isomorphic finite groups whose Gruenberg–Kegel graphs are disconnected

Christina Ilyenko  
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia  
christina.ilyenko@yandex.ru

This is joint work with Natalia Maslova <sup>1</sup>

Let  $G$  be a finite group. Denote by  $\pi(G)$  the set of all prime divisors of the order of  $G$  and by  $\omega(G)$  the spectrum of  $G$ . The set  $\omega(G)$  defines the Gruenberg–Kegel graph (or the prime graph)  $\Gamma(G)$  of  $G$ ; in this simple graph the vertex set is  $\pi(G)$ , and distinct vertices  $p$  and  $q$  are adjacent if and only if  $pq \in \omega(G)$ .

**Problem.** Describe cases when Gruenberg–Kegel graphs of non-isomorphic finite groups coincide.

One of the most interesting cases of this problem is when Gruenberg–Kegel graphs of non-isomorphic finite groups are both disconnected and coincide.

A finite group  $G$  is a Frobenius group if there is a non-trivial subgroup  $C$  of  $G$  such that for all  $g \in G$  exists conjugate group  $C^g$  and this subgroup either equal to  $C$  or either the property  $C \cap C^g = \{1\}$  is true. A subgroup  $C$  is a Frobenius complement of  $G$ . Let  $K = \{1\} \cup (G \setminus \bigcup_{g \in G} gCg^{-1})$ . Then  $K$  is a normal subgroup of a Frobenius group  $G$  with a Frobenius complement  $C$  which is called the Frobenius core of  $G$ . A finite group  $G$  is a 2-Frobenius group if  $G = ABC$ , where  $A$  and  $AB$  are normal subgroups of  $G$ ,  $AB$  and  $BC$  are Frobenius groups with cores  $A$  and  $B$  and complements  $B$  and  $C$ , respectively, also each 2-Frobenius group is solvable. The socle  $Soc(G)$  of a finite group  $G$  is the subgroup of  $G$  generated by the set of all its non-trivial minimal normal subgroups. A finite group  $G$  is almost simple if  $Soc(G)$  is a finite nonabelian simple group.

In [1] all the cases of coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite simple group and of a Frobenius or a 2-Frobenius group were described. It is known that the Gruenberg–Kegel graph of a solvable Frobenius group or of a 2-Frobenius group is a joint of two disjoint cliques, and the Gruenberg–Kegel graph of a non-solvable Frobenius group is a joint of two disjoint components  $\pi_1$  and  $\pi_2$  such that  $\pi_2$  is a clique,  $\{2, 3, 5\} \subseteq \pi_1$ , and the only pair of non-adjacent primes in  $\pi_1$  is the pair  $\{3, 5\}$  (see in [1]). We can receive the complete list of almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of solvable Frobenius groups or 2-Frobenius groups directly from the main results of [2] and [3].

In this talk we concentrate on a list of almost simple (but not simple) groups whose Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of non-solvable Frobenius groups.

**Main result.** Let  $G$  be an almost simple but not simple group. Assume that  $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ , where  $H$  is non-solvable Frobenius group, then one of the following conditions holds:

- (1)  $Soc(G)$  is a sporadic group and  $G \cong Aut(M_{12})$ ;
- (2)  $Soc(G)$  is an alternating group and  $G \cong S_7$ ;
- (3)  $Soc(G)$  is an exceptional group of Lie type and  $G \cong Aut(^2F_4(q))$ ;
- (4)  $Soc(G)$  is a classical group and one of the following statements holds:  $G \cong Aut(PSU_4(2))$ ;  $G \cong L_3(4).2_3$  where  $2_3$  is a graph automorphism of  $L_3(4)$ ;  $G \in \{PSL_4(3), PSL_4(3).2_2, PSL_4(3).2_3\}$ ;  $Soc(G) \in \{PSL_2(q), PSL_3(q), PSU_3(q)\}$  and  $q$  is an odd number.

Note that Marianna Zinovieva works separately on the problem of coincidence of (possibly, connected) Gruenberg–Kegel graphs of non-isomorphic finite simple group.

## Список литературы

- [1] M. R. Zinov'eva, V. D. Mazurov, On finite groups with disconnected prime graph, *Proc. Steklov Inst. Math.* **283**:S1 (2013) 139–145.
- [2] I. B. Gorshkov, N. V. Maslova, Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs are equal to the Gruenberg–Kegel graphs of solvable groups, *Algebra and Logic.* **57**:2 (2018) 115–129..
- [3] M. R. Zinov'eva, A. S. Kondrat'ev, Finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques, *Proc. Steklov Inst. Math.* **295**:S1 (2013) 178–188.

---

<sup>1</sup>The work has been supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

# COMPLEXITY OF SYNCHRONIZATION IN PARTIAL FINITE AUTOMATA

H. SHABANA

A word is *synchronizing* for a finite automaton  $\mathcal{A}$  if it resets  $\mathcal{A}$  to a specific state independent of its present state. There are two basic extensions of the concept of synchronizing words to *partial finite automata* (PFAs): *carefully synchronizing words* and *exactly synchronizing words*.

Careful synchronization has been studied by Martyugin [1]. A PFA  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$  is said to be *carefully synchronizing* if there is a word  $w = a_1 \cdots a_\ell$ , with  $a_1, \dots, a_\ell \in \Sigma$ , that satisfies the following conditions (C1)–(C3):

- (C1): the letter  $a_1$  is defined at every state in  $Q$ ;
- (C2): the letter  $a_t$  with  $1 < t \leq \ell$  is defined at every state in  $Q.a_1 \cdots a_{t-1}$ ,
- (C3):  $|Q.w| = 1$ .

Any word  $w$  satisfying (C1)–(C3) is called a *carefully synchronizing word* for  $\mathcal{A}$ . Thus, when a carefully synchronizing word is applied at any state in  $Q$ , no undefined transition occurs during the course of application.

If a word  $w$  satisfies the condition (C3), it is called an *exactly synchronizing word* for  $\mathcal{A}$  [2]. Thus,  $w$  can be undefined at some states in  $Q$  but there must be a state at which  $w$  is defined and  $q.w = q'.w$  whenever  $w$  is defined at both  $q, q' \in Q$ . Clearly, a carefully synchronizing word is exactly synchronizing but the converse needs not be true. A PFA is said to be *exactly synchronizing* if it possesses an exactly synchronizing word. The class of exactly synchronizing PFAs is much larger than that of carefully synchronizing PFAs. The concepts of careful and exact synchronization make sense also for *nondeterministic finite automata* (NFAs).

Here we study the computational complexity for problems related to exactly and carefully synchronizing words for certain important classes of PFAs and NFAs. An automaton  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$  is said to be *strongly connected* if for all  $q, q' \in Q$ , there exists a word  $w$  over  $\Sigma$  such that  $q' = q.w$ . An automaton  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$  is said to be *0-automaton* if it has a state  $q \in Q$  such that  $q.a = q$  for all  $a \in \Sigma$ .

The following results complement those in [1, 2].

**Theorem 1.** *Checking careful synchronization for a given strongly connected PFA is PSPACE-complete.*

**Theorem 2.** *Checking whether or not a given strongly connected PFA has an exactly synchronizing word of a given length  $\ell$  is NP-complete.*

**Theorem 3.** *Checking whether or not a given 0-PFA has an exactly synchronizing word can be done in polynomial time.*

**Theorem 4.** *Checking whether or not a given 0-NFA has an exactly synchronizing word is PSPACE-complete.*

## REFERENCES

- [1] Martyugin P.V. Careful synchronization of partial automata with restricted alphabets. In *A.A.Bulatov, A.M.Shur (eds.): Computer Science – Theory and Applications, 8th Int. Comp. Sci. Symp. in Russia, CSR 2013*, volume 7913 of LNCS, pages 76–87. Springer, 2013.
- [2] Travers N., Crutchfield J. Exact synchronization for finite-state sources. *J. Stat. Phys.*, 145(5):1181–1201, 2011.

INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS, URAL FEDERAL UNIVERSITY, YEKATERINBURG (RUSSIA)

*E-mail address:* [hananshabana22@gmail.com](mailto:hananshabana22@gmail.com)

## ПОЛНЫЕ НАБОРЫ УНИФИКАТОРОВ В ПРЕДТАБЛИЧНЫХ ЛОГИКАХ PM2 И PM3

С. И. Башмаков

Возможно ли преобразовать формулу  $\varphi$  логики  $\mathcal{L}$  в теорему путем замены ее переменных? Если ответ положителен, формула  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  называется *унифицируемой* в  $\mathcal{L}$ , а подстановка  $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i, \forall p_i \in Var(\varphi)$  такая, что  $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$ , *унификатором* формулы.

Унификатор  $\sigma$  формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  назовем *более общим* чем  $\sigma^1$  в  $\mathcal{L}$  ( $\sigma^1 \preceq \sigma$ ), если существует подстановка  $\sigma^2$  такая, что для любой переменной  $p_i \in Var(\varphi)$ :  $\sigma^1(p_i) \equiv \sigma^2(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$ . Набор унификаторов  $CU$  формулы  $\varphi$  называется *полным* в  $\mathcal{L}$ , если для любого унификатора  $\sigma$  формулы  $\varphi$  найдется  $\sigma_1 \in CU$ :  $\sigma \preceq \sigma_1$ .

В работе исследуются логики **PM2** и **PM3**, входящие в число 5-ти предтабличных расширений нормальной модальной логики  $\mathcal{S4}$ , описанных Л.Л. Максимовой [1] и Л.Л. Эсакиа и В.Ю. Месхи [2].

$$\mathbf{PM2} = Grz + \sigma_2 := [\Box p \vee \Box(\Box p \rightarrow \Box q \vee \Box \Diamond \neg q)].$$

Логика **PM2** характеризуется классом частично упорядоченных фреймов не содержащих 3-элементных цепей:

$$\mathbb{V}_m = \langle V_m, R \rangle, \text{ где } V_m = \{0, 1, \dots, m\}, \text{ и } xRy \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = y).$$

$$\mathbf{PM3} = Grz + [\Box r \vee \Box(\Box r \rightarrow \sigma_2)] + (\Box \Diamond p \Leftrightarrow \Diamond \Box p).$$

Характеристический класс фреймов для логики **PM3** состоит из частично упорядоченных фреймов, имеющих наибольший элемент (т.е. единственный элемент первого слоя) и не содержащих 4-элементных цепей:

$$\mathbb{U}_{m+1} = \langle U_{m+1}, R \rangle, \text{ где } U_{m+1} = \{0, 1, \dots, m+1\}, \text{ и } \\ xRy \Leftrightarrow ([x = 0] \vee [y = m+1] \vee [1 \leq x = y \leq m]).$$

Модифицируя технику специальных  $n$ -характеристических моделей Крипке, предложенную В.В. Рыбаковым [3] для исследования проблемы допустимости, удалось описать полные наборы унификаторов для произвольной унифицируемой формулы в **PM2** и **PM3**.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса». Участие в школе-конференции поддержано КГАУ «Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности».*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики  $\mathcal{S4}$  Льюиса. *Алгебра и логика* 14, 1975, 28–55.
- [2] Esakia L., Meskhi V. Five critical modal systems. *Theoria* 43, 1977, 52–60.
- [3] Rybakov V.V. A criterion for admissibility of rules in the model system  $\mathcal{S4}$  and the intuitionistic logic. *Algebra and Logic*, 23(5), 1984, 369–384.

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, КРАСНОЯРСК  
Email address: krauder@mail.ru

# Существование экстремальных простых замкнутых кривых, разделяющих множества на плоскости

Волков Алексей

Уральский федеральный университет, Екатеринбург

## 1 Постановка задачи

Пусть  $K_1$  — ограниченное, а  $K_2$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^2$ .

**Определение.** Множество  $L$  будем называть *простой замкнутой кривой (ПЗК)*, если существует непрерывное инъективное отображение  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , такое что  $f(S^1) = L$ , где  $S^1$  — окружность.

**Определение.** Два множества будем называть *разделимыми*, если существует ПЗК  $L$ , содержащая одно из них в ограниченной, а другое в неограниченной компоненте  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

Будем обозначать это как  $\text{auf}(L, K_1, K_2)$ .

**Вопрос 1:** Разделимы ли  $K_1$  и  $K_2$ ?

**Вопрос 2:** Если делимы, то достигается ли  $\sup\{\rho(L, K_1 \cup K_2) : \text{auf}(L, K_1, K_2)\}$ ?

## 2 Результаты

Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — связные множества и  $\rho(K_1, K_2) > 0$ .

Обозначим  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, K_1) \leq \frac{\rho(K_1, K_2)}{2}\}$ .

**Определение.** Множество называется *локально связным*, если любая открытая окрестность любой точки содержит связную подокрестность

**Определение.** *Полуконтинуум* — множество, любые две точки которого можно соединить континуумом.



**Определение.** Точка множества называется *разрезающей*, если дополнение до нее не является полуконтинуумом.

**Лемма 1.**  $A$  — локально связное множество.

**Лемма 2.**  $A$  — множество, не имеющее точек разреза

**Лемма 3.**  $K_2$  вложено ровно в одну компоненту связности дополнения до  $A$ .

**Теорема (Куратовского).** Граница любой компоненты дополнения до локально связного континуума без разрезающих точек является ПЗК.

**Результат:** Если множества  $K_1$  и  $K_2$  связны и находятся на положительном расстоянии, то экстремальная ПЗК может быть найдена как подмножество множества

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, K_1) = \frac{\rho(K_1, K_2)}{2}\}.$$

## Список литературы

- [1] КУРАТОВСКИЙ К. *Топология. Том 2. М.: Мир, 1969.*
- [2] NADLER S.B. *Continuum Theory: An Introduction. CRC Press, 1992.*
- [3] CHARATONIK J.J., KRUPSKI P., PYRIH P. *Examples in Continuum Theory. Unknown, 2001.*

# Тождества некоторых диаграммных моноидов

## Identities of certain diagram monoids

М. В. Волков, Н. В. Китов  
УрФУ, г. Екатеринбург, Россия

Диаграммные моноиды это обширное семейство конечных и бесконечных моноидов, которые оказываются полезными в различных разделах современной математики (теория узлов, низкоразмерная топология, теория квантовых групп и др.). Алгебраические свойства диаграммных моноидов также являются предметом интенсивного изучения. В [1, 2] мы изучали тождества моноидов Кауфмана  $\mathcal{K}_3$  и  $\mathcal{K}_4$  и обнаружили, что тождества этих моноидов совпадают.

Здесь мы исследуем тождества моноидов  $\mathcal{W}_3$  и  $\mathcal{W}_4$ , которые определяются аналогично моноидам  $\mathcal{K}_3$  и, соответственно,  $\mathcal{K}_4$  с той разницей, что диаграммы, составляющие  $\mathcal{W}_3$  и  $\mathcal{W}_4$  не обязаны быть планарными. Мы описали тождества сингулярной части моноида  $\mathcal{W}_3$  и доказали следующее:

**Утверждение.** Тождества моноидов  $\mathcal{W}_3$  и  $\mathcal{W}_4$  различны.

В частности, тождество  $x^7yx = xyx^7$  выполняется в  $\mathcal{W}_3$ , но не выполняется в  $\mathcal{W}_4$ .

### Список литературы

- [1] Yuzhu Chen, Xun Hu, N. V. Kitov, Yanfeng Luo, M. V. Volkov, *Identities of the Kauffman Monoid  $\mathcal{K}_3$* , arXiv.org, arXiv:1901.01564.
- [2] M. V. Volkov, N. V. Kitov, *Identities of the Kauffman Monoid  $\mathcal{K}_4$  and of the Jones monoid  $\mathcal{J}_4$* , arXiv.org, arXiv:1910.09190.
- [3] М. В. Волков, Н. В. Китов, *Полиномиальный алгоритм проверки тождеств в моноиде Кауфмана  $\mathcal{K}_3$* , Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. (2018), 9.
- [4] М. В. Волков, Н. В. Китов, *Тождества в моноиде Кауфмана  $\mathcal{K}_4$* , Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. (2019), 16.

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ УЗЛОВ ELECTRICAL INVARIANT OF KNOTS

А. А. Галкина, С. В. Матвеев

Настоящая работа посвящена изучению, так называемого, электрического инварианта узлов в трёхмерной сфере. Название и построение этого инварианта были предложены А. А. Перфильевым в неопубликованной работе «Электрические инварианты узлов и зацеплений». Алгоритм вычисления электрического инварианта узла состоит из нескольких шагов:

- (1) выполнение шахматной раскраски диаграммы узла;
- (2) построение графа, в котором вершины соответствуют чёрным областям на раскраске, а рёбра — перекрёсткам, по которым граничили соответствующие вершинам области;
- (3) произвольное ориентирование графа;
- (4) задание формальных переменных для рёбер графа в зависимости от типов перекрёстков;
- (5) составление системы из сумм формальных переменных с учётом ориентации рёбер графа;
- (6) выписывание матрицы коэффициентов полученной системы;
- (7) вычисление определителя полученной матрицы.

Это число будет определять электрический инвариант с точностью до знака.

При исследовании электрического инварианта были получены следующие результаты:

- (1) независимость электрического инварианта от выбора раскраски (при смене раскраски получается двойственный к исходному граф);
- (2) независимость от выбора ориентации графа;
- (3) инвариантность относительно движений Рейдемейстера;
- (4) совпадение со значениями полиномов Александера и Джонса в точке  $-1$  (эквивалентность алгоритмов вычисления полинома Александера в точке  $-1$  и электрического инварианта).

ЧелГУ, г. Челябинск, Россия

# УНИФИКАЦИЯ В НЕТРАНЗИТИВНОЙ ВРЕМЕННОЙ ЛОГИКЕ ЗНАНИЯ С УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОСТЬЮ

Т. Ю. Зверева

Подход к моделированию времени как нетранзитивного процесса восходит к идее возможной некорректной передачи информации: когда часть данных, доступных вовлечённым в вычислительный процесс субъектам-агентам в прошлом, может быть утеряна к настоящему моменту, и нельзя с уверенностью сказать будет ли и кому именно из агентов доступна эта информация в будущем, [1].

Изначально проблема унификации ставилась как задача приведения заданных термов в синтаксическое равенство путём замены их переменных. В области нестандартных логик эта задача чаще рассматривается как вопрос превращения формулы в теорему после некоторой замены переменных [2].

Формула  $\alpha(p_1, \dots, p_s)$  называется *унифицируемой* в логике  $\mathcal{L}$ , если существует подстановка  $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$  для каждой  $p_i \in Var(\alpha)$ , такая, что  $\alpha(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$ . В этом случае, подстановка  $\sigma$  называется *унификатором* формулы  $\alpha$ .

С.И. Башмаков доказал проективность унификации в линейной логике нетранзитивного времени с универсальной модальностью  $\mathcal{ULITL}$  [3], позднее анонсировал обобщение результата на случай логики знания [4]. В текущем исследовании нами подтверждено данное обобщение.

Язык  $L^{\mathcal{ULITK}}$  включает такие унарные модальные операторы, как:  $N$  – нерефлексивная нетранзитивная модальность «Next»,  $\Box_1, \dots, \Box_n$  – модальности знаний агентов,  $\Box_e$  – модальность общего знания,  $\Box_U$  – универсальная модальность.

Логику  $\mathcal{ULITK}$  определяем как множество всех формул языка  $L^{\mathcal{ULITK}}$ , выполнимых на соответствующем ей классе фреймов  $F$ .

Формула  $\alpha(p_1, \dots, p_s)$  называется *проективной* в  $\mathcal{ULITK}$ , если  $\exists \tau(\alpha)$  (проективный унификатор) для  $\alpha$ , т.ч.  $\forall p_i \in Var(\alpha) : \Box_U \alpha \rightarrow [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{ULITK}$ . Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** *Любая унифицируемая в  $\mathcal{ULITK}$  формула проективна.*

Как следствие установлен унитарный тип унификации исследуемой логики, получено описание проективного унификатора. Исследуется вопрос финитной аппроксимируемости  $\mathcal{ULITK}$ .

*Участие в школе-конференции поддержано КГАУ «Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rybakov V. V. *Intransitive temporal multiagent logics, information and knowledge, decidability*, Siberian Math. Journal, **58(5)**, 2017, 1128–1143.
- [2] Dzik W., Wojtylak P. *Unification in first-order transitive modal logic*. *Logic J. IGPL*, 2019, 27(5), p. 693–617.
- [3] Bashmakov, S.I. *Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality*. *J. SibFU. Mathematics and Physics*, **11(1)**, 3–9 (2018).
- [4] Bashmakov, S.I. *Unification in linear multi-modal logic of knowledge and non-transitive time*. *Handbook 6th World Congr. & School Unilog (Vichy, France, June 16–26, 2018)*, 229–231 (2018), <https://www.unilog.org/pro2018/HAN.pdf>

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, КРАСНОЯРСК  
E-mail address: 3336259@gmail.com

**ПОЛИНОМЫ ТУШАРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**  
**TOUCHARD POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS**

**Кузьмин О.В.<sup>1</sup>, Погодаева Е.Н.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Россия

Доклад посвящен исследованию полиномов Тушара

$$T_{n,k}(x, y) = T_{n,k}(x_1, \dots; y_1, \dots), n = 1, 2, \dots; k = \overline{0, n},$$

их определяют следующим образом [1]:

$$T_{n,k}(x, y) = \sum \frac{n!}{k_1! \dots k_n! r_1! \dots r_n!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_n}{n!}\right)^{k_n} \left(\frac{y_1}{1!}\right)^{r_1} \dots \left(\frac{y_n}{n!}\right)^{r_n}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем  $k_i, r_i \geq 0, i = \overline{1, n}$  таким, что

$$\sum_{i=1}^n k_i = k, \quad \sum_{i=1}^n i(k_i + r_i) = n,$$

и  $T_{0,0} = 1, T_{n,k}(x, y) = 0$ , если  $\min(n, k, n - k) < 0$ .

В работе используется подход, основанный на систематизации некоторых известных свойств комбинаторных полиномов, с которыми более подробно можно ознакомиться в представленной ниже литературе [2, 3].

Для представленных полиномов (1) найдены новые рекуррентные формулы. Тем самым, полученные соотношения позволяют по фиксированной  $i$ -й строке матрицы, составленной из данных полиномов, восстановить ее начальные строки.

Пусть,  $x = (x_1, x_2, \dots)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots)$  — формальные переменные. Обозначим

$$Q^* = D \cdot M,$$

где

$$D = \frac{x_2 \partial}{\partial x_1} + \frac{x_3 \partial}{\partial x_2} + \dots, M = \frac{y_2 \partial}{\partial y_1} + \frac{y_3 \partial}{\partial y_2} + \dots$$

Для композиции операторов  $Q^*$  и  $\partial/\partial x_i$ , а также  $\partial/\partial y_i$  действительны следующие рекуррентные соотношения.

Утверждение 1. Для каждого  $i \geq 2$  справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Q^* = 2Q^* \frac{\partial}{\partial x_i} + M \frac{\partial}{\partial x_{i-1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} Q^* = 2Q^* \frac{\partial}{\partial y_i} + D \frac{\partial}{\partial y_{i-1}},$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Q^* = 2Q^* \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} Q^* = 2Q^* \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Утверждение 2. Полиномы Тушара удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

1. При  $k = n - 1, k \geq 0$ ,

$$Q^*T_{n,k} = 2nx_2y_2QT_{n-1,k};$$

2. При  $k = n - 2, k \geq 0$ ,

$$Q^*T_{n,k} = 2ny_2(QT_{n-1,k} - (n - 1)y_2T_{n-2,k}).$$

Также в работе рассматриваются некоторые перечислительные интерпретации и приложения полиномов Тушара.

### Литература

1. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, 2000. 294 с.
2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М: Иностран. Лит., 1963. 287 с.
3. Chrysaphinou O. On Touchard polynomials // Discrete Math., 1985, 54, P. 143-152.

**ТРАНЗИТИВНЫЕ НА ДУГАХ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ  
АНТИПОДАЛЬНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ  
ДИАМЕТРА 3 В АФФИННОМ СЛУЧАЕ**

Л.Ю. Циовкина

В работе А.А.Махнева, Д.В. Падучих и Л.Ю. Циовкиной [1] было начато исследование проблемы описания *реберно симметричных* (то есть, обладающих транзитивными на дугах группами автоморфизмов) антиподальных дистанционно регулярных графов (сокращенно «д.р.г.») диаметра 3, основанное на классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок. К настоящему времени классифицированы реберно симметричные антиподальные д.р.г. диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа индуцирует почти простую группу подстановок на множестве его антиподальных классов (см. [2]).

В настоящей работе получена классификация пар  $(\Gamma, G)$  таких, что  $\Gamma$  — реберно симметричный антиподальный д.р.г. диаметра 3 и  $G$  — транзитивная на дугах группа автоморфизмов графа  $\Gamma$ , которая индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Основной результат представлен в следующих двух теоремах.

**Теорема 1.** *Предположим, что группа  $G$  действует транзитивно на дугах антиподального дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  диаметра 3 с массивом пересечений  $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ , где  $r \notin \{2, k, (k-1)/\mu\}$ , и индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок  $G^\Sigma$  на множестве  $\Sigma$  антиподальных классов графа  $\Gamma$ . Пусть  $K$  — ядро действия  $G$  на  $\Sigma$ ,  $F \in \Sigma$ ,  $a \in F$ ,  $H = G_{\{F\}}$ ,  $C = C_{G_a}(K)$ ,  $|\Sigma| = p^e$ , где  $p$  — простое число, и  $T$  — полный прообраз цоколя группы  $G^\Sigma$  в  $G$ . Если  $p = 2$ , то либо  $K = 1$  и  $\Gamma$  — граф с массивом пересечений  $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ , либо  $|K| = r$ ,  $r\mu = k + 1 = 2^e$ ,  $\mu > 1$  и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1)  $R = GL_1(2^e) \cap G_a \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$ ,  $G_a$  содержит подгруппу  $B$  нечетного порядка, которая содержит  $R$  и действует транзитивно на  $[a]$ , и выполняются следующие утверждения:

(i) если  $T$  содержит нормальную в  $G$  подгруппу порядка  $2^e$ , то  $K = E_r$ ,  $r = \mu = 2^{e/2}$ ,  $H$  действует 2-транзитивно на  $F$ ,  $T$  — элементарная абелева или специальная группа порядка  $2^{e+e/2}$ ,  $C_K(R) = 1$ ,  $C_R(K) = \langle \tilde{h} \rangle > 1$ ,  $\alpha_1(\tilde{h}) = |R|2^{e/2+1}w$  и  $0 \leq w \leq (e, 2^e - 1)/2$ , в частности, если  $|R| = 2^e - 1$ , то  $\alpha_1(\tilde{h}) = 0$  и группа  $R/C_R(K)$  действует регулярно на  $F - \{a\}$ ;

(ii) если  $C_R(K) = 1$ , то  $\Phi(K) = 1$ ,  $e = 6$  и  $r = 32$ ;

(iii) если  $C_R(K) > 1$ , то  $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e, 2^e - 1)$ ,  $r \leq 2^{e/2} \leq \mu$  и  $C_T(R) \leq K \leq Z(T)$ , а если к тому же  $\Phi(T) < K$  и  $B \leq C_G(K)$ , то  $\Phi(T) = 1$ , группа  $T$  содержит нормальную в  $TB$  подгруппу порядка  $2^e$  и  $\Gamma$  — граф из п. (i) выше;

(2)  $e = 2dc$ ,  $d \geq 1$ ,  $r$  делит  $2^c$ ,  $T$  — элементарная абелева группа порядка  $2^e r$ , не содержащая нормальных в  $G$  подгрупп порядка  $2^e$ ,  $Sr_{2d}(2^c) \trianglelefteq G_a$  или  $d = 3$  и  $G_2(2^c) \trianglelefteq G_a$ .

**Теорема 2.** В предположениях и обозначениях из теоремы 1, а также при условии, что  $p > 2$  и  $\mu > 1$ , имеем  $|K| = r$ ,  $r\mu = k + 1 = p^e$  и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) реализуется экстраспециальный случай,  $r = p$ ,  $T$  — экстраспециальная группа порядка  $rp^e$  и экспоненты  $p$  и либо

- (i)  $p^e = 3^4$ ,  $Q_8 \circ D_8 \simeq R_0 \trianglelefteq C$ ,  $G_a/R_0 \leq S_5$  и 5 делит  $|G_a|$ , либо
- (ii)  $p^e = 5^2$ ,  $SL_2(3) \leq C$ ,  $G_a \leq SL_2(3).Z_4$ , либо
- (iii)  $p^e = 7^2$ ,  $SL_2(3) \leq C$ ,  $SL_2(3).Z_2 \leq G_a \leq SL_2(3).Z_6$ , либо
- (iv)  $p^e = 11^2$ ,  $C \simeq SL_2(3)$ ,  $G_a \simeq Z_5 \times SL_2(3)$  или  $Z_5 \times GL_2(3)$ , либо
- (v)  $p^e = 23^2$ ,  $G_a \simeq Z_{11} \times (SL_2(3).Z_2)$ ,  $C \simeq SL_2(3)$  или  $SL_2(3).Z_2$ ;

(2) реализуется исключительный случай и  $G_a \supseteq S \simeq SL_2(5)$  при  $k \neq 728$  и  $G_a \simeq SL_2(13)$  при  $k = 728$ ,  $T$  — специальная группа порядка  $rp^e$  и экспоненты  $p$  и либо

- (i)  $p^e = 3^6$ ,  $r = 3$ ,  $C = G_a \simeq SL_2(13)$ , либо
- (ii)  $p^e = 9^2$ ,  $r \in \{3, 9\}$ ,  $G_a/S \leq D_8$ ,  $S \leq C$ , либо
- (iii)  $p^e = 11^2$ ,  $r = 11$ ,  $S = C$ ,  $G_a \simeq SL_2(5)$  или  $SL_2(5) \circ Z_{10}$ , либо
- (iv)  $p^e = 19^2$ ,  $r = 19$ ,  $S \leq C$ ,  $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{18}$ , либо
- (v)  $p^e = 29^2$ ,  $r = 29$ ,  $S \leq C$ ,  $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{14}$  или  $SL_2(5) \circ Z_{28}$ , либо
- (vi)  $p^e = 59^2$ ,  $r = 59$ ,  $S = C$ ,  $G_a \simeq SL_2(5) \circ Z_{58}$ ;

(3) реализуется одномерный случай,  $R = G_a \cap GL_1(p^e) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$  и либо

(i)  $e > 4$ ,  $r \geq p^{e/2}$ ,  $T$  — специальная группа порядка  $rp^e$  и экспоненты  $p$ , и  $R$  не нормализует подгрупп индекса  $p$  в  $K$ , либо

(ii)  $e = 4$ ,  $r = p^2 = \mu$ ,  $T$  — специальная группа порядка  $p^6$ , группа  $R$  действует полурегулярно на  $[a]$  и группа  $R/C_R(K)$  действует полурегулярно на  $F - \{a\}$ , либо

(iii)  $e = 4$ ,  $p = 3$ ,  $T$  — специальная группа порядка  $rp^4$  и  $R \leq N_G(K_1)$ , где  $K_1$  — подгруппа индекса  $p$  в  $K$ ,  $|R| = 20$ ,  $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$  и  $|R/C_R(K)| \leq 2$ , либо

(iv)  $e = 2$ ,  $r = p$ ,  $T$  — экстраспециальная группа экспоненты  $p$  и  $G_a \leq GL_2(p)$ , либо

(v)  $e = 2$ ,  $3 < r = p$  — простое число Мерсенна,  $T$  — абелева группа и  $C_T(G_a) = 1$ ;

(4) реализуется симплектический случай,  $e = 2dc$ ,  $d \geq 1$ ,  $r$  делит  $p^c$ ,  $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$ ,  $T$  — специальная группа порядка  $rp^{2dc}$  и экспоненты  $p$ .

**Теорема 3.** Если в теореме 2 вместо условия  $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$  предполагать, что  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ , то графы из пп. 1 и 2, а также граф со свойством  $GL_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$  для  $e = 2$  из п. 3(iv) заключения теоремы 2 не существуют.

Полученные результаты уточняют и дополняют список необходимых условий существования реберно симметричного антиподального д.р.г. диаметра 3 в аффинном случае из основной теоремы в [3], где была пропущена часть условий в одномерном подслучае. Подчеркнем, что в отличие от работы [3], в которой проводилось описание пар  $(\Gamma, G)$  при условии  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ , здесь также исследована возможность  $G < \text{Aut}(\Gamma)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, L. Yu. Tsiovkina, *Arc-transitive distance-regular coverings of cliques with  $\lambda = \mu$* , Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), **284**, suppl. 1 (2014), 124–134.
- [2] A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, L. Yu. Tsiovkina, *Edge-symmetric distance-regular coverings of complete graphs: the almost simple case*, Algebra and Logic, **57**:2 (2018), 141–152.



- [3] A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, L. Yu. Tsiovkina, *Edge-symmetric distance-regular coverings of cliques: The affine case*// Siberian Math. J., **54**:6 (2013), 1076–1087.
- [4] L. Yu. Tsiovkina, *Arc-transitive groups of automorphisms of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 in affine case*// Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), to appear.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Н. КРАСОВСКОГО УРО РАН, ЕКАТЕРИНБУРГ  
(Россия)

*E-mail address:* `tsiovkina@imm.uran.ru`

# Shadow Thermal Cycling and Its Effect on Predicted Time of EOL of SA

Marlen B. Kagan  
JCS RPE «Kvant»  
Moscow, Russian Federation

Sergei V. Pushko  
JCS RPE «Kvant»  
Moscow, Russian Federation  
pushko\_sv@npp-kvant.ru

Anastasia K. Samylovskaya  
JCS RPE «Kvant»  
Moscow, Russian Federation  
samylovskaya\_ak@npp-kvant.ru

Vasily V. Sazonov  
Faculty of Space Research  
Lomonosov Moscow State University  
Moscow, Russian Federation  
sazonov@cosmos.msu.ru

Ivan A. Samylovskiy  
Faculty of Space Research  
Lomonosov Moscow State University  
Moscow, Russian Federation  
ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

Arseniy S. Sapelkin  
Faculty of Space Research  
Lomonosov Moscow State University  
Moscow, Russian Federation  
asapelkin0x01@yandex.ru

**Abstract**— At present, due to complexity of the design of spacecraft and growing use of high-power large-sized antennas, it has become necessary to consider the effect of shading on the SA and research the effects accompanying this phenomenon. We are talking about the reliability of the calculations of the SA parameters at the EOL. In this paper, an attempt has been made to summarize the emerging effects that are new to the normal operation of SA, which allows us to specify the requirements for SA design and SA parameters at the EOL. The effect of partial long-term shadowing with mixed-typed shadows was studied by using of computer modeling tools. The effect of the occurrence of multiple heat waves with fronts of varying intensity was discovered. Also, during long-term shading, a critically high temperature gradient between the shaded and lighted SA parts takes place. Hence, it seems necessary to study this phenomenon in more detail from the point of view of the behavior of materials used in the SA manufacture.

**Keywords**—photovoltaic, shading, solar arrays, solar cells, thermal cycling, space solar arrays, space factors (key words)

## I. INTRODUCTION (HEADING 1)

The main features of the shadow setting in GEO case are: regularity, duration of black shadows from spacecraft structural elements falling on the surface of the photogenerating part of SA (which may last from one and up to several hours), and a large shading area (black shadow may cover up to 90% of the whole SA area). At the same time, for other types of orbits, for example, HEO, this problem is less acute due to the short-term shadow with similar spacecraft geometry.

To study the effect of partial shading on the SA temperature regime, we used mathematical modeling of the distribution of temperature fields over the SA PGP (photo generating part) surface depending on the current pattern of the illumination distribution. The calculation results showed that under the given operating conditions of the SA, significant temperature gradients are observed between individual SCs (about 250° C) for an extremely short period of time.

Thus, starting to produce current when leaving the shade, a cooled SC receives a much greater thermal shock than under standard operating conditions. This effect can lead to such destructive consequences as the emergence of ESD, shunting and physical destruction of SC. The effect of thermal shock of similar power on various types of joints

used in the manufacture of SA (adhesive, welded, brazed, etc.) is also not studied enough at the moment.

A change in the thermal cycling regimes under the influence of partial shading leads to a new phenomenon that has not been studied yet – the shadow thermal cycling. The main and most dangerous (from the point of view of the effect on the SA operation) of the effects caused by shadow thermal cycling is the occurrence of multiple heat waves on the SA PGP surface with fronts of varying intensity (wide anterior and critically narrow rear wave front) which lead to the thermal shock of the SC. This effect raises the question of durability of the materials used to sudden temperature drops (up to 250° C) during a short time interval for close (within one SC) points of a single SA.

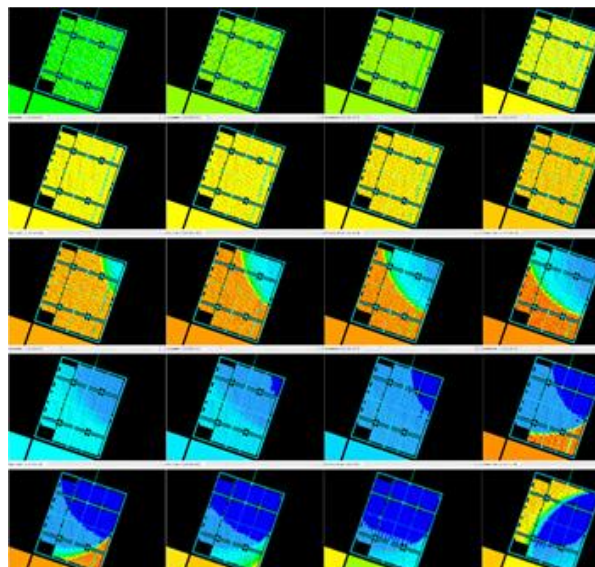


Fig. 1. Shadow and heat waves modeling (snapshots time step is equal to 20 minutes, standard heat color map is used)

## II. PREPARE YOUR PAPER BEFORE STYLING

Due to the complex structure of the SP device in terms of its full configuration, as well as the heterogeneity and total amount of materials used, the study of this issue using exclusively analytical methods is either extremely time consuming, as well as unprofitable. The research of the influence of shadow thermal cycling on the SA predicted time of EOL is a complex task and requires not only the use of modern analytical and numerical methods, including computer modeling (See, e.g., Figure 1), but also life tests on specialized equipment that allow simulating simultaneous

heating and cooling for different points of the test panel during ground-based testing. It will allow to observe this phenomenon effects more detailed and provide the ability to more accurately assess the degree of SA degradation and, therefore, to consider the impact of this phenomenon on the stage of product design, minimizing excess inventory resource of SA.

In the course of these studies, it is planned to determine the degree of SA degradation more detailed under the influence of a complex shading map and to identify the possibility of the occurrence of concomitant shadow thermal cycling phenomena (ESD, shunting, etc.), also making a significant contribution to the overall SA degradation. Of particular interest is the study of the emerging heat wave within one or several neighboring strings, since in this case the effect of shadow thermal cycling on materials is maximal.

A detailed study of shadow thermal cycling using analytical and computer methods, as well as ground-based testing, will allow us to adequately assess the risks associated with the operation of a spacecraft in such conditions and more accurately calculate the necessary endurance of the product for uninterrupted operation during the life existence period. [7].

### III. CONCLUSIONS

Since the shadows that this SA undergoes during LEP are complex and regular and cause multiple heat waves, thereby changing the standard SA thermal cycling conditions to much more severe and create temperature drops at different points of a single SA about 250° C, the question of the durability of materials used in the manufacture of SP, to such

harsh conditions and, consequently, the persistence of the entire SP during the LEP, is still open. With these types of shading for a long period of time (from 1 to several hours) within one single solar panel, a significant temperature gradient occurs (about 250° C) caused by simultaneous heating of the illuminated and prolonged cooling of the shaded part of SA. Of particular interest is the study of the emerging heat wave within one or several neighboring strings, since in this case the effect of shadow thermal cycling on materials is maximal. Thus, in order to study this issue, it is proposed to create a test bench for working out additional life tests on shadow thermal cycling.

### REFERENCES

- [1] G. Eason, B. Noble, and I. N. Sneddon, "On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions," *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. A247, pp. 529–551, April 1955. (*references*)
- [2] J. Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed., vol. 2. Oxford: Clarendon, 1892, pp.68–73.
- [3] I. S. Jacobs and C. P. Bean, "Fine particles, thin films and exchange anisotropy," in *Magnetism*, vol. III, G. T. Rado and H. Suhl, Eds. New York: Academic, 1963, pp. 271–350.
- [4] K. Elissa, "Title of paper if known," unpublished.
- [5] R. Nicole, "Title of paper with only first word capitalized," *J. Name Stand. Abbrev.*, in press.
- [6] Y. Yorozu, M. Hirano, K. Oka, and Y. Tagawa, "Electron spectroscopy studies on magneto-optical media and plastic substrate interface," *IEEE Transl. J. Magn. Japan*, vol. 2, pp. 740–741, August 1987 [Digests 9th Annual Conf. Magnetism Japan, p. 301, 1982].
- [7] M. Young, *The Technical Writer's Handbook*. Mill Valley, CA: University Science, 1989.

# НОВЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ОШИБОК КОРРЕКЦИИ КООРДИНАТ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКОМУ ПОЛЮ

К. В. Дунаевская

Рассматривается задача навигации по ГФП в одномерном случае, когда функция поля задана нелинейной функцией  $s(x)$ ,  $x \in R$ , а ошибки измерений  $v$  являются нормальными случайными значениями с нулевым средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Замеры представляют собой фрагменты функции поля в точке  $x^*$  с количеством отсчетов  $m$ :  $h(x^*) = s(x^* + i\Delta) + v_i$ .

Задача навигации заключается в вычислении оценки величины  $x^*$ .

Для решения поставленной задачи применяются два подхода: известный байесовский и новый метод, основанный на вычислении диаметра множества уровня функционала сравнения.

Байесовский подход вычисляет оптимальную оценку и в дополнение к ней определяет дисперсию ошибки. Недостаток такого подхода заключается в том, что в реальной задаче функции распределения вероятностей оцениваемого параметра и ошибок измерения неизвестны. Новый предложенный нами подход не требует априорного знания функции распределения оцениваемого параметра и ошибок измерения.

В рамках нашей задачи изучены вероятностные свойства оценки, вычисляемой с помощью предложенного нами метода, и её сходимости к оптимальной байесовской оценке. Проведен объёмный статистический эксперимент для оценки качества предложенного метода.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УРО РАН, Екатеринбург (Россия)

## Устранение артефактов на изображениях компьютерной томографии сердца при помощи нейронной сети со слоями частичной свертки

Мангилева Д.В.<sup>1,3</sup>, Докучаев А.Д.<sup>1</sup>, Хамзин С.Ю.<sup>1,3</sup>, Лебедев Д.С.<sup>2</sup>, Любимцева Т.А.<sup>2</sup>,  
Зубарев С.В.<sup>2</sup>, Соловьева О.Э.<sup>1,3</sup>

1 ФГБУН Институт Иммунологии и Физиологии УрО РАН, г.Екатеринбург

2 НМИЦ им. Алмазова, г. Санкт Петербург

3 УрФУ им первого Президента России Б. Н. Ельцина, г.Екатеринбург

Компьютерная томография (КТ) является важным инструментом, позволяющим оценить геометрические и морфологические характеристики камер желудочков сердца человека. Автоматическая обработка и сегментация томографических изображений являются одним из ключевых этапов в построении персонализированных моделей электрофизиологии. Однако, для категории пациентов с металлическими имплантатами (например металлическими электродами, устанавливаемыми при сердечной ресинхронизирующей терапии (СРТ) [1]) автоматическая обработка затруднена, ввиду наличия артефактов на КТ изображениях, проявляющихся в виде концентрических ярко-белых полос и темных пятен [2-4]. В настоящей работе был предложен подход к автоматическому удалению металлических артефактов с КТ изображений.

Удаление производилось с помощью нейронной сети Unet со слоем частичной свертки[5]. Были использованы все срезы КТ сердца 37 пациентов, прошедших процедуру СРТ в НМИЦ им. Алмазова г. Санкт Петербург. Часть этих изображений, которые были испорчены электродом, обрабатывались с помощью метода NMAR[6], затем для всех изображений искусственно создавались области, которые нейронная сеть должна предсказать. В тренировочной выборке было 14088 изображений (87 % от общего числа), 3153 из которых не подвергались методу NMAR; в валидационной 2000 (13 % от общего числа) изображений.

В результате после проведения 40 эпох с пакетной нормализацией, потери составляли 0.08, и после 60 эпох без пакетной нормализации, потери равнялись 0.06. PSNR для валидационной выборки составило 45.061, что соответствует неплохой предсказательной способности данной нейронной сети для конкретной выборки.

1. Ревившили А. Ш., Неминуций Н. М. Сердечная ресинхронизирующая терапия в лечении хронической сердечной недостаточности //Вестник аритмологии. – 2007. – Т. 48. – С. 47-57.
2. Kalender WA, Hebel R, Ebersberger J. Reduction of CT artifacts caused by metallic implants. Radiology 1987;164(2):576–577.
3. Lee MJ, Kim S, Lee SA, et al. Overcoming artifacts from metallic orthopedic implants at high-field-strength MR imaging and multidetector CT. RadioGraphics 2007;27(3):791–803.

4. Katsura, M., Sato, J., Akahane, M., Kunitatsu, A., & Abe, O. (2018). Current and Novel Techniques for Metal Artifact Reduction at CT: Practical Guide for Radiologists. *RadioGraphics*, 38(2), 450–461. <https://doi.org/10.1148/rg.2018170102>
5. Liu G. et al. Image inpainting for irregular holes using partial convolutions //Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV). – 2018. – C. 85-100.
6. Meyer E. et al. Normalized metal artifact reduction (NMAR) in computed tomography //Medical physics. – 2010. – T. 37. – №. 10. – C. 5482-5493.

## **Ремасштабирование моделей поровых сетей на основе методов кластеризации для оценки фильтрационных параметров на масштабе месторождений нефти и газа**

*Марков Павел Владимирович,*

*г. Тюмень, ООО «МикроМодел», участник Сколково*

В работе представлен новый метод расчета фильтрационных параметров (метод ремасштабирования), характерных для масштаба нефтегазоносного пласта, на основе поромасштабных моделей пористой среды и методов кластеризации [2] распределений параметров этих моделей (например, радиус пор). В качестве поромасштабных моделей рассматриваются модели поровых сетей [1].

На базе программно реализованных разработанных методов проведены численные расчеты на основе результатов экспериментов на керне одного из месторождений нефти и газа, что позволило, в частности, выделить кластеры моделей, соответствующие различным типам пород и рассчитанным различным фильтрационным характеристикам (например, проницаемость).

Данная задача призвана повысить точность численных расчетов для моделирования процессов фильтрации за счет учета микромасштабных эффектов и их последующего ремасштабирования до масштаба нефтегазоносных пластов, что является актуальной задачей для гидродинамического моделирования процессов разработки месторождений нефти и газа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00436 мол\_а

### **Список литературы**

1. Марков П.В., Родионов С.П. Использование моделей микроструктуры пористой среды при расчете фильтрационных характеристик для гидродинамических моделей// Нефтепромысловое дело. - 2015. - №11. - С.64-75
2. Aggarwal C.C., Reddy C.K. Data Clustering: Algorithms and Applications. - Chapman and Hall/CRC, 2013 - 652 p.

# MATHEMATICAL MODELING OF MAGNETIC HYPERTHERMIA IN A SYSTEM OF AGGREGATION PARTICLES

A.F. ABU-BAKR <sup>1,2</sup> AND A.YU. ZUBAREV <sup>1,3</sup>

The main goal of the present work is the mathematical modeling of influence of the aggregates of particles, namely, two particles, coupled by the magnetic forces and immobilized in a surrounding medium. Since the particles are immobilized, the heat production (It is called hyperthermia effect) can be induced only by the Neel remagnetization of the particles, through the potential barrier of the particle magnetic anisotropy [1]. Magnetic hyperthermia is a method of material heating by embedded micro- nanosized ferromagnetic particles under the influence of magnetic field. This effect is very promising for the treatment of cancer like diseases [2]. There are many scientific investigations that illustrate the role of the MH in vivo tumor regions and allows up to  $42^{\circ}C - 46^{\circ}C$ . We see that, in this temperature corridor the tumor cells die.

In the present models, we consider two systems of ferromagnetic particles. In the first one, they are randomly distributed in host medium. In the second one, they are coupled in two-particles aggregates. The particles are completely immobilized; any translation and rotation motion of the particles are forbidden. The systems are placed in an external magnetic field  $\mathbf{H} = H_0 \cos \Omega t$ , where  $H_0$  is the amplitude of magnetic field and  $\Omega$  is the angular frequency of the field. The mathematical modeling of a system of ferromagnetic particles placed in an alternating magnetic field is presented. The mathematical models are formulated and depended on the Neel remagnetization phenomenon (Debye remagnetization phenomenon). The models are solved analytically and estimated the intensity of heat production in the tumor cells.

Our results show that, aggregation of the particles weakens the thermal effect at strong magnetic anisotropy and enhances it – when anisotropy magnetic is a weak. This conclusion should be taken into account at the organization of the practical applications of magnetic hyperthermia.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rosensweig RE, 2002. Heating magnetic fluid with alternating magnetic field. *J. Magn. Magn. Materials*, **252**, 370. [doi.org/10.1016/S0304-8853\(02\)00706-0](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(02)00706-0)
- [2] Abu-Bakr AF, Zubarev A. 2019. Effect of interparticle interaction on magnetic hyperthermia: homogeneous spatial distribution of the particles. *Phil. Trans. R. Soc. A*. **377**, 20180216. [doi: 10.1098/rsta.2018.0216](https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0216)

(1) DEPARTMENT OF THEORETICAL AND MATHEMATICAL PHYSICS, URAL FEDERAL UNIVERSITY, EKATERINBURG, RUSSIA

(2) MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE DEPARTMENT, MENOUIA UNIVERSITY, SHEBIN EL-KOM, EGYPT

(3) M.N. MIKHEEV INSTITUTE OF METAL PHYSICS OF THE URAL BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES, EKATERINBURG, RUSSIA



# **Сочетание факторов нормального старения кардиомиоцитов и патологических изменений при фибрилляции предсердий**

Нестерова Т.М.<sup>1,2</sup>, Шмарко Д.В.<sup>1,2</sup>, Ушенин К.С.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup> Институт иммунологии и физиологии УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Возрастные изменения электрофизиологической функции кардиомиоцитов предсердий потенциально могут влиять на возникновение и развитие таких заболеваний, как, например, фибрилляция предсердий (ФП), встречаемость которой в человеческой популяции увеличивается с возрастом.

Целью нашего исследования было разработать модель старения кардиомиоцитов предсердия, воспроизводящую характерные для человека возрастные изменения потенциала действия, а также проанализировать на этой модели сочетания факторов старения и ремоделирования кардиомиоцитов, возникающих при фибрилляции предсердий.

Из-за недостатка экспериментальных данных по возрастному ремоделированию ионных токов в кардиомиоцитах человека, мы перенесли относительные возрастные изменения, наблюдаемые у собак, на модели нормальных и патологически измененных кардиомиоцитов человека (Courtemanche et al. 1998).

В ходе вычислительных экспериментов установлено, что при патологических изменениях характерных для ФП, относительные изменения потенциала действия (ПД) для кардиомиоцитов разного возраста существенно отличаются. В том числе значительные различия ( $p < 0.00001$ ) были обнаружены для потенциала покоя и максимальной высоты кальциевого перехода.

Работа была поддержана грантом РФФИ № 18-015-00368, темой гос. задания ИИФ УрО РАН АААА-А18-118020590031-8, грантом Президиума РАН, Постановлением правительства 211 от 16 марта 2013 года.

## Персонализация математических моделей кардиомиоцитов крысы на основе экспериментальных данных методом популяционного моделирования

Шмарко Д.В.<sup>1,2\*</sup>, Нестерова Т.М.<sup>1,2</sup>, Ушенин К.С.<sup>1,2</sup>, Соловьёва О.Э.<sup>1,2</sup>

<sup>1)</sup> Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия

<sup>2)</sup> Институт иммунологии и физиологии УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия

\*E-mail: [d.shmarko@yandex.ru](mailto:d.shmarko@yandex.ru)

Математическое моделирование является классическим методом для определения экспериментальных данных из экспериментов со сложными живыми системами.

В работе предложен метод анализа экспериментальных данных из экспериментов с техникой sharp-электрода и живых кардиомиоцитов. Предложенный метод заключается в создании популяции моделей и сравнении формы потенциала действия (ПД) каждой модели из популяции с конкретной экспериментальной записью ПД. Разница между формой потенциалов действия находится как функция расстояния между модельными и экспериментальными данными ПД. Далее считается функция плотности вероятности как обратная величина от функции расстояния. Анализ функции плотности вероятности показывает, насколько хорошо параметры модели соответствуют наблюдаемым результатам.

В исследовании использовалась модель электрической активности предсердных неонатальных клеток крысы Majumder [1] и экспериментальные данные о нормальном неонатальном развитии клеток новорождённых крыс. Популяция моделей была построена путём варьирования максимальной проводимости каждого из мембранных ионных токов в математической модели в диапазоне 0% - 500%.

В докладе будут представлены предварительные результаты и статистические характеристики получаемых результатов при использовании предложенного метода.

Работа была поддержана грантом РФФИ № 18-015-00368, темой гос. задания ИИФ УрО РАН АААА-А18-118020590031-8, грантом Президиума РАН, Постановлением правительства 211 от 16 марта 2013 года.

Список используемой литературы:

1. Majumder, R., Jangsangthong, W., Feola, I., Ypey, D. L., Pijnappels, D. A., & Panfilov, A. V. (2016). A mathematical model of neonatal rat atrial monolayers with constitutively active acetylcholine-mediated K<sup>+</sup> current. *PLoS computational biology*, 12(6), e1004946.

## РАЗДЕЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Беляев В. В.

*Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский Федеральный Университет  
beliaev\_vv@mail.ru*

Исследуется некорректно поставленная задача в форме линейного уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

на паре нормированных пространств  $U, F$  с непрерывным оператором  $A$ , для которого обратный оператор  $A^{-1}$ , в общем случае, разрывный; правая часть задана приближенно элементом  $f_\delta$ ,  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ .

В работе изучаются линейные некорректные задачи и способы их регуляризации. При этом решение представляется в виде суммы нескольких слагаемых (компонент) с различными свойствами гладкости. Регуляризация проводится методом Тихонова с использованием нормы пространства Лебега, нормы пространства функций ограниченной вариации самой функции и ее первой производной в качестве стабилизаторов. Доказывается разрешимость регуляризованной задачи и сходимость приближенных решений. Также обоснована сходимость дискретных аппроксимаций.

В качестве иллюстрации метода приведены результаты численных экспериментов решения уравнения Фредгольма I-го рода. Для проведения численного эксперимента проводится дискретизация задачи. Затем выполняется итерационный метод Ньютона. Рассматриваются примеры как с точными, так и с возмущенными исходными данными когда решение разрывно, решение имеет разрывную производную. А так же рассмотрены случаи с разделением решения на несколько компонент: одна компонента с разрывами, другая с разрывами производной; одна компонента с разрывами, другая гладкая.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Acar and C. R. Vogel, *Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems*, Inverse Problems 10 (1994), 1217–1229.
2. Vasin V.V., Belyaev V.V., *Modification of the Tikhonov method under separate reconstruction of components of solution with various properties*, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, Volume 5, Issue 2 (2017) 66–79.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90014.

Борбунов Алексей Николаевич, ИММ УрО РАН, УрФУ  
Лаврова Мария Александровна, УрФУ

**Методы анализа влияния темперамента младенцев и особенностей  
детско-родительского взаимодействия на уровень социально-  
эмоционального развития и навыки саморегуляции этих детей в  
раннем возрасте (лонгитюдное исследование)**

Доклад посвящен анализу данных, полученных в ходе лонгитюдного исследования раннего эмоционального развития, проводимого сектором раннего развития (Лаборатория мозга и нейрокогнитивного развития) департамента психологии УГИ УрФУ. На входе имеются данные о показателях темперамента младенцев (17 информационных точек) и экспертная оценка детско-родительского взаимодействия (анализ видеозаписей; 7 информационных точек) в определенном возрасте. Требуется показать, чем в большей степени обусловлен уровень дальнейшего социально-эмоционального развития этих детей и их навыки саморегуляции в более позднем возрасте (24 месяцев). Приводятся результаты применения нескольких методов анализа данных при решении этой задачи в 4 точках лонгитюдного исследования.

Borbunov A.N., IMM UB RAS, UrFU  
Lavrova M.A., UrFU

**Methods for Analyzing the Influence of Temperament and Features of  
Parent-Child Interaction of Infants on the Social-Emotional Development  
and Self-Direction Skills of These Children when They Are Toddlers  
(Longitudinal Study)**

The report focuses on analyzing data, obtained in longitudinal study of early emotional development being conducted by Early Development Sector (Laboratory of Brain and Neurocognitive Development), Department of Psychology, UIH UrFU. An input is a data on measures of infant temperament (17 data points) and expert assessment of parent-child interaction (an analysis of video recordings; 7 data points) at a specified age. The aim is to show what significantly affects the social-emotional development and self-direction skills of these children when they are toddlers (24 months old). The results of applying several data analysis methods to solve this problem in 4 points of longitudinal study are presented.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АЛГОРИТМОВ НЕВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗЛИЧНОГО ГЕНЕЗИСА

П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
Иркутск, Россия

E-mail: [sorokovikov.p.s@gmail.com](mailto:sorokovikov.p.s@gmail.com)

Исследования по разработке численных методов невыпуклой оптимизации в последние годы ведутся очень активно во многих научных организациях, как российских, так и зарубежных. К настоящему времени специалистами представлено большое количество методов и алгоритмов различного генезиса [1], отличающихся друг от друга вычислительными характеристиками. Работа посвящена созданию библиотеки алгоритмов с систематическим разделением на несколько подмножеств, численному исследованию свойств рассматриваемых алгоритмов с помощью проведения многовариантных вычислительных экспериментов на коллекции тестовых задач.

Рассматривается задача поиска глобального минимума невыпуклой функции с прямыми (параллелепипедными) ограничениями:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in B, B = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i\}.$$

Библиотека алгоритмов разработана на языке С и включает в себя приведенные ниже подмножества методов.

## I. Методы глобального одномерного поиска.

- 1.1. Алгоритмы, основанные на условии Липшица (Гёльдера) функции [2] (модификации методов Евтушенко, Пиявского, Стронгина, комбинированный алгоритм на основе методов Стронгина и «парабол»).
- 1.2. Алгоритмы, основанные на условии Липшица производной функции [3] (модификация метода Брента, алгоритм Lera–Сергеева).
- 1.3. Алгоритмы, основанные на эвристической идеологии [4] (модификация метода «парабол», алгоритм «сжимающего перебора»).
- 1.4. Семейство «вероятностных» Р-алгоритмов Жиглявского–Жилинскаса (методы на основе гладких, винеровских, интегрально-винеровских моделей процессов).

## II. Поисквые методы многомерной невыпуклой оптимизации.

- 2.1. Алгоритмы, основанные на методах глобального одномерного поиска [4–5] (модификации многомерного метода «парабол», туннельного алгоритма, метода Пауэлла, партан-метода, методов Розенброка, криволинейного поиска, сферического поиска).
- 2.2. Поисквые алгоритмы, не использующие методы одномерной оптимизации (метод Растригина, модификация метода Лууса-Яколы, метод поиска с запретами, метод случайных покрытий, экспертный метод).
- 2.3. «Биоинспирированные» поисквые алгоритмы [6].
  - 2.3.1. Эволюционные алгоритмы (модификация генетического алгоритма, метод дифференциальной эволюции, комбинированный алгоритм на основе методов генетического поиска и роя частиц).
  - 2.3.2. Популяционные алгоритмы, «вдохновленные» живой природой, в том числе методы роевого интеллекта (метод биогеографии, метод роя частиц, алгоритм светлячков, алгоритм опыления цветков).
  - 2.3.3. Алгоритмы, «вдохновленные» неживой природой и человеческим обществом (метод гармонического поиска, алгоритм оптимизации по принципу «учитель-ученик», культурный алгоритм).

#### 2.4. Комбинированные алгоритмы невыпуклой оптимизации на основе глобализованных методов и методов локального поиска

(метод MSBH («Monotonic Sequence Basin Hopping»)), модификация метода имитации отжига, двухметодные вычислительные схемы на основе «биоинспирированных» алгоритмов и методов локального поиска).

В качестве алгоритмов локального спуска используются квазиньютоновские методы L-BFGS (Limited memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) [7] и метод, основанный на алгоритмах DFP (Davidon–Fletcher–Powell) и BFGS [8], а также декомпозиционный градиентный метод («рейдер-метод») [9].

В работе не рассматриваются алгоритмы, требующие больших затрат оперативной памяти компьютера (интервальные, диагональные методы, методы семейства «alfa–BB» и другие) в связи с жесткими ограничениями на классы и размерности решаемых задач.

Коллекция тестовых задач включает в себя как модельные, так и содержательные задачи невыпуклой оптимизации с параллелепипедными ограничениями. На основе проведенного тестирования можно сделать вывод о работоспособности предложенной методики разделения библиотеки алгоритмов на подмножества, исходя из генезиса алгоритма. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-37-90065.

#### Список литературы

1. Floudas C.A., Pardalos P.M. Encyclopedia of optimization. Springer Science & Business Media, 2001.
2. Sorokovikov P. Nonlocal algorithms for one-dimensional search based on the Holder condition // Proc. of the 6th Intern. Conf. on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018). Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2018. P. 128–129.
3. Сороковиков П.С. Программная реализация метода Брента для мономерной задачи оптимизации с автоматической оценкой константы Липшица // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. С. 77.
4. Gornov A., Sorokovikov P., Zarodnyuk T. Computational technology for global search based on modified algorithm of the univariate nonlocal optimization // Advances in Intelligent Systems Research: Proc. of the VI Intern. Workshop “Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security” (IWCI 2019). Atlantis Press, 2019. P. 189–193.
5. Sorokovikov P. Software implementation of algorithms for global minimum search based on nonlocal methods for one-dimensional optimization // Book of Abstracts of the IX Intern. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA-2018). Moscow: DCC RAS, 2018. P. 158.
6. Khandarov F., Sorokovikov P. Numerical study of bioinspired methods for solving global optimization problems // Abstracts of the 17th Baikal intern. school-seminar “Methods of Optimization and Their Applications”. Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 45.
7. Liu D.C., Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. Mathematical programming. 1989. Vol. 45. No. 1-3. P. 503–528.
8. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
9. Горнов А.Ю. Рейдер-метод для квазисепарабельных задач безусловной оптимизации // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. С. 28.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К НЕЛИНЕЙНОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧИ БЕСКОНФЛИКТНОГО СЛИЯНИЯ ПОТОКОВ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

А. А. Спиридонов, С. С. Кумков

В настоящее время движение воздушных судов (ВС) происходит по воздушным трассам, состоящим из коридоров в горизонтальной плоскости и эшелонов в вертикальной. При этом трассы могут разветвляться или соединяться. В точке соединения трасс возникает задача слияния потоков самолётов в единую очередь. Такая задача особенно актуальна в зонах подхода и аэропортовых зонах, где плотность воздушного движения чрезвычайно высока. Основным требованием при слиянии потоков ВС является наличие минимального безопасного временного интервала между моментами прибытия ВС в точку слияния.

Имеется два основных инструмента изменения момента прибытия ВС в точку слияния потоков. Первый из них - управление скоростью движения самолёта, которое позволяет достичь относительно небольшого изменения момента прибытия как в сторону более раннего, так и в сторону более позднего времени. Для значительных задержек используется второй инструмент - схемы задержки. Под схемами задержки понимаются дополнительные элементы воздушных трасс, при движении по которым ВС вырабатывают необходимые величины задержек.

В докладе рассматривается простейший нелинейный функционал оптимальности актуального момента прибытия ВС в точку слияния: квадрат отклонения от номинального момента прибытия. Показатель оптимальности всей слитой очереди - сумма показателей по всем ВС. На его примере исследуется эффективность применения традиционных методов безусловной минимизации — метода прямого поиска Хука-Дживса и метода Ньютона. При этом применяется два варианта перехода к задаче безусловной минимизации от исходной задачи с ограничениями (ограничения на промежуток вариации момента прибытия, ограничение на выдерживание безопасного интервала между результирующими моментами прибытия): посредством введения жёстких ограничений и введения мягких ограничений. В случае использования жёстких ограничений дополнительно рассматривается задача выбора начальной точки для метода минимизации, строго удовлетворяющей всем ограничениям.

Показываются проблемы применения классических методов. Изучается возможность применения метода SLP (Successive Linear Programming). Суть его заключается в том, что на каждой итерации производится линеаризация минимизируемого функционала и функций ограничений, после чего решается задача линейного программирования, которая даёт направление минимизации для этой итерации.

Приводятся результаты применения указанных методов для типовых наборов моментов прибытия ВС.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Н. КРАСОВСКОГО УРО РАН, ЕКАТЕРИНБУРГ  
(Россия)



# О полиномиально разрешимых подслучаях задачи open shop с маршрутизацией

Храмова А. П., Черных И. Д.  
Новосибирский государственный университет

Задача open shop впервые была рассмотрена в работе Гонзалеза и Сани в 1976 году [3] и является классической в теории расписаний. Пусть дано множество из  $M$  машин, которые выполняют  $N$  работ, каждая из которых разбивается на операции. Число операций каждой работы совпадает с числом машин, причём каждой машине соответствует единственная операция каждой работы. Одна машина не может выполнять несколько работ за раз, и различные операции одной работы не могут выполняться на двух машинах одновременно; в остальном порядок выполнения операций может быть произвольным. Задача состоит в том, чтобы построить расписание выполнения работ машинами минимальной длины, которое удовлетворяло бы этим ограничениям. В той же работе [3] был представлен линейный алгоритм для решения задачи open shop в случае, когда число машин  $M = 2$ .

Одним из обобщений этой постановки является задача open shop с маршрутизацией, впервые рассмотренная в 2006 году в работе Авербаха, Бермана и Черных [1]. Здесь все работы содержатся в вершинах некоторого рёберно-взвешенного графа — *транспортной сети*. Машины, перемещаясь по рёбрам графа за время, равное весу ребра, должны находиться в вершине, чтобы выполнить расположенные в ней работы. Частным случаем такой постановки является известная задача коммивояжёра.

Машины в задаче с маршрутизацией начинают работу в некоторой вершине, называемой *базой*, и должны вернуться в неё после выполнения всех работ. Эта база может быть *фиксированной*, то есть, быть заданной по условию задачи, либо *нефиксированной*, то есть, определяться в процессе решения задачи.

В общем случае задача open shop с маршрутизацией является NP-трудной даже в случае  $M = 2$ . Но в 2016 г. Черных [2] показал, что в случае, когда база нефиксирована и транспортная сеть — дерево, задача является полиномиально разрешимой.

В работе рассматривается новый линейный алгоритм для решения двухмашинной задачи open shop, а также его обобщение на некоторые подслучаи задачи open shop с маршрутизацией и нефиксированной базой. В частности, предложен линейный алгоритм для этой задачи в случае, когда транспортная сеть — цикл.

## Список литературы

- [1] I. Averbakh, O. Berman, and I. Chernykh. The routing open-shop problem on a network: complexity and approximation. *European Journal of Operational Research*, 173(2):531–539, 2006.
- [2] I. Chernykh. Routing open shop with unrelated travel times. In *Discrete Optimization and Operations Research — 9th International Conference, DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19-23, 2016, Proceedings*, pages 272–283, 2016.
- [3] T. F. Gonzalez and S. Sahni. Open shop scheduling to minimize finish time. *J. ACM*, 23(4):665–679, 1976.

Чистяков Павел Александрович, ИММ УрО РАН, УрФУ  
Задворных Илья Викторович, УрФУ

**Восстановление вертикального профиля метана в атмосфере Земли методом Левенберга-Марквардта и его модификациями с помощью программного обеспечения FIRE-ARMS.**

В докладе сравниваются метод Левенберга-Марквардта и его модифицированный вариант в задаче восстановления вертикального профиля содержания метана в атмосфере Земли. Показано, что использование модифицированного метода позволяет ускорить вычисления.

Pavel Chistyakov, IMM UB RAS, UrFU  
Ilya Zadvornyykh, UrFU

**Retrieval the vertical profile of methane in the Earth's atmosphere by the Levenberg-Marquardt method and its modifications using the FIRE-ARMS software.**

The report compares the Levenberg-Marquardt method and its modified version in the task of retrieval the vertical profile of methane content in the Earth's atmosphere. It is shown that the use of the modified method allows one to speed up the calculations.

Bibliography

1. Clive D. Rogers *Inverse Methods for Atmospheric Sounding : Theory and Practice*. 2000. WSP. P. 237.
2. Vasin V. V. *The Levenberg-Marquardt method and its modified versions for solving nonlinear equations with application to the inverse gravimetry problem* / V. V. Vasin, G. Y. Perestoronina // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. — 2013. — Vol. 280. — № 1. — P. 174-182.
3. Griбанov K.G. *Development of methods for determining atmospheric parameters from measurements of the Earth's thermal radiation with high spectral resolution*. 2001. The dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. P. 102.
4. Zadvornyykh, I.V., Griбанov, K.G., Zakharov, V.I., R. Imasu. *Methane Vertical Profile Retrieval from the Thermal and Near-Infrared Atmospheric Spectra*. *Atmos Ocean Opt* (2019) 32: 152. <https://doi.org/10.1134/S1024856019020179>.

**Bifurcation from zero and infinity in nonlinear eigenvalue problems for  
ordinary differential equations of fourth order**

**N.A. Mustafayeva**  
**Ganja State University, Ganja, Azerbaijan**  
z.aliyev@mail.ru, natavan1984@gmail.com

The nonlinear eigenvalue problem for the fourth order ordinary differential equations with nonlinear perturbation of Rabinowitz type is considered. Showing the existence of four families of global continua of solutions corresponding to the usual nodal properties and bifurcating from from zero and infinity .

Consider the equation

$$\ell y \equiv (py'')'' - (qy')' + r(x)y = \lambda\tau y + g(x, y, y', y'', y''', \lambda), \quad x \in (0, l), \quad (0.1)$$

subject the boundary conditions

$$\begin{aligned} y'(0) \cos \alpha - (py'')(0) \sin \alpha &= 0, & y(0) \cos \beta + Ty(0) \sin \beta &= 0, \\ y'(l) \cos \gamma + (py'')(l) \sin \gamma &= 0, & y(l) \cos \delta - Ty(l) \sin \delta &= 0, \end{aligned} \quad (0.2)$$

where  $\lambda \in \mathbb{R}$  is a spectral parameter,  $Ty \equiv (py'')' - qy'$ ,  $p \in C^2[0, l]$ ,  $q \in C^1[0, l]$ ,  $r, \tau \in C^0[0, l]$ ,  $p, \tau > 0$ ,  $q \leq 0$  on  $[0, l]$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $g \in C^0([0, l] \times \mathbb{R}^5)$  and satisfies one or both of the following conditions: for any bounded interval  $\Lambda \subset \mathbb{R}$

$$g(x, u, s, v, w, \lambda) = o(|u| + |s| + |v| + |w|) \quad \text{as } |u| + |s| + |v| + |w| \rightarrow \infty, \quad (0.3)$$

or

$$g(x, u, s, v, w, \lambda) = o(|u| + |s| + |v| + |w|) \quad \text{as } |u| + |s| + |v| + |w| \rightarrow 0, \quad (0.4)$$

uniformly for  $x \in [0, l]$  and  $\lambda \in \Lambda$ .

By [1, Theorem 1.2] the eigenvalues of the linear problem

$$\begin{aligned} \ell y &= \lambda\tau(x)y(x), \quad x \in (0, l), \\ y &\in B.C., \end{aligned} \quad (0.5)$$

are real and simple and form an infinitely increasing sequence  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ , where by *B.C.* we denote the set of boundary conditions (0.2). Moreover, for each  $k \in \mathbb{N}$  the eigenfunction  $y_k(x)$  corresponding to the eigenvalue  $\lambda_k$  has  $k - 1$  simple nodal zeros in  $(0, l)$ .

Let  $E = C^3[0, l] \cap B.C.$  be the Banach space with the usual norm  $\|u\|_3 = \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty} + \|u''\|_{\infty} + \|u'''\|_{\infty}$ , where  $\|u\|_{\infty} = \max_{x \in [0, l]} |u(x)|$ . For each  $k \in \mathbb{N}$  and each  $\nu \in \{+, -\}$  by  $S_k^{\nu}$  denote the set of functions  $y \in E$  which have exactly  $k - 1$  simple nodal zeros in  $(0, l)$ , are positive in a deleted neighborhood of  $x = 0$  and satisfies some other properties of eigenfunctions of problem (0.5) (see [1, § 3]).

Let  $\mathcal{F}$  denote the closure of the set of nontrivial solutions of problem (0.1)-(0.2). For any set  $B \subset \mathbb{R} \times E$  we let  $P_{\mathbb{R}}(B)$  denote the projection of  $B$  onto  $\mathbb{R}$ .

**Theorem 0.1.** *Let (0.5) holds. Then for each  $k \in \mathbb{N}$  and each  $\nu \in \{+, -\}$  there exists a continuum  $\mathcal{C}_k^\nu$  of solutions of problem (0.1)-(0.2) in  $(\mathbb{R} \times S_k^\nu) \cup \{(\lambda_k, 0)\}$  which meets  $(\lambda_k, 0)$  and is unbounded in  $\mathbb{R} \times E$ .*

**Theorem 0.2.** *For each  $k \in \mathbb{N}$  and each  $\nu \in \{+, -\}$  there exists a connected component  $\mathcal{D}_k^\nu$  of  $\mathcal{F}$  which meets  $(\lambda_k, \infty)$  and has the following properties: (i) there exists a neighborhood  $Q_k$  of  $(\lambda_k, \infty)$  in  $\mathbb{R} \times E$  such that  $Q_k \cap (\mathcal{D}_k^\nu \setminus (\lambda_k, \infty)) \subset \mathbb{R} \times S_k^\nu$ ; (ii) either  $\mathcal{D}_k^\nu$  meets  $\mathcal{D}_{k'}^{\nu'}$  for some  $(k', \nu') \neq (k, \nu)$ , or  $\mathcal{D}_k^\nu$  meets  $(\lambda, 0)$  for some  $\lambda \in \mathbb{R}$ , or  $P_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_k^\nu)$  is unbounded.*

**Theorem 0.3.** *If conditions (0.3) and (0.4) both hold, then for each  $k \in \mathbb{N}$  and each  $\nu \in \{+, -\}$  we have  $\mathcal{D}_k^\nu \subset \mathbb{R} \times S_k^\nu$  and alternative (i) of Theorem 0.2 cannot hold. Furthermore, if  $\mathcal{C}_k^\nu$  meets  $(\lambda, \infty)$  for some  $\lambda \in \mathbb{R}$ , then  $\lambda = \lambda_k$ . Similarly, if  $\mathcal{D}_k^\nu$  meets  $(\lambda, 0)$  for some  $\lambda \in \mathbb{R}$ , then  $\lambda = \lambda_k$ .*

## References

- [1] Z.S. Aliyev, On the global bifurcation of solutions of some nonlinear eigenvalue problems for ordinary differential equations of fourth order, *Sb. Math.* **207**(12) (2016), 1625-1649.

## **О положительно определенных ядрах интегральных операторов, сопутствующих краевым задачам для дробных дифференциальных уравнений**

Алероев М.Т. (НИУ ВШЭ, Россия, г. Москва),

Алероева Х.Т. (МГУСИ, Россия, г. Москва)

**Аннотация:** При спектральном анализе операторов, сопутствующих краевым задачам для дифференциальных уравнений дробного порядка [1, 2, 3] большую роль играет проблема положительной определенности или проблема эрмитовой неотрицательности соответствующего ядра  $\frac{A+A^*}{2}$ . Доклад, в основном, посвящен этой проблеме. Различными методами установлена положительная определенность соответствующих ядер. Вообще-то говоря, надо отметить, что это весьма важная проблема оказалась очень трудной.

**Ключевые слова:** персимметрическая матрица, собственные числа, дробная производная, положительная определенность.

## **On positive definite kernels of integral operators corresponding to the boundary value problems for fractional differential equations**

Mukhamed Aleroev (NRU HSE, Russia, Moscow),

Hedi Aleroeva (MTUCI, Russia, Moscow)

**Abstract:** In the spectral analysis of operators corresponding to the boundary value problems for fractional differential equations [1, 2, 3], the problem of positive definiteness or the problem of Hermitian nonnegativity of the kernel of the operator  $\frac{A+A^*}{2}$  plays an important role. This paper is mainly devoted to this problem. There are various methods to establish the positive definiteness of the corresponding nuclei. Generally speaking, it should be noted that this very important problem turned out to be very difficult.

**Keywords:** persymmetric matrix, eigenvalues, fractional derivative, positive definiteness

# ОБ УСТОЙЧИВОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

Антипина Е.Д.<sup>1,2</sup>, Солодуша С.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Россия

В работе используется подход, основанный на применении аппарата интегро-степенных рядов Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем типа “вход-выход”, в случае, когда входной сигнал  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$  есть вектор-функция времени [1]. Доклад посвящен разработке алгоритма численного решения одного класса двумерных интегральных уравнений Вольтерра I рода

$$\int_{t-h}^t ds_1 \int_{t-v-h}^{t-v} K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f^{(1)}(t, v), \quad (1)$$

$$\int_{t-v-h}^{t-v} ds_1 \int_{t-h}^t K_{12}(s_1, s_2) ds_2 = f^{(2)}(t, v), \quad (2)$$

$t \in \Omega = \{ t, v : v+h \leq t, h \leq t \leq T, v \geq 0, h > 0 \}$ , который возникает в задаче идентификации

несимметричного ядра  $K_{12}$ . Здесь правые части  $f^{(1)}, f^{(2)}$  – составляющие отклика эталонной модели на кусочно-постоянные тестовые сигналы длительностью  $h$  [2].

Разработан устойчивый алгоритм численного решения парного интегрального уравнения (1), (2) на основе метода типа Рунге-Кутты [3]. Исследование выполнено с помощью пакета прикладных программ Matlab.

Работа выполнена в рамках проекта государственного задания 17.3.1 (рег. № АААА-А17-117030310442-8) фундаментальных исследований СО РАН.

## Литература

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. Солодуша С.В. Методы построения интегральных моделей динамических систем: алгоритмы и приложения в энергетике: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.18. ИСЭМ СО РАН, Иркутск, 2019. 353 с.
3. de Hoog F., Weiss R. On the solution of Volterra integral equations of the first kind // Numer. Math. 1973. Vol. 21. № 1. P. 22-32.

# МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. С. БАННИКОВ

Рассматривается управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве. Движение описывается линейной системой дробного порядка вида

$$(1) \quad \begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha z) &= Az + u, \\ z(0) &= z_0, \end{aligned}$$

где  ${}^C D_{0+}^\alpha f$  — производная по Капуто порядка  $\alpha$  функции  $f$ . В начальный момент времени задано начальное условие  $z(0) = z_0$ . Управление  $u$  ограничено выпуклым компактом  $U \subset \mathbb{R}^k$ .

Даётся описание множества достижимости в пространстве переменной  $z$ . Построено экстремальное управление, переводящее начальное положение на границу множества достижимости, как решение соответствующей задачи оптимального быстродействия.

Приведены численные примеры на плоскости и в пространстве.

Работа поддержана грантом РФФИ, № 20-01-00293.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.С. Банников, *Уклонение от группы преследователей в задаче группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями*, Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **27**:3 (2017), 309–314.
- [2] М.И. Гомоюнов, *Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки в позиционной дифференциальной игре для системы дробного порядка*, Труды Института математики и механики УрО РАН. **25**:1 (2019), 11–34.
- [3] А.Ю. Попов, А.М. Седлецкий, *Распределение корней функции Миттаг–Леффлера*, Современная математика. Фундаментальные направления, **40** (2011), 3–171.

Удмуртский государственный университет, Ижевск (Россия)  
E-mail address: asbannikov@gmail.com

# Визуализация трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса

Васёв П.А., Пацко В.С., Федотов А.А.

*Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского, Екатеринбург*

Разработан инструмент, при помощи которого можно исследовать трёхмерные множества достижимости для нелинейной управляемой системы, известной как машина Дубинса. Это одна из самых популярных моделей управляемого движения на плоскости. Данная модель используется как в задачах математической теории управления, так и в прикладных работах.

Динамика движения с постоянной по величине линейной скоростью и с оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости задается посредством нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad 0 < u_1 < u_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x, y$  — координаты геометрического положения на плоскости,  $\varphi$  — угол направления вектора скорости,  $u$  — скалярное управление. Величина линейной скорости постоянна и равна единице. Параметры  $u_1$  и  $u_2$  задают ограничения на управление. Построение трёхмерных множеств достижимости для типовых ограничений было рассмотрено в работах [1] ( $u_1 = -u_2 = -1$ , симметричный случай) и [2] ( $0 < u_1 < u_2 = 1$ , случай строго одностороннего поворота).

Множества достижимости в симметричном случае построены в работе [1] с использованием выявленного свойства о числе (не более двух) переключений управления, ведущего на границу. Для случая строго одностороннего поворота построение трёхмерного множества достижимости усложняется, поскольку число переключений управления увеличивается с ростом времени и, вообще говоря, не ограничено. В работе [2] описаны соответствующие сечения по угловой координате.

Различные участки поверхности множеств достижимости и разделяющие их линии представлены характерными типами движений, которые требуется отражать наряду с множествами. Используемые ранее графические средства морально устарели и уже не поддерживаются разработчиком (Cortona VRML). С учётом новых потребностей был разработан набор графических инструментов для исследования множеств достижимости и для удобного визуального представления. Пример работы полученной программы визуализации показан на рис. 1. Здесь изображены множество достижимости на момент  $t = 2\pi$  для симметричного случая, а также несколько экстремальных траекторий, идущих по границе.

Данный инструмент представляет собой веб-приложение трёхмерной графики WebGL. Входом служит набор файлов заданного формата с предварительно рассчитанными координатами элементов множества достижимости. Файлы загружаются и обрабатываются в браузере пользователя. Множество достижимости визуализируется согласно интерактивно выбираемому номеру файла, который соответствует некоторому моменту времени развития



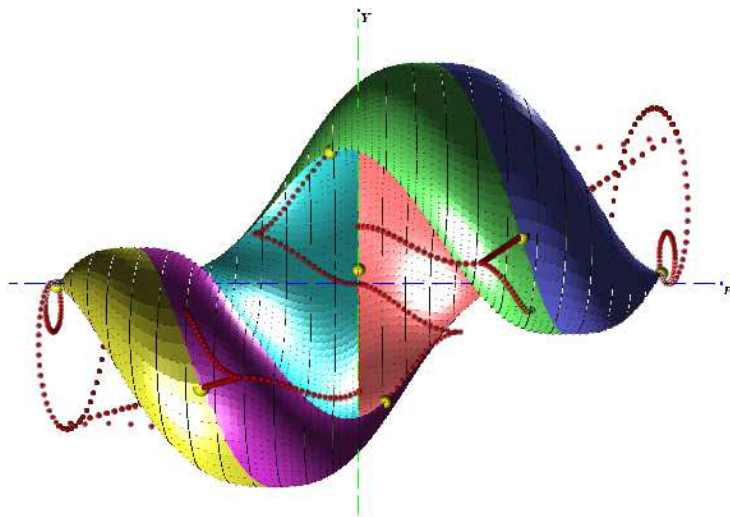


Рис. 1: Иллюстрация работы программы визуализации

множества. Предоставляется возможность задавать и комбинировать различные преобразования визуального представления, такие как формирование сечений, масштабирование, фильтрация, и другие. Реализована возможность сохранения анимации развития множества достижимости во времени, а также по другим параметрам его визуального представления.

Визуализация доступна в среде Интернет по адресу <http://viewlang.ru/dubins/>. Реализован удалённый доступ к входной информации, заданной в виде типовой структуры (data.csv), включающей в себя множества и траектории, развернутые по времени.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект № 18-01-00410.

## Литература

- [1] Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
- [2] Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 182–197.

**Задачи оптимального управления с фиксированным моментом окончания для  
линейных систем дробного порядка**

Гомоюнов М.И.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург, Россия

Рассматривается задача оптимального управления для динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто. Целью управления является минимизация показателя качества типа Больца, который состоит из двух слагаемых: первое оценивает состояние системы в зафиксированный терминальный момент времени, второе представляет собой интегральную оценку управления на всем промежутке времени. Для того, чтобы найти решение этой задачи, предлагается свести ее к некоторой вспомогательной задаче оптимального управления для динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Сведение основано на формуле представления решений линейных дифференциальных уравнений дробного порядка и осуществляется посредством некоторого линейного преобразования, которое называется информационным образом позиции исходной системы и может трактоваться как специальный прогноз движения этой системы на терминальный момент времени. Связь между исходной и вспомогательной задачами устанавливается как в классе программных, так и в классе позиционных управлений. Полученные результаты иллюстрируются на примерах.

Информация на английском языке:

Optimal Control Problems with a Fixed Terminal Time in Linear Fractional-Order Systems

Gomoyunov M.I.

# К ЗАДАЧЕ О НАХОЖДЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ВЫПУКЛОГО ПОДМНОЖЕСТВА<sup>1</sup>

**Ершов А.А., Першаков М.В.**

ИММ УрО РАН, г.Екатеринбург, Россия.

При формулировке определений и полученных результатов мы будем использовать следующие обозначения из [1].

Посредством со  $M$  обозначим выпуклую линейную оболочку множества  $M$ ,  
 $\langle h_*, h^* \rangle$  — скалярное произведение  $h_*$  и  $h^*$  из  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $\|h_*\| = \langle h_*, h_* \rangle^{1/2}$  — стандартную норму (порождённую скалярным произведением) в евклидовом пространстве,  
 $\angle(h_*, h^*) = \arccos \frac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \cdot \|h^*\|} \in [0, \pi]$  — угол между векторами  $h_*$  и  $h^*$ ,  
 $\text{con } M = \{h = \lambda x : \lambda \geq 0, x \in M\}$  — конус в  $\mathbb{R}^n$ , натянутый на множество  $M$  и с вершиной в нуле.

Под проекцией  $p^*$  точки  $x^*$  на множество  $M$  мы понимаем ближайшую к  $x^*$  точку из  $M$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $A$  — компакт в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Через  $\Omega_A(z^*)$  мы обозначим множество всех проекций точки  $z^*$  на  $A$ , через  $H_A(z^*) = \text{con}(\text{co } \Omega_A(z^*) - z^*)$  — конус, натянутый на множество  $\text{co } \Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \text{co } \Omega_A(z^*)\}$ .

Определим функцию  $\alpha_A(z^*) = \max_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$ .

Полагаем  $\alpha_A = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$ .

Тогда если  $\alpha_A = \alpha$ , то множество  $A$  назовём  $\alpha$ -множеством.

**Теорема 1** [2]. Пусть  $M$  —  $\alpha$ -множество ( $\alpha < \pi$ ) в  $\mathbb{R}^2$  со спрямляемой границей  $\partial M$  конечной длины. Тогда имеет место оценка

$$h(\partial M, \partial \text{co } M) \leq \lambda(M) \cdot \text{tg } \frac{\alpha}{2}.$$

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $S$  — звездное 0-симметричное (центрально симметричное относительно начала координат) тело в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда коэффициентом вогнутости Морделла называется следующая величина

$$\omega_S = \inf \left\{ \omega : \frac{x+y}{2} \in \omega \cdot S \text{ для любых } x, y \in S \right\}.$$

Кроме того, для того же тела  $S$  введём в рассмотрение коэффициент

$$k_S = \inf \{k : \text{co } S \subset k \cdot S\}.$$

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00221.

**Лемма 1** [3]. Для любого звездного 0-симметричного тела в  $\mathbb{R}^n$  имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}k_S \leq \omega_S \leq k_S.$$

**Теорема 2.** Для любого звездного 0-симметричного тела  $S$  в  $\mathbb{R}^n$  имеет место оценка

$$h(\partial S, \partial \text{co } S) \leq \lambda(S) \cdot \frac{k_S - 1}{2k_S}.$$

**Теорема 3.** Пусть для множества  $A \in \mathbb{R}^n$  имеет место оценка

$$h(\partial A, \partial \text{co } A) \leq \varepsilon,$$

где число  $\varepsilon > 0$ .

Тогда его выпуклое подмножество (геометрическая разность)  $M = \text{co } A \dot{-} B(0, \varepsilon)$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mu_n(M) = \mu_n(\text{co } A) - \mu_{n-1}(\partial \text{co } A) \cdot \varepsilon + \mu_n(B(0, \varepsilon)),$$

$$h(A, M) \leq \frac{\lambda(\text{co } A)}{q(\text{co } A)} \cdot \varepsilon,$$

где  $B(0, \varepsilon)$  — шар с центром в нуле и радиусом  $\varepsilon$ ,  $\mu_n(M)$  —  $n$ -мерный объём множества  $M$ ,  $q(\text{co } A)$  — максимальное значение  $R$ , при котором  $\text{co } A \dot{-} B(0, R) \neq \emptyset$  или, иными словами, наибольший радиус шара, который можно вписать в  $\text{co } A$ .

## Список литературы

- [1] **Половинкин Е. С., Балашов М. В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. Москва: Физматлит, 2007. 438 с.
- [2] **Ушаков В. Н., Ершов А. А.** Об оценке хаусдорфова расстояния между множеством и его выпуклой оболочкой в евклидовых пространствах малой размерности // Труды Ин-та математики и механики. 2018. Т. 24, № 1. С. 223–235.
- [3] **Ершов А. А., Першаков М. В.** О соотношении альфа-множеств с другими обобщениями выпуклых множеств // VI Информ. шк. молодого ученого : сб. науч. тр. Екатеринбург. 2018. С. 143–150.

# О ВНЕШНИХ ОЦЕНКАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

И. В. Зыков

В докладе будет предложен метод построения внешних оценок множеств достижимости линейных нестационарных управляемых систем с интегральными ограничениями на управляющие воздействия. Решение некоторого матричного уравнения Бернулли (частный случай общего уравнения Риккати [1]), которое связано с грамианом управляемости исходной системы, определяет динамику оценивающего эллипсоида. При надлежащем выборе начальных значений можно получить сколь угодно точную аппроксимацию (в смысле внешней сходимости) множества достижимости. Приводится численный пример для системы 2-го порядка, показывающий характер сближения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Егоров, *Уравнения Риккати*, М.: ФИЗМАТЛИТ (2001), 320 с.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УРО РАН, Екатеринбург  
(Россия)

*E-mail address:* zykoviustu@mail.ru

## О СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И. Г. Ким

Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{K}^n = \{x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ ;  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  — пространство  $m \times n$ -матриц с элементами из поля  $\mathbb{K}$ .

Рассмотрим стационарную билинейную управляемую систему с запаздыванием

$$(1) \quad \dot{x}(t) = (A_0 + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r)x(t) + (B_0 + v_1 B_1 + \dots + v_s B_s)x(t - h),$$

здесь  $A_j, B_\ell \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ,  $j = \overline{0, r}$ ,  $\ell = \overline{0, s}$ ;  $h$  — постоянное запаздывание;  $x \in \mathbb{K}^n$  — фазовый вектор;  $u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{K}^r$ ,  $v = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{K}^s$  — векторы управляющего воздействия. Исследуется задача стабилизации системы (1): требуется построить векторы управления  $u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{K}^r$ ,  $v = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{K}^s$  такие, что система (1) асимптотически устойчива.

Пусть коэффициенты системы (1) имеют специальный вид: матрица  $A_0$  имеет форму Хессенберга;  $r = n$ ; матрицы  $A_j$ ,  $j = \overline{1, r}$ , — нижние треугольные, и элементы выше  $(j - 1)$ -й поддиагонали матрицы  $A_j$  равны нулю; первые  $p - 1$  строк и последние  $n - p$  столбцов матриц  $B_\ell$ ,  $\ell = \overline{0, s}$ , нулевые, то есть

$$(2) \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}^0 & a_{n-1,2}^0 & \dots & \dots & a_{n-1,n}^0 \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & \dots & a_{nn}^0 \end{pmatrix}, \quad a_{i,i+1}^0 \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$(3) \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1}^1 & \dots & \dots & a_{nn}^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & \dots & a_{n,n-1}^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$(4) \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{B}_\ell & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_\ell \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),$$

где  $\ell = \overline{0, s}$ ,  $p \in \{1, \dots, n\}$ . По системе (1) построим матрицы  $\Gamma_0 \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ,  $\Gamma_1 \in M_{n,s}(\mathbb{K})$  (см. [1, 2]):

$$(5) \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \text{Sp}(A_1) & \text{Sp}(A_2) & \dots & \text{Sp}(A_n) \\ \text{Sp}(A_1 A_0) & \text{Sp}(A_2 A_0) & \dots & \text{Sp}(A_n A_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Sp}(A_1 A_0^{n-1}) & \text{Sp}(A_2 A_0^{n-1}) & \dots & \text{Sp}(A_n A_0^{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$(6) \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \text{Sp}(B_1) & \text{Sp}(B_2) & \dots & \text{Sp}(B_s) \\ \text{Sp}(B_1 A_0) & \text{Sp}(B_2 A_0) & \dots & \text{Sp}(B_s A_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Sp}(B_1 A_0^{n-1}) & \text{Sp}(B_2 A_0^{n-1}) & \dots & \text{Sp}(B_s A_0^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Для системы (1), (2), (3), (4) без запаздываний ( $B_\ell = 0$ ,  $\ell = \overline{0, s}$ ) было установлено [1], что условие  $\text{rank } \Gamma_0 = n$  является достаточным условием стабилизации.

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты системы (1) имеют специальный вид (2), (3), (4). Если выполнены условия

$$(7) \quad \text{rank } \Gamma_0 = n, \quad \text{rank } \Gamma_1 = n,$$

то система (1) стабилизируема.

Теорема 1 обобщает результаты работы [1] о стабилизации на билинейные системы специального вида с запаздыванием. Работа примыкает к статьям [2, 3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–51–41005, 20–01–00293).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. II // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 1320–1328.
- [2] Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в билинейных системах с запаздыванием в состоянии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 19–28.
- [3] Зайцев В.А., Ким И.Г., Хартовский В.Е. Задача назначения конечного спектра для билинейных систем с несколькими запаздываниями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 319–331.

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ИЖЕВСК (РОССИЯ)  
E-mail address: kimingeral@gmail.com

## Оптимальное управление линейными системами по данным наблюдений

Костюкевич Д.А.

Белорусский государственный университет,

г. Минск, Беларусь

Классические методы теории управления существенным образом используют предположение о том, что известна достаточно точная модель объекта управления. Однако на практике объекты, как правило, содержат немоделируемую динамику и неопределенности. В то же время упрощается процесс получения данных, что дало толчок развитию теории управления на основе данных.

В данном докладе рассматривается задача оптимального управления линейным стационарным динамическим объектом при наличии ограничений на входные и выходные переменные. Математическая модель объекта неизвестна, доступны только исторические или экспериментальные данные наблюдений за его поведением, представляющие собой пары «вход-выход» в дискретные моменты времени. Идентификация системы по этим данным не проводится, напротив, они непосредственно включаются в постановку задачи оптимального управления. Для этого используется представление входных и выходных сигналов дискретных стационарных линейных систем как образ линейного оператора, задаваемого матрицей Ганкеля, которая построена по данным наблюдений.

В предположении о наличии в данных неизвестных ограниченных ошибок формулируется задача оптимального гарантированного управления и на ее основе предлагается алгоритм управления объектом в режиме реального времени. Алгоритм использует принцип делимости процессов наблюдения и управления в линейных системах, что приводит к специальным формулировкам задач оптимального управления и наблюдения только на основе доступных данных.



# Численное исследование задач управления и дифференциальных игр, включающих динамику «машина Дубинса»

Мунц Наталья Владимировна  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Кумков Сергей Сергеевич  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

В докладе рассматривается сеточный численный метод решения задач оптимального быстрогодействия. Охватываются как задачи оптимального управления, так и дифференциальные игры. Особенностью рассматриваемого класса проблем является наличие линии жизни, иными словами, фазового ограничения на первого игрока; в случае игры при достижении системой линии жизни считается, что безусловно выигрывает второй игрок. Изучается возможность применения этого метода для решения задач без линии жизни. Показываются результаты численного исследования задач, привлекающих модельную динамику «машина Дубинса» — соответствующей задачи управления и различных постановок классической игры «шофер-убийца».

П. Д. ЛЕБЕДЕВ, В. Н. УШАКОВ, А. А. УСПЕНСКИЙ  
**Алгоритмы оптимизации хаусдорфова отклонения компакта от  
набора подвижных выпуклых множеств<sup>1</sup>**

Пусть на плоскости задано компактное множество  $A \subset \mathbb{R}^2$  и набор из выпуклых компактных множеств  $B_i \subset \mathbb{R}^2, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}$ . Рассматриваются собственные движения множеств из набора  $\overline{B} = \{B_i\}_{i=1}^n$ , то есть для каждого номера  $i = \overline{1, n}$  может быть построено множество

$$\widehat{B}_i = \Pi(\varphi_i)B_i + \{x_i\}.$$

Здесь  $\Pi(\varphi_i)B$  означает преобразование

$$\Pi(\varphi_i)B \triangleq \{(\cos \varphi_i b_1 - \sin \varphi_i b_2, \sin \varphi_i b_1 + \cos \varphi_i b_2) \in \mathbb{R}^2 : (b_1, b_2) \in B_i\}$$

поворота компакта  $B_i$  на угол  $\varphi_i$  против часовой стрелки вокруг начала координат, а сложение со множеством  $\{x_i\}$  — сдвиг на вектор  $x_i$ . Обозначим через  $\Psi_n$  множество всех наборов из  $n$  чисел  $\varphi_i$ , таких, что  $\varphi_i \in [0, 2\pi], i = \overline{1, n}$ . Обозначим через  $\mathcal{X}_n$  множество всех наборов из  $n$  векторов  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2, i = \overline{1, n}$ . Будем записывать набор из  $n$  многоугольников, полученных путём комбинации поворота и параллельного переноса каждого из элементов массива  $\overline{B}$ :

$$\widehat{B}(\Phi, X) \triangleq \bigcup_{i=1}^n (\Pi(\varphi_i)B_i + \{x_i\}),$$

где  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n, X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ . Требуется найти такой массив чисел  $\Phi^* = \{\varphi_i^*\}_{i=1}^n, \varphi_i^* \in [0, 2\pi], i = \overline{1, n}$ , и массив  $X^* = \{\mathbf{x}_i^*\}_{i=1}^n, \mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^2, i = \overline{1, n}$ , чтобы выполнялось равенство

$$h(A, \widehat{B}(\Phi^*, X^*)) = \min_{\Phi \in \Psi_n, X \in \mathcal{X}_n} h(A, \widehat{B}(\Phi, X)), \quad (1)$$

где  $h(A, B) \triangleq \max_{\mathbf{a} \in A} \rho(\mathbf{a}, B)$  — хаусдорфово отклонение компакта  $A$  от компакта  $B$ ,  $\rho(\mathbf{a}, B) \triangleq \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$  — евклидово расстояние от точки  $\mathbf{a}$  до множества  $B$ ,  $\|\mathbf{a}\|$  — евклидова норма вектора  $\mathbf{a}$ , подробнее см. [1]. По сути это обобщение изучавшейся ранее задачи об отыскании положения одной фигуры, обеспечивающего минимум хаусдорфова отклонения от неё другой фигуры [2].

Рассматриваемую задачу можно рассматривать как отыскание таких движений множеств  $B_i, i = \overline{1, n}$ , чтобы для получившихся в их результате фигур  $\widehat{B}_i, i = \overline{1, n}$  при минимально возможном  $\varepsilon$  выполнялось вложение

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\widehat{B}_i + O(\mathbf{0}, \varepsilon)), \quad (2)$$

где  $\mathbf{0} = (0, 0), O(\mathbf{c}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$  — круг с центром в точке  $\mathbf{c}$ , радиуса  $r$ . По сути правая часть вложения (2) есть объединение  $\varepsilon$ -окрестностей множеств  $\widehat{B}_i, i = \overline{1, n}$ . Минимальная величина  $\varepsilon$  равна значению выражения (1).

Методы решения задачи основаны на разбиении компакта  $A$  на зоны влияния множеств  $B_i, i = \overline{1, n}$ , аналогичных тем, которые применяются в задачах о нахождении оптимального расположения наборов точек [3]. Назовём обобщённой зоной Дирихле множества  $B_i$  в множестве  $A$

$$D^{(i)}(A, \overline{B}) = \left\{ \mathbf{a} \in A : \rho(\mathbf{a}, B_i) = \min_{j=\overline{1, n}} \rho(\mathbf{a}, B_j) \right\}, i = \overline{1, n}.$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проектов 18-01-00221 и 18-01-00264.

Применяемые алгоритмы основаны на том, что каждого из текущих компактов  $B_i, i = \overline{1, n}$  строится его обобщённая зона Дирихле. А затем, если  $D^{(i)}(A, \overline{B}) \neq \emptyset$ , то вычисляется положение множества  $\widehat{B}_i$ , дающее минимум хаусдорфова отклонения от него  $D^{(i)}(A, \overline{B})$ , с применением оптимизационных методов, предложенных в [4]. Важным новшеством алгоритма является то, что границы обобщённых зон Дирихле строятся как рассеивающие линии в задаче быстрогодействия с круговой вектограммой скоростей с центром в начале координат [5], в которой целевое множество совпадает с  $\overline{B}$ . При численной реализации алгоритма используется модификация разработанного ранее авторами вычислительного комплекса [6].

Пример. Пусть задан неподвижный многоугольник  $A$  с набором вершин

$$(-4, -3), (-4, 3), (4, 3), (4, -3).$$

Также заданы два подвижных многоугольника:  $B_1$  с набором вершин

$$(-2.5, 2), (-3, 0.5), (-1.5, 0.5)$$

и  $B_2$  с набором вершин

$$(3, -2.5), (2.5, -1.5), (1.5, -3), (2, -3).$$

Требуется найти такой массив углов  $\Phi^*$  и векторов  $X^*$ , чтобы величина (1) была минимальной.

Решение найдено путём многократного запуска программного комплекса. Найденные массивы, задающие перемещение подвижных многоугольников:  $\Phi^* = \{5.667, 4.1001\}$ ,  $X^* = \{(-0.8052, -1.2492), (2.2218, 2.7228)\}$ . Хаусдорфово отклонение фигуры  $A$  от объединения  $\widehat{B}(\Phi^*, X^*)$  фигур, полученных путём поворота и параллельного перемещения фигур  $B_i, i = 1, 2$  равно  $h(A, \widehat{B}(\Phi^*, X^*)) \approx 2.9861$ . Результаты моделирования показаны на рис. 1. Зелёной линией обозначена граница многоугольника  $A$ , фиолетовой линией — границы многоугольников  $B_i, i = 1, 2$ , красной линией — границы многоугольников  $\widehat{B}_i = \Pi(\varphi_i)B_i + \{x_i\}, i = 1, 2$ , тонкой синей линией — границы  $\varepsilon$ -окрестностей многоугольников  $\widehat{B}_i, i = 1, 2$ , в объединение которых по формуле (2) вложено  $A$ .

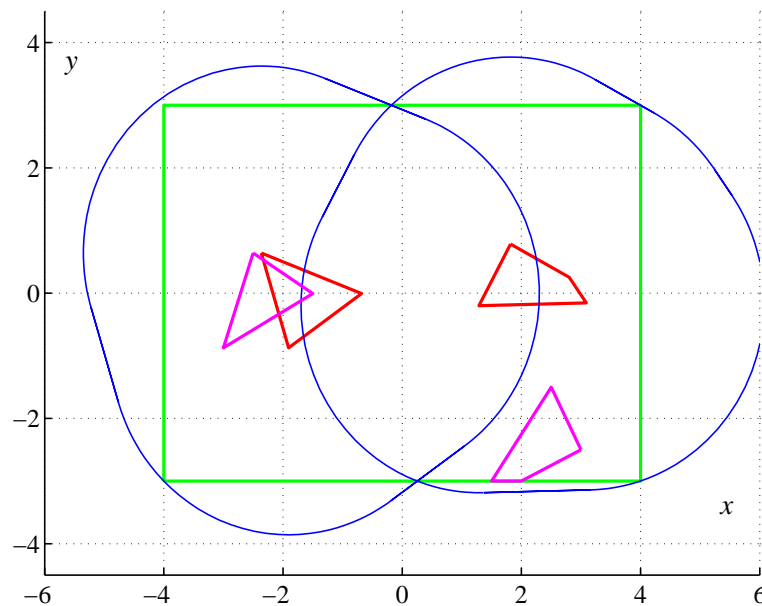


Рис. 1. Расположение многоугольников в задаче об оптимизации хаусдорфова отклонения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: Комкнига, 2006. 304 с.
2. Лахтин А.С., Ушаков В.Н. Задача оптимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многогранниками // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 9. С. 60–67.
3. Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 291–308.
4. Ушаков В.Н., Лебедев П.Д. Итерационные методы минимизации хаусдорфова расстояния между подвижными многоугольниками // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 86–97.
5. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Конструирование негладкого решения задачи управления по быстрдействию при низком порядке гладкости границы целевого множества // Тр. Ин-та математики и механики. 2019. Т. 25, № 1. С. 108–119.
6. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662074 от 27.10.2017.

**МНОЖЕСТВО ВЫЖИВАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ  
ХИМИОТЕРАПИИ ЗЛОКАЧЕСТВЕННОЙ ОПУХОЛИ,  
РАСТУЩЕЙ ПО ОБОБЩЕННОМУ ЛОГИСТИЧЕСКОМУ  
ЗАКОНУ**

Н. Г. Новоселова

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для системы с кусочно монотонной динамикой [1, 2]. Рассматриваемая математическая модель появляется при описании процесса химиотерапии злокачественной опухоли, где время изменяется в пределах  $t \in [0, T]$ :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dm}{dt} = g(m) - \gamma m f(h), & m(t_0) = m_0, \gamma - const > 0 \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), & h(t_0) = h_0, \alpha - const > 0, \end{cases}$$

здесь  $g(m) = rm \left[ 1 - \left( \frac{m}{\theta} \right)^\beta \right]$  — обобщенный логистический закон,

$r, \theta, \beta - const > 0$ ,  $m$  — число злокачественных клеток,  $h$  — количество лекарства, способного убивать клетки опухоли,  $f(h)$  — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли,  $u(t)$  — количество лекарства, вводимого в опухоль в единицу времени (управление).

Предполагается, что управление ограничено:

$$(2) \quad 0 \leq u(t) \leq Q,$$

где  $Q$  — максимальное количество лекарства, вводимого в опухоль в единицу времени.

Также предполагается, что функция терапии  $f(h)$  является непрерывно дифференцируемой с положительными значениями и имеет два максимума.

Целью задачи оптимального управления является минимизация терминальной функции платы в конечный момент времени  $T$ :

$$(3) \quad \sigma(m(T)) = m^\beta(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)}.$$

В работе [3] построена функция цены  $Val(t_0, m_0, h_0)$  в задаче (1),(2),(3) следующего вида:

$$Val(t_0, h_0, m_0) = \frac{\theta^\beta m_0^\beta e^{-\beta \gamma V(t_0, h_0)}}{\theta^\beta e^{-\beta(r(T-t_0))} + \beta m_0^\beta r \int_{t_0}^T e^{-\beta(r(\tau-t_0) + \gamma V(\tau, h^0(\tau)))} d\tau},$$

где  $V(t, h)$  конструируется с помощью непрерывной склейки конечного числа гладких функций, построенных с помощью метода характеристик Коши для вспомогательных линейных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ) [3].

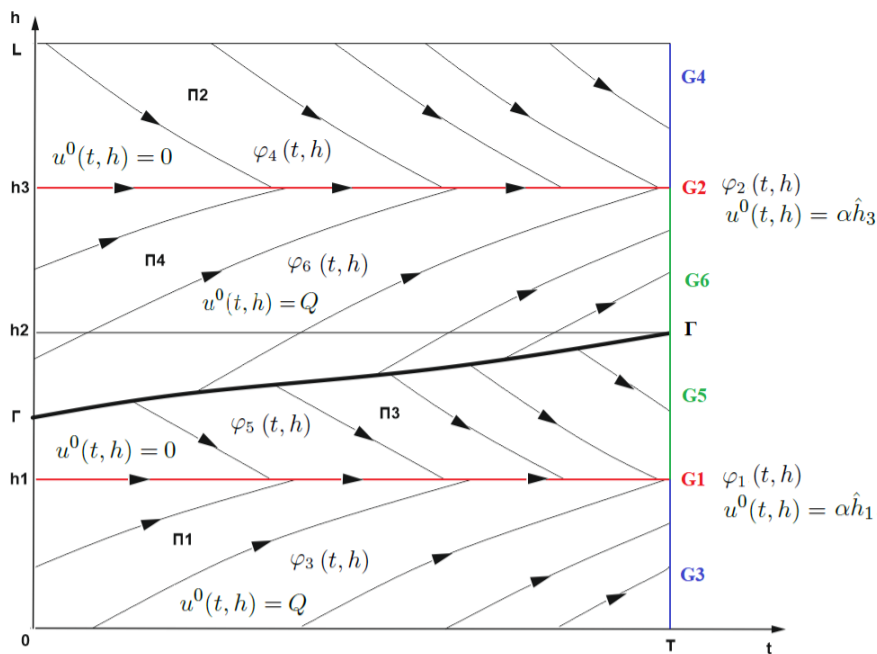


Рис. 1. Оптимальный синтез  $u(t, h)$ ,  $h = \hat{h}_1, \hat{h}_3$  - точки максимума функции терапии  $f(h)$ , а  $\hat{h}_2$  - ее точка минимума.

Оптимальный синтез в задаче (1),(2),(3) имеет следующий вид [3](см. Рис.1):

$$u^0(t, h) = \begin{cases} \alpha \hat{h}_1, & (t, h) \in G_1, \\ \alpha \hat{h}_3, & (t, h) \in G_2, \\ Q, & (t, h) \in \Pi_1, \\ 0, & (t, h) \in \Pi_2, \\ 0, & (t, h) \in \Pi_3, \\ Q, & (t, h) \in \Pi_4 \setminus \Gamma. \end{cases}$$

В данной работе проводится построение множества  $W$  — множества разрешимости задачи (1),(2),(3) (см. работы [4, 5]), то есть:

$$(4) \quad W = \{(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L] : Val(t_0, m_0, h_0) \leq M^\beta\},$$

где максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью равно

$$M = \theta \left(1 - \frac{\gamma F}{r}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$F = \max_{h \in [0, L]} f(h) = f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3)$$

и  $L$  - максимальное допустимое количество химиотерапевтического средства в организме.

В данной работе показано, что множество  $W$  является максимальным множеством выживаемости для задачи (1),(2),(3) и справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Выполняются следующие утверждения:

1. Для любых точек  $(t_0, h_0, m_0) \in W$  справедливо, что  $m_0 \leq M$ .

2. Множество  $W$  вида (4) является слабо инвариантным относительно дифференциального включения  $\dot{w} \in Y(w)$ , где

$$w = (t, h, m) \mapsto Y(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ g(m) - \gamma m f(h) \\ -\alpha h + [0, Q] \end{pmatrix}$$

3. Для любой точки  $w \notin W$  и для любой измеримой функции  $u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, L]$  существует такой момент времени  $t_* \in (t_0, T)$ , что выполняется неравенство:

$$m(t_*; t_0, h_0, m_0, u(\cdot)) > M.$$

Также в данной работе приведены результаты численного вычисления множества  $W$ , иллюстрирующие теорему, приведенную выше.

Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00074).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Братусь А. С., Чумерина Е. С.: Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль. // ЖВММФ. 2008. Т. 48. Вып. 6. С. 946–966.
- [2] Егоров И.Е. Оптимальное позиционное управление в математической модели терапии злокачественной опухоли с учетом реакции иммунной системы. // Математическая биология и биоинформатика. 2014. Т. 9. № 1. С. 257–272.
- [3] Субботина Н. Н., Новоселова Н. Г. О приложениях уравнений Гамильтона–Якоби и теории оптимального управления к задачам химиотерапии злокачественных опухолей // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина. – Тр. МИРАН им. В.А. Стеклова. – 2019. – Т. 304 – С. 273–284.
- [4] Ushakov, V.N., Matviychuk, A.R., Ushakov, A.V. Numerical methods for construction reachability sets of dynamical systems. // AIP Conference Proceedings, Volume 1497, 2012, Pages 144-151.
- [5] Patsko, V.S. Attainability Set at Instant for One-Side Turning Dubins Car / V.S.Patsko, A.A.Fedotov // IFAC – PaperOnLine. 2018. Vol.51, No. 32. P. 201–206.

A SOLVABILITY SET IN THE PROBLEM OF CHEMOTHERAPY FOR A MALIGNANT TUMOR GROWING ACCORDING TO THE GENERALIZED LOGISTIC LAW, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)  
*Email address: n.g.novoselova@gmail.com*

## Оптимальная пропорция использования экологически чистой и грязной технологий в одной двухсекторной модели экономического роста

Орлов С.М., Ровенская Е.А.  
МГУ им. Ломоносова

Сформулирована задача оптимального управления, описывающая процесс совместной эксплуатации экологически чистой и грязной технологий в двухсекторной модели экономического роста с производственной функцией типа АК и логарифмической функцией полезности. Предполагается, что критерий качества включает в себя две конкурирующие цели: максимизацию потребления и максимизацию «зеленого» капитала, накопленного при помощи инвестиций в чистую технологию. Построенная задача оптимального управления двумерная, на бесконечном горизонте планирования и с незамкнутой областью управления. Строится решение краевой задачи принципа максимума Понтрягина, содержащее особый режим управления, характеризующийся пропорциональным экономическим ростом секторов экономики. Обосновывается оптимальность построенного экстремального решения на основе прямого сравнения значений функционала на экстремальном решении и любом допустимом. Для нахождения решения на начальном промежутке времени предлагается численный алгоритм решения краевой задачи, сводящий ее к последовательному решению двух задач Коши. Производится анализ оптимального решения в зависимости от параметров задачи.



# Точки бифуркации кусочно-гладкого решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и их классификация

А.С. Родин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, a.s.rodin@imm.uran.ru

<sup>1</sup> УрФУ ИЕНиМ, Екатеринбург, Россия, alexey.rodin.ekb@gmail.com

**Аннотация:** В данной статье рассматривается краевая задача Коши уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана. Исследуется структура кусочно-гладкого решения, и классифицируются его точки бифуркации.

**Ключевые слова:** уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана, точка бифуркации, кусочно-гладкое решение

## Введение

Уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана возникает в задачах оптимального управления, где его обобщенным решением является функция цены. Как правило функция цены имеет точки, где она не дифференцируема. В таком случае важным вопросом остается описание и построение сингулярного множества: множества точек в которых функция цены не дифференцируема. Построение сингулярного множества достаточно сложная задача поэтому, для упрощения построения сингулярного множества необходимо найти точки бифуркации, точки «зарождения» сингулярного множества. В работе [1] рассматривалась задача Коши для уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана при тех же условиях на входные данные и получены необходимые и достаточные условия описывающие точки бифуркации. В данной работе проведена классификация точек бифуркации. Приведены иллюстративные примеры.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана

$$D_t\varphi(t, x) + H(D_x\varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$D_x\varphi(t, x) = \left( \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial x_n} \right).$$

Обозначим  $\Pi_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in R^n\}$ .

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

A1) функция  $H(s)$  дважды непрерывно дифференцируема, собственная [2]

и гессиан  $D^2H(s)$  положительно определен [3];

A2) функция  $\sigma(x)$  дважды непрерывно дифференцируема, матрица  $D^2\sigma(x)$  положительно определена.

Здесь  $D^2\sigma(x) = \left\{ \frac{\partial^2 \sigma(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i=1, j=1}^{n, n}$ .

Условия A1), A2) обеспечивают существование и единственность обобщенного (минимаксного и вязкостного) решения задачи (1) [4].

Как правило обобщенное решение задачи (1) содержит точки недифференцируемости.

**Определение 1.** Множеством сингулярности  $Q$  для обобщенного решения  $\varphi$  задачи (1) является множество точек  $(t, x) \in \Pi_T$ , в которых функция  $\varphi$  недифференцируема.

**Определение 2.** Точкой бифуркации  $(t^*, x^*)$  называется точка, для которой выполнено следующее условие  $(t^*, x^*) \in \bar{Q} \setminus Q$ , где  $\bar{Q}$  есть замыкание множества  $Q$ .

Обобщенное решение задачи (1) будем рассматривать в классе кусочно-гладких функций [4].

**Определение 3.** Непрерывная функция  $\varphi(\cdot) : \Pi_T \rightarrow R$  называется кусочно-гладкой на открытой области  $G$  если

1) область определения  $G$  функции  $\varphi(\cdot)$  имеет следующую структуру:

$$\text{int}\Pi_T \supset G = \cup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \emptyset, \quad i, j \in I, i \neq j,$$

где  $I = 1, 2, \dots, N$ ,  $M_i$  — дифференцируемое подмногообразие в  $G$ ;

2) сужение кусочно-гладкой функции  $\varphi(\cdot)$  на  $\bar{M}_j, j \in J$  является непрерывно дифференцируемой функцией, где

$J := i \in I : M_i$  — многообразие  $(n+1)$  — размерности,  $\bar{M}_j$  является замыканием  $M_j$ ;

3) для любых  $i \in I, (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in M_i$  выполняется условие  $J(t_1, x_1) = J(t_2, x_2)$ , где

$$J(t, x) := \{j \in J : (t, x) \in \bar{M}_j\}.$$

## 2. Основной результат

Зафиксируем  $M_i, i \in I \setminus J$  дифференцируемое подмногообразие размерности  $n+1-k$ . Обозначим символом  $\bar{M}_i^{[k]}$  замыкание  $M_i, k \in 1, 2, \dots, n$ .

Разобьем точки бифуркации на классы в зависимости от размерности дифференцируемого подмногообразия в замыкании которого лежат эти точки.

Введем следующее обозначение

$$K(T - t^*, \xi^*) = E - (T - t^*)D_\xi(DH(D\sigma(\xi^*))).$$

Рассмотрим множество троек  $(T-t^*, \xi^*, x^*)$ , которые удовлетворяют следующим свойствам:

В1)  $\text{rank}(K(T-t^*, \xi^*)) = n - k$ ;

В2) значение  $(T-t^*) = f(\xi^*)$ ,  $f: R^n \rightarrow R$ , является локальным минимумом функции  $|K(T-t^*, \xi^*)| = 0$ . Здесь  $|K(T-t^*, \xi^*)|$  является многочленом степени  $n - k$  относительно переменной  $(T-t^*)$ ;

В3)  $\xi^*$  является корнем уравнения  $|K(f(\xi^*), \xi^*)| = 0$ .

В4)  $x^* = \xi^* - (T-t^*)DH(D\sigma(\xi^*))$ .

**Теорема 1.** Если выполнены условия A1)-A2), то для того, чтобы точка бифуркации  $(t^*, x^*) \in \overline{M}_i^{[k]}$  необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия B1)-B4).

Работа выполнена при поддержке РФФИ(грант №20-01-00362).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родин А. С. Анализ структуры субдифференциала минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / А.С.Родин // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвящ. 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 16–20 сентября 2019. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. С. 275-279.
2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. Magnus, Jan R. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics / J.R. Magnus and H. Neudecker John Wiley & Sons Ltd , 2007.
4. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2003.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТОЧНЫХ СХЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ШАГАМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВУ

А. Д. Романенко

В области  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  с  $\Omega = [a, b] \subset R$  и  $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T]$  ищется решение следующей задачи состояния:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}y &\equiv y_t - \mathcal{A}y = u \quad \text{в } Q_T, \\ y(x, t) &= 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_T, \\ y(x, 0) &= y_0(x) \quad \text{при } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь под  $\mathcal{A}y$  понимается дифференциальный оператор, содержащий производные Римана-Лиувилля

$$\mathcal{A}y = \frac{1 + \beta}{2} \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} + \frac{1 - \beta}{2} \frac{\partial^\alpha y}{\partial (-x)^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad \beta \in [-1, 1],$$

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_a^x \frac{y(\xi, t)}{(x - \xi)^{\alpha-1}} d\xi,$$

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial (-x)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_b^x \frac{y(\xi, t)}{(\xi - x)^{\alpha-1}} d\xi.$$

Исследования краевых задач для нестационарных процессов с дробными производными в дифференциальной и разностной постановках имеются в работе А.А. Алиханова [1].

Вводятся множества ограничений на функции состояния и управления

$$\begin{aligned} Y_{ad} &= \{y \in L_2(0, T; H_0^\alpha(\Omega)) : |y(x, t)| \leq \bar{y} \quad \text{п.в.} \quad (x, t) \in Q_T\}, \\ U_{ad} &= \{u \in L_2(Q_T) : |u(x, t)| \leq \bar{u} \quad \text{п.в.} \quad (x, t) \in Q_T\}, \end{aligned}$$

где  $\bar{y} > 0$ ,  $\bar{u} > 0$ .

Целевой функционал вида

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(x, t) - z_d(x, t))^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} u^2 dxdt,$$

с заданным наблюдением  $z_d \in L_2(Q_T)$ .

Задача оптимального управления заключается в поиске

$$(2) \quad \begin{aligned} &\min_{(y, u) \in K} J(y, u), \\ K &= \{(y, u) \in Y_{ad} \times U_{ad} : \text{выполнено (1)}\}. \end{aligned}$$

**Теорема.** *Задача оптимального управления (2) имеет единственное решение.*

На сетке с постоянным шагом по пространству и переменными шагами по времени, предложенных В.И. Лебедевым [4], дифференциальный оператор с дробной

производной при помощи потоковой аппроксимации из работы [3] заменяется на сеточный оператор

$$A_x = \frac{1 + \beta}{2} L_x + \frac{1 - \beta}{2} R_x,$$

где  $R_x = L_x^T$ , причем матрица  $L_x$  является нижнетреугольной матрицей Теплица, в которой над главной диагональю стоят единицы. Строится аппроксимация  $J_h(y, u)$  функционала и множеств ограничений, в результате чего уравнение состояния записывается в виде явной разностной схемы  $Ly = Mu$ , где  $M$  – диагональная матрица с элементами, равными значениям шагов по времени. Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = J_h(y, u) + \theta(y) + \varphi(u) + (\lambda, Ly - Mu).$$

Здесь  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в евклидовом пространстве векторов соответствующей размерности,  $\partial\varphi$ ,  $\partial\theta$  – субдифференциалы выпуклых множеств ограничений  $U_{ad}$ ,  $Y_{ad}$  соответственно.

Седловая задача для этой функции принимает вид

$$(3) \quad \begin{pmatrix} E & 0 & L^T \\ 0 & E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} z_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска решения задачи (3) используется предобусловленный итерационный метод типа метода Удзавы [2] с предобусловлителем  $D = LM^{-1}L^T$ , спектрально эквивалентным матрице  $L$  оператора уравнения состояния.

$$\begin{aligned} u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) &\ni \lambda^k, \\ y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) &\ni z_d - L^T \lambda^k, \\ LM^{-1}L^T \frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\rho} + Mu^{k+1} - Ly^{k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Решение первых двух включений сводится к покомпонентному проектированию вектора правой части на эти множества. Обращение  $LM^{-1}L^T$  сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений по явным формулам с матрицами нижней, диагональной и верхней треугольной формы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00431 А.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A.A. Alikhanov *Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation*, Applied Mathematics and Computation. **268** (2015) 12-22.
- [2] A.V. Lapin *Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems*, Lobachevskii Journal of Mathematics. **31** (2010) 309-322.
- [3] В.М. Головизнин, В.П. Киселев, И.А. Короткин *Численные методы решения уравнений дробной диффузии в одномерном случае*. Препринт № ИВРАЕ-2002-10. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 35 с.
- [4] В.И. Лебедев, С.А. Финогенов *О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 11:2 (1971), 425–438.

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, КАЗАНЬ (РОССИЯ)  
E-mail address: romart92@mail.ru

## Управление мягкой посадкой космического аппарата “Казачок” (программа ЭКЗО-МАРС-2020)

М.А. Самошкин<sup>1</sup>, С.И. Кумков<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Уральский федеральный университет ИРИТ-РТФ [samoshkin.mat@yandex.ru](mailto:samoshkin.mat@yandex.ru)

<sup>2</sup> Институт математики и механики УрО РАН [kumkov@imm.uran.ru](mailto:kumkov@imm.uran.ru)

В работе рассматривается управляемое движение Российского космического аппарата “Казачок” на заключительном этапе его посадки на поверхность Марса. Этот этап является самым ответственным этапом космической части полета по Программе “ЭКЗО МАРС”. Однако существует опасность ударной посадки при ее выполнении на *большой* тяге двигательной установки (ДУ) с быстрым изменением скорости снижения, как показано в материалах Роскосмоса или как было реализовано управление посадкой Лунного модуля системы Saturn V. Для повышения безопасности посадки Авторами предлагается и исследуется режим и алгоритм управления, отличающийся от стандартного алгоритма. В качестве аналога был взят режим управления “мягкой” стыковкой кораблей Союз и Прогресс с Международной Космической станцией.

В предлагаемых алгоритмах посадка выполняется по следующему сценарию: предыдущие устройства (парашютная система, ДУ с тормозных двигателях с большой тягой) первоначально выводят КА в множество допустимых позиций по координате и скорости; далее включаются алгоритмы управления плавным снижением, выводящие КА в терминальное множество позиций для мягкой посадки; движение в этом множестве с малой допустимой остаточной скоростью заканчивается мягким касанием опор поверхности Марса. При использовании предлагаемых алгоритмов обеспечивается: безопасная мягкая посадка из задаваемых областей, как из расчетных, так и нерасчетных начальных позиций; касание опор КА поверхности с малой остаточной скоростью допустимой величины; минимальное время движения КА из начальных позиций до входа в терминальное множество; минимально необходимая длительность работы двигателей ДУ с минимальными затратами топлива.

**Применение метода Левенберга-Марквардта  
в задачах пассивной навигации  
межпланетных космических аппаратов**

**Сазонов В.В., Самыловский И.А.\*, Соловьёв С.В.,  
Будзинский С.С., Заворотный А.Ю.**

*Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова  
факультет космических исследований*

\*ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

При осуществлении миссий в дальнем космосе (маневры, посадка в запланированных районах и т.д.) требуется оперативное определение положение космического аппарата на орбите вокруг небесного тела. В силу объективных трудностей межпланетной связи представляет интерес решение этой задачи с использованием данных от бортовых измерительных приборов (в частности, оптических). Наиболее распространенные из этих приборов выдают либо массивы кватернионов (астродатчики ориентации), либо наборы угловых координат соответствующих реперных объектов (Солнце, планеты). В связи с этим возникает необходимость определения фазового вектора космического аппарата в требуемый момент времени как решения задачи минимизации функционала, задающего отклонение "промоделированных" измерений (т.е. тех, которые были бы произведены на "промоделированной" траектории, порожденной приближением реального фазового вектора) от реальных (т.е. тех, которые были получены с бортовых приборов):

$$J := \sum_{i=1}^N \|\vec{\mu}_i(t_i) - \vec{\mu}_i^m(t_i; (\vec{r}_m, \vec{v}_m))\|^2 \rightarrow \min_{(\vec{r}_m, \vec{v}_m)},$$

где  $t_i$  – моменты измерений,  $\vec{\mu}_i$  – измерения, произведенные бортовой аппаратурой в эти моменты времени на реальной траектории КА (размерность каждого из векторов зависит от формы выходных данных соответствующего прибора), а  $\vec{\mu}_i^m$  – "промоделированные" измерения, осуществленные теми же приборами и в те же моменты времени, но на траектории, порожденной текущим приближением  $(\vec{r}_m, \vec{v}_m)$  реального начального условия  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  системы уравнений пассивного движения КА в

рассматриваемой системе координат

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ \dot{v} = -\mu \frac{r}{\|r\|^3} + \sum a_{\text{возм.}}, \end{cases}$$

где  $r, v \in \mathbb{R}^3$  – радиус-вектор центра масс и вектор скорости центра масс космического аппарата,  $a_{\text{возм.}}$  – возмущающие факторы (притяжение небесных тел и т.д.)

Учитывается динамика КА как материальной точки, вращательное движение моделируется "кинематически" за счет нацеливания оптических осей определенных приборов на реперные объекты (Солнце, спутник небесного тела и т.д.).

Для поиска решения применяется программная реализация метода Левенберга-Марквардта и прототип программного комплекса, позволяющий конфигурировать приборный состав КА (от него зависят параметры векторов  $\vec{\mu}_i$ ) и параметры набора измерений (от него зависит распределение моментов времени  $t_i$ ).

Излагаются результаты вычислительных экспериментов при различном распределении моментов измерений и различных характеристиках приборного состава. Демонстрируется возможность восстановления траектории КА по результатам "угловых" измерений.

## Список литературы

- [1] П.Е. Эльясберг. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965
- [2] П.Е. Эльясберг. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976
- [3] Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. Основы механики космического полёта. М.: Наука, 1990



## Об условиях стационарности в задаче о выведении набора автономных объектов объектом-носителем

Самыловский И.А.\*, Самыловская А.К.,

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова  
факультет космических исследований

\*ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

Мы рассматриваем следующую задачу управления с терминальным функционалом:

$$A : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \text{ on } \Delta_0 = [t_0, T], \\ \dot{y}^i = g^i(y^i, v^i) \text{ on } \Delta_i = [t_i, T], \quad i = 1..n, \\ \Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) = 0, \quad i = 1..n, \\ \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \leq 0, \quad i = 1..n \\ \varphi_1(x(t_0), x(T)) = 0, \\ \varphi_2(x(t_0), x(T)) \leq 0, \\ \phi(u) \leq 0, \\ \omega^i(v^i) \leq 0, \\ J_A := J(x(t_0), x(T), y^1(t_1), y^1(T), \dots, y^n(t_n), y^n(T)) \rightarrow \min_{u, v^1, \dots, v^n}. \end{cases}$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – фазовый вектор объекта-носителя в момент  $t$ ,  $y^i(t) \in \mathbb{R}^n$  – фазовый вектор  $i$ -го объекта-полезной нагрузки. Мы моделируем ситуацию, при которой носитель перемещается между двумя "орбитами" в соответствии с конечными условиями

$$\varphi_1(x(t_0), x(T)) = 0, \quad \varphi_2(x(t_0), x(T)) \leq 0$$

сбрасывая полезные нагрузки в моменты времени  $t_i$  в соответствии с заданным их "распределением по орбитам"

$$\Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) = 0, \quad \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \leq 0, \quad i = 1..n.$$

Для процесса  $w^0 = (x^0, y^{1^0}, \dots, y^{n^0}, u^0, v^{1^0}, \dots, v^{n^0})$  мы рассматриваем расширенный слабый минимум и желаем получить условия стационарности. Мы получаем их, "размножая" задачу в соответствии с количеством интервалов времени, выписывая условия в новой задаче и затем переписывая их в терминах исходной. Таким образом, получаем конечную функцию Лагранжа

$$l = \alpha_0 J(x(t_0), x(T), y^1(t_1), y^1(T), \dots, y^n(t_n), y^n(T)) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) + \\ + \alpha_{n+1} \varphi_1(x(t_0), x(T)) + \sum_{i=1}^n \beta_i \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) + \beta_{n+1} \varphi_2(x(t_0), x(T)),$$

и расширенную функцию Понтрягина

$$\bar{H} = \psi_x f(x, u) + \sum_{j=1}^{i-1} (\psi_{y^j} g(y^j, v^j) - m^j \omega^j(v^j)) - h\phi(v) \text{ on } \Delta_i = [t_{i-1}, t_i],$$

where  $i = 1..n + 1$ , and by definition  $t_{n+1} := T$ .

Сопряженные переменные  $\psi_x(t)$ ,  $\psi_{y^i}(t)$  удовлетворяют сопряженной системе

$$\begin{cases} \psi_x(t_0) = \alpha_0 J'_{x(t_0)} + \alpha_{n+1} \varphi'_{1x(t_0)} + \beta_{n+1} \varphi'_{2x(t_0)}, \\ \psi_x(T) = -\alpha_0 J'_{x(T)} - \alpha_{n+1} \varphi'_{1x(T)} - \beta_{n+1} \varphi'_{2x(T)}, \\ \psi_{y^i}(t_i) = \alpha_0 J'_{y^i(t_i)} + \alpha_i \Phi'_{y^i(t_i)} + \beta_i \Psi'_{y^i(t_i)}, \quad \psi_{y^i}(T) = -\alpha_0 J'_{y^i(T)} \end{cases}$$

со скачками

$$\Delta \psi_x(t^i) = l'_{x^i(t_i)} = \alpha_i \Phi'_{x^i(t_i)} + \beta_i \Psi'_{x^i(t_i)}.$$

Условия стационарности имеют вид

$$\begin{cases} \psi_x f_u - h\phi_u = 0 \text{ on } [t_0, T], \\ \psi_{y^i} g_{v^i}^i - \sigma^i \omega_{v^i}^i = 0 \text{ на } \Delta^i := [t_i, T], \quad i = 1..n \end{cases}$$

закон сохранения энергии - вид

$$\psi_x f + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{y^j} g^j = c \text{ на } \Delta_i := [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1..n + 1.$$

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТАМИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
Иркутск, Россия

E-mail: [sorokovikov.p.s@gmail.com](mailto:sorokovikov.p.s@gmail.com)

Задачи оптимального управления (траекторной оптимизации) возникают повсеместно при рассмотрении и исследовании механических систем. В настоящее время одним из современных и актуальных классов задач траекторной оптимизации являются прикладные задачи из области управления роботами. Многие задачи указанного класса являются задачами оптимального быстродействия и имеют фазовые ограничения на траектории управляемой системы. Работа посвящена численному решению двух нижеприведенных прикладных задач.

I. Задача оптимального управления мобильным роботом [1–3].

Математическая модель мобильного робота описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.5(u_1 + u_2) \cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = 0.5(u_1 + u_2) \sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = 0.5(u_1 - u_2). \end{cases}$$

На управления накладываются ограничения:  $|u_i(t)| \leq 10, i = \overline{1, 2}$ . Фазовые координаты должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$g_1(x) = 1.5 - \sqrt{(x_1 - 2.5)^2 + (x_2 - 2.5)^2} \leq 0,$$

$$g_2(x) = 1.5 - \sqrt{(x_1 - 7.5)^2 + (x_2 - 7.5)^2} \leq 0,$$

$$g_3(x) = 3 - \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 8)^2} \leq 0,$$

$$g_4(x) = 3 - \sqrt{(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 2)^2} \leq 0.$$

Задача заключается в переводе системы из точки  $x(t_0) = (10, 10, 0)$  в точку  $x(t_1) = (0, 0, 0)$  при выполнении всех ограничений за минимально возможное время  $t_1, t \in [0, t_1]$ .

II. Задача оптимального управления манипулятором промышленного робота.

Динамика движения плоского двухзвенного робота антропоморфного типа описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(M_1 - F_1) \cdot a_{22} - (M_2 - F_2) \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M_2 - F_2) \cdot a_{11} - (M_1 - F_1) \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \end{cases},$$

где  $M_1 = -C_1(x_1 - u_1), M_2 = -C_2(x_3 - x_1 - u_2), F_1 = -m_1 \cdot l_1 \cdot R_1 \cdot \sin(x_3 - x_1) \cdot x_2^2,$   
 $F_2 = -m_2 \cdot l_2 \cdot R_2 \cdot \sin(x_3 - x_1) \cdot x_4^2, a_{11} = m_1 \cdot \rho_1^2 + m_2 \cdot l_1^2, a_{12} = a_{21} = m_2 \cdot R_2 \cdot l_1 \cdot \cos(x_3 - x_1),$   
 $a_{22} = m_2 \cdot \rho_2^2.$  Здесь  $x_1, x_3$  – углы поворота звеньев,  $x_2, x_4$  – скорости поворота,  $u_1, u_2$  –

программные значения углов поворота (управления),  $l_1, l_2$  – длины звеньев,  $m_1, m_2$  – массы звеньев,  $\rho_1, \rho_2$  – радиусы инерции,  $R_1, R_2$  – расстояния до центра масс,  $C_1, C_2$  – коэффициенты передачи привода.

На переменные задачи накладываются ограничения, связанные с конструктивными особенностями робота:

$$\begin{aligned} |u_i(t)| &\leq \pi, i = \overline{1,2}, \\ |M_i(t)| &\leq 10, i = \overline{1,2}, \\ \pi/6 &\leq x_1(t) \leq 5/6 \cdot \pi, t \in [0, t_1], \\ \pi/3 &\leq x_1(t) - x_3(t) \leq 5/6 \cdot \pi, t \in [0, t_1]. \end{aligned}$$

Рассмотрен конкретный вариант робота со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} m_1 &= 7.62, \rho_1 = 0.968, R_1 = 0.239, l_1 = 0.50, C_1 = 10.0, \\ m_2 &= 8.73, \rho_2 = 0.973, R_2 = 0.251, l_2 = 0.67, C_2 = 10.0. \end{aligned}$$

Задача заключается в переводе системы из точки  $x(t_0) = (\pi/6, 0, -\pi/6, 0)$  в точку  $x(t_1) = (5/6\pi, 0, \pi/3, 0)$  при выполнении всех ограничений за минимально возможное время  $t_1$ .

Усложненный вариант задачи содержит дополнительное ограничение, соответствующее контролю за взаимным влиянием звеньев:

$$\left| a_{12} \frac{(M_2 - F_2) \cdot a_{11} - (M_1 - F_1) \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} + F_1 \right| \leq \alpha, \text{ где } \alpha \text{ – степень взаимного влияния. Требуется минимизировать } \alpha \text{ для некоторого } \bar{t}_1 > t_1.$$

Для численного решения задач используется дискретизация системы дифференциальных уравнений и приближенные методы решения задачи Коши. При решении обеих задач все фазовые ограничения были приведены к терминальным путем введения кубических штрафных функционалов, позволяющих сохранить свойство непрерывности вторых производных. Терминальные задачи решались с помощью многометодной вычислительной схемы, включающей как поисковые (методы «парабол», Пауэлла, Растригина), так и градиентные (BFGS, метод сопряженных градиентов) алгоритмы. Предложенный подход и примененная многометодная вычислительная схема показали свою работоспособность при решении прикладных задач из области управления роботами. Приводятся результаты численного решения вышеуказанных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-37-90065.

### Список литературы

1. Рапопорт Л.Б. Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 69–89.
2. Пестерев А.В. Синтез линеаризующего управления в задаче стабилизации движения автомобилеподобного робота вдоль криволинейного пути // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 153–165.
3. Дивеев А.И., Константинов С.В. Исследование эволюционных алгоритмов для решения задачи оптимального управления // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 9, № 3. С. 76–85.

## Безусловная стабилизируемость гамильтоновых систем в моделях роста

*К.ф.-м.н. Усова А.А.<sup>1,2</sup>, д.ф.-м.н. Тарасьев А.М.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> ИММ УрО РАН, <sup>2</sup>УрФУ

### Unconditional stabilizability of the Hamiltonian systems in growth models

*PhD Anastasiia Usova, Dr. Alexander Tarasyev*

#### АННОТАЦИЯ

Доклад посвящен исследованию стабилизируемости гамильтоновых систем, возникающих при применении принципа максимума Понтрягина к задачам оптимального управления на бесконечном промежутке времени. Будет показано, что для стабилизации гамильтоновой системы в окрестности стационарной точки не требуется ничего, кроме существования самой стационарной точки. Данный факт получается в силу того, что линеаризованная гамильтонова система путем замены может быть приведена к линейной системе с гамильтоновой матрицей, которая обладает необходимыми для стабилизации свойствами.

#### ABSTRACT

The talk is devoted to the analysis of stabilizability of the Hamiltonian systems arising in applications of the Pontryagin maximum principle to the optimal control problems at the infinite time interval. The research reveals that for stabilizing the Hamiltonian systems at a steady state vicinity the only steady state's existence is required. This fact takes place due to the linearized Hamiltonian system can be reduced to a linear system with Hamiltonian matrix whose properties ensure the stabilizability of the original linear system.

**МЯГКАЯ ПОИМКА В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ  
ПРЕСЛЕДОВАНИЯ  
SOFT CAPTURE IN A NONLINEAR PURSUIT PROBLEM**

Щелчков К.А.<sup>1</sup>

Ижевск, Удмуртский Государственный Университет

Рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma(x_0)$  двух лиц, описываемая системой вида

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

где  $x \in \mathbb{R}^k$  — фазовая переменная,  $u, v \in \mathbb{R}^k$  — управляющие воздействия. Множество  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^l$ ,  $i = 1, \dots, m$ , Множество  $V \in \mathbb{R}^s$  — компакт. Функция  $f : \mathbb{R}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$  — для каждого  $u \in U$  липшицева по  $x$ , функция  $g : \mathbb{R}^k \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  — липшицева по совокупности переменных, то есть существуют положительные числа  $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m, L_2$  такие, что

$$\|f(x^1, u_i) - f(x^2, u_i)\| \leq \bar{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\|g(x^1, v^1) - g(x^2, v^2)\| \leq L_2(\|x^1 - x^2\| + \|v^1 - v^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad v^1, v^2 \in V.$$

Целью преследователя является приведение траектории системы и значения производной в любую наперед заданную окрестность нуля за конечное время. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию, для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат и скорости в точках разбиения временного интервала. Получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит мягкая  $\varepsilon$ -поймка. Кроме того, доказано, что, независимо от действий убегающего, время, необходимое преследователю для приведения состояния системы и скорости в сколь угодно близкую окрестность нуля, стремится к нулю с приближением начального положения к нулю. Основой для решения данной задачи является понятие положительного базиса [1]. Данное исследование является продолжением исследования [2].

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)$  образуют положительный базис и  $-g(0, V) \subset \text{Int}(\text{co}\{f(0, u_1), \dots, f(0, u_m)\})$ . Тогда существуют  $\delta > 0$ ,  $\theta > 0$  и  $T > 0$  такие, что для любых начальных положений  $x_0, \dot{x}_0$  таких, что  $\|x(0)\| + \theta\|\dot{x}(0)\| \leq \delta$ , в игре  $\Gamma(x_0, \dot{x}_0, T)$  происходит мягкая  $\varepsilon$ -поймка.

### Литература

- [1] Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
- [2] Щелчков К.А. Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 111–118. DOI: 10.20537/vm180110.

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ 18-51-41005\_Узб.

## **Analysis of stochastic sensitivity of Turing patterns in distributed reaction-diffusion systems**

A.P. Kolinichenko  
Ural Federal University  
Yekaterinburg, Russia

Mathematical models of various processes in nature are applied in many fields of modern science. Stochastic modelling and analysis of such models allows to predict their possible behavior. Systems with complex nonlinearity are especially interesting for studying due to the occurrence of various phenomena.

In our work the distributed Brusselator model with diffusion is studied. In the zone of Turing instability, the model generates a plethora of spatially-heterogeneous stable structures (patterns). Under the influence of random perturbation, such multistable behavior leads to pattern transition process. This, in turn, indicates that different patterns show different degrees of stability. Our work studies the stochastic sensitivity of Turing patterns in order to provide the means to measure stochastic stability.

# Анализ стохастической модели взаимодействия трех популяций

(Analysis of the stochastic model of the interaction of three populations)

**Е.П. Абрамова, Т.В. Перевалова**

Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина  
пр. Ленина, 51, г. Екатеринбург

Email address: ekaterina.abramova@urfu.ru, tatyana.ryazanova@urfu.ru

В работе рассматривается популяционная модель «хищник-две жертвы», учитывающая взаимодействие жертв, внутривидовую конкуренцию и конкуренцию между популяциями, предложенную и исследованную в работах [1], [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha_1 - x - \varepsilon_1 y - \beta_1 z) + \sigma \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(\alpha_2 - x - \varepsilon_2 y - \beta_2 z) + \sigma \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - \delta_1 x - \delta_2 y + \gamma z) + \sigma \dot{w}_3, \end{cases} \quad (1)$$

Для данной модели подробно описаны бифуркации равновесий и построены бифуркационные диаграммы. Главное целью данного исследования является анализ стохастического варианта данной модели, учитывающей влияние случайных внешних факторов. Используя функцию стохастической чувствительности и основанный на ней метод доверительных областей [3], описаны феномены вымирания популяций. Подробно изучены вероятностные механизмы вымирания трех типов

## Список литературы

- [1] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
- [2] Апонина Е.А., Апонин Ю.М., Базыкин А.Д. Анализ динамического поведения в модели «хищник-две жертвы» // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. Т. 5. С. 163.
- [3] Bashkirtseva, I., Ryashko, L., Ryazanova, T. (2017). Stochastic sensitivity technique in a persistence analysis of randomly forced population systems with multiple trophic levels. *Mathematical Biosciences*, 293, 38-45.



**СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ  
ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ  
STOCHASTIC DISCRETE-TIME LOTKA-VOLTERRA MODEL**

А. В. Беляев, Т. В. Первалова

В данной работе рассматривается стохастический вариант модели Лотки-Вольтерры с дискретным временем [1], задаваемая следующим образом:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - bx_n y_n + \varepsilon \xi_{n,1} \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n + \varepsilon \xi_{n,2}, \end{cases}$$

где  $x$  — плотность популяции жертв,  $y$  — плотность популяции хищников,  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $d > 0$  — параметры системы,  $\varepsilon$  — интенсивность шума, а  $\xi_n$  — двумерный не коррелированный случайный процесс с параметрами  $E\xi_n = 0$ ,  $E\xi_n \xi_n^T = I$ ,  $E\xi_n \xi_k^T = 0 (n \neq k)$ .

Целью данного исследования является анализ возможных режимов, в первую очередь, модели при  $\varepsilon = 0$  в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $d$  для фиксированных значений параметров  $b = 1$  и  $c = 0.2$ . Изучаются зоны существования устойчивых равновесий, циклов, замкнутых инвариантных кривых, а также хаотических аттракторов. Описываются бифуркации удвоения периода, Неймарка-Саккера и кризиса. На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма и показатели Ляпунова из параметрической зоны бифуркации рождения замкнутой инвариантной кривой ( $d = 3.3$ ). Показано, что в системе возможно существование только одного невырожденного аттрактора в зоне бифуркации Неймарка-Саккера, в то время как в зоне параметров, соответствующих бифуркации удвоения периода плотность популяции хищников сходится к нулевому состоянию. Изучено поведение бассейнов притяжения аттракторов.

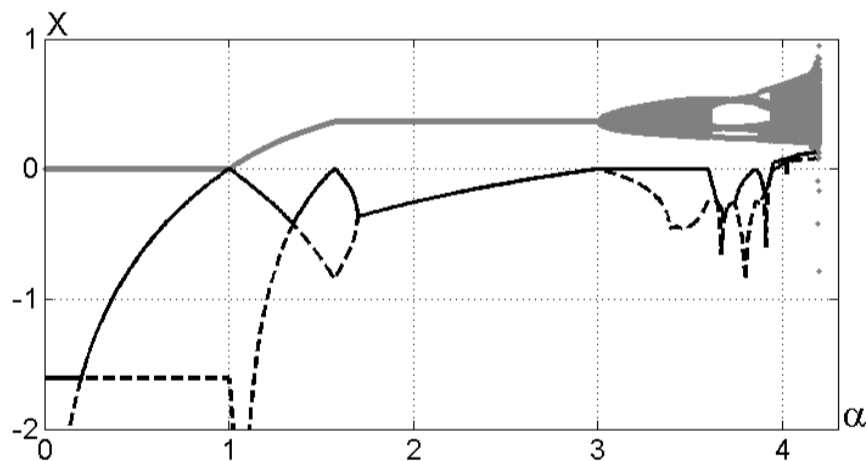


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма с показателями Ляпунова при  $d = 3.3$

Помимо детерминированной системы  $\varepsilon = 0$  подробно изучается стохастическая  $\varepsilon \neq 0$ , описывающая влияние внешнего случайного воздействия. Здесь, опираясь на технику функции стохастической чувствительности [2], приводится анализ разброса случайных состояний вокруг аттракторов детерминированной системы. Изучаются вероятностные механизмы вымирания популяции хищников под действием шума. Математически такое вымирание обусловлено переходом с нетривиального аттрактора (равновесия, цикла или замкнутой инвариантной кривой) на тривиальное равновесие. Используя технику доверительных эллипсов и полос [3], находятся критерии приближения численности популяции к опасным границам.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант №16-11-10098.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ming Zhao, Zuxing Xuan and Cuiping Li, *Dynamics of a discrete-time predator-prey system*, Advances in Difference Equations. **2016(1)** (2016), P.191.
- [2] Bashkirtseva I., Ryashko L., *Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay*, Physics Letters A. **378(48)** (2014), 3600–3606.
- [3] Bashkirtseva I., Ryashko L., *Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps*, Chaos, Solitons and Fractals. **126** (2019), 78–84.

Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия  
*Email address:* belyaev.alexander1337@yandex.ru, tatyana.ryazanova@urfu.ru

# Роль риск-нейтральных мер в дискретной и непрерывной моделях европейского опциона-call

Медведева М. В.

Европейским опционом-call называется вторичная ценная бумага (дериватив), которая дает владельцу (покупателю) право, но не обязательство, купить часть пакета акций по фиксированной цене в определенный момент времени в будущем.

Известна дискретная однопериодная модель для цены опциона-call. Модель описывает, из чего складывается цена опциона на каждом шаге: цена опциона зависит от начальной стоимости портфеля продавца опциона, процентной ставки в банке и доли пакета акций, купленной в начальный момент времени (см., напр., [1]). С учетом случайностей на каждом шаге биномиальной модели имеют место два уравнения для цены опциона-call и для доли пакета акций. Единственное решение этой системы может быть представлено двумя способами: как явное решение системы или с помощью введения риск-нейтральных мер, относительно которых дискретная цена опциона-call является мартингалом.

В непрерывном времени цена опциона-call удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных с некоторыми финальным и граничными условиями. Чтобы найти это решение, как и в дискретном случае, вводят риск-нейтральные, или мартингальные, вероятностные меры.

В докладе будет дано доказательство того, что существование риск-нейтральных мер в биномиальной модели эквивалентно мартингальности дисконтированной цены опциона-call. Будет показана аналогия между дискретными и непрерывными моделями для цены акций и цены опциона-call, где в качестве случайного процесса, по которому строится изменение цены акций, рассматривается броуновское движение. Планируется рассмотреть модели для цены акции и цены опциона-call, зависящие от разрывных случайных процессов.

## Список литературы

- [1] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* (2004)

# ВАРИАТИВНОСТЬ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ АКТИВНОСТИ

## VARIABILITY OF OSCILLATIONS IN A DISCRETE MODEL OF NEURAL ACTIVITY

Насырова В.М., Ряшко Л.Б.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

### Аннотация

Для изучения динамики нейронов часто используют феноменологические модели, которые построены на основе дискретных отображений. Среди дискретных моделей привлекает внимание модель Рулькова [1], которая описывает быстро-медленную динамику нейрона и демонстрирует в детерминированном виде три типа нейронной активности: покой, спайкинг и берстинг. При воздействии случайными возмущениями на нейрон может происходить смена нейронной активности, например, из режима покоя клетка может перейти в режим спайкинга или берстинга. Целью нашего исследования являлось изучение смены режима нейронной активности в зависимости от выбранных параметров и интенсивности случайных возмущений. При изменении режима нейронной активности происходит изменение характера осцилляций, например, от периодических к хаотическим. В нашей работе характер изменения осцилляций мы исследуем с помощью прямого численного моделирования и метода функции стохастической чувствительности [2]. Последний метод успешно применялся ранее для разных моделей, в том числе и для модели Рулькова [3, 4]. С помощью данных методов мы определили пороговые значения интенсивности шума, при которых происходит смена режима нейронной активности, а также описали динамику изменения полученных пороговых значений при изменении изначальных параметров системы.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10098).*

### Литература

1. N.F. Rulkov. Regularization of synchronized chaotic bursts. Physical review letters, 2001, vol. 86, pp. 183–186.
2. I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2010, vol. 17, pp. 501-515.
3. I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model. Chaos, Solitons and Fractals, 2018, vol. 110, pp. 76-81.

4. I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko. Analysis of noise effects in a map-based neural model with Canard-type quasiperiodic oscillations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2018, vol. 63, pp. 261-270.

**PLANCHEREL – PÓLYA INEQUALITY FOR ENTIRE FUNCTIONS  
OF EXPONENTIAL SPHERICAL TYPE IN  $L^2(\mathbb{R}^n)$   
НЕРАВЕНСТВО ПЛАНШЕРЕЛЯ – ПОЛИА ДЛЯ ЦЕЛЫХ  
ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТИПА  
В  $L^2(\mathbb{R}^n)$**

E. V. BERESTOVA

Let  $B_r^n = B_{(r,0)}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2\}$  be a ball in  $\mathbb{R}^n$  of radius  $r > 0$  centered at zero. Let  $L^p(\mathbb{R}^n)$  denote the usual Lebesgue space of measurable functions on  $\mathbb{R}^n$  such that the  $L^p$ -norm  $\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt$ ,  $1 \leq p < \infty$ , is finite. Let  $\mathfrak{M}_{\sigma,n}^p$ ,  $p \geq 1$ , be a set of entire functions  $f$  of  $n$  complex variables with exponential spherical type  $\sigma > 0$  such that their restrictions to  $\mathbb{R}^n$  belong to  $L^p(\mathbb{R}^n)$  [1]. The Fourier transform  $\mathcal{F}f$  of entire function exponential spherical type  $\sigma$  has a support in a ball  $B_\sigma^n$ . In 1937 Plancherel and Pólya [2] showed that

$$(1) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \leq c_p(\sigma, n) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$$

for  $f \in \mathfrak{M}_{\sigma,n}^p$ , where  $c_p(\sigma, n)$  is a finite constant. S. M. Nikol'skii [3], D. L. Donoho and B. F. Logan ( $n = 1$ ) [4], S. Norvidas [5] ( $n = 1$ ) and other researchers have some results in related inequalities [6], [7]. We study the Plancherel–Pólya inequality for  $p = 2$ . The main result is the following theorems.

**Theorem 1.** For  $n \in \mathbb{N}$  and for all  $0 < \sigma \leq 3\pi$  the inequality

$$(2) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^2 \leq (\lceil \sigma/\pi \rceil)^n \|f\|_2^2, \quad f \in \mathfrak{M}_{\sigma,n}^2$$

holds. The inequality (2) turns into an equality if and only if  $f = \mathcal{F}g$ , where  $t$  is the shift vector such that  $t = (0, \dots, 0)$ , if  $\lceil \sigma/\pi \rceil$  is odd, and  $t = (1/2, \dots, 1/2)$ , if  $\lceil \sigma/\pi \rceil$  is even,

$$(3) \quad g(x) = \sum_{m \in M} h(x - m - t), \quad h \in L^2(B_\nu^n), \quad \nu = \frac{1}{2}(1 - (\lceil \sigma/\pi \rceil - \sigma/\pi)).$$

**Theorem 2.** For  $n, p \in \mathbb{N}$ . For all  $\sigma$  such that  $0 < \sigma < \pi/p$  the equality

$$(4) \quad c_{2p}(\sigma, n) = 1, \quad f \in \mathfrak{M}_{\sigma,n}^{2p}$$

holds.

In addition, we discuss the inequality between  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(\lambda_k)|^2$  and  $\|f\|_2^2$ , where the sequence  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  is uniformly discrete.

The work is supported by the Competitiveness Enhancement Program of the Ural Federal University (Enactment of the Government of the Russian Federation № 211 of March 16, 2013, agreement № 02.A03.21.0006 of August 27, 2013) and by RFFI (project №18-01-00336).

**Acknowledgments.** The author thanks Professor G. Tamberg for the statement of the problem. The author is grateful to P. Yu. Glazyrina for useful discussions.

#### REFERENCES

- [1] E. Stein, G. Weiss *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1971.
- [2] M. Plancherel, G. Pólya, *Fontions entières et intégrales de Fourier multiples*, Commentarii Mathematici Helvetici, **10** (1937-1938), 110–163.
- [3] S. M. Nikol'skii, *Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **38** (1951), 244–278. (in Russian).
- [4] D. L. Donoho, B. F. Logan, *Signal recovery and the large sieve*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **52:2** (1992), 577–591. DOI: 10.1137/0152031.
- [5] S. Norvidas, *Concentration of  $L^p$ -bandlimited functions on discrete sets*, Lithuanian Mathematical Journal, **54:4** (2014), 471–481. DOI: 10.1007/s10986-014-9258-4.
- [6] E. V. Berestova, *Plancherel–Pólya inequality for entire functions of exponential type in  $L^2(\mathbb{R})$* , Analysis Math, **44:1** (2018), 43–50. DOI: 10.1007/s10476-018-0104-5.
- [7] E. V. Berestova, *Plancherel–Pólya inequality for entire functions of exponential type in  $L^2(\mathbb{R}^n)$* , Trudy Inst. Math. i Mekh. UrO RAN, **24:3** (2018), 27–33. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-27-33.

INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMETICS, URAL FEDERAL UNIVERSITY, YEKATERINBURG (RUSSIA)

*Email address:* e.v.berestova@urfu.ru

## НЕРАВЕНСТВО ТУРАНА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМЫ НА КОМПАКТНОМ МНОЖЕСТВЕ

Ю. С. Горячева

Для вещественных алгебраических многочленов  $p$  степени  $n$  в 1889 году А.А. Марков доказал неравенство  $\|p'\|_{C(I)} \leq n^2 \|p\|_{C(I)}$  для равномерной нормы на отрезке  $I = [-1, 1]$ . В дальнейшем этот результат обобщался на производные старших порядков, на отличные от  $I$  компактные множества и другие нормы.

Полвека спустя П. Туран заинтересовался обратным неравенством

$$\|p'\|_{C(K)} \geq c_n(K) \|p\|_{C(K)}$$

на компактном множестве  $K$  комплексной плоскости. Это неравенство не выполняется на множестве всех многочленов степени  $n$ . Поэтому Туран наложил дополнительное условие, что все  $n$  нулей полинома лежат в исходном множестве  $K$ . В 1939 году Туран [1] получил точную по порядку оценку  $c_n(I) \geq \frac{\sqrt{n}}{6}$  для отрезка  $I$  и нашел точную константу  $c_n(D) = \frac{n}{2}$  для единичного круга  $D$ .

Наиболее общий результат для равномерной нормы на компактном выпуклом множестве  $K$  с непустой внутренностью получил С. Ревес [2] в 2006 году. Он доказал оценки снизу и сверху  $0.0003 \frac{\omega}{d^2} n \leq c_n(K) \leq 600 \frac{\omega}{d^2} n$ , выраженные через геометрические характеристики — диаметр  $d$  и ширину  $w$  множества  $K$ . Оценка сверху выполняется для  $n > \frac{d^2}{128w^2} \ln \frac{d}{16w}$ , оценка снизу справедлива для всех натуральных  $n$ . Напомним, что  $d = \sup_{z', z'' \in K} |z' - z''|$  — диаметр и

$$w = \inf_{\gamma \in [-\pi, \pi]} \left( \sup_{z \in K} \Re(ze^{-i\gamma}) - \inf_{z \in K} \Re(ze^{-i\gamma}) \right) - \text{ширина множества } K.$$

Пусть  $\mathcal{P}_n(K)$  есть множество многочленов степени точно  $n$ , все нули которых лежат в  $K$ . Мы изучаем неравенство

$$\|p'\|_q \geq c_n^q(K, \mu) \|p\|_q, \quad p \in \mathcal{P}_n(K),$$

для нормы

$$\|p\|_q = \left( \int_K |p(z)|^q \mu(dz) \right)^{1/q}, \quad q > 0,$$

относительно конечной неотрицательной меры  $\mu$  на множестве  $K$ , такой, что все непрерывные на  $K$  функции  $\mu$ -измеримы. Нами получен следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $K$  — компактное подмножество в  $\mathbb{C}$ , содержащее точки  $a, b \in \mathbb{R}$  и имеющее диаметр  $d = |b - a|$  и ширину  $w$ . Предположим, что на  $K$  задана конечная неотрицательная мера  $\mu$  и существуют  $\theta \in (0, 1)$  и  $\delta \in [1/2, 1)$  такие, что

$$\mu \left( K \cap \left( \left[ -\frac{d\delta}{2} + \frac{b+a}{2}, \frac{b+a}{2} + \frac{d\delta}{2} \right] \times [-wi, wi] \right) \right) \geq \theta \mu(K).$$



Тогда для любого  $q > 0$  и  $n > n_0 = \left(1 + \frac{1}{q}\right) \frac{d^2}{2w^2} \ln \frac{d}{2w} + 2$  найдется полином  $p^* \in \mathcal{P}_n(K)$ , для которого выполняется неравенство

$$c_n^q(K, \mu) \leq \frac{\|(p^*)'\|_q}{\|p^*\|_q} \leq \frac{200}{1-\delta} \left(1 + \frac{4}{\theta} \cdot 3^q\right)^{1/q} \frac{w}{d^2} n.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Turán, *Über die Ableitung von Polynomen*, Comput. Math. 7 (1939), 89–95.
- [2] S. Gy. Révész, *Turán type reverse Markov inequalities for compact convex sets* J. Approximation Theory. 141 (2006), 162–173.

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ЕКАТЕРИНБУРГ (РОССИЯ)  
 Email address: yuly.goryacheva@yandex.ru

А. Е. Липин

В 1983 году Е.Г. Пыткеев ввел следующее определение [1].

Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство,  $\kappa$  — кардинал. Пространство  $(X, \tau)$  называется  $\kappa$ -разложимым в точке  $x \in X$ , если в  $X \setminus \{x\}$  существует дизъюнктное семейство множеств  $F$  мощности  $\kappa$  такое, что  $\forall A \in F : x \in \overline{A}$ .

Пространство  $(X, \tau)$  называется максимально разложимым в точке  $x$ , если оно  $\Delta(x, X)$ -разложимо в  $x$ , где  $\Delta(x, X) = \min\{|U| : x \in U \in \tau\}$  (кардинал  $\Delta(x, X)$  называется дисперсионным характером пространства  $X$  в точке  $x$ ). Пространство  $(X, \tau)$  называется разложимым в точке  $x$ , если оно 2-разложимо в  $x$ .

Определение разложимости пространства в точке тесно связано с понятием разложимости топологического пространства, которое было введено Хьюиттом в 1943 году [5].

Пространство  $(X, \tau)$  называется  $\kappa$ -разложимым, если в нем существует дизъюнктное семейство множеств  $F$  мощности  $\kappa$ , такое, что  $\forall A \in F : \overline{A} = X$ . Пространство называется разложимым, если оно 2-разложимо,  $\Delta(X)$ -разложимое пространство называется максимально разложимым, где кардинальное число  $\Delta(X) = \min\{|U| : U \in \tau, U \neq \emptyset\}$  — дисперсионный характер пространства  $(X, \tau)$ .

Нетрудно показать, что из  $\kappa$ -разложимости топологического пространства следует его  $\kappa$ -разложимость во всех точках. Обратное, однако, неверно: существует пример регулярного счетного неразложимого пространства, разложимого во всех своих точках [6].

Пыткеев выделил большой класс пространств, максимально разложимых в любой своей предельной точке. В частности, это все метрические, компактные и упорядоченные пространства. Известны и примеры пространств, неразложимых в какой-либо своей предельной точке [2], [3].

Недавно была доказана разложимость в каждой неизолированной точке тихоновских псевдокомпактных пространств [4]. Возникает естественный вопрос, являются ли тихоновские псевдокомпакты также  $\aleph_1$ - или  $\omega$ - или максимально разложимыми в каждой точке. Вопрос этот пока что остается открытым, однако мы представляем следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть существуют тихоновский псевдокомпакт  $(X, \tau)$  и неизолированная точка  $x \in X$  такие, что  $(X, \tau)$  не является  $\omega$ -разложимым в  $x$ . Тогда существует измеримый кардинал.

Напомним, что существование измеримого кардинала недоказуемо в ZFC. Более того, средствами ZFC нельзя доказать даже то, что существование измеримого кардинала не противоречит ZFC. Учитывая теорему выше, все то же самое теперь можно сказать и о тихоновском псевдокомпакте, не  $\omega$ -разложимом в некоторой неизолированной точке.

Еще одно топологическое свойство, связь которого с разложимостью и разложимостью в точке пока не выяснена полностью, это связность. Мы представляем следующее утверждение.

**Теорема.** Существует хаусдорфово связное пространство, неразложимое в точке. При этом дисперсионный характер такого пространства может быть сколь угодно большим.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Г. Пыткеев, *О максимально разложимых пространствах*, Труды Математического Института Имени В.А. Стеклова. **154** (1983), 209–213.
- [2] А. Г. Елькин, *О максимальных связных хаусдорфовых пространствах*, Матем.заметки. **26**:6 (1979), 939–948.
- [3] Е. К. van Douwen, *Applications of maximal topologies*, Topology Appl. **51**:2 (1993), 125-139.
- [4] А.Е. Lipin, *Resolvability of Pseudocompact Spaces at a Point*, Mathematical Analysis With Applications - In Honor of the 90th Birthday of Constantin Corduneanu, 251-256
- [5] E. Hewitt, *A problem in set-theoretic topology*, Duke Math. J. **10** (1943), 309–333.
- [6] A. Bella, V. I. Malykhin, *Tightness and resolvability*, Comment.Math.Univ.Carolin. **39**:1 (1998), 177–184.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Н. КРАСОВСКОГО УРО РАН, УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ЕКАТЕРИНБУРГ (РОССИЯ)  
*Email address: tony.lipin@yandex.ru*

А. Н. Марковский

## Дискретное равновесие плоского компакта

Рассматривается задача экстремального распределения точечных зарядов на плоском компакте; варьируются заряды и их интенсивности. Распределениям соответствуют комплексные произведения с неалгебраическими особенностями. Доказывается равномерная сходимость последовательности таких произведений. Изучается связь предельного распределения с некоторыми экстремальными задачами, в частности, устанавливается связь с решением проблемы выбора точек (множество гарантированной сходимости) в методе фундаментальных решений (базисных потенциалов).

## 1. Рассмотрим комплексные произведения

$$\pi_n^\alpha(z) := \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{a_j}, \quad (0.1)$$

где  $z_j$  – различные точки на  $\mathbb{C}$ , а  $a_j$  – действительные положительные числа, такие что сумма  $a_1 + \dots + a_n$  равна  $\alpha$ ; обозначим множество таких произведений  $\mathcal{P}^\alpha$ . В случае, если  $a_j$  – натуральные числа, то  $\pi_n^\alpha(z)$  – комплексный полином степени  $\alpha$  с  $n$  различными нулями. В случае ненатуральных  $a_j$  в (0.1) будем иметь ввиду главные значения многозначных функций.

2. Вариационная задача. Пусть задан произвольный борелевский компакт  $K$ . Обозначим  $\mathcal{P}_n^1(K)$  – множество всевозможных произведений (0.1) с не более чем  $n$  нулями на  $K$ , таких что  $\alpha = 1$ . Введем на классе  $\mathcal{P}_n^1(K)$  равномерную норму  $\|f(z)\|_K := \max_{z \in K} |f(z)|$  и рассмотрим задачу отыскания в  $\mathcal{P}_n^1(K)$  элемента, наименее уклоняющегося от нуля на  $K$ ; задача аналогична задаче Чебышёва [3] с тем отличием, что решение ищется в более «широком» классе.

Задача  $\mathbb{E}_n(K)$ . *Найти*

$$\varrho_n(K) = \inf \{ \|\sigma\|_K : \sigma \in \mathcal{P}_n^1(K) \},$$

и функции  $\pi_n \in \mathcal{P}_n^1(K)$ , на которых этот инфимум достигается.

Геометрически задача  $\mathbb{E}_n(K)$  означает следующее. Из множества попарно различных точек  $z_1, z_2, \dots, z_m$  ( $m \leq n$ ), принадлежащих компакту  $K$  и положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , суммарно равных единице, необходимо выбрать такие  $\zeta_{nj}$  и  $\alpha_{nj}$ , что произведение (0.1) при  $z_j = \zeta_{nj}$  и  $a_j = \alpha_{nj}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) будет иметь минимальную норму. Ясно, что решение задачи  $\mathbb{E}_n(K)$  существует.

3. Со всяким плоским компактом  $K$  связывают несколько важных констант [6, 5]: трансфинитный диаметр Фекете  $d(K)$ , постоянную Чебышёва  $\tau(K)$ , конформный радиус  $r(K)$ , емкость  $\text{cap}(K)$ . Все эти характеристики, определяются посредством решения совершенно разных задач, но равны между собой.

Свяжем с компактом ещё одну константу  $\varrho(K)$ , получаемую как предел экстремальных констант  $\varrho_n(K)$  задачи  $\mathbb{E}_n(K)$  и характеризующую в некотором смысле дискретное равновесие компакта.

ТЕОРЕМА 1. *Константа дискретного равновесия равна емкости компакта:*

$$\varrho(K) = \text{cap}(K).$$

4. Обозначим  $G_K$  – связную компоненту дополнения  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ , содержащую бесконечность, и рассмотрим *обобщенную* функцию Грина  $g_K(z) = g_K(z, \infty)$  для заданного компакта  $K$ . Пусть  $\pi_n(z)$  и  $\varrho_n = \varrho_n(K)$  – последовательность решений и констант задачи  $\mathbb{E}_n(K)$  при  $n = 1, 2, \dots$ ; рассмотрим последовательность функций Грина, соответствующую последовательности экстремальных лемнискат  $L_n = L(\pi_n, \varrho_n) = \{z \in \mathbb{C} : |\pi_n(z)| \leq \varrho_n\}$

$$g_n(z) = \ln \frac{|\pi_n(z)|}{\varrho_n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus L_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (0.2)$$

ТЕОРЕМА 2. *Если  $\text{cap}(K) > 0$ , то*

$$g_n(z) \rightrightarrows g_K(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in G_K.$$

5. Рассмотрим ограниченную *регулярную* область  $G$  с компактной границей  $\partial G$  и обозначим  $K = G \cup \partial G$  и  $\lambda_K$  – равновесную меру компакта  $K$ .

Рассмотрим *обратную* задачу выметания для равновесной меры. Задача состоит в том, чтобы по заданной мере  $\lambda_K$  с носителем  $S(\lambda_K)$  на внешней границе компакта  $\partial K$  определить новую меру  $\vartheta_K$  с носителем  $S(\vartheta_K)$  на  $K$  такую, что для потенциалов этих мер квазивисюду на  $S(\lambda_K)$  выполняется равенство

$$U_{\lambda_K}(z) = U_{\vartheta_K}(z), \quad z \in S(\lambda_K).$$

Решение этой задачи единственно, если дополнительно потребовать минимальность емкости носителя  $S(\vartheta_K)$ ; будем называть это решение *ассоциированной равновесной мерой* и обозначать  $\vartheta_K$  и  $K_\vartheta = S(\vartheta_K)$ .

Покажем, что предельное решение задачи дискретного равновесия  $\mathbb{E}_n(K)$ , при  $n = 1, 2, \dots$ , определяет ассоциированную равновесную меру  $\vartheta_K$ . Для этого со всяким решением  $\pi_n(z)$  задачи  $\mathbb{E}_n(K)$  свяжем дискретную вероятностную меру  $\nu_n$  следующим образом

$$\ln \frac{1}{|\pi_n(z)|} = \int_{S(\nu_n)} \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\nu_n(\zeta). \quad (0.3)$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть  $K$  – регулярный компакт и  $\text{cap}(K) > 0$ ; если  $K = S(\lambda_K)$ , то  $\nu_n$  слабо сходится к  $\lambda_K$ , иначе –  $\nu_n$  слабо сходится к  $\vartheta_K$ .*

6. Носитель  $K_\vartheta$  ассоциированной равновесной меры  $\vartheta$  связан с решением задачи Н. Г. Чеботарёва [9; §4, 5] о компакте наименьшей емкости, содержащем заданные точки, и с решением задачи М.А. Лаврентьева [10] об экстремальном разбиении компакта, а также  $K_\vartheta$  решает проблему выбора точек в методе фундаментальных решений (базисных потенциалов) для задачи Робена [11]. В заключение, рассматриваются многочлены с равновесно распределенными узлами  $\zeta_{n,j}$  – нулями  $\pi_n$  решений задачи  $\mathbb{E}_n(K)$ ; исследуются их свойства ортогональности. Приводятся некоторые численные результаты решений задачи  $\mathbb{E}_n(K)$  для некоторых конкретных компактов  $K$ .

## Список литературы

- [1] Марковский А. Н., “Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа”, *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, **4** (2011), 49–54.
- [2] Марковский А. Н., “Логарифмическая емкость эквипотенциали энергии системы точечных зарядов”, *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, **1** (2014), 64–69.
- [3] Дзядык В. К., *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
- [4] Гайер Д., *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области: Пер. с нем.*, Мир, М., 1986.
- [5] Ландкоф Н. С., *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.
- [6] Голузин Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.
- [7] Никишин Е. М., Сорокин В. Н., *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [8] Дубинин В. Н., *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [9] Кузьмина В. Г., “Методы геометрической теории функций”, *Алгебра и анализ*, **9:3** (1997), 41–103; № 5, 1–50.
- [10] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **176:11** (1987), 306–352.
- [11] Лежнев В. Г., Марковский А. Н., “Проекционные алгоритмы вычисления потенциала Робена”, *Выч. мет. и програм.*, **20:4** (2019), 378–385.

**А. Н. Марковский (A. N. Markovsky)**

Кубанский государственный университет

*E-mail:* [mark@kubsu.ru](mailto:mark@kubsu.ru), [mrkvsk@yandex.ru](mailto:mrkvsk@yandex.ru)

# НЕРАВЕНСТВО КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА НА ОСИ С ОДНОСТОРОННИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СТАРШУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Н. С. Паюченко

Изучается неравенство Колмогорова в пространствах  $L^2$ ,  $L$  и  $L^\infty$  на вещественной оси с односторонним ограничением на вторую производную, а именно, изучается точная константа  $K$  в неравенстве

$$(1) \quad \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq K \|f\|_{L(\mathbb{R})} \|f''_+\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

на классе функций  $f \in L(\mathbb{R})$ , имеющих локально абсолютно непрерывную производную из  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $f'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Здесь и ниже  $f''_+(x) = \max\{f''(x), 0\}$ . В. Н. Габушин в 1976 г. получил критерий существования точной константы в неравенствах колмогоровского типа в пространствах  $L^q$ ,  $L^p$ ,  $L^r$  на оси с односторонним ограничением на старшую производную и без ограничения на старшую производную [1]. Задача (1) условию Габушина удовлетворяет. Подробная история изучения родственных задач изложена в работе [2]. Данную задачу можно свести к задаче на отрезке  $[0, 1]$ :

$$\|g'\|_{L^2[0,1]}^2 \leq K \|g\|_{L[0,1]} \|g''\|_{L^\infty[0,1]},$$

рассматриваемую на классе выпуклых функций  $g$ , удовлетворяющих условиям  $g'(0) = 0$ ,  $g(0.5) = 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Габушин, Неравенства между производными в метриках  $L^p$  при  $0 < p < \infty$ , Изв. АН СССР. Сер. матем., 1976, том 40, выпуск 4, 869–892
- [2] В. В. Арестов, В. Н. Габушин, Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными, Изв. вузов. Матем., 1995, номер 11, 42–68

Институт Математики и механики им. Красовского УРО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)  
*Email address:* aueiyo@gmail.com

## Содержание

### **Алгебра и комбинаторика: теория групп (председатель д.ф.-м.н. Н.В. Маслова)**

- 1 Кондратьев А.С., Минигулов Н.А. О конечных 4-примарных неразрешимых группах без элементов порядка 6..... 4

### **Алгебра и комбинаторика: алгебраическая теория графов (председатель к.т.н. Е.В. Константинова)**

- 1 Kaushan K.A., Rukhlyada N.O. Classification of 4-regular integral graphs ..... 6
- 2 Makhnev A.A., Golubyatnicov M.P. Nonexistence of some Q-polynomial graphs ..... 7
- 3 Валюженич А.А. Минимальные носители собственных функций в графе Хэмминга..... 8
- 4 Кабанов В.В. Спектральная теория графов Деза ..... 9

### **Алгебра и комбинаторика: алгебра и ее приложения (председатель д.ф.-м.н. В.А. Баранский)**

- 1 Casas Torres D.F. Decomposition of aperiodic automata and their shortest reset word ..... 10
- 2 Pyenko K.A., Maslova N.V. Coincidence of Gruenberg-Kegel graphs of non-isomorphic finite groups whose Gruenberg-Kegel graphs are disconnected ..... 12
- 3 Shabana H. Complexity of synchronization in partial finite automata ..... 13
- 4 Башмаков С.И. Полные наборы унификаторов в предтабличных логиках РМ2 и РМ3..... 15
- 5 Волков А.М. Существование экстремально простых замкнутых кривых, разделяющих множества на плоскости ..... 16
- 6 Волков М.В., Китов Н.В. Тожества некоторых диаграммных моноидов..... 18
- 7 Галкин А.А., Матвеев С.В. Электрический инвариант узлов ..... 19
- 8 Зверева Т.Ю. Унификация в нетранзитивной временной логике знаний с универсальной модальностью ..... 20
- 9 Кузьмин О.В., Погодаева Е.Н. Полиномы Тушара и их приложения..... 21
- 10 Циовкина Л.Ю. Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в афинном случае..... 23

### **Компьютерные науки, анализ данных и искусственный интеллект (председатель М.А. Черноскутов, ведущий заседания Е.Ю. Куклин)**

- 1 Kagan M.V., Pushko S.V., Samylovskaya A.K., Sazonov V.V., Samyslovskiy I.A., Sapelkin A.S. Shadow thermal cycling and its effect on predicted time of EOL of SA ..... 26
- 2 Дунаевская К.В. Новый метод оценки ошибок координат по геофизическому профилю ... 28
- 3 Мангилева Д.В., Докучаев А.Д., Хамзин С.Ю., Лебедев С.Ю., Любимцева Т.А., Зубарев С.А., Соловьева О.Э. Устранение артефактов на изображениях компьютерной томографии сердца при помощи нейронной сети со слоями частичной свертки ..... 29
- 4 Марков П.В. Ремасштабирование моделей поровых сетей на основе методов кластеризации для оценки фильтрационных параметров на масштабе месторождений нефти и газа..... 31



## **Математическая биология**

**(председатель к.ф.-м.н. С.Ф. Правдин)**

- 1 Abu-Bakr A.F., Zubarev A.Yu. Mathematical modeling of magnetic hyperthermia in a system of aggregation particles ..... 32
- 2 Нестерова Т.М., Шмарко Д.В., Ушенин К.С. Сочетание факторов нормального старения кардиомиоцитов и патологических изменений при фибрилляции предсердий ..... 33
- 3 Шмарко Д.В., Нестерова Т.М., Ушенин К.С., Соловьева О.Э. Персонализация математических моделей кардиомиоцитов крысы на основе экспериментальных данных методом популяционного моделирования ..... 34

## **Математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных (председатель д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай)**

- 1 Беляев В.В. Раздельное восстановление компонент решения для линейных некорректных задач ..... 35
- 2 Борбунов А.Н., Лаврова М.А. Методы анализа влияния темперамента младенцев и особенностей детско-родительского взаимодействия на уровень социально-эмоционального развития и навыки саморегуляции этих детей в раннем возрасте (лонгитюдное исследование) ..... 36
- 3 Сороковиков П.С. Численное исследование свойств алгоритмов невыпуклой оптимизации различного генезиса ..... 37
- 4 Спиридонов А.А., Кумков С.С. Применение методов линейного программирования к нелинейной формализации задачи бесконфликтного слияния потоков воздушных судов .. 39
- 5 Храмова А.П., Черных И.Д. О полиномиально разрешимых подслучаях задачи open shop с маршрутизацией ..... 41
- 6 Чистяков П.А., Задворных И.В. Восстановление вертикального профиля метана в атмосфере Земли методом Левенберга-Марквардта и его модификациями с помощью программного обеспечения FIRE-ARMS ..... 42

## **Оптимальное управление и дифференциальные игры (председатель к.ф.-м.н. В.С. Пацко)**

- 1 Mustafayeva N.A. Bifurcation from zero and infinity in nonlinear eigenvalue problems for ordinary differential equation of fourth order ..... 43
- 2 Алероев М.Т., Алероева Х.Т. О положительно определенных ядрах интегральных операторов, сопутствующих краевым задачам для дробных дифференциальных уравнений ..... 45
- 3 Антипина Е.Д., Солoduша С.В. Об устойчивом алгоритме решения одного класса думерных интегральных уравнений Вольтерра I рода ..... 46
- 4 Банников А.С. Множество достижимости линейной системы дробного порядка ..... 47
- 5 Васёв П.А., Пацко В.С., Федотов А.А. Визуализация трехмерного множества достижимости для машины Дубинса ..... 48
- 6 Гомоюнов М.И. Задачи оптимального управления с фиксированным моментом окончания для линейных систем дробного порядка ..... 50
- 7 Ершов А.А., першаков М.В. К задаче о нахождении максимального выпуклого подмножества ..... 51
- 8 Зыков И.В. О внешних оценках множеств достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями ..... 53
- 9 Ким И.Г. О стабилизации билинейных систем с запаздыванием ..... 54
- 10 Костюкевич Д.А. Оптимальное управление линейными системами по данным наблюдений ..... 56

11 Кумков С.С., Мунц Н.В. Численное исследование задач управления и дифференциальных игр, включающих динамику «машина Дубинса».....	57
12 Лебедев П.Д., Ушаков В.Н., Успенский А.А. Методы оптимизации хаусдорфова отклонения компакта от набора подвижных выпуклых множеств.....	58
13 Новоселова Н.Г. Множество выживаемости в задаче химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону .....	61
14 Орлов С.М. Ровенская Е.А. Оптимальная пропорция использования экономически чистой и грязной технологий в одной двухсекторной модели экономического роста.....	64
15 Родин А.С. Точки бифуркации кусочно-гладкого решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана и их классификация .....	65
16 Романенко А.Д. Использование сеточных схем с переменными шагами по времени для решения задачи с дробной производной по пространству .....	68
17 Самошкин М.А., Кумков С.И. Управление мягкой посадкой космического аппарата «Казачок» (программа ЭКЗО-МАРС-2020) .....	70
18 Сазонов В.В., Самысловский И.А., Соловьев С.В., Будзинский С.С., Заваротный А.Ю. Применение метода Левенберга-Марквардта в задачах пассивной навигации межпланетных космических аппаратов .....	71
19 Самысловский И.А., Самысловская А.К. Об условиях стационарности в задаче о выведении наборов автономных объектов объектом-носителем.....	73
20 Сороковиков П.С. Численное решение двух задач оптимального управления роботами с фазовыми ограничениями .....	75
21 Усова А.А., Тарасьев А.М. Безусловная стабилизируемость гамильтоновых систем в моделях роста .....	77
22 Щелчков К.А. Мягкая поимка в одной нелинейной задаче преследования .....	78

## **Теория вероятностей и случайные процессы (председатель к.ф.-м.н. Ю.В. Авербух)**

1 Kolinichenko A.P. Analysis of stochastic sensitivity of Turing patterns in distributed reaction-diffusion systems .....	79
2 Абрамова Е.П., Перевалова Т.В. Анализ стохастической модели взаимодействия трех популяций.....	80
3 Беляев А.В., Перевалова Т.В. Стохастическая дискретная модель Лотки-Вольтерры .....	81
4 Медведева М.В. Роль риск-нейтральных мер в дискретной и непрерывной моделях европейского опциона-call.....	83
5 Насырова В.М., Ряшко Л.Б. Вариативность осцилляций в дискретной модели нейронной активности.....	84

## **Теория функций (председатель к.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)**

1 Berestova E.V. Plancherel-Polya inequality for entire function of exponential spherical type in $L^2(\mathbb{R}^n)$ .....	86
2 Горячева Ю.С. Неравенство Турана для интегральной нормы на компактном множестве ..	88
3 Липин А.Е. Разложимость в точке и топологические свойства.....	90
4 Марковский А.Н. Дискретное равновесие плоского компакта .....	92
5 Паюченко Н.С. Неравенство колмогоровского типа на оси с односторонним ограничением на старшую производную.....	95