

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

**Современные проблемы математики и ее  
приложений ,  
Международная (55-я всероссийская) молодежная  
школа-конференция**

29 января – 2 февраля и 16 февраля 2024 г.

Тезисы докладов

Екатеринбург 2024

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (55-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, 2024.

Настоящее издание включает тезисы Международной (54-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции, прошедшей с 29 января по 2 февраля и 16 февраля 2024 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим направлениям: алгебра и дискретная математика; математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных; теория функций; оптимальное управление и дифференциальные игры; стохастическая динамика; машинное обучение. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

*Ответственный редактор*  
к.ф.-м.н. Чистяков П.А.

*Ответственный за выпуск*  
к.ф.-м.н. Н.А. Минигулов

© ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН  
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», 2024

## Содержание

<b>Алгебра и дискретная математика (председатель д.ф.-м.н. Н.В. Маслова)</b>	<b>6</b>
Брылякова Е.В. Эквивалентные унификаторы на диаграммах . . . . .	7
Зуев В.В. Максимальные графические разбиения, доминирующие заданное графическое разбиение . . . . .	8
Ивченко В.В. О минимальных относительно простого спектра группах . . . . .	9
Ильенко К.А. О конечных группах с графами Грюнберга–Кегеля как у группы $G_2(3)$ . . .	10
Кабанов В.В. О сильно регулярных графах из конструкции Фон-Дер-Флаасса . . . . .	11
Кайдаш П.А. Исследование полинома супердоминирования книжных графов и коалиционных разбиений обобщенных графов дружбы и обобщенных книжных графов . . . .	12
Кондратьев А.С., Минигулов Н.А. О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу "балалайка" . . . . .	14
Кузьмин И.К. О спектрах и минимальных многочленах некоторых конечных полуполей .	16
Кучериненко Я.В. О рациональности координат вершин многогранника и элементов матриц группы его симметрий . . . . .	17
Курчатов А.И. Алгебраические методы в биоинформатике и геномике . . . . .	18
Лисицына М.А. Тестовые фрагменты бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций . . . . .	20
Осипов Н.Н., Медведева М.И. Об уравнении Эйлера и тройках Рамануджана . . . . .	22
Петров Е.П. О многообразии, порожденном $n$ -мерными 2-алгебрами . . . . .	24
Ревин Д.О. Об аналогах теоремы Бэра–Судзуки . . . . .	25
Сенашов В.С., Шлепкин А.А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп диэдра . . . . .	26
Тимофеевко А.В. Вопросы алгебраического и компьютерного моделирования, возникающие при классификации паркетогранников . . . . .	28
Фарахутдинов Р.А. О полуавтоматах над квазибесконечными графами . . . . .	29
Цай Цэньчжуй, Махнев А. А., Голубятников М. П. О графах Шилла с $b \leq 6$ и $c_2$ , не делящем $b_2$ . . . . .	31
Цай Цэньчжуй, Махнев А. А., Падучих Д. В. Перечисление $AT_4$ -графов с $q \leq 4$ . . . . .	32
Чень Минчжу, Махнев А. А., Белоусов И. Н. Перечисление массивов пересечений графов Шилла с $b = 6$ . . . . .	33
Чень Минчжу, Махнев А. А., Климин В. С. О дистанционно регулярных графах диаметра 3 и степени 44 . . . . .	34
Шалагинов Л.В. Графы разделяемого дизайна симплектического графа $\mathbf{Sp}(4, \mathbf{q})$ . . . . .	35
Шепелев В.Д. О конечных простых группах, удовлетворяющих сильной $\pi$ -теореме Силова	36
Skuratovskii R.V. Iterated wreath product of symmetric and alternating groups and its normal subgroups . . . . .	37
Skuratovskii R.V. One generalization of the special linear group $SL_2(F)$ and solutions of matrix equation . . . . .	40
Zhu Y. Road coloring problem for completely reachability . . . . .	42
Zimireva K. V. Presentation of cactus group . . . . .	44
<b>Математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных (председатель член–корреспондент РАН М.Ю. Хачай)</b>	<b>45</b>
Герасимов О.В., Саченков О.А., Халиков М.Х., Ларцев А.И. Построение численных моделей на основе данных компьютерной томографии . . . . .	46
Казаков А. Л., Лемперт А. А., Нгуен Д. М. О покрытии поверхностей вращения равными шарами . . . . .	48

Меражова Ш.Б. Обратная задача для одного смешанного интегро-дифференциального уравнения . . . . .	50
Chen Y. Approximation algorithms for capacity vehicle routing problems . . . . .	52
Firstkov A.L., Forghani M. Staking Based Approach with Reduced Amino Acid Alphabets and Word2Vec for Modelling Antigenic Variants . . . . .	53
<b>Теория функций (председатель д.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)</b>	<b>55</b>
Давлетов Д.Б., Ершов А.А. Асимптотика собственных значений краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе с малым отверстием . . . . .	56
Камалов Удугбек Полат улы. О рациональности производящей функции для числа корневых лесов в циркулянтных графах . . . . .	58
Костенко И.В. О существовании обобщенного уточненного порядка в смысле Валирона . . . . .	59
Леонтьева А.О. Неравенство Бернштейна для производной Рисса дробного порядка, меньшего единицы, целых функций экспоненциального типа и тригонометрических полиномов . . . . .	61
Лу С., Маратова Ш.Б. Дискретные аналитические функции параболического типа для дискретного уравнения теплопроводности и ряды Тейлора . . . . .	64
Наумова А.А. Рост дельта-субгармонических функций в неограниченном полукольце . . . . .	65
Пьянков А.Д. Неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве . . . . .	67
Рокина А.Э. Неравенство Маркова–Глазыриной для многочленов, не обращающихся в нуль в круге . . . . .	70
<b>Оптимальное управление и дифференциальные игры (председатель к.ф.-м.н. П.Г. Сурков)</b>	<b>71</b>
Алыбаев К.С., Нурматова М.Н. Задержка решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия . . . . .	72
Баринов А.М. Одна задача о выходе из лабиринта . . . . .	74
Волков А.М., Авербух Ю.В. Анализ устойчивости по Ляпунову для нелокального уравнения неразрывности . . . . .	76
Ершов А.А., Давлетов Д.Б., Ершова А.А. Об неэквивалентности двух определений альфамножеств . . . . .	78
Корнеева О.А., Мастерков Ю.В. К вопросу об управляемости линейной системы специального типа . . . . .	80
Красовский Н.А., Тарасьев А.М. Гарантирующие стратегии управления и репликаторная динамика в динамических биматричных играх со среднеинтегральными показателями выигрышей игроков . . . . .	81
Лебедев П.Д., Успенский А.А. Построение решений задач быстрогодействия в трёхмерном пространстве для одного класса целевых множеств на базе выделения рассеивающей поверхности . . . . .	82
Мусакулова Н.К. Расширение областей притяжений решений сингулярно возмущенных уравнений . . . . .	84
Осипов И.О. О свойствах множеств достижимости квазилинейных систем . . . . .	86
Родин А.С. Обобщенная формула Хопфа для функции цены в позиционной дифференциальной игре "мальчик и крокодил" . . . . .	88
Субботина Н.Н., Новоселова Н.Г., Крупенников Е.А. О структуре множества выживаемости для модели химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону . . . . .	90
Трубников Г.И. Численное построение и исследование структуры двумерного множества достижимости машины Дубинса при интегральном ограничении на управление . . . . .	92
Усова А.А. Устранение эффекта отражения волны при стабилизации взаимодействия удаленных QSR-диссипативных систем с задержкой по времени . . . . .	93

Чайков А.И., Плаксин А.Р., Сергеев В. Алгоритмы обучения с подкреплением в решении задач оптимального управления динамическими системами с производными дробного порядка . . . . .	96
Чупин И.А. Использование импульсных управлений для реализации движений манипуляторов . . . . .	98
Юровских П.А. О построении наихудших возмущений для наблюдателя в задачах гарантированного оценивания линейно-квадратичных систем . . . . .	100
<b>Стохастическая динамика (председатель д.ф.-м.н. Л.Б. Ряшко)</b>	<b>101</b>
Башкирцева И.А. Математическое моделирование и стохастический анализ нелинейных термохимических процессов . . . . .	102
Башкирцева И.А., Качусов С.М. Стохастические трансформации кальциевых осцилляций в зонах сосуществования аттракторов . . . . .	103
Беляев А.В. Трансформации регулярных и хаотических режимов в динамике стохастических метапопуляций . . . . .	104
Козлов М.И., Огнев И.В. Применение связи между стохастическими уравнениями и уравнениями для вероятностных характеристик их решений . . . . .	105
Колениченко А. П. Тьюринговские паттерны и стохастические переходы в термохимической кинетике . . . . .	107
Отман А.А., Башкирцева И.А. Стохастическая динамика в популяционной модели с конкуренцией за ресурсы . . . . .	108
Павлецов М.М., Ряшко Л.Б. Влияние Олли эффекта на динамику стохастической популяционной системы с миграциями . . . . .	109
Панкратов А.А. Стохастический анализ процессов самоорганизации в гликолизе . . . . .	110
Перевалова Т.В., Юнгайлгес Й. Анализ детерминированных и стохастических сценариев в модели финансовых рынков . . . . .	111
Прокопова Н.О., Ряшко Л.Б. Вариативность режимов в динамике популяций с иммиграцией	112
Слепухина Е.С. Анализ стохастических феноменов в четырёхмерной модели сердечного потенциала действия . . . . .	113
<b>Машинное обучение (председатель к.ф.-м.н. А.В. Коньгин)</b>	<b>114</b>
Акифьев К.Н. Применение алгоритмов компьютерного зрения для определения деформаций образцов, нагруженных в компьютерном томографе . . . . .	115
Беляков Н.В. Нейросетевая сегментация облачности и снежных покровов по мультиспектральным данным геостационарного гидрометеорологического спутника "Электро-Л № 2" . . . . .	116
Дрожащих Г.А. Оценка связности текста с помощью трансформерной модели BERT . . . . .	118
Дунаева А.В. Адаптация сверточных нейронных сетей к новым данным . . . . .	120
Каменев П.А. Применение больших языковых моделей для генерации доменных данных и их использование для оценки качества моделей в задачах Text-to-SQL . . . . .	121
Коновалова Д.О. Сравнительный анализ методов дистанционной фотоплетизмографии . . . . .	126
Мангилева Д.В. Неконтролируемая глубокая сеть с синусоидальными слоями (SineLayer) для получения полей смещения с 2D изображений . . . . .	127
Тугбаева А.С., Ицков А.Г. Реализация алгоритмов идентификации гидроакустических сигналов . . . . .	129

**Алгебра и дискретная математика**  
(председатель д.ф.-м.н. Н.В. Маслова)

## Эквивалентные унификаторы на диаграммах<sup>1</sup>

Брылякова Е.В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

lbrylyakovv@bk.ru

Теория унификации — одна из самых актуальных задач в области неклассических логик. Однако, не смотря на многочисленные исследования последних 3-х десятилетий, проведенные для многих классов неклассических логик, существующие методы доказательства унифицируемости и построения подстановок не представляют собой наглядных и эффективных процедур. Чаще всего, авторы ограничиваются установлением важных свойств унификации, в лучшем случае — примерами вырожденных унифицируемых или неунифицируемых формул.

Формулу  $\varphi(p_1, \dots, p_n)$  будем называть *унифицируемой* в логике  $\mathcal{L}$ , если для неё найдётся подстановка  $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i \forall p_i$  такая, что  $\sigma(\varphi) = \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{L}$ . Саму подстановку  $\sigma$  будем называть *унификатором* формулы  $\varphi$ .

Широко используется квазиупорядочение множества унификаторов формулы отношением «более общий» [1]. Унификатор  $\sigma$  формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  называется *более общим*, чем другой  $\sigma^1$  для формулы  $\varphi$  в  $\mathcal{L}$  ( $\sigma^1 \preceq \sigma$ ), если существует подстановка  $\sigma^2$  такая, что для любой переменной  $p_i \in \text{Var}(\varphi)$ :  $\sigma^1(p_i) \equiv_{\mathcal{L}} \sigma^2(\sigma(p_i))$ .

В 2019 году С.И.Башмаковым была предложена интерпретация упорядоченного таким образом множества унификаторов в виде диаграммы с особыми свойствами [2]. В продолжение этих исследований мы рассматриваем свойства таких структур, сегменты эквивалентности и построение диаграмм для конкретных унифицируемых формул в предтабличных расширениях интуиционистской логики.

В литературе известно следующее определение эквивалентности унификаторов, [3]: два унификатора  $\sigma$  и  $\sigma^1$  эквивалентны, если они образуют симметричную пару относительно отношения  $\preceq$ :  $\sigma \preceq \sigma^1 \& \sigma^1 \preceq \sigma$ . В соответствии с таким определением, эквивалентные унификаторы образуют классы эквивалентности внутри диаграмм и должны сохранять отношение *более общий* по отношению к одному и тому же набору *менее общих* и *более общих* унификаторов. Нами же найден класс эквивалентных, в соответствии с введенным выше определением, унификаторов формулы в предтабличной логике  $L2$  имеющих при этом различные наборы предшественников в диаграмме, что, как следствие, ведёт к необходимости пересмотра подхода к определению эквивалентных унификаторов.

## Список литературы

- [1] S. Ghilardi, Best solving modal equations. *Annals of Pure and Applied Logic*, **102**: 3 (2000), 183–198.
- [2] С. И. Башмаков, Структурные вопросы дерева унификаторов. *Тезисы докладов Международной конференции «Мальцевские чтения», ИМ СО РАН, Новосибирск, 2019*, 70.
- [3] E. Jerabek. Blending margins: The modal logic K has nullary unification type. *Journal of Logic and Computation*, **25**: 5 (2015), 1231–1240.

<sup>1</sup>Исследование поддержано Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

## Максимальные графические разбиения, доминирующие заданное графическое разбиение

Зуев В.В.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
valentin.zuev@urfu.ru

*Разбиением* называется последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  целых неотрицательных чисел такая, что  $\lambda$  содержит лишь конечное число ненулевых компонент и  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ . Через  $sum(\lambda)$  будем обозначать *вес* разбиения  $\lambda$ , который равен сумме всех компонент разбиения  $\lambda$ . Для изображения разбиений будем использовать диаграммы Ферре в декартовой форме их представления. Для разбиения  $\lambda$  будем рассматривать *сопряженное разбиение*  $\lambda^*$ , диаграмму Ферре которого можно получить из диаграммы Ферре разбиения  $\lambda$  с помощью зеркальной симметрии относительно главной диагонали.

На разбиениях будем рассматривать известное отношение доминирования, полагая  $\lambda \leq \mu$ , если  $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$  для любого натурального числа  $i$ . Через  $IPL$  обозначается множество всех разбиений, а через  $IPL(m, t)$ , где  $m \geq t$ , обозначим множество всех разбиений веса  $m$  и длины  $t$ . Множество  $IPL$  является решеткой относительно  $\leq [1]$ , а все множества  $IPL(m, t)$  являются его интервалами.

Разбиение  $\lambda$  называется *графическим*, если его можно представить в виде последовательности степеней некоторого обыкновенного графа, дополненной нулями. Разбиение  $\lambda$  веса  $2m$  называется *максимальным графическим разбиением*, если оно максимально относительно порядка  $\leq$  среди всех графических разбиений веса  $2m$ .

*Ранг*  $r = r(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  по определению равен  $\max\{i | \lambda_i \geq i\}$ . В качестве *головы*  $hd(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  возьмем разбиение, которое получается из разбиения  $\lambda$  уменьшением всех первых  $r$  компонент на одно и то же число  $r - 1$  и обнулением всех компонент с номерами  $r + 1, r + 2, \dots$ . В качестве *хвоста*  $tl(\lambda)$  возьмем разбиение, сопряженное с разбиением, полученным из разбиения  $\lambda$  удалением первых  $r$  компонент. В [2] доказано, что разбиение  $\lambda$  является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда  $hd(\lambda) = tl(\lambda)$ .

Цель доклада состоит в описании для заданного графического разбиения  $\lambda$  веса  $2m$  множества всех максимальных графических разбиений  $\mu$  веса  $2m$ , доминирующих  $\lambda$ . Пусть  $\lambda$  — фиксированное графическое разбиение веса  $2m$ , и  $k$  — произвольное натуральное число. Обозначим через  $hdMGP_k(\lambda)$  множество всех голов максимальных графических разбиений  $\mu$  веса  $2m$  и ранга  $k$  таких, что  $\lambda \leq \mu$ . Максимальные графические разбиения однозначно задаются своими головами, поэтому достаточно построить все множества  $hdMGP_k(\lambda)$ .

**Теорема.** Любое непустое множество вида  $hdMGP_k(\lambda)$  является интервалом решетки  $IPL(m - k(k - 1)/2, k)$ .

Опираясь на эту теорему в докладе будет представлен алгоритм построения всех максимальных графических разбиений веса  $2m$ , доминирующих данное графическое разбиение  $\lambda$  веса  $2m$ .

## Список литературы

- [1] T. Brylawski. The lattice of integer partitions. *Discrete Math.*, **6**: 3 (1973), 201–219.
- [2] V. A. Baransky, T. A. Senchonok. On maximal graphical partitions. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, **14** (2017), 112–124.



## О минимальных относительно простого спектра группах<sup>1</sup>

Ивченко В.В.

*Институт Математики и Механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
*Уральский Математический центр, Екатеринбург, Россия*  
 ivova644@gmail.com

Пусть  $G$  — конечная группа. Обозначим через  $\pi(G)$  простой спектр группы  $G$ , т.е. множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Группа  $G$  называется минимальной относительно простого спектра, если для любой собственной подгруппы  $H$  из  $G$  выполняется неравенство  $\pi(H) \neq \pi(G)$ . Конечная группа  $G$  относится к классу  $\mathcal{D}$  минимальных относительно простого спектра групп, если для любой  $H < G$ ,  $\pi(H) \neq \pi(G)$ .

В [1] авторы ставят следующую проблему:

**Проблема 1** Для каждой неабелевой простой группы  $A$  определить, является ли  $A$  изоморфной композиционному фактору некоторой группы из класса  $\mathcal{D}$ ?

Очевидно, что проблема 1 решается положительно для неабелевых простых групп из класса  $\mathcal{D}$ . Однако, для неабелевых простых групп, не принадлежащих классу  $\mathcal{D}$ , ответ оказывается сложнее.

В [1] авторы решают проблему 1 для большинства простых неабелевых групп не принадлежащих классу  $\mathcal{D}$ . По результатам работы [1], проблема 1 открыта для следующих групп:  $PSU_4(3)$ ,  $PSU_3(5)$ ,  $PSU_6(2)$ ,  $PSp_4(2^e)$ ,  $P\Omega_{4k}^+(q)$ . Для групп  $PSU_3(5)$ ,  $PSU_6(2)$  докладчиком и его научным руководителем Н.В. Масловой получено положительное решение проблемы 1, а также уточняется нормальное строение групп с композиционным фактором из  $\{PSU_3(5), PSU_6(2)\}$ .

Для группы  $PSU_4(3)$  мы доказываем следующее утверждение

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — минимальная относительно простого спектра группа. Предположим,  $G$  обладает главным фактором  $L$ , изоморфным прямому произведению конечного числа групп, изоморфных  $PSU_4(3)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) факторгруппа  $G/L$  неразрешима;
- 2)  $|G/L|$  не делится на 5 и 7;
- 3) неабелевы композиционные факторы группы  $G/L$  содержатся во множестве  $\{PSL_2(q), PSL_3(q)\}$ .

## Список литературы

- [1] Н. В. Маслова, Д. О. Ревин. О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра. *Тр. ИММ УрО РАН*, **19**: 4, 2013, 155–166
- [2] А. В. Заварницин. О распознавании конечных групп по графу простых чисел. *Алгебра и логика*, **45**:4 (2006), 390–408; *Algebra and Logic*, **45**:4 (2006), 220–231

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект 075-02-2023-935 развития регионального научно-образовательного математического центра «Уральский математический центр».

## О конечных группах с графами Грюнберга–Кегеля как у группы $G_2(3)$

Ильенко К.А.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
christina.ilyenko@yandex.ru

Пусть  $G$  — конечная группа. *Спектром*  $\omega(G)$  называется множество всех порядков элементов группы  $G$ . Под *простым спектром*  $\pi(G)$  понимается множество всех простых чисел из  $\omega(G)$ . Неориентированный граф без петель и кратных рёбер, обозначим его через  $\Gamma(G)$ , множество вершин которого совпадает с  $\pi(G)$ , и в котором две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда  $pq \in \omega(G)$ , называется *графом Грюнберга–Кегеля* или *графом простых чисел* группы  $G$ . *Количество компонент связности* графа  $\Gamma(G)$  обозначается через  $s(G)$ , а *множество компонент связности* графа  $\Gamma(G)$  — через  $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$ , при этом для группы  $G$  чётного порядка предполагается, что  $2 \in \pi_1(G)$ .

В 2011 году К. Жан, В. Ши и Р. Шен показали [1], что если  $G$  — конечная группа такая, что  $\Gamma(G) = \Gamma(G_2(3))$ , то  $G$  имеет единственный неабелев композиционный фактор  $S$  и  $S \cong G_2(3)$ . В 2023 году Н. В. Маслова, В. В. Панышин и А. М. Старолетов заметили [2], что  $\Gamma(G_2(3)) = \Gamma(PSL_2(13))$ , и показали, что существует бесконечно много попарно неизоморфных конечных групп  $H$  таких, что  $\Gamma(H) = \Gamma(G_2(3))$ . Это противоречит предыдущему результату. Цель доклада — разрешить это противоречие с помощью следующей теоремы.

**Теорема.** *Если  $G$  — конечная группа,  $|\pi(G)| = 4$ ,  $s(G) = 3$ ,  $5 \notin \pi(G)$  и  $\pi_1(G) = \{2, 3\}$ , то верно одно из следующих утверждений:*

(i)  $G \cong G_2(3)$ ;

(ii)  $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$ ,  $G/F(G) \cong PSL_2(p)$ , где  $17 \neq p \geq 11$  и  $p$  — простое,  $p^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$ , где  $s > 3$  и  $s$  — простое,  $a$  и  $b$  — целые положительные, и либо  $c = 1$ , либо  $p \in \{97, 577\}$  и  $c = 2$ .

При этом, если  $\Gamma(G) = \Gamma(G_2(3))$ , то верно одно из следующих утверждений:

(1)  $G \cong G_2(3)$ ;

(2)  $G \cong PSL_2(13)$ ;

(3)  $O_2(G) \neq 1$ ,  $G/O_2(G) \cong PSL_2(13)$  и каждый 2-главный фактор  $G$  как  $G/O_2(G)$ -модуль изоморфен одному из двух неприводимых 6-мерных  $GF(4)PSL_2(13)$ -модулей.

Каждое из утверждений (1) – (3) теоремы реализуется. В частности, группы  $G_2(3)$  и  $PSL_2(13)$  нераспознаваемы по графу Грюнберга–Кегеля.

В 2011 году Кондратьев А. С. и Храпцов И. В. описали [3] главные факторы коммутантов конечных групп, граф Грюнберга–Кегеля которых имеет ровно 4 вершины и несвязен. Этот результат дополняет их исследование.

## Список литературы

- [1] Q. Zhang, W. Shi, R. Shen. Quasirecognition by prime graph of the simple groups  $G_2(q)$  and  ${}^2B_2(q)$ . *J. Algebra Appl.*, **10**: 2 (2011), 309–317.
- [2] N. V. Maslova, V. V. Panshin, A. M. Staroletov. On characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple exceptional groups of Lie type. *European J. Math.*, **9** (2023), Article number: 78, doi: <https://doi.org/10.1007/s40879-023-00672-7>.
- [3] А. С. Кондратьев, И. В. Храпцов. О конечных четырехпримарных группах. *Тр. ИММ УрО РАН*, **17**: 4 (2011), 142–159; *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **279**, suppl. 1 (2012), 43–61.

## О сильно регулярных графах из конструкции Фон-Дер-Флаасса

Кабанов В.В.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН  
Екатеринбург, Россия  
vvk@imm.uran.ru*

*Сильно регулярным графом* с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$  называется  $k$ -регулярный граф на  $v$  вершинах, в котором любые смежные вершины имеют  $\lambda$  общих соседей, а любые несмежные вершины имеют  $\mu$  общих соседей [3].

*Регулярно разделяемым графом* с параметрами  $(v, k, \lambda_1, \lambda_2; m, n)$  называется  $k$ -регулярный граф на  $v$  вершинах, в котором множество вершин можно разбить на  $m$  классов размера  $n$ , так, что любые две разные вершины одного и того же класса имеют  $\lambda_1$  общих соседей, а любые две вершины из разных классов имеют  $\lambda_2$  общих соседей [4].

В докладе будут показаны свойства сильно регулярных графов из конструкция Фон-Дер-Флаасса [5], которые позволяют получать новые регулярно разделяемые графы. Также будет показано как находить сильно регулярные графы из конструкция Фон-Дер-Флаасса и регулярно разделяемые графы в системе GAP [1] с использованием пакета GRAPE [2].

## Список литературы

- [1] The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2; 2022 (<https://www.gap-system.org>).
- [2] L.H. Soicher, The GRAPE package for GAP, Version 4.9.0, 2022, (<https://gap-packages.github.io/grape>).
- [3] A. E. Brouwer and H. Van Maldeghem. Strongly regular graphs. In *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press. 2022.
- [4] W.H. Haemers, H. Kharaghani, M. Meulenberg. Divisible design graphs. *J. Combinatorial Theory, Series A.*, **118** (2011) 978–992.
- [5] D.G. Fon-Der-Flaass. New prolific constructions of strongly regular graphs. *Adv. Geom.*, **2** (2002), 301–306.

## Исследование полинома супердоминирования книжных графов и коалиционных разбиений обобщенных графов дружбы и обобщенных книжных графов<sup>1</sup>

Кайдаш П.А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

p.kaidash@g.nsu.ru

В этой работе исследуются коалиционные разбиения обобщенных книжных графов и обобщенных графов дружбы. Впервые коалиционное разбиение  $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  было определено в работе [1] 2020 года. С этого момента тема набирает все большую популярность [2–4].

Далее приводятся несколько основных определений и обозначений. Множество  $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  называется коалиционным разбиением графа  $G$ , если каждое  $V_i$  из  $\pi$  или является синглетоном или не является доминирующим множеством, но образует коалицию с другим множеством  $V_j$  из  $\pi$ . Коалиционное число  $C(G)$  равно максимальному порядку  $k$  коалиционного разбиения графа  $G$ .

Следующие результаты показывают число коалиционного разбиения обобщенного книжного графа  $B_{q,p}$  и обобщенного графа дружбы  $F_{q,p}$ .

**Теорема 1.** Число коалиций для обобщенного книжного графа вычисляется следующим образом:

$$C(B_{q,p}) = \begin{cases} 3, & q = 3, \\ C(C_q), & q > 3, \end{cases}$$

где  $C(C_q)$  является числом коалиций цикла на  $q$  вершинах.

**Теорема 2.** Число коалиций для обобщенного графа дружбы вычисляется следующим образом:

$$C(F_{q,p}) = \begin{cases} 3, & q = 3, p = 1, \\ 5, & q = 3, p > 1, \\ C(C_q), & q > 3, \end{cases}$$

где  $C(C_q)$  является числом коалиций цикла на  $q$  вершинах.

Для доказательства этих фактов используются структуры графов  $B_{q,p}$  и  $F_{q,p}$  и результаты, полученные в работе [1].

В работе также исследуется полином супердоминирования для книжного графа  $B_p$ . Определение супердоминирующего множества впервые было введено в работе [5] 2015 года. Множество  $D_{sp} \subseteq V$  называется супердоминирующим множеством, если для любой вершины  $v$  из дополнения этого множества  $\bar{D}_{sp} = V \setminus D_{sp}$  найдется вершина  $u$  из этого множества  $D_{sp}$ , такая что:  $N(u) \cap \bar{D}_{sp} = \{v\}$ , где множество всех вершин смежных с вершиной  $u$  обозначается  $N(u)$ . Размерность минимального супердоминирующего множества обозначается  $\gamma_{sp}$ .

Следующий результат дает описание полинома супердоминирования для книжного графа  $B_p$ .

**Теорема 3.** Для книжного графа полином супердоминирования имеет следующий вид:

$$D_{sp}(B_p, x) = (p+1)x^{n-2} + \sum_{i=0}^{p+1} ((2^i C_p^i + 2C_p^{i-1})x^{n-i}),$$

где  $n = 2p + 2$  и  $C_p^{-1} = 0$ .

Доказательство этого факта основано на структуре книжного графа и супердоминирующих множествах цикла на четырех вершинах.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00459.

## Список литературы

- [1] T. W. Haynes, J. T. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, R. Mohan. Introduction to coalitions in graphs. *International Journal of Graphs and Combinatorics*, **17**: 2 (2020), 653–659.
- [2] D. Bakhshesh, M. A. Henning, D. Pradhan. On the Coalition Number of Trees. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **46**: 3 (2023), Article 95.
- [3] S. Alikhani, D. Bakhshesh, H. R. Golmohammadi, E. V. Konstantinova. Connected coalitions in graphs. *Discussiones Mathematicae - Graph Theory*, in press (2023).
- [4] S. Alikhani, H. R. Golmohammadi, E. V. Konstantinova. Coalition of cubic graphs of order at most 10. *Communications an Combinatorics and Optimization*, in press (2023). <https://doi.org/10.22049/cco.2023.28328.1507>.
- [5] M. Lemńska, V. Swaminathan, Y. B. Venkatakishnan, R. Zuazua. Super Dominating Sets in Graphs *Proceedings of the National academy of sciences, India, Section A: physical sciences*, **85** (2015), 353–357.

## О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу "балалайка"

Кондратьев А.С.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*  
a.s.kondratiev@imm.uran.ru

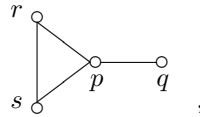
Минигулов Н.А.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
n.a.minigulov@imm.uran.ru

Графом Грюнберга–Кегеля (или графом простых чисел)  $\Gamma(G)$  конечной группы  $G$  называют граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы  $G$  и две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда в группе  $G$  существует элемент порядка  $pq$ . Графом "балалайка" (raw) называют граф, который имеет ровно 4 вершины со степенями 1, 2, 2 и 3.

А.С. Кондратьев описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп  $Aut(J_2)$  (см. [1]) и  $A_{10}$  (см. [2]). Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу "балалайка".

Нами была поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу "балалайка". В дальнейшем будем считать, что  $G$  — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу "балалайка" т. е., граф  $\Gamma(G)$  имеет следующий вид:



где  $r, s, p$  и  $q$  — некоторые попарно различные простые числа.

В [3] мы доказали, что если группа  $G$  неразрешима, то фактор-группа  $\bar{G} = G/S(G)$  (где  $S(G)$  — разрешимый радикал группы  $G$ ) почти проста, и классифицировали все конечные почти простые группы графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы подграфу графа "балалайка". В [4] мы описали конечные разрешимые группы  $G$ . Также в [5,6] мы классифицировали конечные неразрешимые группы  $G$  в следующих трех случаях:

- (1) группа  $G$  не содержит элементов порядка 6;
- (2) группа  $G$  содержит элемент порядка 6 и вершина  $q$  графа  $\Gamma(G)$  делит  $|S(G)|$ ;
- (3) вершина  $q$  графа  $\Gamma(G)$  меньше 5.

В данной работе мы продолжаем изучение этой проблемы. Мы доказываем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $G$  — неразрешимая группа,  $\{r, s\} = \{2, 3\}$ ,  $p > 3$ ,  $q > 3$  и  $q$  не делит  $|S(G)|$ . Тогда граф Грюнберга–Кегеля фактор-группы  $\bar{G} := G/S(G)$  несвязен.

## Список литературы

- [1] A. S. Kondrat'ev. Finite groups with prime graph as in the group  $Aut(J_2)$ . *Proc. Steklov Inst. Math.* **283**: 1 (2013), 78–85.
- [2] A. S. Kondrat'ev. Finite groups that have the same prime graph as the group  $A_{10}$ . *Proc. Steklov Inst. Math.* **285**: 1 (2014), 99–107.

- [3] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group  $A_{10}$ . *Siberian Electr. Math. Rep.* **15** (2018), 1378–1382.
- [4] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov. Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. *Тр. ИММ УрО РАН.* **28**: 2 (2022), 269–273.
- [5] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. *Commun. Math. Stat.* **10**: 4 (2022), 653–667.
- [6] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. *Тезисы докладов международной (54-й всероссийской) молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений"*. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2023, 39.

**О спектрах и минимальных многочленах некоторых конечных полуполей<sup>1</sup>**

Кузьмин И. К.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*

ilyabarinovy@gmail.com

Отказ в определении поля от коммутативности приводит к понятию тела; отказываясь и от ассоциативности, приходят к понятию полуполя.

Алгебраическая система  $(Q, +, \cdot)$  называется *полуполем*, если

- 1)  $(Q, +)$  – абелева группа;
- 2)  $Q^* = (Q \setminus \{0\}, \cdot)$  – лупа;
- 3)  $c(a + b) = ca + cb$  и  $(a + b)c = ac + bc$  ( $a, b, c \in Q$ ).

Конечные полуполя и координатизируемые ими конечные полуполевые проективные плоскости изучаются взаимосвязанно с начала XX века (Л. Диксон, Д. Кнут и др.). В настоящей работе решаются структурные вопросы В. М. Левчука о спектрах для некоторых конечных полуполей.

Пусть  $Q$  – полуполе порядка  $p^n$ ,  $p$  – простое число,  $a \in Q^*$ . *Правоупорядоченная  $n$ -я степень* элемента  $a$  определяется индуктивно:

$$a^{(1)} = a, \quad a^{(i+1)} = a \cdot a^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Наименьшее число  $n \in \mathbb{N}$  с условием  $a^{(n)} = 1$  называется *правым порядком*  $|a|_r$  элемента  $a$ . Множество всех правых порядков называется *правым спектром* лупы. Если правоупорядоченные степени фиксированного элемента  $a \in Q^*$  исчерпывают мультипликативную лупу

$$Q^* = \{e, a, a^2, a^3, \dots\},$$

то элемент  $a$  называют *правопримитивным*. *Правоупорядоченным минимальным многочленом* элемента  $a$  называется такой нормированный многочлен

$$\mu(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m \in \mathbb{Z}_p[x]$$

минимальной степени, что

$$\mu(a) = a^m + c_1 a^{m-1} + \dots + c_{m-1} a + c_m = 0.$$

**Теорема 1.** Пусть  $Q$  – полуполе порядка  $p^4$ ,  $a \in Q^*$ . Если правоупорядоченный минимальный многочлен элемента  $a$  неприводим над  $\mathbb{Z}_p$ , то правый порядок элемента  $a$  делит  $p^4 - 1$ .

Отметим, что утверждение  $|Q^*| : |a|_r$  в общем случае неверно, в отличие от конечных групп. Так, например, в исключительном непримитивном полуполе Кнута-Руа порядка 32 каждый элемент, кроме 0 и 1, имеет правый порядок 21.

Результаты теоремы 1 иллюстрируются примером коммутативных полуполей Коэна-Гэнли порядка 81.

<sup>1</sup>Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).



## О рациональности координат вершин многогранника и элементов матриц группы его симметрий

Кучериненко Я.В.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

yag\_kuch@mail.ru

Если координаты вершин многогранника и матрицы группы его симметрий заданы иррациональными числами, то избавиться от иррациональности можно путём повышения размерности. Планируется демонстрация названной технологии в системе Sage Math на примерах таких многогранников, как икосаэдр, курносый куб, курносый додекаэдр.

## Алгебраические методы в биоинформатике и геномике

Курчатов А.И.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
"Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова Абакан, Россия  
kurchatov02@mail.ru

Биоинформатика и геномика представляют собой быстро развивающиеся области науки, которые сталкиваются с огромными объемами данных, связанными с биологическими системами. Для анализа и интерпретации этих данных необходимы эффективные математические методы. В последние десятилетия алгебраические методы стали широко применяться в биоинформатике и геномике для решения различных задач, таких как анализ последовательностей ДНК, решение проблем классификации и выявление генных взаимодействий.

### Алгебраические методы в анализе геномных данных.

Одним из ключевых применений алгебраических методов в биоинформатике является анализ геномных последовательностей. Алгебраические структуры, такие как графы, теория категорий и алгебраическая геометрия, могут быть использованы для моделирования и анализа сложных геномных данных. Например [1], современные сборщики генома работают с графовым представлением задачи – это и удобно в представлении, и практично для написания алгоритмов. Существует две основные структуры для графового представления – граф перекрытий (overlap graph) и граф де Брёйна (de Bruijn graph).

Графом перекрытий называется взвешенный ориентированный граф, каждой вершине которого сопоставлена строка  $s_i$  (исходные чтения), а ребро между двумя вершинами проводится, если соответствующие строки перекрываются (строка  $a$  перекрывается со строкой  $b$ , если непустой суффикс  $a$  совпадает с префиксом  $b$ ). Вес ребра в таком случае – длина перекрытия. Пример графа перекрытий показан на рис. 1 (а).

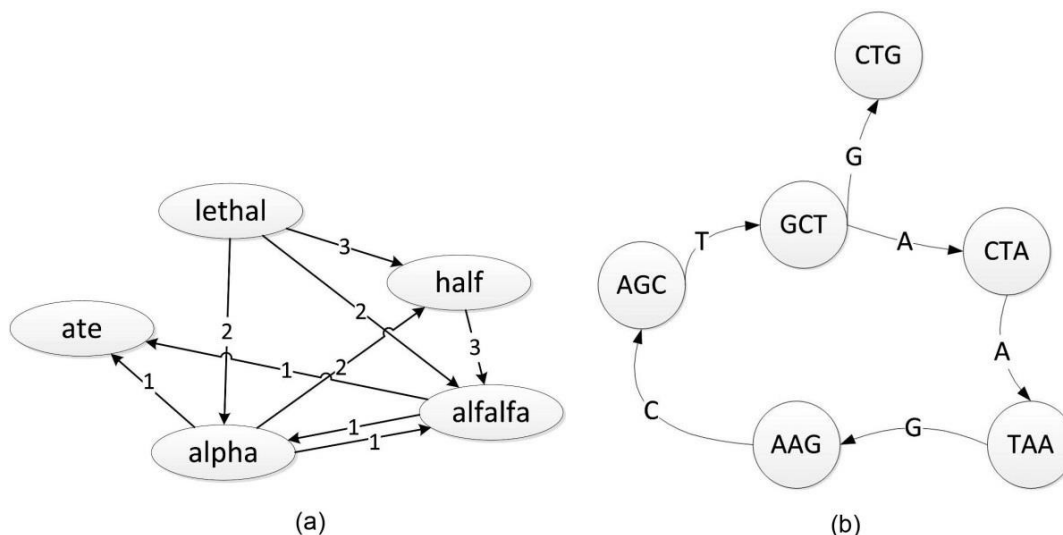


Рис. 1. Примеры графового представления задачи для (а) графа перекрытий, (б) графа де Брёйна

Графом де Брёйна степени  $k$  над алфавитом  $\Sigma$  называется ориентированный граф, в котором вершинами являются строки фиксированной длины  $k$  ( $k$ -меры) из  $\Sigma^k$ , а ребрами являются строки  $e$  длины  $k+1$  из  $\Sigma^{k+1}$ , причем ребро  $e$  соединяет вершины  $e[1..k]$  и

$e[2 \dots k + 1]$ . Иными словами, ребро между двумя вершинами проводится, если из первого  $k$ -мера можно получить второй путем добавления одного символа в конец первого  $k$ -мера и убирания одного символа из начала. Пример графа де Брёйна для  $k = 3$  показан на рис. 1 (b).

Несмотря на разницу в представлениях данных в графах перекрытий и де Брёйна, все основные шаги по сборке могут с небольшими изменениями работать на каждом из них. Разница состоит в том, насколько удобно и компактно хранятся исходные данные в этих структурах. Например, граф де Брёйна рекомендуется использовать при большом числе исходных чтений и их небольшой длине – это обеспечивает уменьшение используемой памяти. Граф перекрытий рекомендуется использовать при "длинных" чтениях – это позволяет более полно использовать всю имеющуюся информацию [1].

### Алгебраические методы в изучении генных взаимодействий.

Использование алгебраических методов также позволяет исследовать сложные генные взаимодействия. Например, впервые модель СГК была представлена физиком Джорджем Гамовым в 1954 году. В литературе эта модель известна как "алмазный код Гамова". Идея в том, чтобы представить кодон в форме ромба (алмаза) с нуклеотидами по четырем углам, расположенными в следующем порядке: трем вершинам присваивается случайный нуклеотид, а четвертой – нуклеотид, комплементарный к тому, что находится посередине (Рис. 2).

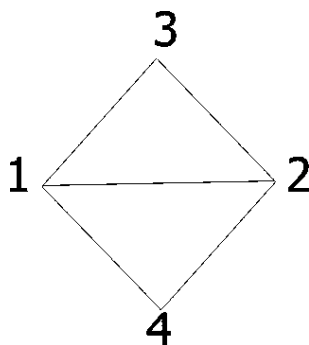


Рис. 2. Схематичное представление алмазного кода

Например, нуклеотиды 2, 3 и 4 определены случайным образом, а нуклеотид 1 комплементарен к 2. Несмотря на некоторые погрешности, алмазный код Гамова послужил отправной точкой для будущих исследований. Крик использовал эту модель в своих последующих работах. В последующих исследованиях Гамов сделал подробный обзор различных математических методов, которые он мог использовать для изучения СГК, а также определил статистические и экспериментальные методы, Методы Монте-Карло для исследований ГК [2].

### Заключение.

Алгебраические методы представляют собой мощный инструмент для анализа биологических данных в биоинформатике и геномике. Их применение позволяет эффективно обрабатывать и интерпретировать огромные объемы геномных данных, что открывает новые возможности для понимания биологических систем. Дальнейшее развитие алгебраических методов в этой области может привести к новым открытиям и инновациям в биологии и медицине.

## Список литературы

- [1] S. V. Kazakov, A. A. Shalyto. Analysis of genomic and metagenomic data for educational purpose. *Computer Tools in Education*, **3** (2016), 5–15.
- [2] A. I. Garyanina, N. I. Chervyakov. Overview of methods for mathematical modeling of genetic code properties. *Economics. Informatics.*, **47**: 2 (2020.), 372–379.

## Тестовые фрагменты бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций

Лисицына М.А.

*Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия*  
lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

Пусть  $G$  – обыкновенный граф. Раскраску вершин графа  $G$  в  $k$  цветов назовём *совершенной*, если все его одинаково окрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения.

Произвольное множество вершин  $T$  графа  $G$  – его *фрагмент*. Будем называть  $T$  *строго  $k$ -тестовым*, если для любой совершенной  $k$ -раскраски  $\phi$  этого графа сужение  $\phi$  на  $T$  однозначно эту раскраску задает. Другими словами, сужения любых двух различных  $k$ -раскрасок на  $T$  различны. Для транзитивных графов определим понятие  $k$ -тестового фрагмента  $T$  следующим образом. Если для всякой  $k$ -раскраски найдется автоморфизм  $\pi$  такой, что сужение раскраски на  $\pi(T)$  позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент будем называть просто  *$k$ -тестовым*. Понятно, что строго  $k$ -тестовый фрагмент является  $k$ -тестовым, но обратное верно не всегда. Длину  $T$  определим равной его мощности.

Граф Кэли группы  $\mathbb{Z}$  с системой образующих  $\{1, 2, \dots, n\}$  будем называть *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций* и обозначать  $C_\infty(n)$ . Объектами данного исследования являются строго  $k$ -тестовые и  $k$ -тестовые фрагменты таких графов.

Рассмотрим кратко известные результаты о совершенных раскрасках бесконечных циркулянтов. Совершенные 2-раскраски графов  $C_\infty(n)$  получены в [1]. В [2] описаны совершенные  $k$ -раскраски для бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 и произвольного конечного  $k$ . Серия совершенных раскрасок графов  $C_\infty(n)$  с периодами нового типа приведена в [3]. Верхние оценки на длины минимальных  $k$ -тестовых фрагментов этих графов для произвольных натуральных  $k$  и  $n$  получены в [4].

Всюду далее в качестве фрагментов графов  $C_\infty(n)$  будем рассматривать множества вершин, номера которых образуют целочисленный отрезок. Длины минимальных строго  $k$ -тестового и  $k$ -тестового фрагментов обозначим  $L(k)$  и  $l(k)$  соответственно.

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Длина минимального строго  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(2)$  удовлетворяет формуле:*

$$L(k) = \begin{cases} 8, & \text{если } k = 2; \\ 2k + 1, & \text{если } k \geq 3. \end{cases}$$

**Теорема 2.** *Длина минимального  $k$ -тестового фрагмента графа  $C_\infty(2)$  удовлетворяет формуле:*

$$l(k) = \begin{cases} 6, & \text{если } k = 2; \\ k + 2, & \text{если } k \geq 3. \end{cases}$$

Определим *орбитные* раскраски циркулянтного графа  $C_\infty(n)$  как его совершенные раскраски с периодами  $[1\ 2\ 3\ \dots\ k]$ ,  $[1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2]$ ,  $[1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2]$ ,  $[1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1]$ . Другие его совершенные раскраски будем называть *неорбитными*.

Для неорбитных совершенных раскрасок такого графа получена верхняя оценка на длину минимального  $k$ -тестового фрагмента, которая не зависит от  $k$ .

**Теорема 3.** *Длина минимального  $k$ -тестового фрагмента в классе неорбитных совершенных раскрасок графа  $C_\infty(n)$  не превосходит  $5n + 2$  для любого  $k$ .*

## Список литературы

- [1] О. Г. Паршина. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций. *Дискрет. анализ и исслед. операций.*, **21**: 2 (2014), 76–83.
- [2] М. А. Лисицына, О. Г. Паршина. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2. *Дискрет. анализ и исслед. операций.*, **24**: 3 (2017), 20–34.
- [3] V. D. Plaksina, P. A. Shcherbina. New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distanses. *Sib. Electron. Math. Rep.*, **18** (2021), 530–533.
- [4] М. А. Лисицына, С. В. Августинович. Тестовые фрагменты совершенных раскрасок циркулянтных графов. *Сиб. Электрон. Мат. Изв.*, **20**:2 (2023), 638–645.

## Об уравнении Эйлера и тройках Рамануджана<sup>1</sup>

Осипов Н.Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия  
nmosipov@gmail.com

Медведева М.И.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия  
mimedvedeva@rambler.ru

В докладе предполагается рассказать о результатах (полученных совместно с А.В. Савватеевым), дополняющих классические факты о решениях уравнения Эйлера

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \quad (1)$$

в целых числах.

Целочисленные решения уравнения (1) можно получать на основе тождества

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + 1 - (\alpha(a+b) + 1)^3 = \\ & = -(a+b) \cdot ((\alpha^3 - 1)a^2 + (2\alpha^3 + 1)ab + (\alpha^3 - 1)b^2 + 3\alpha^2(a+b) + 3\alpha). \end{aligned}$$

Если рациональное число  $\alpha$  таково, что дискриминант

$$\Delta = 3(4\alpha^3 - 1)$$

квадратичной формы  $(\alpha^3 - 1)a^2 + (2\alpha^3 + 1)ab + (\alpha^3 - 1)b^2$  положителен, но при этом не является точным квадратом, то на гиперболе

$$(\alpha^3 - 1)a^2 + (2\alpha^3 + 1)ab + (\alpha^3 - 1)b^2 + 3\alpha^2(a+b) + 3\alpha = 0 \quad (2)$$

может лежать бесконечно много целых точек  $(a, b)$  и каждая из них даст целочисленную тройку

$$(x, y, z) = (-a, -b, \alpha(a+b) + 1), \quad (3)$$

удовлетворяющую уравнению (1). Это наблюдение приводит к простой конструкции троек Рамануджана  $(x_n, y_n, z_n)$ , представляющих собой экспоненциальную серию решений уравнения (1). Типичным примером является следующая теорема, которая соответствует случаю  $\alpha = 3$  и полностью аналогична известному результату Рамануджана для  $\alpha = 4$  (см., например, [1]).

**Теорема 1.** Пусть

$$\begin{aligned} \frac{6(446s^2 - 429s + 1)}{s^3 - 431s^2 + 431s - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n, \\ \frac{-9(417s^2 - 430s + 1)}{s^3 - 431s^2 + 431s - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n s^n, \\ \frac{2(1615s^2 - 1729s + 4)}{s^3 - 431s^2 + 431s - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n s^n. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Тогда  $x_n^3 + y_n^3 + z_n^3 = 1$  для любого  $n$ . Явные формулы для  $x_n, y_n, z_n$  таковы:

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{214} \left( (-669 + 37\sqrt{321})\varepsilon^n + (-669 - 37\sqrt{321})\varepsilon^{-n} + 54 \right), \\y_n &= \frac{1}{107} \left( (468 - 26\sqrt{321})\varepsilon^n + (468 + 26\sqrt{321})\varepsilon^{-n} + 27 \right), \\z_n &= \frac{1}{214} \left( (-801 + 45\sqrt{321})\varepsilon^n + (-801 - 45\sqrt{321})\varepsilon^{-n} - 110 \right),\end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 215 + 12\sqrt{321}$ .

Помимо экспоненциальных серий решений, для уравнения (1) известны и *полиномиальные* серии решений. Как было отмечено в работе [2], при  $\alpha = 3t^2$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) на гиперболе (2) лежит точка

$$(a, b) = (9t^4 - 3t, -9t^4),$$

которую можно стандартным образом «размножить» и тем самым получить бесконечно много примеров полиномиальных серий решений (3). Далее пусть

$$\Delta = 324t^6 - 3, \quad \varepsilon = 216t^6 - 1 + 12t^3\sqrt{\Delta}.$$

Следующая теорема дополняет соответствующий результат из работы [2], показывая универсальность приведенных там полиномиальных серий решений уравнения (1).

**Теорема 2.** Пусть  $t$  — любое натуральное число. При  $\alpha = 3t^2$  все целые точки  $(a, b)$  гиперболы (2) с учетом симметрии описываются формулами

$$\begin{aligned}a &= \frac{t}{2\Delta/3} \left( (a_1(t) + a_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^n + (a_1(t) - a_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^{-n} - 54t^3 \right), \\b &= \frac{t}{\Delta/3} \left( (b_1(t) + b_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^n + (b_1(t) - b_2(t)\sqrt{\Delta})\varepsilon^{-n} - 27t^3 \right),\end{aligned}$$

где  $n$  — целое число, а многочлены  $a_i(t)$  и  $b_i(t)$  таковы:

$$\begin{aligned}a_1(t) &= 972t^9 - 324t^6 + 18t^3 + 3, & a_2(t) &= -54t^6 + 18t^3 - 1, \\b_1(t) &= -486t^9 + 18t^3, & b_2(t) &= 27t^6 - 1.\end{aligned}$$

## Список литературы

- [1] M. D. Hirschhorn. An Amazing Identity of Ramanujan. *Mathematics Magazine*, **68** (1995), 199–201.  
[2] D. H. Lehmer. On the diophantine equation  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 275–280.

## О многообразии, порожденном $n$ -мерными 2-алгебрами

Петров Е.П.

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия  
per@mail.asu.ru

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех  $n$ -мерных ассоциативных алгебрах над полем ( $n$  – фиксированное число). Многими авторами в те годы изучался этот вопрос (Пихтильков С.А., Мальцев Ю.Н., Гусева И.Л., Петров Е.П.) и, в частности, Мальцевым Ю.Н. [2] был поставлен вопрос:

Какова степень минимального тождества в многообразии  $\mathfrak{M}_n$ , порожденным всеми  $n$ -мерными нильпотентными алгебрами?

В 1991 г. автором [3] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная  $n$ -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству  $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$ , где  $k = \lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \rfloor$ , выяснилось, что эта гипотеза справедлива для алгебр малой размерности (менее 17) и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример  $n$ -мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени. В последующих работах автора продолжились исследования с целью нахождения степени минимального тождества в многообразии  $\mathfrak{M}_n$  [4, 5].

Обратимся теперь к классу так называемых 2-алгебр, введенных Ю.М. Рябухиным и Р.С. Флоря в [6]. Под 2-алгеброй понимается локально нильпотентная алгебра, порожденная такими элементами  $r$ , что квадрат соответствующего главного идеала ( $r$ ) равен нулю. Примерами таких алгебр являются хорошо известные алгебра Грассмана и алгебра верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали. В частности, в работе [6] было показано, что независимо от выбора основного поля идеал тождеств 2-алгебр однозначно определяется своими полилинейными полиномами.

Если рассматривать отдельно  $n$ -мерные 2-алгебры ( $n$  – фиксировано), то имеет место следующий факт.

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – многообразие, порожденное  $n$ -мерными 2-алгебрами.

Тогда  $T(\mathfrak{M}) = \{x_1 x_2 \cdots x_k\}^T$ , где  $k = \lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \rfloor$ .

В частности, выясняется, что вышеуказанная гипотеза остается верной и для класса 2-алгебр.

## Список литературы

- [1] Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей : (оперативно-информационный материал). В. А. Андрунакиевич, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.
- [2] Ю. Н. Мальцев. О тождествах нильпотентных алгебр. *Известия вузов, Мат.*, **9** (1986), 68–72.
- [3] Е. П. Петров. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр. *Алгебра и логика*, **30**: 5 (1991), 540–556.
- [4] Е. П. Петров. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры  $R$  с условием  $\dim R^2/R^3 = 2$ . *Сибирские электронные математические известия*, **13** (2016), 1052–1066.
- [5] Е. П. Петров. О стандартном тождестве в конечнопорожденной нильпотентной алгебре  $R$  над произвольным полем с условием  $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ . *Сибирские электронные математические известия*, **16** (2019), 1981–2002.
- [6] Ю. М. Рябухин, Р. С. Флоря. 2-алгебры и тождества в них. *Мат. исслед. (Кишинев)*, **76** (1984), 107–132.



## Об аналогах теоремы Бэра-Судзуки<sup>1</sup>

Ревин Д.О.

*ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

*ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия*

revin@math.nsc.ru

Считаем, что  $\mathfrak{X}$  — полный класс конечных групп, т.е. класс  $\mathfrak{X}$  непуст и замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Н. Гордеев, Ф. Груневальд, Б. Кунявский и Е. Плоткин [1, определение 1.15] ввели понятие ширины Бэра-Судзуки класса  $\mathfrak{X}$ . Это величина  $BS(\mathfrak{X}) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ , которая по определению не превосходит неотрицательного целого числа  $m$  при выполнении условия: в любой конечной группе  $G$  класс сопряженности  $D$  порождает  $\mathfrak{X}$ -подгруппу, если каждые  $m$  элементов из  $D$  порождают  $\mathfrak{X}$ -подгруппу. В частности, если для любого  $m$  найдутся конечная группа  $G$  и ее класс сопряженности  $D$  такие, что  $\langle D \rangle \notin \mathfrak{X}$ , но любые  $m$  элементов порождают  $\mathfrak{X}$ -подгруппу, то  $BS(\mathfrak{X}) = \infty$ . Классическая теорема Бэра-Судзуки утверждает, что  $BS(\mathfrak{X}) = 2$ , если  $\mathfrak{X}$  — класс всех  $p$ -групп для любого данного простого числа  $p$ . Н. Гордеев, Ф. Груневальд, Б. Кунявский и Е. Плоткин и независимо П. Флейвелл, Р. Гуральник и С. Гэст доказали, что  $BS(\mathfrak{X}) = 4$ , если  $\mathfrak{X}$  — класс всех конечных разрешимых групп. В [1, проблема 1.16] поставлен вопрос, у каких еще полных классов ширина Бэра-Судзуки конечна? Будут обсуждаться фрагменты доказательства следующего утверждения:

**Теорема.** *Ширина Бэра-Судзуки у любого полного класса конечна.*

Важную роль как в доказательстве теоремы, так и для вычисления точного значения  $BS(\mathfrak{X})$  конкретных классов  $\mathfrak{X}$  играют результаты работы Р. Гуральника и Я. Саксла [2], где для любой простой группы  $S$  и ее неединичного автоморфизма  $x$  оценивается минимальное число элементов группы  $G = \langle x, S \rangle$ , сопряженных с  $x$ , которые порождают группу  $G$ . В ряде случаев эти результаты могут быть уточнены. Мы обсудим, как именно такого рода уточнения могли бы быть полезны для получения дальнейших результатов.

## Список литературы

- [1] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskii, E. Plotkin. A description of Baer – Suzuki type of the solvable radical of a finite group. *J. Pure Appl. Algebra*, **213** : 2 (2009), 250–258.
- [2] R. M. Guralnick, J. Saxl. Generation of finite almost simple groups by conjugates. *J. Algebra*, **268** : 2 (2003), 519–571.

---

<sup>1</sup>Часть исследований выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (проект FWNF-2022-0002).

## О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп диэдра<sup>1</sup>

Сенашов В.С.

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия

Vasily.Senashov@yandex.ru

Шлепкин А.А.

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия

shlyopkin@mail.ru

Пусть  $\mathfrak{K}$  — множество групп. Будем говорить, что группа  $G$  насыщена группами из  $\mathfrak{K}$ , если любая конечная подгруппа из  $G$  содержится в подгруппе группы  $G$ , изоморфной некоторой группе из  $\mathfrak{K}$  [1, 2]. В [3] поставлен Вопрос 1 (Л.С. Казарин, Б. Амберг):

*Будет ли разрешимой периодическая группа, у которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению  $d$  конечных групп диэдра? В случае  $d = 1$  это так.*

В [4] установлена структура локально конечной группы, насыщенная прямыми произведениями двух групп диэдра с тривиальным центром. Естественно было попытаться получить аналогичный результат в классе групп Шункова. Напомним, что группа  $G$  называется группой Шункова (сопряженно-бипрimitивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы  $H$  из  $G$  в фактор-группе  $N_G(H)/H$  любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Как следует из работ А.В. Рожкова и других математиков, группы Шункова отличны от локально конечных групп и периодических групп [5]. Кроме того, построены примеры групп Шункова, содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью [6]. Под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы при условии, что они образуют подгруппу.

Доказана следующая

**Теорема.** Пусть группа Шункова  $G$  не содержит элементов порядка 4 и насыщена группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{(D_i \rtimes \langle t_i \rangle) \times (R_i \rtimes \langle v_i \rangle) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

где  $D_i, R_i$  — конечные циклические группы;  $t_i, v_i$  — инволюции; для любого  $d \in D_i, d^{t_i} = d^{-1}$ ; для любого  $r \in R_i, r^{v_i} = r^{-1}$ . Тогда  $G$  обладает периодической частью  $T(G)$  и

$$T(G) = (D \rtimes \langle t \rangle) \times (R \rtimes \langle v \rangle),$$

где  $D, R$  — локально циклические группы;  $t, v$  — инволюции; для любого  $d \in D, d^t = d^{-1}$ ; для любого  $r \in R, r^v = r^{-1}$ .

## Список литературы

- [1] А. К. Шлепкин. Сопряженно бипрimitивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. *III международная конференция по алгебре. Сб. тез.* Красноярск, 1993, 369.
- [2] А. К. Шлепкин. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами. *Матем. тр. ИМ СО РАН.*, 1: 1 (1998), 129–138.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017 П.).

- [3] И. Н. Белоусов, А. С. Кондратьев, А. В. Рожков. XII школа конференция посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева. *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**: 3 (2018), 281–285.— 2018. — № 3(24).
- [4] А. В. Кухарев, А. А. Шлепкин. Локально конечные группы, насыщенные прямым произведением двух конечных групп диэдра. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.*, **44** (2023), 71–81.
- [5] А. В. Рожков. Условия конечности Шункова. *Международ. конф. по алгебре*. Санкт-Петербург, 1997, 268–269.
- [6] А. А. Череп. О множестве элементов конечного порядка в бипрimitивно конечной группе. *Алгебра и логика*, **26**: 4 (1987), 518–521.

## Вопросы алгебраического и компьютерного моделирования, возникающие при классификации паркетогранников

Тимофеев А.В.

*Красноярский математический центр, Красноярск, Россия*

A.V.Timofeenko62@mail.ru

Паркетным ( $r$ -паркетным) называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного числа и более одного равноугольных (правильных) многоугольников. Описание всех 23 типов паркетных многоугольников можно найти в [1]. Паркетогранником ( $r$ -паркетогранником) называется выпуклый многогранник, обладающий паркетными и, быть может, равноугольными (правильными) гранями. Каковы все типы паркетогранников? Эта проблема естественно возникла после описания с точностью до подобия правильногранных тел (В. А. Залгаллер, 1967). Выяснено, [2] что кроме бесконечных серий призм и антипризм существует лишь конечное число типов выпуклых многогранников с равноугольными гранями. Автору неизвестен выпуклый равноугольный многогранник, тип которого отличается от типа правильногранного тела.

Если антипризму разбить плоскостями, которые каждое её боковое ребро делят на три равные части, то получится три многогранника: две  $B$ -антипризмы и  $C$ -антипризма. Из результатов работы [1] следует, что: 1) кроме бесконечных серий призм, антипризм и  $B$ -антипризм существует лишь конечное число типов  $r$ -паркетогранников; 2) существует только конечное число типов паркетогранников за исключением четырех бесконечных серий: призм, антипризм,  $B$ -антипризм,  $C$ -антипризм.

В докладе планируется отразить современное состояние проблемы нахождения полного перечня типов паркетогранников и выпуклых тел с равноугольными гранями. Едва ли получится решить эти проблемы без алгебраического и компьютерного моделирования паркетогранников, которым в докладе отводится основное внимание.

## Список литературы

- [1] Ю. А. Пряхин. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных. *Зап. науч. семинара ЛОМИ*, **45** (1974), 111–112.
- [2] А. Д. Милка. Почти правильные многогранники. *Тр. Ин-та математики.*, **9** (1987), 136–141.

## О полуавтоматах над квазибесконтурными графами

Фарахутдинов Р.А.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
renatfara@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию алгебраической теории графовых автоматов без выходных сигналов, которые принято называть полуавтоматами [1]. В зависимости от исследуемых задач рассматриваются структуризованные полуавтоматы в категориях [2], то есть полуавтоматы, множества состояний которых наделены дополнительными математическими структурами, сохраняющимися функциями переходов полуавтоматов. В настоящей работе рассматриваются полугрупповые полуавтоматы над графами.

**Основные определения.** Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф  $G = (X, \rho)$ . Дугу  $(x, y) \in \rho$  будем называть собственной, если  $(y, x) \notin \rho$ . Граф называется квазибесконтурным, если ни одна его собственная дуга не лежит ни в каком контуре.

Полугрупповой полуавтомат  $A = (X, S, \star)$  называется графовым, если множество его состояний  $X$  наделено такой структурой графа  $G = (X, \rho)$ , что для любого входного сигнала  $s \in S$  функция переходов  $\delta_s(x) = x \star s$  ( $x \in X$ ) является эндоморфизмом графа  $G$ . Такой полуавтомат символически обозначается через  $A = (G, S, \star)$ . Графовый полуавтомат  $A = (G, \text{End } G, \star)$ , где  $x \star \varphi = \varphi(x)$  для  $x \in X$ ,  $\varphi \in \text{End } G$ , является универсально притягивающим объектом в категории [2] графовых полуавтоматов и называется универсальным графовым полуавтоматом над графом  $G$ . Такой полуавтомат обозначается  $\text{Atm}(G)$ .

**Конкретная характеристика.** Рассмотрим вопрос конкретной характеристики универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами: при каких условиях полуавтомат  $A$  с множеством состояний  $X$  и полугруппой входных сигналов  $S$  является универсальным графовым полуавтоматом, то есть на множестве состояний  $X$  полуавтомата  $A$  можно так задать бинарное отношение  $\rho$ , что для графа  $G = (X, \rho)$  выполняется равенство  $A = \text{Atm}(G)$ ?

Пусть  $A = (X, S, \star)$  — полуавтомат с множеством состояний  $X$  и полугруппой входных сигналов  $S$ . Для решения проблемы конкретной характеристики на множестве состояний  $X$  определим канонические предикаты  $\Pi(x, y, u, v)$ ,  $Q(x, y)$  и  $R(x, y)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, u, v) &= (\exists s \in S)(x \star s = u \wedge y \star s = v \wedge (\forall z \in X)(z \star s = u \vee z \star s = v)), \\ Q(x, y) &= \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg \Pi(x, y, y, x), \quad R(x, y) = (\forall u, v \in X, u \neq v) \Pi(u, v, x, y). \end{aligned}$$

Обозначим  $Z(x, y) = Q(x, y) \vee R(x, y)$ . Полугруппу  $S$  входных сигналов полуавтомата  $A$  будем называть  $Z$ -замкнутой, если для любого преобразования  $f$  множества  $X$  из условия, что для любого истинного предиката  $Z(x, y)$  существует такой входной сигнал  $s \in S$ , что  $x \star s = f(x)$  и  $y \star s = f(y)$ , следует, что для некоторого  $t \in S$  выполняется  $x \star t = f(x)$  для всех  $x \in X$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A = (X, S, \star)$ ,  $|X| > 1$  — полуавтомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда  $A$  в том и только том случае будет универсальным графовым полуавтоматом  $\text{Atm}(G)$  для некоторого квазибесконтурного рефлексивного графа  $G = (X, \rho)$ , если полугруппа входных сигналов  $S$  является  $Z$ -замкнутой полугруппой с каноническими предикатами  $Q(x, y)$  и  $R(x, y)$ , удовлетворяющими следующим условиям:

- 1)  $(\forall x \in X) R(x, x)$ ;
- 2)  $Q(x, y) \wedge Q(u, v) \implies (\Pi(x, y, u, v) \iff \neg \Pi(x, y, v, u))$ ;
- 3)  $Q(x, y) \wedge \Pi(x, y, u, v) \implies (\Pi(x, y, v, u) \wedge R(u, v) \vee \neg \Pi(x, y, v, u) \wedge Q(u, v))$ .

**Абстрактная характеристика.** Рассмотрим вопрос абстрактной характеристики [3] универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами. Для решения

этой проблемы определяются следующие предикаты элементарной теории полугрупп:

$$\begin{aligned} M(x) &= (\forall y)(y \cdot x = x), \\ \pi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \bigwedge_{i=1}^4 M(x_i) \wedge (\exists s)(x_1 \cdot s = x_3 \wedge x_2 \cdot s = x_4 \wedge (\forall z)(M(z) \implies z \cdot s = x_3 \vee z \cdot s = x_4)), \\ q(x, y) &= M(x) \wedge M(y) \wedge \pi(x, y, x, y) \wedge \neg\pi(x, y, y, x), \\ r(x, y) &= M(x) \wedge M(y) \wedge (\forall u, v, u \neq v)(M(u) \wedge M(v) \implies \pi(u, v, x, y)). \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Произвольный полуавтомат  $A = (X, S, \star)$ ,  $|X| > 1$ , в том и только том случае изоморфен универсальному графовому полуавтомату над некоторым квазибесконтурным рефлексивным графом, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $(\forall x \in X)(\exists! s \in S)(\forall y \in X)(y \star s = x)$ ;
- 2)  $(\forall x \in X) r(x, x)$ ;
- 3)  $q(x, y) \wedge q(u, v) \implies (\pi(x, y, u, v) \iff \neg\pi(x, y, v, u))$ ;
- 4)  $q(x, y) \wedge \pi(x, y, u, v) \implies (\pi(x, y, v, u) \wedge r(u, v) \vee \neg\pi(x, y, v, u) \wedge q(u, v))$ ;
- 5) для любого преобразования  $f$  множества  $X$  выполняется условие

$$\begin{aligned} (\forall x, y \in X)(q(x, y) \vee r(x, y) \implies (\exists s \in S)(x \star s = f(x) \wedge y \star s = f(y))) \implies \\ \implies (\exists t \in S)(\forall z \in X)(z \star t = f(z)). \end{aligned}$$

**Элементарная определимость.** Рассмотрим вопрос относительно элементарной определимости [4] класса универсальных графовых полуавтоматов над квазибесконтурными рефлексивными графами в классе всех полугрупп. Введём следующие формулы языка элементарной теории полугрупп:

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= (M(x) \wedge M(z) \wedge (\exists y)(x \cdot y = z)), \\ P(u, v, x, y) &= (M(u) \wedge M(v) \wedge (\exists s)(u \cdot s = x \wedge v \cdot s = y)). \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Для любого универсального графового полуавтомата  $A = \text{Atm}(G)$  над нетривиальным квазибесконтурным рефлексивным графом  $G = (X, \rho_X)$  и полугруппой входных сигналов  $S = \text{End } G$  выполняются следующие условия:

- 1) множество  $\bar{X} = \{x \in S : M(x)\}$  не пусто;
- 2) формула  $D(x, y, z)$  задает тернарное отношение  $\bar{*} \subset \bar{X} \times S \times \bar{X}$ , удовлетворяющее условию

$$(x, y, z_1), (x, y, z_2) \in \bar{*} \implies z_1 = z_2;$$

- 3) в полугруппе  $S$  входных сигналов полуавтомата  $A$  найдутся такие элементы  $x_0, y_0$ , что формула  $P(x_0, y_0, x, y)$  задает отношение смежности  $\rho$  на множестве  $\bar{X}$ , для которого графовый полуавтомат  $\bar{A} = (\bar{G}, S, \bar{*})$  над графом  $\bar{G} = (\bar{X}, \rho)$  изоморфен универсальному графовому полуавтомату  $A = \text{Atm}(G)$ .

## Список литературы

- [1] Р. Лидл, Г. Пилыц. Прикладная абстрактная алгебра. Изд-во Урал. ун-та, Екатеринбург, 1996.
- [2] Б. И. Плоткин, Л. Я. Гринглаз, А. А. Гварамия. Элементы алгебраической теории автоматов. Выш. шк., М., 1994.
- [3] В. Jonsson. Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1972.
- [4] Ю. Л. Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Наука. Физматлит, М., 1980.

## О графах Шилла с $b \leq 6$ и $c_2$ , не делящем $b_2$ <sup>1</sup>

Цай Минчжу

Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай  
caijzh12@163.com

Махнев А. А.

Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай  
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
makhnev@imm.uran.ru

Голубятников М. П.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
mike\_ru1@mail.ru

Дж. Кулен и Ч.Пак в [1] нашли все допустимые массивы пересечений графов Шилла для  $b \in \{2, 3\}$ . Позднее были найдены массивы пересечений графов Шилла для  $b \in \{4, 5\}$  [2], [3].

Заметим, что граф Шилла с  $b \leq 6$  и  $c_2$  не делящим  $b_2$ , имеет один из следующих массивов пересечений:

$\{140, 108, 24; 1, 9, 105\}$ ,  $\{152, 117, 39; 1, 9, 114\}$ ,  $\{236, 180, 48; 1, 9, 177\}$ ,  $\{260, 198, 66; 1, 9, 195\}$  ( $b = 4$ );  
 $\{135, 112, 20; 1, 8, 108\}$ ,  $\{255, 208, 52; 1, 8, 204\}$ ,  $\{315, 256, 50; 1, 20, 252\}$ ,  $\{715, 576, 132; 1, 16, 572\}$ ,  
 $\{735, 592, 148; 1, 16, 588\}$ ,  $\{1045, 840, 180; 1, 24, 836\}$  ( $b = 5$ );  
 $\{924, 775, 155; 1, 25, 770\}$ ,  $\{1674, 1400, 280; 1, 25, 1395\}$  и  $\{3354, 2800, 480; 1, 75, 2795\}$  ( $b = 6$ ).

Доказано несуществование следующих графов.

**Теорема 1.** Не существуют графы Шилла с массивами пересечений  $\{140, 108, 24; 1, 9, 105\}$  и  $\{236, 180, 48; 1, 9, 177\}$ .

**Теорема 2.** Не существуют графы Шилла с массивами пересечений  $\{315, 256, 50; 1, 20, 252\}$  и  $\{735, 592, 148; 1, 16, 588\}$ .

**Теорема 3.** Не существуют графы Шилла с массивами пересечений  $\{924, 775, 155; 1, 25, 770\}$ ,  $\{1674, 1400, 280; 1, 25, 1395\}$  и  $\{3354, 2800, 480; 1, 75, 2795\}$ .

## Список литературы

- [1] J. H. Koolen, J. Park. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31**: 8 (2010), 2064–2073.
- [2] Цэнь-чжуй Цай, А. А. Махнев, И. Н. Белоусов. Некоторые графы Шилла с  $b = 4$  не существуют. *Известия Гомельского гос. университета*, **129** 6, (2021), 110–115.
- [3] Х. Ли, А. А. Махнев, И. Н. Белоусов. Некоторые графы Шилла с  $b = 5$  не существуют. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.*, **57** (2022), 40–45.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань

Перечисление  $AT_4$ -графов с  $q \leq 4^1$ 

Цай Цэньчжуй

*Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай*  
caijzh12@163.com

Махнев А. А.

*Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай*  
*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
makhnev@imm.uran.ru

Падучих Д. В.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
dpaduchikh@gmail.com

В работе перечислены допустимые массивы пересечений  $AT_4$ -графов с  $q \leq 4$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  является  $AT_4$ -графом с  $q \leq 4$ . Тогда одно из следующих утверждений выполняется:

(1)  $q = 2$  и тройка  $(p, q, r)$  равна  $(1, 2, 3)$  (граф Конвея-Смита),  $(2, 2, 2)$  (граф Джонсона  $J(8, 4)$ ) или  $(4, 2, 2)$  (половинный 8-куб);

(2)  $q = 3$  и тройка  $(p, q, r)$  равна  $(3, 3, 3)$  (граф  $3.O_6^2(3)$ ),  $(9, 3, 3)$  (граф  $3.O_7(3)$ ) or  $(9, 3, 2)$ ;

(3)  $q = 4$  и тройка  $(p, q, r)$  равна  $(2, 4, 3)$  (первый граф Сойчера),  $(8, 4, 2)$  (первый граф Мейкснера),  $(8, 4, 4)$  (второй граф Мейкснера),  $(20, 4, 3)$  (второй граф Сойчера),  $(4, 4, 2)$ ,  $(8, 4, 3)$ ,  $(16, 4, 2)$ ,  $(20, 4, 2)$ ,  $(44, 4, 2)$  или  $(56, 4, 2)$ .

**Теорема 2.**  $AT_4(4, 4, 2)$ -граф и  $AT_4(8, 4, 3)$ -граф не существуют.

По [1, теорема 3.1] для  $AT_4(p, q, r)$ -графа верно неравенство  $r \leq (p + q^3)/(p + q)$ . В случае равенства вторая окрестность любой вершины является  $AT_4(q^3 - q^2 - q, q, r)$ -графом.

В данной статье продолжается изучение  $AT_4$ -графов в случае  $r = (p + q^3)/(p + q)$ , начатое в [1].

**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma$  является  $AT_4(p, q, r)$ -графом,  $2 \leq r \leq 4$ . Если  $r = (p + q^3)/(p + q)$ , то одно из следующих утверждений выполняется:

(1)  $r = 2$ ,  $p = q^3 - 2q$ ,  $q^3 - q$  делится на 4,  $q$  не сравнимо с 3 по модулю 4;

(2)  $r = 3$  и  $q \in \{2, 3, 9, 17, 27, 57\}$ ;

(3)  $r = 4$  и  $q \in \{7, 40, 84\}$ .

## Список литературы

- [1] Zheng-Jiang Xia, Jae-Ho Lee, J. Koolen. A new feasibility condition to the  $AT_4$  family. arXiv:2204.07842v1 [math.CO] 16 Apr 2022.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань



## Перечисление массивов пересечений графов Шилла с $b = 6$ <sup>1</sup>

Чень Минчжу

Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай

mzchen@hainanu.edu.cn

Махнев А. А.

Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

makhnev@imm.uran.ru

Белусов И. Н.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

i\_belousov@mail.ru

Кулен и Пак нашли массивы пересечений графов Шилла с  $b \in \{2, 3\}$  [1]. Позднее были перечислены массивы пересечений графов Шилла с  $b \in \{4, 5\}$  [2], [3]. В работе найдены массивы пересечений графов Шилла с  $b = 6$ .

**Теорема 1.** Дистанционно регулярный граф Шилла с  $b = 6$  имеет массив пересечений

{42, 40, 8; 1, 1, 35}, {42, 40, 8; 1, 2, 35}, {42, 40, 12; 1, 3, 35}, {48, 45, 9; 1, 1, 40}, {66, 60, 18; 1, 2, 55},  
 {90, 80, 16; 1, 4, 75}, {114, 100, 20; 1, 5, 95}, {120, 105, 21; 1, 7, 100}, {126, 110, 4; 1, 4, 105},  
 {204, 175, 20; 1, 20, 170},  
 {210, 180, 36; 1, 9, 175}, {228, 195, 15; 1, 5, 190}, {264, 225, 45; 1, 3, 220}, {264, 225, 45; 1, 5, 220},  
 {294, 250, 20; 1, 20, 245}, {294, 250, 32; 1, 4, 245}, {306, 260, 36; 1, 9, 255}, {324, 275, 55; 1, 5, 270},  
 {330, 280, 54; 1, 6, 275}, {474, 400, 80; 1, 10, 395},  
 {624, 525, 105; 1, 15, 520}, {834, 700, 120; 1, 15, 695}, {882, 740, 144; 1, 18, 735},  
 {924, 775, 155; 1, 25, 770}, {930, 780, 150; 1, 30, 775}, {1110, 930, 180; 1, 30, 925},  
 {1128, 945, 168; 1, 24, 940}, {1296, 1085, 189; 1, 27, 1080}, {1674, 1400, 280; 1, 25, 1395},  
 {1794, 1500, 288; 1, 24, 1495}  
 или {3354, 2800, 480; 1, 75, 2795}.

Заметим, что для графов с массивами из нашего списка  $c_2$  не делит  $b_2$  только в случаях {924, 775, 155; 1, 25, 770}, {1674, 1400, 280; 1, 25, 1395} и {3354, 2800, 480; 1, 75, 2795}.

Далее, для графов с  $b = 4$  и  $c_2$ , не делящем  $b_2$ , получим массивы {140, 108, 24; 1, 9, 105}, {152, 117, 39; 1, 9, 114}, {236, 180, 48; 1, 9, 177} и {260, 198, 66; 1, 9, 195}.

Аналогично, для графов с  $b = 4$  и  $c_2$ , не делящем  $b_2$ , получим массивы {135, 112, 20; 1, 8, 108}, {255, 208, 52; 1, 8, 204}, {315, 256, 50; 1, 20, 252}, {715, 576, 132; 1, 16, 572}, {735, 592, 148; 1, 16, 588} и {1045, 840, 180; 1, 24, 836}.

**Гипотеза 1.** Для графов Шилла числа  $c_2$  и  $b_2$  не взаимно просты.

## Список литературы

- [1] J. H. Koolen, J. Park. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31**: 8 (2010), 2064–2073.
- [2] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Jinzhuan Cai. Some Shilla graphs with  $b = 4$  do not exist. *Vestnik Gomel University*, **129**: 6 (2021), 111–115.
- [3] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Hayan Li. Some Shilla graphs with  $b = 5$  do not exist. *Vestnik Perm University*, **57** (2022), 40–45.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань

## О дистанционно регулярных графах диаметра 3 и степени 44<sup>1</sup>

Чень Минчжу

*Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай*  
mzchen@hainanu.edu.cn

Махнев А. А.

*Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай*  
*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*  
makhnev@imm.uran.ru

Климин В. С.

*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*  
m65v19@gmail.com

Для дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  диаметра 3 и степени 44 имеется 7 допустимых массивов пересечений.

Для массива пересечений  $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$  граф  $\Gamma_2$  имеет параметры  $(540, 440, 358, 360)$  и  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(540, 55, 10, 5)$ . Граф не существует (Кулен-Пак [1]).

Для массива пересечений  $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$  граф  $\Gamma_2$  имеет параметры  $(375, 264, 188, 180)$  и  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(375, 66, 9, 12)$ . Существование обоих сильно регулярных графов неизвестно.

Для массива пересечений  $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$  граф  $\Gamma_2$  имеет параметры  $(375, 308, 253, 252)$  и  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(375, 22, 5, 1)$ . Граф  $\Gamma_3$  не существует (окрестность вершины – объединение изолированных 6-клик).

Для массива пересечений  $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$  граф  $\Gamma_2$  имеет параметры  $(243, 176, 130, 120)$  и  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(243, 22, 1, 2)$ .

Для массива пересечений  $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$  (граф Шилла с  $b = 4$ ) граф  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(765, 192, 48, 48)$ .

Для массива пересечений  $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$  граф  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(525, 128, 28, 32)$ .

Для массива пересечений  $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$  граф  $\Gamma_3$  имеет параметры  $(342, 33, 4, 3)$ .

Несуществование графов с массивами пересечений  $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$  и  $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$  известно ([1] и в графе  $\Gamma_3$  с параметрами  $(375, 22, 5, 1)$  (окрестность вершины является объединением изолированных 6-клик).

**Теорема 1.** *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений  $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ ,  $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$  и  $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$  не существуют.*

## Список литературы

- [1] J. H. Koolen, J. Park. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31**: 8 (2010), 2064–2073.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань

**Графы разделяемого дизайна симплектического графа  $Sp(4, q)$** 

Шалагинов Л.В.

Челябинский государственный университет, Челябинск  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург  
44sh@mail.ru

(работа выполнена совместно с  
Bart De Bruyn, Sergey Goryainov, и Willem H. Haemers)

Графом разделяемого дизайна (ddg) с параметрами  $(v, k, \lambda_1, \lambda_2, m, n)$  называется  $k$ -регулярный граф на  $v$  вершинах, если множество его вершин можно разбить на  $m$  классов размера  $n$ , так чтобы любые две вершины из одного класса имели ровно  $\lambda_1$  общих соседей, а любые две вершины из разных классов имели ровно  $\lambda_2$  общих соседей.

Изучение этих графов началось в 2011 г. и с тех пор было предложено много новых конструкций таких графов. В этой работе мы описываем несколько новых ddg, которые могут быть получены из симплектических сильно регулярных графов  $Sp(4, q)$  при нечетном  $q$ .

**Список литературы**

- [1] A. E. Brouwer. Symplectic graphs. <https://www.win.tue.nl/aeb/graphs/Sp.html> .
- [2] W. H. Haemers, H. Kharaghani, M. A. Meulenbergh. Divisible design graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **118** (2011), 978–992.
- [3] D. Panasenko. Database of small proper divisible design graphs. <http://alg.imm.uran.ru/dezagraphs/ddgtab.html>

## О конечных простых группах, удовлетворяющих сильной $\pi$ -теореме Силова

Шепелев В.Д.  
 НГУ, Новосибирск, Россия  
 v.shepelev@g.nsu.ru

Пусть  $\pi$  – некоторое фиксированное множество простых чисел. Конечная группа называется  $\pi$ -группой, если все простые делители ее порядка принадлежат  $\pi$ . Согласно Виланду [1], конечная группа  $G$  удовлетворяет сильной  $\pi$ -теореме Силова, и мы пишем  $G \in W_\pi$ , если максимальные  $\pi$ -подгруппы любой её подгруппы  $H$  сопряжены в  $H$ .

Виланд [1, (h)] поставил вопрос о классификации конечных простых групп, удовлетворяющих сильной  $\pi$ -теореме Силова. В докладе обсуждается текущее состояние данной проблемы и дается ее решение для групп  $L_2(q)$ .

**Определение.** Пусть  $r$  – простое число,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $(a, r) = 1$ ;

$$\text{ord}_r^* a = \min\{d \in \mathbb{N} : a^d \equiv 1 \pmod{r \cdot (r, 2)}\}.$$

**Теорема.** Пусть  $p$  – простое число,  $q = p^{2^k m} > 3$ ,  $m$  – нечётное. Положим  $q_0 := p^m$  и  $\tau := \pi \cap \pi(L_2(q))$ . Тогда  $L_2(q) \in W_\pi$  тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $\pi(L_2(q)) \subseteq \pi$ ;
- (2)  $p = 2$  и  $\tau = \{2\}$ ;
- (3)  $p \in \pi$ ,  $2 \notin \pi$ ,  $|\{3, 5\} \cap \tau| \leq 1$ , и  $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_0 - 1)$ ;
- (4)  $p \notin \pi$ ,  $|\{2, 3, 5\} \cap \tau| \leq 1$ , и  $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$  для некоторого  $\varepsilon = \pm 1$ ; кроме того, если  $2 \in \pi$ , то  $q \equiv \varepsilon \pmod{4}$  и если  $\varepsilon = 1$ , то  $\text{ord}_r^* q_0 = \text{ord}_s^* q_0$  для всех  $r, s \in \tau$ .

## Список литературы

- [1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute. *Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math.* **37** (1980), 161–173.

## Iterated wreath product of symmetric and alternating groups and its normal subgroups

Skuratovskii R.V.

TNU, Kiev, Ukraine

Tavrida National University, Kiev, Ukraine ORCID:0000-0002-5692-6123

ruslcomp@mail.ru, skuratovskii.ruslan@tnu.edu.ua

Normal subgroups and there properties for finite and infinite iterated wreath products  $S_{n_1} \wr \dots \wr S_{n_m}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  and  $A_n \wr S_n$  are founded. Special classes of normal subgroups are investigated, their generators are found and presented as in the form of Kaloujnine [1] tables as well as in the form of wreath recursion.

Inverse limit of wreath product of permutation groups is found.

**Definition 1.** The set of elements from  $S_n \wr S_n, n \geq 3$  which presented by the tableaux of form:  $[e]_0, [a_1, a_2, \dots, a_n]_1$ , satisfying the following condition

$$\sum_{i=1}^n \text{dec}([a_i]_1) = 2k, k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

we will call set of type  $\tilde{A}_n^{(1)}$  and denote this set by  $e \wr \tilde{A}_n$ .

**Definition 2.** The subgroup  $E \wr \tilde{A}_n^{(2)}$  be denoted by  $\tilde{A}_n^{(3)}$ .

Furthermore we will prove that  $E \wr \tilde{A}_n^{(2)} \triangleleft S_n \wr S_n \wr S_n$ . The order of  $E \wr \tilde{A}_n^{(2)}$  is  $(n!)^{3n} : 2^3$ .

**Definition 3.** The set of elements from  $S_n \wr S_n \wr S_n, n \geq 3$  presented by the tables [1] form:  $[e]_1, [e, e, \dots, e]_2, [a_1, a_2, \dots, a_n]_3$ , satisfying the following condition

$$\sum_{i=1}^n \text{dec}([a_i]_3) = 2k, k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

be denoted by  $\tilde{A}_{n^2}^{(3)}$ .

**Definition 4.** A subgroup in  $S_n \wr S_n$  is called  $\tilde{T}_n$  if it consists of:

1. elements of  $E \wr A_n$ ,
2. elements with the tableau [1] presentation  $[e]_1, [\pi_1, \dots, \pi_n]_2$ , that  $\pi_i \in S_n \setminus A_n$ .

structure

$$\tilde{T}_n \simeq \underbrace{(A_n \times A_n \times \dots \times A_n)}_n \times C_2 \simeq \underbrace{S_n \boxplus S_n \dots \boxplus S_n}_n,$$

where the operation  $\boxplus$  of a subdirect product is subject of item 1) and 2).

**Theorem 1.** Proper normal subgroups in  $S_n \wr S_m$ , where  $n, m \geq 3$  with  $n, m \neq 4$  are of the following types:

1. subgroups that act only on the second level (stabilizing the first level [4, 6]) are

$$E \wr \tilde{A}_m, \tilde{T}_m, E \wr S_m, E \wr A_n,$$

2. subgroups that act on both levels are  $A_n \wr \tilde{A}_m, S_n \wr \tilde{A}_m, A_n \wr S_m$ ,

wherein the subgroup  $S_n \wr \tilde{A}_m \simeq S_n \times \underbrace{(S_m \boxtimes S_m \boxtimes S_m \dots \boxtimes S_m)}_n$  endowed with the subdirect product

satisfying to condition (1), moreover  $S_n \wr \tilde{A}_m$  has two isomorphic copies, embedded into  $S_n \wr S_m$  in different ways.

The subgroup  $E \wr \tilde{A}_n^{(1)}$  be denoted by  $\tilde{A}_n^{(2)}$ .

**Proposition 1.** The subgroup  $\tilde{A}_n^{(2)} \triangleleft S_n \wr S_n \wr S_n$ .

**Remark.** The subgroup  $\widetilde{A}_n^{(1)}$  has **normal rank** 2 [2] in  $S_n \wr S_n$ ,  $n \geq 3$

Indeed, the minimal generating set of normal closure are  $\tilde{c} = [e]_0, [(123), e, e, \dots, e]_1$  for  $E \wr A_n$  and  $\tilde{a} = [e]_0, [(12), (12), e, e, \dots, e]_1$  for  $E \wr \widetilde{A}_n$ .

**Definition 5.** A subgroup in  $S_n \wr S_n \wr S_n$  is denoted by  $\widetilde{T}_{n^2}^{(3)}$  if it consists of:

1. elements of the form  $E \wr E \wr A_n$ ,
2. elements with the tableau [1] presentation  $[e]_1, [e \dots, e]_2, [\pi_1 \dots, \pi_n, \pi_{n+1} \dots, \pi_{n^2}]_3$ , wherein  $\forall i = 1, \dots, n: \pi_i \in S_n \setminus A_n$ .

**Statement.** Let  $W = \wr_{i=1}^k S_n, n \geq 3$  and  $\widetilde{T}_{n^2}^{(3)}$  is proper normal subgroup in vertex stabilizer  $St_W(v_{ji}), j < k-3$  [6], then  $\widetilde{T}_{n^2}^{(3)} \triangleleft W$ .

The set of normal subgroup of  $S_n \wr S_n$  is denoted by  $N(S_n \wr S_n)$ . Subgroup with number  $i$  from  $N(S_n \wr S_n)$  is denoted by  $N_i(S_n \wr S_n)$ .

**Theorem 2.** The full list of normal subgroups of  $S_n \wr S_n \wr S_n$  consists of 50 normal subgroups. These subgroups are the following:

- 1 **Type**  $T_{023}$  contains:  $E \wr \widetilde{A}_n \wr H, \widetilde{T}_n \wr H$ , where  $H \in \{\widetilde{A}_n, \widetilde{A}_{n^2}, S_n\}$ . There are 6 subgroups.
- 2 **The second type of subgroups is subclass in**  $T_{023}$  with new base of wreath product subgroup  $\widetilde{A}_{n^2}$ :  $E \wr S_n \wr \widetilde{A}_{n^2}, E \wr N_i(S_n \wr S_n)$ . Therefore this class has 12 new subgroups. Thus, the total number of normal subgroups in **Type**  $T_{023}$  is 18.
- 3 **Type**  $T_{003}$ :  $A_{00(n^2)}^{(3)} = E \wr E \wr \widetilde{A}_{n^2}, \widetilde{T}_{n^2}, \widetilde{T}_n^{(3)}$ . Hence, here are 3 new subgroups.
- 4 **Type**  $T_{123}$ :  $N_i(S_n \wr S_n) \wr S_n, N_i(S_n \wr S_n) \wr \widetilde{A}_n$  and  $N_i(S_n \wr S_n) \wr \widetilde{A}_{n^2}$ . Thus, there are 29 new normal subgroups in  $T_{123}$ , taking into account repetition.

**Definition 6.** The set of elements from  $\wr_{i=1}^k S_{n_i}, n \geq 3$  with depth  $j$  satisfying the following condition

$$\sum_{i=1}^{n^j} dec([a_i]_k) = 2t, t \in \mathbb{N}, [a_i]_j = e, \text{ whenever } j = \overline{0, k-1} \tag{3}$$

is called  $\widetilde{A}_{n^k}^{(k)}$ .

**Definition 7.** The set of elements from  $\wr_{i=1}^\infty S_{n_i}, n \geq 3$  with depth  $k$  satisfying for each  $j \geq k$  the following condition

$$\sum_{i=1}^{n^j} dec([a_i]_j) = 2t, t \in \mathbb{N}, k \leq j, \text{ and } [a_i]_j = e, \text{ whenever } j = \overline{0, k-1} \tag{4}$$

is called  $\widetilde{A}_{n^j}^{\geq k}$ .

**Definition 8.** The set of elements from  $\wr_{i=1}^k S_{n_i}, n \geq 3$  with depth  $j$  having tableaux presentation which satisfy the following conditions

$$\sum_{i=1}^{n^j} dec([a_i]_j) = 2z, z \in \mathbb{N}, j = \overline{m, k}; \text{ and } [a_i]_j = e, \text{ whenever } j = \overline{0, m-1} \tag{5}$$

is called  $\widetilde{A}_{n^k}^{(m,k)}$ .

**Theorem 3.** Let  $g_{ij}$  is vertex permutation in  $v_{ij}$  [6]. In  $\widetilde{A}_{n^k}^{(m,k)}$  the following  $k - m$  equalities are true:

$$\sum_{i=m}^k dec(g_{ij}) = 2k, k \in \mathbb{N}, 0 < j \leq n^i, \tag{6}$$

furthermore  $\widetilde{A}_{n^k}^{(m,k)} \triangleleft \wr_{i=1}^k S_{n_i}$ .

**Theorem 4.** Let  $H \triangleleft \text{Aut}_f X^*$  with depth  $k$  then  $H$  contains  $k$ -th level subgroup  $P$  having all even vertex permutations  $p_{ki} \in A_n$  on  $X^k$  and trivial permutations in vertices of rest of levels. Furthermore  $P$  is normal in  $W$  provided  $k$  is last active level of  $\text{Aut}_f X^*$ .

Let  $H_i$  be a subgroup of  $St_W(k)$ , then there is  $k$ -th level subgroup  $H_i(k)$  of  $H_i$  isomorphic to  $\tilde{A}_{n^{k-i}}^{(k)}$ ,  $0 \leq i < k$ . In particular for the case  $i = k - 1$ ,  $H_1 \simeq \tilde{A}_n^{(k)}$  and determined by the following congruences

$$\sum_{i=1}^n \text{dec}(\pi_{ki}) \equiv \sum_{i=n+1}^{2n} \text{dec}(\pi_{ki}) \equiv \dots \equiv \sum_{i=ln+1}^{(l+1)n} \text{dec}(\pi_{ki}) \equiv \dots \equiv \sum_{n^{k-n+1}}^{n^k} (\pi_{ki}) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Note that there are  $n^{k-1}$  such sums.

**Definition 8.** A tableau  $u$  has **depth**  $k$  if all  $[u]_i = \varepsilon$  provided  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ; and  $[u]_k \neq \varepsilon$ .

**Proposition 2.** A set of open subsets defining the *topology of the wreath product* is a sequence of all subgroups  $W^{(k)}$  of depth  $k$  [9], where  $k \rightarrow \infty$ .

## References

- [1] L. A. Kaloujnine. Sur les  $p$ -group de Sylow. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **221** (1945), 222–224.
- [2] N. D. Zyulyarkina. On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in linear groups. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **279**: suppl. 1 (2012), 175–181.
- [3] O. Yu. Dashkova. On groups of finite normal rank. *Algebra Discrete Math.*, **1**: 1 (2002), 64–68.
- [4] R. Grigorchuk, V. Nekrashevich, V. Sushchanskii. Automata, Dynamical Systems, and Groups. *Trudy mat. inst. imeny Steklova*, **231** (2000), 134–214.
- [5] Aviv Rotbart. Generator sets for the alternating group. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, **65** (2011), Article B65b.
- [6] R. V. Skuratovskii. On commutator subgroups of Sylow 2-subgroups of the alternating group, and the commutator width in wreath products. *European Journal of Mathematics*, **7**: 1. (2021), 353–373.
- [7] Y. A. Drozd, R. V. Skuratovskii. Generators and relations for wreath products of groups. *Ukr. Math. J.*, **60** (2008), 1168–1171.
- [8] R. V. Skuratovskii. Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric alternating groups. *Modern problems in mathematics and its applications International (53rd National) Youth School-Conference*. Yekaterinburg, 2022, 37–38.
- [9] R. V. Skuratovskii. Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric groups and alternating with symmetric groups. <https://arxiv.org/pdf/2108.03752.pdf>.

## One generalization of the special linear group $SL_2(F)$ and solutions of matrix equation

Skuratovskii R.V.

*Tavrida National University, Kiev, Ukraine*

ruslcomp@mail.ru, skuratovskii.ruslan@tnu.edu.ua

First time, we introduce extended special linear group  $ESL_2(\mathbb{F})$ , which is extension of the matrix group  $SL_2(\mathbb{F})$ , where  $\mathbb{F}$  is arbitrary perfect field. We show that  $ESL_2(\mathbb{F})$  is a set of all square matrix roots from  $SL_2(\mathbb{F})$ . Also we generalize the group of unimodular matrices [1].

The criterions of roots existing for different classes of matrix — simple and semisimple matrixes from  $SL_2(\mathbb{F})$ ,  $SL_2(\mathbb{Z})$  and  $GL_2(\mathbb{F})$  are established that is important due to its applications [5].

**Definition 1.** *The set of matrices*

$$\{M_i : Det(M_i) = \pm 1, M_i \in GL_2(\mathbb{F}_p)\} \quad (1)$$

*forms extended special linear group in  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  and is denoted by  $ESL_2(\mathbb{F}_p)$ .*

*As it is studied by us,  $ESL_2(\mathbb{F}_p) \cong SL_2(\mathbb{F}_p) \rtimes C_2$ , where  $C_2$  is generated by reflection  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .*

*The involution from the top-subgroup  $C_2 \simeq \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  induces the sign of automorphism [6] in  $Aut(SL_2(\mathbb{F}_p))$ .*

Recall the **definition** of **TI – subgroup** [3, 4]. Let  $G$  be a group and  $A < G$ , then  $A$  is called **TI**–subgroup iff  $A \cap A^g = e$  for each  $g \in G \setminus N_G(A)$ .

**Remark.** Subgroup  $C_2$  is **TI – subgroup** and antinormal subgroup.

**Statement.** Let  $A \in SL_2(\mathbb{F})$ , where  $\mathbb{F}$  is arbitrary perfect field, where  $\mathbb{F}$  is arbitrary field. Then all solutions of equation  $X^2 = A$  contain in  $ESL_2(\mathbb{F})$ .

**Theorem 1.** Let  $A$  be simple or scalar matrix and  $A \in SL_2(\mathbb{F})$  [1], then for  $A$  there is a solution  $B \in SL_2(\mathbb{F})$  of the matrix equation

$$X^2 = A \quad (2)$$

if and only if

$$\text{tr } A + 2 \quad (3)$$

is quadratic element in  $\mathbb{F}$  or 0, where  $\mathbb{F}$  is a field.

If  $X \in ESL_2(\mathbb{F})$  then the matrix equation (2) has a solutions iff

$$\text{tr } A \pm 2 \quad (4)$$

is quadratic element in  $\mathbb{F}$  or 0.

This solution  $X \in ESL_2(\mathbb{F}) \setminus SL_2(\mathbb{F})$  iff  $(\text{tr } A - 2)$  is quadratic element or 0 in  $\mathbb{F}$  but  $(\text{tr } A + 2)$  is not. Conversely  $X \in SL_2(\mathbb{F})$  iff  $(\text{tr } A + 2)$  is quadratic element. Solutions belong to  $ESL_2(\mathbb{F})$  and  $SL_2(\mathbb{F})$  iff  $(\text{tr } A + 2)$  and  $(\text{tr } A - 2)$  are quadratic elements.

In the case  $A \in GL_2(\mathbb{F})$  this condition (3) takes form:

$$\text{tr } A \pm 2\sqrt{\det A} \quad (5)$$

is quadratic element in  $\mathbb{F}$  or 0 and  $\det A$  is quadratic element.

**Corollary 1.** Let  $A \in SL_2(\mathbb{F})$ , where  $\mathbb{F}$  is arbitrary field. Then all solutions of equation  $X^2 = A$  contain in  $ESL_2(\mathbb{F})$ .

**Corollary 2.** If  $A \in GL_2(\mathbb{F})$  the condition 3 takes the form:

$$\left( \frac{\text{tr } A}{p} \right) \in \{0, 1\}.$$



**Theorem 2.** If a matrix  $A \in GL_2(F_p)$  is semisimple with different eigenvalues and at least one an eigenvalue  $\lambda_i \in F_{p^2} \setminus F_p$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $p > 2$ , then  $\sqrt[A]{A} \in GL_2(F_p)$  iff of  $A$  satisfies:

$$\left(\frac{\lambda_i}{p}\right) = 1 \text{ in the square extention that is } F_{p^2}.$$

**Example.** Consider the matrix  $A = -E$ , where  $E$  is identity matrix in  $SL_2(F_3)$  satisfying conditions of Theorem 2 because of  $\left(\frac{-1}{9}\right) = 1$  in  $F_9$ . And there exists the matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(F_3)$  is square root for  $A$ . Indeed  $I^2 = -E$ .

**Proposition 1.** If  $B \in GL_2(\mathbb{F}_p)$  is root of equation  $X^3 = A$ , then

$$B = \frac{A + \text{tr}(\sqrt[3]{A}) \sqrt[3]{\det(A)}}{\left(\text{tr} \sqrt[3]{A}\right)^2 - \sqrt[3]{\det(A)}},$$

where  $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ .

For generalization on a matrix ring we reformulate previous statement in the following way.

**Proposition 2.** Let  $A \in M_2(\mathbb{F}_p)$ . Then it's cube roots  $R = \{B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid B^3 = A\}$  can be obtained as follows:

1. If  $A = 0$ , then  $R = \{B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid \det B = 0, \text{tr} B = 0\}$ ;
2. If  $A = c^3 E$ , where  $c \in \mathbb{F}_p/0$ , then  $R = \{c \cdot B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid B^3 = E\}$ ;
3. In other cases  $R \subset \left\{ B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid B = \frac{A + ab \cdot E}{a^2 - b} \right\}$ ,  $a = \text{tr} \sqrt[3]{A}$ ,  $b^3 = \det A$ ,  $a^3 - 3ab = \text{tr} A$ .

We define complete symmetric polynomial of  $n$ -th degree in two variables  $h_n(x, y) = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$ . In view of the fundamental theorem of symmetric polynomials there is one unique polynomial  $Q(x, y) \in \mathbb{F}_p[x, y]$ , such that:  $Q(e_1, e_2) = h_n$ , where  $e_1 = x + y$ ,  $e_2 = xy$  — elementary symmetric polynomials. Whence  $p_n(x, y) = x^n + y^n$  and polynomial  $P(x, y) \in \mathbb{F}_p[x, y]$ , such that  $P(e_1, e_2) = p_n$ .

**Theorem 3.** Let  $n \geq 3$  and  $A \in M_2(\mathbb{F}_p)$ ,  $a = \text{tr} \sqrt[3]{A}$ . If  $A \neq c \cdot E$  for any  $c \in \mathbb{F}_p$  and  $R = \{B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid B^n = A\}$  set of it's  $n$ -th roots, then next inclusion follows:

$$R \subset \left\{ B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid B = \frac{A + b Q_{n-2}(a, b) \cdot E}{Q_{n-1}(a, b)}, b^n = \det A, P_n(a, b) = \text{tr} A \right\}.$$

## References

- [1] Jorg LiesenVolker Mehrmann. Linear Algebra. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer International Publishing Switzerland, 2015.
- [2] R. V. Skuratovskii. Square root in matrix groups  $SL_2(F_p)$ ,  $ESL_2(F_p)$  and  $GL_2(F_p)$ . *Abstracts of reports of the International conference "Algebra and dynamical systems dedicated to on the 70-th anniversary of A.A. Makhnev* Nalchik, 2023, 144–147.
- [3] H. A. Janabi, L. Hethelyi and E. Horvath. TI subgroups and depth 3-subgroups in simple Suzuki groups. *Journal of Group Theory*, **24**: 3 (2020), 415–443.
- [4] N. D. Zyulyarkina. On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in linear groups. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **279**: suppl. 1 (2012), 175–181.
- [5] Saadet Arslan, Fikri Koken. The Pell and Pell-Lucas Numbers via Square Roots of Matrices. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, **8**: 3 (2016), 159–166.
- [6] Yu. I. Merzlyakov. Automorphisms of two-dimensional congruence groups. *Algebra and Logic*, **12**: 4 (1973), 262–267.
- [7] A. Kulshrestha, A. Singh. Computing  $n$ -th roots in  $SL_2$  and Fibonacci polynomials. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **130** (2020), Article 31.

## Road coloring problem for completely reachability

Yinfeng Zhu

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

IChzhu@at.urfu.ru

An *automaton* is a triple  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta)$  where  $Q$  and  $\Sigma$  are finite non-empty sets and  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ . The elements of  $Q$  is called *states*; the elements of  $\Sigma$  is called *letters*; and the function  $\delta$  is called the *transition function* of  $\mathcal{A}$ . The transition function  $\delta$  extends to a function  $Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  (still denoted by  $\delta$ ) via the recursion: for each  $q \in Q$ ,  $a \in \Sigma$ ,  $w \in \Sigma^*$ , set  $\delta(q, \epsilon) = q$  and  $\delta(q, wa) = \delta(\delta(q, w), a)$ . The power set of  $Q$  is denoted by  $\mathcal{P}(Q)$ . The transition function  $\delta$  can be further extended to a function  $(\mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q) \setminus \{\emptyset\}$  by setting  $\delta(P, w) = \{\delta(p, w) : p \in P\}$ , for all nonempty subset  $P \subseteq Q$  and  $w \in \Sigma^*$ .

A subset  $P \subseteq Q$  is called *reachable* in  $\mathcal{A}$ , if there exists a word  $w \in \Sigma^*$  such that  $P = \delta(Q, w)$ . An automaton is called *completely reachable* if every non-empty subset of its state set is reachable. The notion of completely reachable automata was first introduced in 2016 by Bondar and Volkov [2]. A number of

A road coloring of a finite graph  $\Gamma$  consists in assigning non-empty sets of labels (colors) from some alphabet  $\Sigma$  to edges of  $\Gamma$  such that the label sets assigned to the outgoing edges of each vertex form a partition of  $\Sigma$ . Colored this way,  $\Gamma$  becomes a DFA over  $\Sigma$ ; every such DFA is called a coloring of  $\Gamma$ . The Road Coloring Problem, solved by Trahtman [1], had asked which strongly connected graphs admit synchronizing colorings, i.e., colorings that are synchronizing DFAs. It turns out that, as it was conjectured by Adler, Goodwyn, and Weiss [3], the necessary and sufficient condition for a strongly connected graph to possess a synchronizing coloring is that the greatest common divisor of lengths of all directed cycles in the graph should be equal to 1. The latter property is called aperiodicity.

An analogous question makes sense for completely reachable automata. Namely, call a coloring of a graph completely reachable if it yields a completely reachable DFA. We will report some relevant results.

Firstly, we obtain a classification theorem for the digraphs admitting a completely reachable coloring.

**Theorem 1.** *A digraph  $G = (V, E, i, t)$  admits a completely reachable coloring if and only if*

1.  $G$  is strongly connected,
2.  $G$  is aperiodic,
3. for every subset  $U \subseteq V$ ,  $|U| \leq |N_-(U)|$ , where  $N_-(U)$  is the in-neighbour of  $U$ .

*The proof of this theorem only involves some elementary graph theory arguments.*

Secondly, if one ask for a completely reachable coloring within  $k$  colors, we have the following theorem. This is an interesting phenomena that have no parallel in the theory of synchronizing automata.

**Theorem 2.** *To determine a given digraph  $G = (V, E, i, t)$  whether or not it admits a completely reachable with  $k$  colors is NP-complete.*

At the end of this talk, we will show a classification of the digraphs whose all road colorings are completely reachable. Let  $S$  be a subset of  $\mathbb{Z}_n$ . Let  $G(S, n)$  be the digraph with the vertex set  $\mathbb{Z}_n$  and the edge set  $\{(i, i+1) : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{(n-1, s) : s \in S\}$ .

**Theorem 3.** *Let  $G$  be a digraph with  $n$  vertices. All the road colorings of the digraph  $G$  are completely reachable if and only if there exists  $S \subseteq \mathbb{Z}_n$  such that  $\gcd(S) = 1$  and  $G(S, n)$  is isomorphic to  $G$ .*

## References

- [1] A. N. Trahtman. The road coloring problem. *Israel J. Math.*, **172** (2009), 51–60.
- [2] E. A. Bondar and M. V. Volkov. Completely Reachable Automata. In *Cezar C empeanu, Florin Manea, and Jeffrey Shallit editors*, DCFS (2016), Springer, 1–17.
- [3] R. L. Adler, L. W. Goodwyn and B. Weiss. Equivalence of topological Markov shifts. *Israel Journal of Mathematics*, **27** (1977), 49–63.

## Presentation of cactus group <sup>1</sup>

Zimireva K. V.  
 Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia  
 k.zimireva@g.nsu.ru

A cactus group  $J_n$ ,  $n \geq 2$ , generated by elements  $s_{p,q}$ , where  $1 \leq p < q \leq n$ , and by the relations:

$$\begin{aligned} s_{p,q}^2 &= 1, \\ s_{p,q}s_{m,r} &= s_{m,r}s_{p,q}, \quad \text{if } [p,q] \cap [m,r] = \emptyset, \\ s_{p,q}s_{m,r} &= s_{p+q-r,p+q-m}s_{p,q}, \quad \text{if } [m,r] \subset [p,q]. \end{aligned}$$

Braid groups have various applications in algebra and topology, and the cactus group can be considered as analogue of groups of braids. The cactus group was appeared in the work of S. L. Devadoss [2] during the study the mosaic operad. But the definition of a cactus group was given later.

In the work of Belingeri, Chemin and Lebed [1], for  $n \leq 4$ , obtained a representation of the group  $J_n$  with a smaller number of generating elements and relations. Thus they showed that the representation can be simplified, but they did not find a presentation in the minimal generating system.

**Problem.** Find a system of generating relations for  $J_n$  in a minimal system of generating elements.

We have solved this problem, and the following theorem describes this result:

**Theorem.** A cactus group  $J_n$ ,  $n \geq 2$  is generated by the elements  $s_{1,i}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , and defining by the relations:

$$\begin{aligned} s_{1,i}^2 &= 1, \\ s_{1,i}s_{1,k}s_{1,j}s_{1,k} &= s_{1,k}s_{1,j}s_{1,k}s_{1,i}, \quad i \leq j, \quad i + j \leq k, \\ s_{1,i}s_{1,k}s_{1,j}s_{1,k} &= s_{1,i+j-k}s_{1,j}s_{1,i+j-k}s_{1,i}, \\ 4 \leq j + 2 \leq i \leq n, \quad j < k < i; \\ 2 \leq i + j - k \leq n, \quad 2k \leq i + j. \end{aligned}$$

## References

- [1] P. Belingeri, H. Chemin, V. Lebed. Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **59**: 1 (2024), 153–178.
- [2] S. L. Devadoss. Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad. *Contemp. Math.*, **239** (1999), 91–114.

<sup>1</sup>The work is supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation BASIS No 23-7-2-14-1.

**Математическое программирование,  
некорректные задачи и анализ данных  
(председатель член–корреспондент РАН М.Ю. Хачай)**

**Построение численных моделей на основе данных компьютерной томографии<sup>1</sup>**

Герасимов О.В.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*  
valeriy.karasikov@gmail.com

Саченков О.А.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*  
4works@bk.ru

Халиков М.Х.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*  
khalikov.008@yandex.ru

Ларцев А.И.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*  
arseniylarsev@gmail.com

Одним из способов восстановления структурных и механических свойств образцов из неомогенных материалов выступает анализ и обработка изображений исходной среды. В этом случае предполагается интерпретация результатов сканирования на основе установления зависимости между данными о распределении проницаемости материала и его физическими свойствами [1]. Распространение получило применение данных рентгеновской компьютерной томографии при построении численных моделей биологических объектов в клинической практике [2]. В качестве образцов могут выступать костные органы различной геометрической и топологической структуры [3]. В данной работе рассматриваются результаты численного моделирования костей конечностей карликовых свиней, а также проводится их сопоставительный анализ с данными натуральных экспериментов [4]. Протокол испытаний был одобрен Комитетом по уходу за животными Казанского государственного медицинского университета (протокол № 5 от 20 мая 2020 года).

В основе подхода лежит метод конечных элементов. Учёт данных о распределении материала на основе изображений выполнялся взвешенным интегрированием матрицы жёсткости каждого конечного элемента сетки [5]. Нагружение образцов соответствовало эксперименту на изгиб: перемещения дистальных участков упруго фиксировались в направлении трёх координатных осей, в области диафиза прикладывалось поперечное воздействие индентора. Время вычислений для каждой расчётной сетки находилось в пределах 15 минут.

Построение конечно-элементных сеток проводилось на основе относительного содержания упругого материала в каждом элементе. Оценка напряжённо-деформированного состояния выполнялась путём вычисления нормированной ошибки энергии. Эквивалентное напряжение по Мизесу выступало в качестве параметра для определения прочности материала. Вычисление предельных значений выполнялось на основе главных компонент тензора напряжений. Результаты показали, что наибольшие значения ошибки энергии соответствовали области приложения кинематических граничных условий. Максимальное эквивалентное напряжение по Мизесу наблюдалось в зоне контакта индентора с поверхностью костного органа (нормированная ошибка энергии составляла 20-40%). На основе полученных главных компонент тензора напряжений было установлено, что величина модуля упругости Юнга для передних костей животных лежит в пределах 2 ГПа.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому федеральному университету по государственному заданию в сфере научной деятельности (проект № FZSM-2023-0009).

## Список литературы

- [1] S. Luan, E. Chen, J. John, S. Gaitanaros. A data-driven framework for structure-property correlation in ordered and disordered cellular metamaterials. Arxiv:2304.04809v1.
- [2] A. Bagirov, P. Suvarly, E. Ogaryov, A. Yeltsin, D. Mininkov, A. Tagizade. Multislice computed tomography in the complex assessment of deformities of long tubular bones of the lower extremities: prospective cohort study. *N.N. Priorov Journal of Traumatology and Orthopedics*, **29** (2023), 269–277.
- [3] Y. A. Vahterova, Y. N. Min. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials. *TURCOMAT*, **12**: 2 (2021), 2703–2708.
- [4] S. Choi, Y.-K. Park, J. H. Kim, H. Moon, W.-K. Kwon, C. Ham. Clinical Importance of Hounsfield Unit in Computed Tomography of Sub-Axial Cervical Vertebral Body. *Asian Journal of Pain*, **8** (2022), article 2.
- [5] О. В. Герасимов, Р. Р. Рахматулин, Т. В. Балтина, О. А. Саченков. Определение механических свойств костной ткани численно-цифровым методом на основе данных компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*, **27**: 3 (2023), 53–66.

**О покрытии поверхностей вращения равными шарами**

Казаков А. Л.

*Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН,  
Иркутск, Российская Федерация  
kazakov@icc.ru*

Лемперт А. А.

*Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН,  
Иркутск, Российская Федерация  
lempert@icc.ru*

Нгуен Д. М.

*Иркутский национальный исследовательский технический университет,  
Иркутск, Российская Федерация  
nguyenducminh.mt@gmail.com*

Задача построения минимальных (тончайших) покрытий, наряду с задачей о построении плотнейших упаковок, относится к классическим проблемам вычислительной геометрии [1]. Она возникает в приложениях, например, при размещении беспроводных датчиков и проектировании глобальных систем навигации и связи [2]. При этом покрываемая поверхность, зачастую, является поверхностью вращения, а элементы покрытия одинаковы. В данной работе рассматривается задача о построении тончайших покрытий таких поверхностей заданным числом равных шаров.

**Постановка задачи.** Пусть заданы метрическое пространство  $X$  и поверхность вращения  $S(x, y, z) \subset X$ , заданная параметрически:

$$x = x(\alpha, u), y = y(\alpha, u), z = z(\alpha, u) : \alpha \in [0, 2\pi]; u \in (-\infty; +\infty).$$

Необходимо разместить  $n$  шаров  $C_i(O_i, R)$  с центрами  $O_i(x_i, y_i, z_i) \in S$ , чтобы поверхность  $S$  полностью лежала в объединении равных шаров, радиус  $R$  которых минимален. Тогда задачу можно записать как

$$R \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\forall p \in S, \exists i: \rho(O_i, p) \leq R, \quad (2)$$

$$O_i \in S, i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Целевая функция (1) минимизирует радиус покрытия, условие (2) гарантирует, что любая точка поверхности  $S$  принадлежит по крайней мере одному покрывающему шару, а условие (3) означает, что все центры шаров располагаются на поверхности  $S$ .

Отметим, что  $\rho(a, b)$  задает расстояние между двумя точками в пространстве  $X$  и определяется из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z)}, \quad (4)$$

где  $G(a, b)$  – множество непрерывных кривых, принадлежащих  $S$  и соединяющих точки  $a$  и  $b$ . Если непрерывная функция  $0 \leq f(x, y, z) \leq \beta$  интерпретируется как мгновенная скорость движения в каждой точке  $(x, y, z) \in X$ , то  $\rho(a, b)$  – минимальное время перемещения между точками  $a, b \in S$ . Если же  $f(x, y, z) \equiv 1$ , то имеем традиционное евклидово расстояние.



**О методе решения.** Для решения задачи применяется оптико-геометрический подход [3], который является следствием физических законов Ферма и Гюйгенса [4].

Для того, чтобы свести задачу покрытия  $n$  шарами к серии задач о покрытии одним шаром, разобьем поверхность  $S$  на  $n$  областей, используя геодезическую диаграмму Вороного, которая строится по произвольному набору начальных точек (центров). Для каждой ячейки Вороного необходимо определить границу, состоящую из точек, расположенных на равном геодезическом расстоянии от двух или более центров. Далее для каждой ячейки определяется ее хаусдорфов центр [5], который является центром покрывающего шара минимального радиуса.

Отметим, что линии, по которым пересекаются цилиндр или конус с покрывающими шарами, являются пространственными кривыми четвертого порядка [6]. Это существенно усложняет построение покрытий искомого вида для этих поверхностей даже в сравнении со случаем, когда покрываемое множество является сферой.

**Результаты.** Разработан эвристический алгоритм, основанный на построении геодезической диаграммы Вороного и оптико-геометрического подхода, позволяющий находить локально-оптимальные решения рассмотренной задачи. В качестве покрываемой поверхности рассмотрены сфера, сферический сегмент, цилиндр, конус. При этом использовалась как евклидова, так и неевклидова метрика (4).

Проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого решались серии задач покрытия указанных поверхностей. В случаях, когда поверхности допускают развертывание, дополнительно проводилось покрытие разверток. Проведено сравнение результатов расчетов с известными, показавшее, что геометрические методы являются более экономичными, а методы, основанные на оптических аналогиях, дают более точные результаты.

Кроме того, проведена статистическая обработка результатов вычислительного эксперимента. В качестве случайной величины рассматривалось отклонение радиуса от наилучшего найденного. Оказалось, что она подчиняется гамма-распределению, причем для различных поверхностей параметры оказались весьма близки. Проверка гипотез по критериям Пирсона и Колмогорова-Смирнова показала, что при уровне значимости 0.05 нет оснований их отвергнуть.

## Список литературы

- [1] F. P. Preparata, M. I. Shamos. Computational geometry: An introduction. N Y: Springer-Verlag, 1985, 398p.
- [2] В. А. Миклуш, Т. М. Татарникова. Решение задачи расположения датчиков различной физической природы при организации беспроводной сенсорной сети с топологией Mesh *Успехи современной радио-электроники*, **76**: 12 (2022), 15–20.
- [3] А. Л. Казаков, А. А. Лемперт. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике. *Автоматика и телемеханика*, **72**: 7 (2011), 50–57.
- [4] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. М.: Либроком, 2013.
- [5] А. Л. Казаков, П. Д. Лебедев. Алгоритмы построения наилучших  $n$ -сетей в метрических пространствах. *Автоматика и телемеханика.*, **7** (2017), 141–155.
- [6] C. G. Du Toit. Area of the Intersection between a Sphere and a Cylindrical Plane. *Mathematical and Computational Applications*, **27**: 79 (2022).

## Обратная задача для одного смешанного интегро-дифференциального уравнения

Меражова Ш.Б.

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

s.b.merajova@buxdu.uz

Теория обратных и некорректных задач широко используется практически во всех областях науки, в частности при решении практических задач. В данной статье в начале исследована прямая задача, и дается метод его решения.

В настоящее время актуально изучение обратных задач, поэтому приведена постановка обратной задачи, для смешанного интегро-дифференциального уравнения при решении которой получили уравнения Фредгольма 1-рода.

Рассмотрим в области  $G = \{(x, t) : 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ , интегро-дифференциальное уравнение смешанного типа

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x) + \int_0^t K(\tau)u(x, t - \tau)d\tau, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = f(x), & t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta$  - заданные положительные числа.

**Поставим следующую задачу:** найти в области  $G$  функции  $u(x, t)$  удовлетворяющее уравнению (1) и следующим условиям:

краевые условия:

$$u|_{x=0} = 0 = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (2)$$

и считаем, что имеет место локальное условие:

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

а также условия склейки при  $t = 0$  :

$$\lim_{t \rightarrow -0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow -0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

здесь  $\varphi(\cdot)$  заданная достаточно гладкая функция.

Обозначим  $G_+ = G \cap \{t > 0\}$ ,  $G_- = G \cap \{t < 0\}$ .

Соотношения (1)-(4) являются прямой задачей, т.е., если известны функции  $\varphi, f, K$ , то решение  $u(x, t)$  может быть найдено из соотношений (1)-(4).

**Определение 1.** Решением задачи (1)-(4) назовем функцию  $u(x, t)$  из класса  $C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$  удовлетворяющую соотношениям (1)-(4).

Теперь поставим обратную задачу в заданной области:

**Обратная задача:** Необходимо определить функцию  $K(t)$ , если о решении прямой задачи (1)-(4) известна следующая дополнительная информация:

$$u(x, \beta) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5)$$

здесь  $\psi(\cdot)$  - заданная достаточно гладкая функция.

Решаем задачу методом Фурье, т.е. разлагаем заданные функции и неизвестную функцию  $u(x, t)$  в ряды Фурье (где  $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ ):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n x), \quad (6)$$

Находим:

$$\begin{cases} u_n(t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau) \cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau, & t > 0, \\ u_n(t) = \frac{\cos(\lambda_n t) - \lambda_n \sin(\lambda_n t)}{\gamma_n} \left[ \varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] + \frac{f_n}{\lambda_n^2}, & t < 0. \end{cases} \quad (7)$$

где

$$F_n(t) = \int_0^t K(\tau) u_n(t - \tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\gamma_n = \cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha). \quad (9)$$

В работах [1, 2] для (9) было доказано

$$|\gamma_n| = |\cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)| \geq \alpha_0 > 0. \quad (10)$$

Для однозначной разрешимости прямой задачи (1)-(4) получили следующую теорему:

**Теорема.** Пусть выполнены условия (10) и

A<sub>1</sub>)  $\varphi \in C^2[0, l]$ ,  $\varphi''' \in L^2[0, l]$  и  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ ,

A<sub>2</sub>)  $f \in C^1[0, l]$ ,  $f'' \in L^2[0, l]$  и  $f(0) = f(l) = 0$ ,

A<sub>3</sub>)  $K \in C[-\alpha, \beta]$ .

Тогда прямая задача (1)-(4) имеет единственное решение, которое представляется в виде ряда (6).

Для решения обратной задачи (1)-(5) получили уравнения Фредгольма 1-рода:

$$\int_0^\beta K(\tau) u_n(\beta - \tau) \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_n^2(\beta-\tau)} \right) d\tau = \lambda_n^2 \psi_n - f_n - \frac{1}{\gamma_n} \left[ \lambda_n^2 \varphi_n - f_n \right] e^{-\lambda_n^2 \beta}.$$

Введём следующие обозначения:

$$A_n = \lambda_n^2 \psi_n - f_n - \frac{1}{\gamma_n} \left[ \lambda_n^2 \varphi_n - f_n \right] e^{-\lambda_n^2 \beta},$$

Значит наше уравнение имеет следующий вид:

$$\int_0^\beta K(\tau) u_n(\beta - \tau) \cdot \left( 1 - e^{-\lambda_n^2(\beta-\tau)} \right) d\tau = A_n.$$

Для решение этого уравнения можно использовать методы заданные в работах [3, 4].

## Список литературы

- [1] D. K. Durdiyev, Sh. B. Merajov. Inverse problem for an equation of mixed parabolic–hyperbolic type with a Bessel operator. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **16**: 3 (2022), 394–402.
- [2] К. Б. Сабитов. Нелокальная задача для неоднородного уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области. *Математические заметки*, **89(4)**: 9 (2011), 596–602.
- [3] С. И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
- [4] А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Докл. АН СССР*. **151**: 3, 501–504.

## Approximation algorithms for capacity vehicle routing problems

Yongyu Chen

*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*

chen@urfu.ru

Finding the shortest travelling tour of vehicles with capacity  $k$  from the depot to the customers is called the Capacity vehicle routing problem (CVRP). CVRP plays an essential position in logistics systems, and it is the most intensively studied problem in combinatorial optimization. In complexity, CVRP with  $k \geq 3$  is an NP-hard problem, and it is APX-hard as well. We already knew that it could not be approximated in metric space. Moreover, it is the first problem resisting Arora's famous approximation framework. So, whether there is, a polynomial-time  $(1+\epsilon)$ -approximation for the Euclidean CVRP for any  $\epsilon > 0$  is still an open problem. This talk will summarize the research progress from history to up-to-date developments.

## References

- [1] Y. Chen. Approximation schemes for capacity vehicle routing problems: A survey. *2023 2nd International Conference On Computational Modelling, Simulation And Optimization (ICCMO)*. 2023, 277–282.
- [2] S. Arora. Approximation schemes for NP-hard geometric optimization problems: A survey. *Mathematical Programming*, **97**: 1 (2003), 43–69.
- [3] M. Bern, D. Eppstein. Approximation algorithms for geometric problems. *Approximation algorithms for NP-hard problems*, 1997, 296–345.
- [4] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Carnegie-Mellon Univ Pittsburgh Pa Management Sciences Research Group, 1976.
- [5] M. Haimovich, A. H. Rinnooy Kan. Bounds and heuristics for capacitated routing problems. *Mathematics of Operations Research*, **10**: 4 (1985), 527–542.
- [6] S. Arora. Polynomial time approximation schemes for Euclidean travelling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM (JACM)*, **45**: 5 (1998), 753–782.
- [7] A. Das, C. Mathieu. A quasi-polynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *In Proceedings of the twenty-first annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010, 390–403.
- [8] M. Khachay, H. Zaytseva. Polynomial Time Approximation Scheme for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem. *In International Conference on Control, Automation and Artificial Intelligence (CAAI)*. DEStech Publications, Inc., 2015, 43–47.
- [9] F. Grandoni, C. Mathieu, H. Zhou. Unsplittable Euclidean Capacitated Vehicle Routing: A  $(2+?)$ -Approximation Algorithm. *14th Innovations In Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2023)*. **251** (2023), 63:1-63:13. <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ITCS.2023.63>

## Stacking Based Approach with Reduced Amino Acid Alphabets and Word2Vec for Modelling Antigenic Variants

Firstkov A.L., Forghani M.

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*  
firstk121@gmail.com

Forghani M.

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*  
majid.forqani@gmail.com

Combining machine learning (ML) or deep learning (DL) models into an ensemble can often significantly increase their performance. Typically, the models to be combined are called base models, and the model that uses the output of the base models as input is called a metamodel. In order for the base models to be combined into an ensemble, they must be different from each other. In order to decrease the dependency between base models outputs, there are several scenarios e.g., selecting subsets of the training dataset as in bagging [1] or subsets of features, as in random forest [2]. However, the degree of dependency can be decreased by constructing a stacking-based ensemble which includes different ML and DL models as baselines and allows them to train on the entire sample and the full set of features [3]. Recently, we proposed [4] a method of combining encoded genetic sequences using reduced amino acid alphabets (RAAA) and well known Word2Vec [5] framework, which leads to construction of a new stacking ensemble aiming at modeling the antigenic evolution of the influenza virus. The proposed approach is part of our project for predicting the viral evolution. The influenza virus was chosen as the subject of our study since the virus has a long history of genetic sequence, and it poses as a strong threat to the public health. Indeed by constructing a high-performance model for this virus, its application can be simply extended to other pathogens.

Influenza-related respiratory disease mortality estimates range from 291 243 to 645 832 deaths annually [6]. At the moment, vaccination is an effective way to control the virus. Vaccine components must be updated according to circulating strains antigenic characteristics. For this purpose, hemagglutination inhibition (HI) assay, which is the gold-standard laboratory procedure measures how effectively antibodies against a reference strain bind and block an antigen of the test strain.

Since HI assay is expensive and time-consuming, various computer-aided and mathematical methods have been developed to acquire earlier knowledge on the antigenic characteristics of currently circulating viruses. One of the fundamental problem in this modeling is how to embed the genetic sequence. This problem was studied by Forghani et al. [7]. They suggested a two-step embedding method based on clustering AAindex1 and application of RAAA and evaluating the encoding on by performing a comprehensive grid search including 224 147 fits (41 alphabets ? 7 thresholds ? 781 5-fold cross-validations) for each subtype (H3N2 and H1N1). We employed outperformed RAAAs from their work for constructing our stacking-ensemble model.

Recently, Yin et al. proposed a model IAV-CNN [8], a convolutional neural network model incorporated with framework Word2Vec to predict the antigenic variants of influenza virus. Their model outperformed several classical and modern models in terms of accuracy: 0.920, 0.858, and 0.889 for subtypes H1N1, H3N2, and H5N1, respectively. Due to the high accuracy of their model, we set it as the baseline in our numerical experiments.

For training embedding, we used a database that represents the full history of A/H1N1 evolution up to the year 2022. We consider hemagglutinin protein on the virus surface, which is formed by 20 amino acids (AA) called standard. RAAA is an alphabet in which the 20 standard amino acids are clustered and divided into groups. In this way, a mutation is redefined as a change between two amino acid groups of the

simplified alphabets. A reduced amino acid composition simplifies protein system complexity, providing a better insight into the structural similarities throughout the protein sequences. The encoded by RAAA sequences were split into 3-grams with overlap. Skip-gram was chosen for train embedding. It consists of two-layer neural network that learns to predict context based on target word. We trained 14 different embeddings, each of which obtained from a different amino acid alphabet.

In order to compare results with baseline, we took the same HI assay data used in the paper [8]. Since some of the sequences have ambiguous amino acids, we performed an imputation technique based on the nearest neighbor principle to eliminate ambiguity in sequences. All models in our study were evaluated using stratified 5-fold cross validation technique while the random seed is fixed to maintain the reproducibility of data splitting during modeling. Since the training set of each fold still has an unequal distribution of binary classes, we increased the number of objects in the minor class by applying the synthetic minority over-sampling technique (SMOTE). In order to deal with overfitting, we augmented the balanced training dataset by increasing the number of objects in both classes again by using SMOTE.

Various neural network architectures were evaluated including convolutional networks (CNN), networks based on LSTM and GRU, as well as their combinations with CNN, and finally Xception. Further, we build stacking based ensemble using best model with optimized hyperparameters on 13 RAAAs which we considered in our previous work. Surprisingly, two models obtained from two RAAAs slightly outperformed the model obtained from the standard alphabet.

Indeed, embeddings increase feature diversity of the final ensemble model. Each base model is trained in a different embedding and its output serves as a feature for metamodel. We evaluated 4 classifiers, including random forest, support vector machine, multi layer perceptron, and logistic regression, as metamodels in our ensemble. We assessed the performance of them by performing a grid search on the fixed 5-fold dataset. Random forest and support vector machine outperformed others.

Early assessment of antigenic similarity between strains of the influenza virus is critical to developing an effective vaccine. We introduce an ensemble approach by incorporating reduced amino acid alphabets and Word2Vec. The model benefits from the multi-representation of antigenicity and amino acid neighbor effect, which is captured by Word2Vec. By taking into account 14 amino acid alphabets, we constructed a CNN model for each alphabet; the output of which serves as a binary feature for the final ensemble model. We were able to predict the antigenic variants of the H1N1 subtype with a high accuracy 0.933.

## References

- [1] Breiman L. Bagging Predictors. Berkeley, California: Department of Statistics University of California. Technical Report, No. 421,1994.
- [2] L. Breiman. Random Forests. *Machine Learning*, 45: 1 (2001), 5–32.
- [3] D. H. Wolpert. Stacked generalization. *Neural networks*, 5: 2 (1992), 241–259.
- [4] M. Forghani, M. Yu. Khachay, A. L. Firstkov, E. Ramsay. An Artificial Neural Network Based Ensemble Model for Predicting Antigenic Variants: Application of Reduced Amino Acid Alphabets and Word2Vec. *International Conference of Signal Processing and Intelligent Systems (ICSPIS)*, 2022.
- [5] T. Mikolov, K. Chen, G. Corrado, J. Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. arXiv:1301.3781.
- [6] Iuliano A. D. et al. Estimates of global seasonal influenza-associated respiratory mortality: a modelling study. *The Lancet*, 391: 10127 (2018), 1285–1300.
- [7] M. Forghani, A. L. Firstkov, M. M. Alyannezhadi, D. M. Danilenko, A. B. Komissarov. Reduced amino acid alphabet-based encoding and its impact on modeling influenza antigenic evolution. *Russian Journal of Infection and Immunity = Infektsiya i immunitet*, 12: 5 (2022), 837–849.
- [8] R. Yin, N. N. Thwin, P. Zhuang, Z. Lin, C. K. Kwoh. A 2D convolutional neural network model to predict antigenic variants of influenza A virus. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*. 2021.

**Теория функций**  
(председатель д.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)

## Асимптотика собственных значений краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе с малым отверстием

Давлетов Д.Б.

*Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация*  
davletovdb@mail.ru

Ершов А.А.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация*  
*Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация*  
ale10919@yandex.ru

Пусть  $\Omega = (-b, b)$ ,  $\Pi = \Omega \times (a, +\infty)$ ,  $-\infty < a < 0$ ,  $0 < b < +\infty$ ,  $\Omega_a = \Omega \times \{a\}$ , начало координат лежит в  $\Pi \cap \omega$ , где  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  — связная ограниченная область с гладкой границей  $\partial\omega$ ,  $\omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} : \varepsilon^{-1}\mathbf{x} \in \omega\}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$ .

Через  $\Delta^*$  обозначим оператор Ламэ:

$$\Delta^* := \Delta + \alpha \nabla \operatorname{div},$$

где  $\alpha = (\lambda + \mu)/\mu$ ,  $\lambda, \mu > 0$  — постоянные Ламэ (см., например, [1, формулы (8.4) при  $A_{11} = A_{22} = \lambda + 2\mu$ ,  $A_{12} = \lambda$ ,  $A_{33} = \mu$ ,  $A_{13} = A_{23} = 0$ ]).

Положим, что  $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$  — вектор-столбец с компонентами (см., например, [1, формулы (8.15) при  $\beta_1 = A_{13} = 0$ ,  $\beta_2 = A_{23} = 0$ ,  $\gamma_1 = A_{12} = \lambda$ ,  $\gamma_2 = A_{33} = \mu$ ,  $\delta_1 = A_{31} = \mu$ ,  $\delta_2 = A_{12} = \lambda$ ,  $\eta_1 = A_{23} = 0$ ,  $\eta_2 = A_{33} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right)_1 &= \left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\right) \cos(\widehat{\mathbf{n}; x_1}) + \mu\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\right) \cos(\widehat{\mathbf{n}; x_2}), \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right)_2 &= \mu\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\right) \cos(\widehat{\mathbf{n}; x_1}) + \left(\lambda\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\right) \cos(\widehat{\mathbf{n}; x_2}), \end{aligned}$$

где  $\phi_1(\mathbf{x})$  и  $\phi_2(\mathbf{x})$  — компоненты вектор-функции  $\phi(\mathbf{x})$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль.

Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача Стеклова:

$$\begin{cases} \Delta^* \psi_\varepsilon = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Pi_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Pi \setminus \bar{\Omega}_a, \\ \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\mathbf{n}} = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, & \mathbf{x} \in \Omega_a, \\ \psi_\varepsilon = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (1)$$

Задача (1) является возмущённой в том смысле, что она рассматривается в области с сингулярным геометрическим возмущением [2, гл. III] в виде малого отверстия. Соответственно, невозмущённой или предельной (в смысле сходимости областей в хаусдорфовой метрике) для неё будет следующая задача в полуполосе без отверстия:

$$\begin{cases} \Delta^* \psi_0 = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Pi, \\ \psi_0 = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Pi \setminus \bar{\Omega}_a, \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}} = \lambda_0 \psi_0, & \mathbf{x} \in \Omega_a. \end{cases} \quad (2)$$



В работе [3] ранее была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Собственные значения предельной краевой задачи (2) существуют и имеют следующую общую структуру:

$$0 < \lambda_{0,1} \leq \lambda_{0,2} \leq \dots \leq \lambda_{0,k} \leq \dots,$$

где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность, причем  $\lambda_{0,k}$  удовлетворяют уравнению

$$\left( \frac{2(\alpha+2)}{\alpha \lambda_{0,k}} \right)^2 \cos^4(b\lambda_{0,k}) - \left( \frac{2(\alpha+2)}{\alpha \lambda_{0,k}} \right)^2 \cos^2(b\lambda_{0,k}) + 4b^2 = 0,$$

и верны оценки

$$0 < \lambda_{0,k} \leq \frac{\alpha+2}{2\alpha b}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для соответствующих нормированных в  $L_2(\Omega_a)$  собственных вектор-функций  $\psi_{0,k}(\mathbf{x})$  имеют место следующие равенства:

$$\psi_{0,k}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_k(x_1) e^{-\sqrt{\zeta_k}(x_2-a)},$$

где  $\zeta_k$  и  $\mathbf{v}_k(x_1) = (v_{k,1}(x_1), v_{k,2}(x_1))^T$  ( $T$  — знак транспонирования) — собственные значения и соответствующие нормированные в  $L_2(\Omega)$  собственные вектор-функции краевой задачи

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2 v_{k,1}}{dx_1^2} + \zeta_k v_{k,1} \right) + \alpha \frac{d^2 v_{k,1}}{dx_1^2} - \alpha \sqrt{\zeta_k} \frac{dv_{k,2}}{dx_1} = 0, & x_1 \in \Omega, \\ \left( \frac{d^2 v_{k,2}}{dx_1^2} + \zeta_k v_{k,2} \right) - \alpha \sqrt{\zeta_k} \frac{dv_{k,1}}{dx_1} + \alpha \zeta_k v_{k,2} = 0, & x_1 \in \Omega, \\ v_{k,1}(\pm b) = v_{k,2}(\pm b) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Собственные значения краевых задач (2) и (3) связаны равенством

$$\lambda_{0,k} = \sqrt{\zeta_k}.$$

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda_0$  — простое собственное значение предельной краевой задачи (2) и  $\psi_0(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ . Тогда для собственного значения  $\lambda_\varepsilon$  сингулярно возмущенной краевой задачи (1), сходящегося к  $\lambda_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda \left( \frac{1}{\ln \varepsilon} \right) + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

в котором  $\Lambda(\tau)$  — голоморфная в нуле функция, такая что

$$\Lambda(0) = \lambda_0, \quad \Lambda'(0) = \lambda_1,$$

$$\lambda_1 = -\frac{2\pi}{c} |\psi_0(\mathbf{0})|^2,$$

где постоянная  $c = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} > 0$  выражается через постоянные Ламэ  $\lambda > 0$  и  $\mu > 0$ .

## Список литературы

- [1] В. Д. Купрадзе. Методы потенциала в теории упругости, Физматгиз, Москва, 1963.
- [2] А. М. Ильин. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач, Наука, Москва, 1989.
- [3] Д. Б. Давлетов, О. Б. Давлетов, Р. Р. Давлетова, А. А. Ершов. О собственных элементах двумерной краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **33**: 1 (2023), 54–65.

## О рациональности производящей функции для числа корневых лесов в циркулянтных графах

Камалов Улугбек Полат улы  
 Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан  
 kamalovu939@gmail.com

Пусть  $s_1, s_2, \dots, s_k$  натуральные числа такие, что  $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \frac{n}{2}$ . Граф  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  на  $n$  вершинах  $0, 1, 2, \dots, n-1$  называется *циркулянтным* если вершина  $i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  смежна с вершинами  $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k \pmod{n}$ . Если  $s_k < \frac{n}{2}$ , то все вершины графа имеют четную степень  $2k$ . Если  $n$  четное и  $s_k = \frac{n}{2}$ , то все вершины имеют нечетную степень  $2k-1$  ([1]).

Пусть  $\Phi(x)$ - производящая функция для числа корневых лесов  $f_\Gamma(n)$  в циркулянтном графе  $\Gamma = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  или  $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n/2)$ . Мы покажем, что  $\Phi(x)$  является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами, удовлетворяющей условию  $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$ . *Корневым деревом* называется дерево, в котором одна вершина выделена. *Корневой лес*- это лес, связанные компоненты которого являются корневыми деревьями. *Корневым остовным лесом* в графе  $\Gamma$  называем корневой лес, содержащий все вершины графа  $\Gamma$  ([2]). Мы рассматриваем обыкновенные графы.

Основным результатом является следующая

**Теорема.** Пусть  $f_\Gamma(n)$  число корневых остовных лесов в циркулянтном графе  $\Gamma = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  четной валентности или  $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$  нечетной валентности. Тогда

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n)x^n$$

является рациональной функцией с целочисленными коэффициентами. Более того,  $\Phi(x) = -\Phi(\frac{1}{x})$ .

## Список литературы

- [1] A. D. Mednykh, I. A. Mednykh. The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic, *Discrete Math.*, **342**: 6 (2019), 1772–1781
- [2] L. A. Grunwald, I. A. Mednykh. The number of rooted forests in circulant graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, **22**: 4 (2022), #P4.10.

## О существовании обобщенного уточненного порядка в смысле Валирона<sup>1</sup>

Костенко И.В.

Курский государственный университет, Курск, Российская Федерация  
sandrakoh@mail.ru

Начиная с работ Ж. Адамара и Э. Бореля, математиков интересовал вопрос о нахождении возможно более узких классов функций  $H$ , в которых для любой целой функции  $f$  нашлась бы возрастающая неограниченная функция  $h$ ,  $r > 0$ , с условием

$$\sigma_f := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \in (0, +\infty) \quad (1)$$

и с возможностью вычислить эту величину, называемую *типом  $f$  относительно  $h$* , по тейлоровским коэффициентам или по распределению нулей функции  $f$ . Для подкласса целых функций конечного порядка эту задачу решил Ж. Валирон [3], введя понятие уточненного порядка. Он показал, что каждая целая функция конечного порядка имеет свой уточненный порядок  $\rho(r)$ ,  $r > 0$ , для которого тип функции  $f$  относительно функции  $h(r) := r^{\rho(r)}$  нормален, то есть выполняется (1). Более общая теорема доказана Б. Я. Левиным [2, гл. I, теорема 16]. Напомним классическое определение уточненного порядка.

Абсолютно непрерывная функция  $\rho$  на некотором луче  $(a, +\infty)$  называется *уточненным порядком в смысле Валирона*, если одновременно существуют два предела

$$1) \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho \in (0, +\infty), \quad 2) \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Здесь под  $\rho'(r)$  мы понимаем наибольшее производное число в точке  $r$ .

Г. Г. Брайчев (см. [1]) расширил задачу Адамара, понимая под ее решением нахождение возможно более узких классов функций  $H$  таких, что для любой целой функции  $f$  дополнительно к (1) найдется  $h_1 \in H$  с условием

$$\underline{\sigma}_f := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h_1(r)} \in (0, \infty) \quad (2)$$

и с возможностью вычисления и этой величины по коэффициентам ряда Тейлора функции  $f$ .

Мы рассматриваем обобщенный уточненный порядок в смысле Валирона, когда условие 1) заменяем более общим условием

$$\alpha = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho \in (0, +\infty),$$

Основной результат — следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $A$  — возрастающая строго положительная функция конечного порядка, т.е.

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r)}{\ln r} = \varrho < +\infty,$$

и конечного нижнего порядка:

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r)}{\ln r} = \alpha > 0.$$

Тогда существует такой обобщенный уточненный порядок  $\rho$  в смысле Валирона, что

I1)  $\rho(r) = \varrho + \psi(r)$  — абсолютно непрерывная монотонная функция;

I2)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0$ ,  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 1$ , где  $V(r) = r^{\rho(r)}$ ;

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006).

I3) Если  $\psi \neq 0$ , то функции  $\psi$  и  $\psi \ln^2 r$  — монотонные при  $r \geq r_0$ , где  $r_0 \geq e$ , и имеют различные направления роста. В частности,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} \right| \leq \frac{2|\psi(r)|}{r \ln r} \quad \text{при } r \geq r_0.$$

Кроме того, в этом случае  $A \leq V$ , а также существуют такие последовательности  $r_n \rightarrow \infty$  и  $t_{k,n}$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{k,n} = r_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A(t_{k,n}) = V(r_n).$$

Справедливы соотношения:

II1)  $\rho(r) = \alpha + \psi(r)$  — абсолютно непрерывная монотонная функция;

II2)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0$ ,  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 1$ ;

II3) Если  $\psi \neq 0$ , то функции  $\psi$  и  $\psi \ln^2 r$  — монотонные при  $r \geq r_0$ , где  $r_0 \geq e$ , и имеют различные направления роста. В частности,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} \right| \leq \frac{2|\psi(r)|}{r \ln r} \quad \text{при } r \geq r_0.$$

Кроме того, в этом случае  $A \geq V$ , а также существуют такие последовательности  $r_n \rightarrow \infty$  и  $t_{k,n}$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{k,n} = r_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A(t_{k,n}) = V(r_n).$$

## Список литературы

- [1] Г. Г. Брайчев. Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций. *Владикавказский математический журнал*, **7**: 3 (2005), 11–25.
- [2] Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [3] G. Valiron. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière. *Annales de la faculte des sciences de Toulouse*, **5**: 3 (1913), 117–257.

## Неравенство Бернштейна для производной Рисса дробного порядка, меньшего единицы, целых функций экспоненциального типа и тригонометрических полиномов

Леонтьева А.О.

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*  
 lao-imm@yandex.ru

Пусть  $\mathbf{B}_\sigma$  — введённый С. Н. Бернштейном класс целых функций экспоненциального типа не выше  $\sigma > 0$ , ограниченных на вещественной оси. Он содержит подкласс  $\mathbf{V}_\sigma \subset \mathbf{B}_\sigma$  целых функций экспоненциального типа, представимых в виде

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} ds(t),$$

где  $s$  — комплекснозначная функция ограниченной вариации. На функциях класса  $\mathbf{V}_\sigma$  производная Рисса порядка  $\alpha > 0$  определяется при помощи множителя Фурье  $|t|^\alpha$ :

$$D^\alpha f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e^{itz} ds(t). \quad (3)$$

Таким определением пользовались, в частности, П. Сайвин [1] и П. И. Лизоркин [2].

Для целого неотрицательного  $\sigma = n$  класс  $\mathbf{V}_\sigma$  содержит пространство  $\mathcal{T}_n$  тригонометрических полиномов порядка  $n$  с комплексными коэффициентами. Для них, согласно (3), производная Рисса задаётся при помощи множителя Фурье  $|k|^\alpha$ :

$$D^\alpha f_n(x) = \sum_{k=-n}^n |k|^\alpha c_k e^{ikx}, \quad f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Для  $0 < \alpha < 1$  определение (3) равносильно определению при помощи сингулярного интеграла

$$D^\alpha f(x) = C(\alpha) \int_0^\infty \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^{\alpha+1}} dy, \quad 0 < \alpha < 1; \quad C(\alpha) = -\frac{\Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}. \quad (4)$$

Интеграл (4) был введён Е. М. Стейном [3] при  $0 < \alpha < 2$  в связи с изучением потенциала Рисса в многомерном случае. П. И. Лизоркин [4] и С. Г. Самко [5] изучали представление дробных производных в виде сингулярных интегралов для произвольного  $\alpha > 0$  в связи с исследованием потенциала Рисса. Будем считать, что производная Рисса порядка  $0 < \alpha < 1$  функции  $f \in \mathbf{B}_\sigma$  определяется при помощи формулы (4).

Исторические сведения и подробную информацию о дробных интегралах и производных Рисса можно найти в [6, гл. 25, 26].

Нас будут интересовать точные неравенства Бернштейна для производной Рисса целых функций из  $\mathbf{B}_\sigma$  и тригонометрических полиномов из  $\mathcal{T}_n$ :

$$\|D^\alpha f\| \leq \mathcal{B}_\sigma(\alpha) \|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad (5)$$

$$\|D^\alpha f_n\| \leq B_n(\alpha) \|f_n\|, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad (6)$$

в равномерной норме  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in (-\infty, \infty)\}$  на числовой оси.

При  $\alpha \geq 1$  неравенства (5) и (6) хорошо изучены. Они выполняются с константой  $\mathcal{B}_\sigma(\alpha) = \sigma^\alpha$  или  $B_n(\alpha) = n^\alpha$  и обращаются в равенство на функции  $\cos \sigma x$  или  $\cos nx$ . Неравенство (6) с константой  $n^\alpha$  доказал Г. Т. Соколов [7], при  $\alpha = 1$  его ранее получил Г. Сеге [8]. Неравенство (5) для

производной Рисса с константой  $\sigma^\alpha$  при  $\alpha = 1$  установил Н.И.Ахиезер [9, §84], а при  $\alpha \geq 1$  — П. И. Лизоркин [2]. Ключевую роль в этих результатах играет то, что производная Рисса функций из  $\mathbf{B}_\sigma$  представима при помощи интерполяционной формулы по равномерным узлам. Её коэффициенты знакопереваются при  $\alpha \geq 1$ .

При  $0 < \alpha < 1$  неравенство (6) исследовал Г. Т. Соколов [7]. Он доказал, что

$$\|D^\alpha f_n\| \leq \frac{2n^\alpha}{\alpha + 1} \|f_n\|, \quad f \in \mathcal{T}_n, \quad 0 < \alpha < 1.$$

П. Сайвин [1] перенёс этот результат на целые функции.

В данной работе написана интерполяционная формула для производной Рисса порядка  $0 < \alpha < 1$  функций из  $\mathbf{B}_\sigma$ . Эта формула имеет неравномерные узлы — нули функций Бесселя. С её помощью доказана

**Теорема.** При  $\sigma > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  справедливы следующие утверждения.

1. Экстремальной в неравенстве (5) является функция  $f_\alpha^*(\sigma x)$ , где

$$f_\alpha^*(x) = 1 - 2j_{-\alpha/2}^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$j_{-\alpha/2}$  — нормированная функция Бесселя порядка  $-\alpha/2$ .

2. Точная константа  $\mathcal{B}_\sigma(\alpha)$  в неравенстве (5) равна

$$\mathcal{B}_\sigma(\alpha) = \sigma^\alpha \mathcal{B}(\alpha) = \sigma^\alpha \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

3. Для величины  $\mathcal{B}(\alpha)$  справедливо строгое неравенство

$$\mathcal{B}(\alpha) < \frac{2}{\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

кроме того, она монотонно убывает от 2 до 1, когда  $\alpha$  возрастает от 0 до 1.

4. Для точной константы  $B_n(\alpha)$  в неравенстве (6) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(\alpha)}{n^\alpha} = \mathcal{B}(\alpha) = \frac{2\pi\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Утверждения 1–3 теоремы сформулированы в работе автора [10], а утверждение 4 доказано в статье [11].

## Список литературы

- [1] P. Civin. Inequalities for trigonometric integrals. *Duke Math. J.*, **8**: 4 (1941), 656–665.
- [2] П. И. Лизоркин. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **4**: 3 (1965), 109–126.
- [3] E. M. Stein. A characterization of functions arising as potentials. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67**: 1 (1961), 102–104.
- [4] П. И. Лизоркин. Описание пространств  $L_p^r(\mathbb{R}^n)$  в терминах разностных сингулярных интегралов. *Матем. сб.*, **81(123)**: 1 (1970), 79–91.
- [5] С. Г. Самко. О пространствах риссовых потенциалов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**: 5 (1976), 1143–1172.

- [6] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [7] Г. Т. Соколов. О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм. *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук*, **6–7** (1935), 857–884.
- [8] G. Szegő. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein / G. Szegő. *Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft.*, **5**: 4 (1928), 59–70.
- [9] Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М.: Физматлит, 1965.
- [10] А. О. Леонтьева. Неравенство Бернштейна для производной Рисса дробного порядка, меньшего единицы, целых функций экспоненциального типа. *Доклады РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **514**: 1 (2023), 118–122.
- [11] А. О. Леонтьева. О константах в неравенстве Бернштейна–Сегё для производной Вейля порядка, меньшего единицы, тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа в равномерной норме. *Труды ИММ УрО РАН*, **29**: 4 (2023), 130–139.

## Дискретные аналитические функции параболического типа для дискретного уравнения теплопроводности и ряды Тейлора

Лу С.

*Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия*  
s.lu1@g.nsu.ru

Маратова Ш.Б.

*Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза, Нукус, Узбекистан,*  
*Республика Каракалпакстан*  
shakhval.maratova@gmail.com

Целью настоящей работы является установление теорем существования и единственности для дискретной аналитической функции параболического типа в положительном квадранте гауссовой плоскости. Пусть  $\mathbb{G}^+ = \{\mathbb{Z}^+ + i\mathbb{Z}^+\}$ . Обозначим через  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  и  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  — пространства аналитических экспоненциального типа и дискретных аналитических функций параболического типа, определённых в  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{G}^+$  соответственно. Для экспоненты  $e(\zeta, z) = e(\zeta, x, y) = e^{\zeta x}((e^\zeta - 1)^2 + 1)^y$  определим псевдостепени  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ , по формуле  $e(\zeta, x, y) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\pi_k(z)}{k!} \zeta^k$  для  $\zeta \in \mathbb{C}$  и  $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$ .

Зададим отображение  $\Theta$  формулой

$$\begin{aligned} \Theta: F(\zeta) &\rightarrow f(z), \\ \Theta\left(\sum_{k=0}^\infty a_k \zeta^k\right) &= \sum_{k=0}^\infty a_k \pi_k(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Следующая теорема доказана автором в [1].

**Теорема** Отображение  $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ , определенное формулой (1) сюръективно. Ядро  $\text{Ker } \Theta$  данного отображения состоит из целых функций  $F(\zeta)$ , имеющих вид:

$$F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}, \quad (2)$$

где  $H(\zeta)$  — произвольная целая функция, а  $\Gamma(\zeta) = \int_0^{+\infty} t^{\zeta-1} e^{-t} dt$ ,  $\Gamma$  - функция Эйлера.

В работе [2] теорема доказана для дискретных аналитических функций 2 рода.

## Список литературы

- [1] С. Лу. Дискретные аналитические функции параболического типа и ряды Тейлора. *Магистерская диссертация*, Новосибирск, НГУ, 2021, 1–20.
- [2] А. Д. Медных. Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора. *Algebra Colloq.*, 5: 3 (1998), 285–288.



Рост дельта-субгармонических функций в неограниченном полукольце<sup>1</sup>

Наумова А.А.

Курский государственный университет, Курск, Российская Федерация

aliona.filatowa2013@yandex.ru

В 60-х годах в работах американских математиков Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза, Д. Шиа и др. начал широко применяться метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций. Этот метод является эффективным при решении ряда общих задач теории мероморфных функций и устанавливает ее связь с теорией рядов Фурье. Одним из преимуществ этого метода является то, что он позволяет исследовать функции с довольно нерегулярным ростом на бесконечности и функции бесконечного порядка.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция  $\gamma(r)$ , определенная на  $[0, \infty)$ , называется функцией роста. Пусть  $f$  – мероморфная в комплексной плоскости функция,  $Z(f)$  ( $W(f)$ ) – множество ее нулей (полюсов),  $T(r, f)$  – неванлинновская характеристика,  $c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| e^{-k\theta} d\theta$  – коэффициенты Фурье функции  $f$ . Функция  $f$  называется функцией конечного  $\gamma$ -типа, если существуют положительные постоянные  $A$  и  $B$  такие, что  $T(r, f) \leq A\gamma(Br)$  для всех  $r > 0$ . Класс таких функций обозначим через  $\Gamma$ , через  $\Gamma_E$  обозначим класс целых функций конечного  $\gamma$ -типа. Ниже через  $A, B, \dots$ , мы будем обозначать положительные константы, которые могут изменяться. Рубел и Тейлор [1] доказали эквивалентность трех следующих утверждений:

- 1)  $f \in \Gamma$ ;
- 2) последовательность  $Z(f)$  (или  $W(f)$ ) имеет конечную  $\gamma$ -плотность и  $c_k(r, f) \leq A\gamma(Br)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  при некоторых положительных  $A, B$  и всех  $r > 0$ ;
- 3) последовательность  $Z(f)$  и  $W(f)$  имеют конечную  $\gamma$ -плотность и

$$c_k(r, f) \leq \frac{A}{|k|+1} \gamma(Br), \quad k \in \mathbb{Z}$$

при некоторых (возможно других, но не зависящих от  $k$ ) положительных  $A, B$  и всех  $r > 0$ .

Используя метод рядов Фурье, Майлз [2] решил, не поддававшуюся решению на протяжении ряда лет, проблему представления мероморфной функции  $f \in \Gamma$  в виде частного двух целых функций из класса  $\Gamma_E$ :  $\Gamma = \Gamma_E / \Gamma_E$ .

Результаты Рубела, Тейлора, Майлза были распространены К.Г. Малютиным [3] на дельта-субгармонические функции в полуплоскости  $\mathbb{C}_+ = \{z : \text{Im} z > 0\}$ . При этом, в частности, было показано, что третье условие в теореме Рубела–Тейлора для полуплоскости не имеет места. Мы распространяем результаты из работы [3] на открытое неограниченное полукольцо  $D_+(R) = \{z : |z| > R, \text{Im} z > 0\}$ .

Обозначим через  $SK(R)$  класс субгармонических функций в  $D_+(R)$ , имеющих в каждом конечном полукольце  $D(R_1, R_2) = \{z : 0 < R_1 < |z| < R_2 < +\infty\}$  положительную гармоническую мажоранту. Через  $J\delta(R) = SK(R) - SK(R)$  обозначим класс дельта-субгармонических функций в  $D_+(R)$ , т.е. разность двух функций из класса  $SK(R)$ . Функция  $v \in J\delta(R)$  называется функцией конечного  $\gamma$ -типа, если существуют положительные постоянные  $A$  и  $B$  такие, что  $T(r, v) \leq A\gamma(Br)$  для всех  $r > R$ . Класс таких функций обозначим через  $J\delta(R, \gamma)$ , через  $JS\delta(R, \gamma)$  обозначим класс субгармонических функций конечного  $\gamma$ -типа.

Коэффициенты Фурье функции  $v \in J\delta(R)$  определяются обычным образом [3]:

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad k \in \mathbb{N}, r > R.$$

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006).

Основной результат — следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\gamma$  — функция роста,  $v \in J\delta(R)$ . Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1)  $v \in J\delta(R, \gamma)$ ;
- 2) мера  $\lambda_+(v)$  (или  $\lambda_-(v)$ ) имеет конечную  $\gamma$ -плотность и

$$|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N},$$

при некоторых положительных  $A, B$  и всех  $r > R$ .

Здесь  $\lambda(v) = \lambda_+(v) - \lambda_-(v)$  — полная мера функции  $v$ .

Для субгармонических функций справедливо следующее следствие из этой теоремы.

**Следствие.** Пусть  $\gamma$  — функция роста,  $v \in J\delta(R)$ . Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1)  $v \in JS\delta(R, \gamma)$ ;
- 2) при некоторых положительных  $A, B$  и всех  $r > R$  выполняется неравенство

$$|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}.$$

## Список литературы

- [1] L. A. Rubel, B. A. Taylor. Fourier series method for meromorphic and entire functions. *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 53–96.
- [2] J. B. Miles. Quotient representations of meromorphic functions. *d'Analyse Math.*, **25** (1972), 371–388.
- [3] К. Г. Малютин. Ряды Фурье и  $\delta$ -субгармонические функции конечного  $\gamma$ -типа в полуплоскости. *Математический сборник*, **192**: 6 (2001), 51–70.

## Неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве

Пьянков А.Д.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
sascha.pyankow@mail.ru

С. М. Никольским в [1] было получено точное по порядку неравенство разных метрик в пространствах  $L^p, L^q$  ( $1 \leq p < q \leq +\infty$ ) для целых функций экспоненциального типа  $g_{\nu_1, \dots, \nu_n}(z_1, \dots, z_n)$  конечных типов  $\nu_1, \dots, \nu_n$  по каждой переменной  $z_1, \dots, z_n$  соответственно. Рассуждения, использованные в ходе доказательства такого неравенства переносятся с пространства целых функций на пространство тригонометрических полиномов соответствующих степеней от  $n$  переменных. Приведем здесь теорему для пространства тригонометрических полиномов.

**Теорема.** Для любого тригонометрического полинома  $T_{\nu_1, \dots, \nu_n}$  порядков  $\nu_1, \dots, \nu_n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) справедливо следующее неравенство для его норм в пространствах Лебега  $L^p([0, 2\pi]^n), L^q([0, 2\pi]^n)$  при  $1 \leq p < q \leq +\infty$ :

$$\|T_{\nu_1, \dots, \nu_n}\|_q \leq 2^n \left( \prod_{k=1}^n \nu_k \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_{\nu_1, \dots, \nu_n}\|_p.$$

Неравенство Никольского разных метрик обобщалось с пространств Лебега на нормы более общего вида вплоть до симметричных пространств. Неравенство для симметричных пространств целых функций экспоненциального типа доказано М. З. Берколайко и В. И. Овчинниковым в работе [2], для пространств тригонометрических полиномов от одной переменной – В. А. Родиным в [3], для пространств тригонометрических полиномов от нескольких переменных – Г. А. Акишевым в [4]. В настоящей работе получено альтернативное доказательство неравенства разных метрик в пространствах Орлича для тригонометрических полиномов от одной переменной.

Пусть  $\varphi$  –  $N$ -функция [5, гл. 1, § 1].  $\varphi$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, если

$$\exists c > 0 \exists x_0 \geq 0 \forall x > x_0 \quad \varphi(2x) \leq c\varphi(x)$$

Пусть  $\varphi$  –  $N$ -функция,  $A$  – измеримое множество на оси,  $L^\varphi(A)$  – построенное по  $\varphi$  и  $A$  пространство Орлича [5, гл. 2, § 9]. Для  $f \in L^\varphi(A)$  выражение

$$\|f\|_{(\varphi)} = \inf \left\{ k > 0 : \int_A \varphi \left( \frac{f(x)}{k} \right) dx \leq 1 \right\}$$

называется *нормой Люксембурга* функции  $f$  в пространстве  $L_\varphi(A)$ .

Пусть  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  – вектор из  $\mathbb{R}^m$ ,  $\varphi$  –  $N$ -функция. Определим для параметра  $h > 0$  *дискретную норму Люксембурга* (норму Люксембурга вектора  $a$ ) следующим образом:

$$\|a\|_{(\varphi)}^h = \inf \left\{ k > 0 : h \cdot \sum_{i=1}^m \varphi \left( \frac{a_i}{k} \right) \leq 1 \right\}.$$

В настоящей работе получен следующий результат для дискретных норм.

**Теорема 1.** Пусть  $a$  – вектор из  $\mathbb{R}^N$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  –  $N$ -функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Отношение  $\frac{\varphi_1^{-1}(x)}{\varphi_2^{-1}(x)}$  строго возрастает при  $x > 0$ ;
2. Функция  $\phi_y(x) = \frac{\varphi_2'(xy)}{\varphi_1'(x)}$  при любом  $y > 0$  строго возрастает по  $x$  на  $(0, +\infty)$ .

Тогда для всех векторов  $a$  из единичной сферы  $\{a \in \mathbb{R}^N : \|a\|_{(\varphi_1)} = 1\}$  справедливо неравенство:

$$\|a\|_{(\varphi_2)} \leq \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)}{\varphi_2^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

Неравенство обращается в равенство на векторах, лежащих на координатных осях, например на векторе  $(t, 0, \dots, 0)$ ,  $t \neq 0$  — параметр из условия  $\|(t, 0, \dots, 0)\|_{(\varphi_1)} = 1$ .

В качестве следствия этой теоремы можно доказать неравенство разных метрик для пространств функций, имеющих ограничение сверху на норму производной через норму самой функции (например, неравенство С. Н. Бернштейна).

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  —  $N$ -функции, удовлетворяющие условиям 1 и 2 теоремы 1 и  $\varphi_1$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию. Пусть для функции  $f \in C^1[a, b]$ , где  $[a, b]$  — отрезок на  $\mathbb{R}$  справедлива следующая оценка производной  $f'$ :

$$\int_a^b \varphi_1(f'(x)) dx \leq \int_a^b \varphi_1(\alpha f(x)) dx, \quad \text{где } \alpha = \alpha(f) > 0.$$

Тогда справедливо следующее неравенство разных метрик для заданной функции  $f$ :

$$\|f\|_{(\varphi_2)} \leq \|f\|_{(\varphi_1)} \cdot C_1 \cdot \frac{\varphi_1^{-1}(C_2 \alpha)}{\varphi_2^{-1}(C_2 \alpha)},$$

где  $C_1, C_2 > 0$  не зависят от  $f$ .

Одним из пространств функций, имеющих ограничение сверху на норму производной через норму самой функции, является пространство тригонометрических полиномов, т. к. для них существует неравенство Бернштейна для норм Люксембурга [6]. Однако для тригонометрических полиномов неравенство разных метрик является порядково точным относительно степени полинома.

**Теорема 3.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  —  $N$ -функции, удовлетворяющие условиям 1 и 2 теоремы 1 и  $\varphi_1$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию. Тогда для любого тригонометрического полинома  $T_n$  порядка не выше  $n$  справедливо следующее точное по порядку относительно  $n$  неравенство разных метрик в пространствах Орлича:

$$\|T_n\|_{(\varphi_2)} \leq C_1 \cdot \frac{\varphi_1^{-1}(C_2 n)}{\varphi_2^{-1}(C_2 n)} \|T_n\|_{(\varphi_1)},$$

где  $C_1, C_2 > 0$  не зависят от  $n$ . Порядковая точность неравенства достигается на ядре Фейера  $n$ -го порядка:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Список литературы

- [1] С. М. Никольский Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. МИАН СССР*, **38** (1951), 244–278.
- [2] М. З. Берколайко, В. И. Овчинников. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах. *Тр. МИАН СССР*, **161** (1983), 3–17.
- [3] В. А. Родин. Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве. *Тр. 7-й зимней школы. Дрогобыч, 1974*. Москва: 1976, 133–139.
- [4] Г. А. Акишев. О порядках  $M$ -членных приближений классов функций симметричного пространства. *Матем. журнал*, **14**: 4 (2014), 46–71.
- [5] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутницкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва : Государственное изд-во физ.-мат. литературы, 1958. 271.
- [6] В. В. Арестов. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных. *Серия математическая*, **45**: 1 (1981), 3–22.

**Неравенство Маркова–Глазыриной для многочленов, не обращающихся в нуль в круге**

Рокина А.Э.  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
a.e.pestovskaya@mail.ru,

На классе алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами, не обращающихся в нуль в круге, исследуется неравенство Глазыриной — это частный случай неравенства Маркова–Никольского на отрезке  $[-1; 1]$ , когда  $L^q$ -среднее производной многочлена порядка  $k$  оценивается через среднее геометрическое самого многочлена.

Пусть  $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  — открытый круг с центром в точке нуль радиуса  $R > 0$ ;  $I = [-1; 1]$ . Обозначим через  $\mathcal{P}_n$  — множество алгебраических многочленов степени не более чем  $n$  с комплексными коэффициентами. Через  $\mathcal{P}_n(D_R)$  обозначим множество алгебраических многочленов из  $\mathcal{P}_n$ , не обращающихся в нуль в круге  $D_R$ . Используем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \|p_n\|_\infty &= \|p_n\|_{C(I)} := \max\{|p_n(x)| : x \in [-1; 1]\}; \\ \|p_n\|_p &:= \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |p_n(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty; \\ \|p_n\|_0 &= \lim_{q \rightarrow 0} \|p_n\|_q := \exp \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |p_n(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Целью исследования является величина  $M_q(n, k, R)$  — точная константа в неравенстве

$$\|p_n^{(k)}\|_q \leq M_q(n, k, R) \|p_n\|_0 \quad p_n \in \mathcal{P}_n(D_R) \quad (1)$$

при  $1 \leq k \leq n$ ,  $0 \leq q \leq \infty$ .

В случае  $q = \infty$  выписана точная константа  $M_\infty(n, k, R)$  и экстремальные многочлены, на которых неравенство (1) обращается в равенство.

**Теорема** Пусть  $1 \leq k \leq n$ ,  $q = \infty$ ,  $R \geq 1$ . Тогда

$$M_\infty(n, k, R) = \frac{n! \|x - R\|_\infty^{n-k}}{(n-k)! \|x - R\|_0^n}. \quad (2)$$

Экстремальными являются многочлены  $p_n^*(x) = c(x \pm R)^n$ ,  $c \in \mathbb{C}$  и только они.

**Список литературы**

- [1] П. Ю. Глазырина. Точное неравенство Маркова–Никольского для алгебраических многочленов в пространствах  $L^q, L^0$  на отрезке. *Матем. заметки*, **84**: 1 (2008), 3–22; *Math. Notes*, **84**: 1 (2008), 3–21

**Оптимальное управление и дифференциальные игры  
(председатель к.ф.-м.н. П.Г. Сурков)**

### Задержка решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия

Алыбаев К.С.

Жалал-Абадский государственный университет имени Б.Осмонова, город Джалал-Абад,  
Кыргызстан  
e-mail:alybaevkurmanbek@rambler.ru

Нурматова М.Н.

Жалал-Абадский государственный университет имени Б.Осмонова, город Джалал-Абад,  
Кыргызстан  
e-mail:nurmatovamairan@gmail.com

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon x_1'(t, \varepsilon) = y(x_1(t, \varepsilon) - y) - x_2(t, \varepsilon) + V^2(x_1, x_2, x_3, x_4)(x_1(t, \varepsilon) - y), \\ \varepsilon x_2'(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon) - y + yx_2(t, \varepsilon) + V^2(x_1, x_2, x_3, x_4)x_2(t, \varepsilon), \\ \varepsilon x_3'(t, \varepsilon) = y(x_3(t, \varepsilon) - 2x_4) + V^2(x_1, x_2, x_3, x_4)(x_3(t, \varepsilon) - y), \\ \varepsilon x_4'(t, \varepsilon) = 2(x_3(t, \varepsilon) - y) + yx_4(t, \varepsilon) + V^2(x_1, x_2, x_3, x_4)x_4(t, \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

$$y' = 1, \quad (2)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} x_1(t_0, \varepsilon) - y(t_0) &= x_1^0, x_2(t_0, \varepsilon) = x_2^0, \\ x_3(t_0, \varepsilon) - y(t_0) &= x_3^0, x_4(t_0, \varepsilon) = x_4^0, \\ y(t_0) &= t_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $0 < \varepsilon$  – достаточно малое вещественное число;  $t \in D \subset C$  – множество комплексных чисел, а  $D = \{t \in C, |t| < r_0, r_0 \in R\}$  – множество вещественных чисел и  $r_0 \gg 2$ ,  $V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2$ .

Матрица

$$A(y) = \begin{pmatrix} y & -1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & -2 \\ 0 & 0 & 2 & y \end{pmatrix},$$

системы (1) имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2}(y) = y \pm i, \lambda_{3,4}(y) = y \pm 2i,$$

а также система (1) в точке  $(y, 0, y, 0)$  имеет положение равновесие. Положение равновесие устойчива при  $y < 0$  и неустойчива при  $y > 0$ . При значении  $y = 0$  происходит смена устойчивости положения равновесия. Система (1) в точках  $y = \pm i$ ,  $y = \pm 2i$  имеет точки поворота.

**Задача.** Исследовать решение задачи (1)-(2)-(3) на задержку решения (ЗР), вблизи неустойчивого положения равновесия и влияние точек поворота на асимптотическое поведение решения.

Впервые такая задача исследована в [1], и продолжены в [2], [3], [5], когда матрица  $A(y)$  имеет различные собственные значения, причем устойчивость положения равновесия определяется только одной парой комплексно-сопряженных собственных значений. ЗР исследованы в [4] при наличии



траектории-утка. В [7] задача решена при начальных значений  $t_0$ , когда происходит ЗР и точки поворота не влияют на характер решения. Доказана

**Теорема.** Пусть рассматривается задача (1)-(2)-(3). Тогда существует область  $D_0 \subset D$  ( $[t_0, T_0] \subset D_0 \subset D$ ,  $t_0 = -\sqrt{3}$ ,  $T_0 > 0$ ) и решение задачи (1), (3) определенное в этой области и для этого решения справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq M \begin{cases} \varepsilon, t \in D_1 \cup D_2 \\ \sqrt{\varepsilon}, t \in \bigcup_{j=3}^5 (D_j \cup \bar{D}_j) \cup D_6. \end{cases}$$

где  $\tilde{x}(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_1 - y, x_2, x_3 - y, x_4)$ .

Из теоремы вытекает, ЗР на отрезке  $[0, T_0]$ , т.е. когда положение равновесие теряет устойчивость, решение системы (1) с условием (3), не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесие, а в течении конечного времени остаётся вблизи него. Следует отметить, на задержку решения, влияют только точки поворота  $(\pm i)$ , а точки поворота  $(\pm \pm 2i)$  существенно не влияют.

## Список литературы

- [1] М. А. Шишкова. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. *Докл.АН СССР*, **209**: 3 (1973), 576–579.
- [2] А. И. Нейштадт. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II. *Дифференц. уравн.* **24**: 2 (1988), 226–233.
- [3] С. К. Каримов, А. А. Абдилазизова. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости. *Естественные и технические науки*, **30**: 4 (2007), 13–16.
- [4] Е. С. Голодова, Е. А. Щепакина. Оценка затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах с траекториями-утками. *Вестник СамГУ – Естественная серия*, **104**: 3 (2013), 12–24.
- [5] Д. А. Турсунов. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, **54** (2018), 46–57.
- [6] К. С. Алыбаев, Н. К. Мусакулова. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений. *Вестник ОшГУ*, **4** (2022), 206–217.
- [7] К. С. Алыбаев, М. Н. Нурматова. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений. *Бюллетень науки и практики*, **12**: 9 (2023), 12–19.

### Одна задача о выходе из лабиринта

Баринов А.М.  
 ФГБОУ ВО «ЧелГУ», Челябинск, Россия  
 barinovalexmih@mail.ru

Рассматривается задача о прохождении лабиринта с неизвестными заранее выходами, а именно в лабиринте имеется два выхода, один из которых настоящий, а другой ложный. Какой из выходов настоящий до некоторого момента времени неизвестно, поэтому цель ЛПР — движение по траектории, из которой он как можно дольше может попасть в оба выхода.

Пусть позиция  $x$  задается вектор-столбцом  $x = (x_1, x_2)'$  где  $x_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ , штрих означает операцию транспонирования.

Множество всех позиций задачи обозначим

$$X = \{x = (x_1, x_2)' \mid x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 \leq n, x_2 \leq m\},$$

а множество допустимых позиций  $P \subseteq X$ .

Рассматривается задача с дискретным временем  $t$ , где  $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ . Положение системы в момент времени  $t + 1$  ( $t \in 0, \dots, T - 1$ ) задается системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + u_1(t), \\ x_2(t+1) = x_2(t) + u_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где управление  $u(t)$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))', \quad u_i(t) \in \{-1, 0, 1\} \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Система (1), (2) описывает перемещение точки, расположенной в клетке прямоугольной сетки в одну из восьми соседних клеток, либо отсутствие перемещения (см. рис.1). Такая система, с учетом

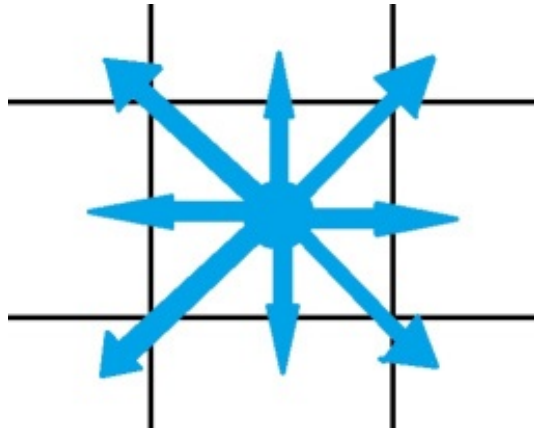


Рис. 1: Направления перемещения

множества допустимых позиций  $P$ , может трактоваться как движение точки по лабиринту.

Задано начальное положение системы

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0))' = x^0 = (x_1^0, x_2^0)'. \quad (3)$$

Предполагается, что система в момент времени  $T$  должна попасть либо в целевую позицию (выход из лабиринта), о которой известно, что это либо  $x^*$ , либо  $x^{**}$  (то есть должно быть выполнено

одно из условий  $x(T) = x^*$ , или  $x(T) = x^{**}$ , но какое – заранее неизвестно). В некоторый момент времени  $\tau$ , представляющий из себя нестохастическую неопределенность [1], ЛППР становится известно в какую из этих двух позиций надо попасть, а какая является ложной целью. При этом, о неопределенности  $\tau$  ЛППР знает только множество ее возможных значений  $\tau \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ .

Пусть момент времени  $T_1 < T$  – это последний момент времени, в который ЛППР, двигаясь по некоторой траектории, может привести систему как в положение  $x(T) = x^*$ , так и в  $x(T) = x^{**}$ . Тогда перед ЛППР стоит следующая задача

$$T_1 \rightarrow \max. \quad (4)$$

Решением задачи оптимального управления (1)–(4) будем называть пару  $(\hat{u}, \hat{x}(\cdot))$ , где оптимальное управление

$$\hat{u} = (\hat{u}(0), \dots, \hat{u}(T_1 - 1), (\hat{u}^*(T_1), \hat{u}^*(T_1)), \dots, (\hat{u}^*(T - 1), \hat{u}^{**}(T - 1))),$$

а, определяемая этим управлением, оптимальная траектория

$$\hat{x}(\cdot) = (\hat{x}(0), \dots, \hat{x}(T_1), (\hat{x}^*(T_1 + 1), \hat{x}^{**}(T_1 + 1)), \dots, (\hat{x}^*(T), \hat{x}^*(T))).$$

В докладе предлагается алгоритм решения задачи (1)–(4) и приводятся результаты численного моделирования.

## Список литературы

- [1] В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев, Л. В. Смирнова. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: URSS, КРАСАНД, 2013.

**Анализ устойчивости по Ляпунову для нелокального уравнения неразрывности<sup>1</sup>**

Волков А.М.  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
volkov@imm.uran.ru

Авербух Ю.В.  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
ayv@imm.uran.ru

Основным объектом изучения является задача Коши для нелокального уравнения неразрывности

$$\partial_t m_t + \nabla \cdot (f(x, m_t) m_t) = 0, \quad m_0 = m_*,$$

где  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Данное уравнение описывает систему частиц с динамикой, задаваемой уравнением

$$\dot{x} = f(x, m_t).$$

Решением является поток в пространстве вероятностных мер  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ .

Главной целью данной работы является построение аналогов теорем Ляпунова об устойчивости динамических систем для нелокального уравнения неразрывности.

Пространство вероятностных мер не является линейным, поэтому требует введения обобщений дифференцирования. Однако для большого числа таких обобщений функция квадрата расстояния до положения равновесия, являющаяся типичной функцией Ляпунова, недифференцируема. Для того, чтобы обойти данную проблему, были использованы методы негладкого анализа. В частности, нами было введено понятие барицентрического супердифференциала.

**Определение.** Пусть  $q = p' = \frac{p}{p-1}$ , а функционал  $\phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывен сверху. Тогда барицентрическим супердифференциалом  $\partial_b^+ \phi(m)$  функции  $\phi$  в точке  $m$  будем называть множество всех таких функций  $\gamma \in L_q(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^d)$ , что для любой функции  $b \in L_p(\mathbb{R}^d, m; \mathbb{R}^d)$  найдется такая функция  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  со свойством  $\xi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$ , что для любого  $\tau > 0$  выполняется следующее соотношение:

$$\phi((\text{Id} + \tau b) \# m) - \phi(m) \leq \tau \int_{\mathbb{R}^d} \langle \gamma(x), b(x) \rangle m(dx) + \tau \xi(\tau).$$

Используя метрику Канторовича в пространстве вероятностных мер (см., например, [3]), можно достаточно естественным образом ввести понятия положения равновесия уравнения неразрывности и его устойчивости.

Основным результатом являются аналоги первого и второго методов Ляпунова для пространства вероятностных мер. Они опираются на использование понятий внутренней производной, введенное ранее П.-Л. Лионсом (см. [1, Определение 2.2.1]), касательного пространства  $\text{Tan}(m)$  к пространству  $\mathcal{P}$  в точке  $m$  (см., например, [2]), а также липшицевость внутри шаров функционала над  $\mathcal{P}$ , которая является аналогом локальной липшицевости.

К каждому из методов были построены примеры систем, устойчивость положений равновесия которых может быть получена с помощью данных методов.

**Теорема. Второй метод Ляпунова для пространства вероятностных мер.** Пусть  $\hat{m} \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$  — положение равновесия уравнения, функция  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$  липшицева, а также существует такая липшицевая внутри шаров функция  $\phi : \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , что для некоторого  $R > 0$  выполнены следующие условия:

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

1. внутри шара  $B_R(\hat{m})$   $\phi$  обращается в 0 только в точке  $\hat{m}$ ;
2.  $\phi$  супердифференцируема на шаре  $B_R(\hat{m})$ ;
3.  $\sup_{\mu \in B_R(\hat{m})} \inf_{\gamma \in \partial_b^+ \phi(\mu)} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \gamma(x), f(x, \mu) \rangle \mu(dx) \leq 0$ .

Тогда положение равновесия  $\hat{m}$  устойчиво.

Данный метод позволяет определять устойчивость положений равновесия для систем, порожденных градиентным потоком, имеющим стационарную точку.

**Теорема. Первый метод Ляпунова для пространства вероятностных мер.** Пусть функция  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  липшицева, имеет ограниченные якобиан и внутреннюю производную, а  $\hat{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  абсолютно-непрерывна относительно меры Лебега. Пусть также для каждой  $\xi \in \text{Tan}(\hat{m}) \setminus \{0\}$  выполнено соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^d} \xi(\hat{x})^\top \cdot \nabla_x f(\hat{x}, \hat{m}) \cdot \xi(\hat{x}) \hat{m}(d\hat{x}) + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \xi(\hat{x})^\top \cdot \nabla_m f(\hat{x}, \hat{m}, \hat{y}) \cdot \xi(\hat{y}) \hat{m}(d\hat{x}) \hat{m}(d\hat{y}) < 0.$$

Тогда положение равновесия  $\hat{m}$  является устойчивым.

Данный метод позволяет определять устойчивость меры Гиббса для возмущенной гамильтоновой системы математических маятников.

## Список литературы

- [1] P. Cardaliaguet, F. Delarue, J.-M. Lasry и P.-L. Lions. The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games (Annals of Mathematics Studies 201). Princeton University Press, 2, 2019, 226 с.
- [2] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, Gradient Flows. In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures (Lectures in Mathematics. ETH Zürich). Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2005, 333 с.
- [3] F. Santambrogio. Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications), 87 т. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 9783319208282. DOI: 10.1007/978-3-319-20828-2.

Об неэквивалентности двух определений альфа-множеств<sup>1</sup>

Ершов А.А.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
 Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,  
 Екатеринбург, Россия  
 ale10919@yandex.ru

Давлетов Д.Б.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия  
 davletovdb@mail.ru

Ершова А.А.

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,  
 Екатеринбург, Россия  
 anya.erygina@yandex.ru

Будем использовать следующие стандартные обозначения [1].

Посредством со  $M$  обозначим выпуклую оболочку множества  $M$ ,

$\langle x_*, x^* \rangle$  — скалярное произведение  $x_*$  и  $x^*$  из  $\mathbb{R}^n$ ,

$\|x_*\| = \langle x_*, x_* \rangle^{1/2}$  — стандартную норму (порождённую скалярным произведением) в евклидовом пространстве,

$\angle(x_*, x^*) = \arccos \frac{\langle x_*, x^* \rangle}{\|x_*\| \cdot \|x^*\|} \in [0, \pi]$  — угол между векторами  $x_*$  и  $x^*$ ,

$\text{con } M = \{y = \lambda x : \lambda \geq 0, x \in M\}$  — конус в  $\mathbb{R}^n$ , натянутый на множество  $M$  и с вершиной в нуле.

Под проекцией  $p^*$  точки  $x^*$  на множество  $M$  мы понимаем ближайшую к  $x^*$  точку из  $M$ . Множество всех проекций точки  $x^*$  на множество  $M$  обозначим через  $\Omega_M(z^*)$ .

Отметим, что множество проекций  $\Omega_M(z^*)$  может быть несчётным для невыпуклого множества  $M$  или пустым для открытого множества  $M$ . Если  $z^* \in M$ , то  $\Omega_M(z^*) = \{z^*\}$ .

**Определение 1.** Пусть  $M$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$  и  $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . Через  $H_M(z^*) = \text{con}(\text{co } \Omega_M(z^*) - z^*)$  обозначим конус, натянутый на множество  $\text{co } \Omega_M(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \text{co } \Omega_M(z^*)\}$ . Определим функцию  $\alpha_M(z^*) = \max_{h_*, h^* \in H_M(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$ . Полагаем  $\alpha_M = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha_M(z^*) \in [0, \pi]$ .

Тогда множество  $M$  назовём  $\alpha$ -множеством, где  $\alpha = \alpha_M$ .

**Определение 2.** Пусть  $M$  — замкнутое множество  $\mathbb{R}^n$  и  $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . Определим функцию

$$\alpha_M(z^*) = \pi \text{ в случае, если } z^* \in \text{co } \Omega_M(z^*),$$

и

$$\alpha_M(z^*) = \max_{x, y \in \Omega_M(z^*)} \angle(x - z^*, y - z^*) \text{ в противном случае.}$$

Полагаем  $\alpha_M = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha_M(z^*) \in [0, \pi]$ .

Тогда множество  $M$  назовём  $\alpha$ -множеством, где  $\alpha = \alpha_M$ .

Для нахождения величины  $\alpha$  удобно вначале построить так называемую *биссектрису* множества.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00217, <https://rscf.ru/project/24-11-00217/>.

**Определение 3.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое множество. *Биссектрисой множества  $M$*  назовём множество точек из  $\mathbb{R}^n \setminus M$ , имеющих более одной проекции на  $M$ .

В работе [2] доказано что для множеств в  $\mathbb{R}^2$  определение 1 эквивалентно определению 2. Однако, в трёхмерном пространстве определения 1 и 2 не совпадают.

Для построения контрпримера определим следующие точки (рис. 1): вершины правильного тетраэдра  $A = (-1, 0, 0)$ ,  $B = (0, \sqrt{3}, 0)$ ,  $C = (1, 0, 0)$ ,  $D = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$ ; середины сторон равностороннего треугольника в основании  $O = (0, 0, 0)$ ,  $E = (0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $F = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ; проекцию вершины на основание  $H = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ .

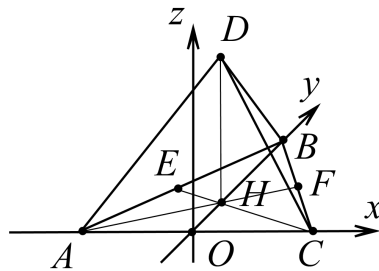


Рис. 1. Тетраэдр  $ABCD$

Итак, пусть множество  $M \subset \mathbb{R}^3$  и состоит из объединения фрагмента плоскости между лучами  $DA$  и  $DB$ , фрагмента плоскости между лучами  $DB$  и  $DC$  и фрагмента плоскости между лучами  $DA$  и  $DC$ . Можно показать, что его биссектрисой является объединение трёх множеств: фрагмента плоскости между лучами  $DH$  и  $DO$ , фрагмента плоскости между лучами  $DH$  и  $DE$ , фрагмента плоскости между лучами  $DH$  и  $DF$ . При этом лучи  $DO$ ,  $DE$  и  $DF$  не входят в биссектрису, так как они принадлежат  $M$ . Пересечение фрагментов — луч  $DH$  за исключением точки  $D$  принадлежит биссектрисе  $M$ , более того, можно показать, что именно для точек  $z_*$  из луча  $DH$  выполняется равенство  $\alpha_M(z_*) = \alpha_M = \arctg(2\sqrt{2}) + \arctg\sqrt{2} = \pi - \arctg\sqrt{2} \approx 2.186$  по первому определению и  $\alpha_M(z_*) = \alpha_M = \pi - \arccos \frac{1}{3} \approx 1.911$  по второму определению.

### Список литературы

[1] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.  
 [2] А. А. Ершов, О. А. Кувшинов. О свойствах пересечения  $\alpha$ -множеств. *Изв. ИМИ УдГУ*, **55** (2020), 79–92.

**К вопросу об управляемости линейной системы специального типа**

Корнеева О.А.

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,  
Владимир, РФ  
korneevaolya@bk.ru

Мастерков Ю.В.

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,  
Владимир, РФ  
jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0, \tau], \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Предполагается, что функция  $t \rightarrow (A(t), B(t))$  — кусочно-постоянна на отрезке  $[0, \tau]$ .

В качестве допустимых управлений рассматриваемой системы берутся всевозможные измеримые функции  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Решение данной системы понимается в смысле Каратеодори. Пусть  $\theta \doteq (t_1, t_2, t_3 \dots t_{k-1})$  —  $k$ -мерный вектор, определяющий разбиение отрезка  $[0, \tau]$  ( $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < \tau \doteq t_k$ ) на  $k$  отрезков  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Предполагается, что  $(A(t), B(t)) = (A_i, B_i)$  на промежутках  $\Delta_i \doteq (t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Обозначим через  $\xi_i$  систему  $\dot{x} = A_i x + B_i u$ ,  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , а  $L_i$  — пространство управляемости системы  $\xi_i$ . Известно, (см. [1]) что  $L_i$  — линейная оболочка столбцов матрицы управляемости системы  $\xi_i$ , т. е.  $L_i = \text{Lin}(B_i, A_i B_i, \dots, A_i^{n-1} B_i)$ .

**Лемма.** Пусть  $k = 2$ , т. е.  $[0, \tau] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2]$  и  $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^n$ . Тогда для любого  $\tau > 0$  система (1) вполне управляема в  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема.** Пусть  $L_1 + L_2 + \dots + L_k = \mathbb{R}^n$ . Тогда существует  $\vartheta_0 > 0$ , что для любого разбиения  $\theta \doteq (t_1, t_2, t_3 \dots t_{k-1})$  отрезка  $[0, \tau]$ , такого, что  $t_i - t_{i-1} < \vartheta_0$ ,  $i = \overline{1, k}$  система (1) вполне управляема в  $\mathbb{R}^n$ .

**Список литературы**

- [1] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления, М: Наука, 1972.



## Гарантирующие стратегии управления и репликаторная динамика в динамических биматричных играх со среднеинтегральными показателями выигрышей игроков<sup>1</sup>

Красовский Н.А.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
n.a.krasovskii@gmail.com

Тарасьев А.М.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
*Уральский Федеральный Университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,*  
*Екатеринбург, Россия*  
tam@imm.uran.ru, a.m.tarasyev@urfu.ru

Работа посвящена сравнительному анализу поведения равновесных траекторий, порожденных гарантирующими стратегиями управления [4, 7, 9], и траекторий репликаторной динамики [6] в динамических биматричных играх [2] со среднеинтегральными функционалами выигрышей игроков [1]. Гарантирующие стратегии основаны на кривых переключения управлений игроков, построенных на основе анализа Гамильтоновых систем принципа максимума Л.С. Понтрягина [5] в сочетании с гарантирующим подходом Н.Н. Красовского [9]. Концепция репликаторной динамики используется для описания эволюционной динамики объекта, называемого репликатором, который имеет средства создания более или менее точных копий самого себя. Репликатором может быть ген, организм, стратегия в игре и т.д.

В первой части анализа рассматривается оценка среднеинтегральных выигрышей для траекторий, порожденных гарантирующими стратегиями [3, 8, 9]. Во второй части анализа рассчитываются среднеинтегральные показатели для циклических траекторий репликаторной динамики [6]. В третьей части анализа исследуется “смешанная” динамика, при которой первый игрок использует гарантирующую стратегию управления, а второй игрок руководствуется формулами репликаторной динамики. Проводится сравнение значений выигрышей игроков на траекториях, построенных во всех трех частях анализа.

Показано, что показатели выигрышей игроков, использующих гарантирующие стратегии управления, превосходят значения выигрышей при репликаторной динамике.

## Список литературы

- [1] В. И. Арнольд. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах. *Функц. анализ и его прил.*, **36**: 2 (2002), 1–11.
- [2] Н. Н. Воробьев. Теория игр для экономистов–кибернетиков. Москва: Наука, 1985.
- [3] А. Ф. Клейменов. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.
- [4] Н. Н. Красовский. Управление динамической системой. Москва: Наука, 1985.
- [5] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1961.
- [6] J. Hofbauer, K. Sigmund. The theory of evolution and dynamic systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [7] A. N. Krasovskii, N. N. Krasovskii. Control under lack of information. Boston etc.: Birkhauser, 1995.
- [8] N. A. Krasovskii, A. M. Tarasyev. Equilibrium Trajectories in Dynamical Bimatrix Games with Average Integral Payoff Functionals. *Automation and Remote Control.*, **79**: 6 (2018), 1148–1167.
- [9] N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin. Game–Theoretical control problems. New York: Springer, 1988.

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации

**Построение решений задач быстродействия в трёхмерном пространстве для одного класса целевых множеств на базе выделения рассеивающей поверхности**

Лебедев П.Д.  
ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, РФ  
pleb@yandex.ru

Успенский А.А.  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, РФ  
uspen@imm.uran.ru

Изучается задача быстродействия в трёхмерном с евклидовом пространстве с вектограммой скоростей — шаром единичного радиуса с центром в начале координат. В качестве целевого множества рассматривается трижды гладкая кривая  $\Gamma$ , заданная параметрически вектор функцией  $\mathbf{r}(t)$  с областью определения  $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ . Считается, что функция  $\mathbf{r}(t)$  удовлетворяет стандартным условиям, налагаемым в дифференциальной геометрии, которые позволяют в каждой точке находить кривизну  $k(t)$  и кручение  $\varkappa(t)$  [1]. С задачей быстродействия связана задача Дирихле для дифференциального уравнения типа Гамильтона–Якоби

$$\min_{\nu_1, \nu_2, \nu_3: \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \nu_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 1 = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Функция оптимального результата  $u(\mathbf{x})$  совпадает с обобщённым (минимаксным [2]) решением задачи (1) и с евклидовым расстоянием  $\rho(\mathbf{x}, \Gamma)$  от точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  до множества  $\Gamma$ . Сужение функции оптимального результата на множество  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  дифференцируемо всюду, за исключением так называемой биссектрисы  $L(\Gamma) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \text{card}(\Omega_{\Gamma}(\mathbf{x})) \geq 2\}$ . Здесь  $\Omega_{\Gamma}(\mathbf{x})$  означает множество ближайших в евклидовой метрике к  $\mathbf{x}$  точек кривой  $\Gamma$ ,  $\text{card}(\cdot)$  — мощность множества. С точки зрения задачи управления  $L(\Gamma)$  является рассеивающей поверхностью, из её точек выходит две или более оптимальные траектории [3].

Точка  $\mathbf{r}(t_0)$  кривой  $\Gamma$ , такая, что существуют последовательности  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n \subset L(\Gamma)$  и  $\{t_i^-, t_i^+\} \subset T$ , для которых выполняются вложения  $\forall i \in \mathbf{N} \{\mathbf{r}(t_i^-), \mathbf{r}(t_i^+)\} \subseteq \Omega_{\Gamma}(\mathbf{x}_i)$  и предельное соотношение  $\lim_{i \rightarrow \infty} (t_i^-, t_i^+) = (t_0, t_0)$ , называется псевдовершиной [4] кривой  $\Gamma$ . Если определён предел  $\mathbf{x}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i$ , то он называется крайней точкой биссектрисы, порождённой псевдовершиной  $\mathbf{r}(t_0)$ . Обозначим  $W(t_0)$  множество крайних точек биссектрисы, порождённых псевдовершиной  $\mathbf{r}(t_0)$ . В общем случае  $W(t_0)$  может состоять из нескольких элементов. Но в работе [5] доказана теорема, которую можно трактовать как то, что если в точке  $\mathbf{r}(t_0)$  выполняется неравенство  $\varkappa(t_0) \neq 0$ , то  $W(t_0) \subseteq \{\mathbf{c}_s(t_0)\}$ . Здесь  $\mathbf{c}_s(t_0)$  — так называемый центр соприкасающейся сферы кривой  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{r}(t_0)$ , который определён для всех точек, в которых кручение отлично от нуля [6].

**Теорема.** Пусть в точке  $\mathbf{r}(t_0)$  выполняются неравенства  $k(t_0) \neq 0$  и  $\varkappa(t_0) \neq 0$ . Тогда если

$$\Omega_{\Gamma}(\mathbf{c}_s(t_0)) = \{\mathbf{r}(t_0)\},$$

то существуют такие числа  $t_1, t_2 \in T$ ,  $t_1 < t_0 < t_2$ , что  $\forall t^* \in (t_1, t_2)$

$$W(t^*) = \{\mathbf{c}_s(t^*)\}. \quad (2)$$

Теорема существенно усиливает результат работы [5] и показывает, что в случае ненулевого кручения псевдовершины занимают на кривой  $\Gamma$  интервалы ненулевой длины. Выражение (2) задаёт кромку биссектрисы  $L(\Gamma)$ .

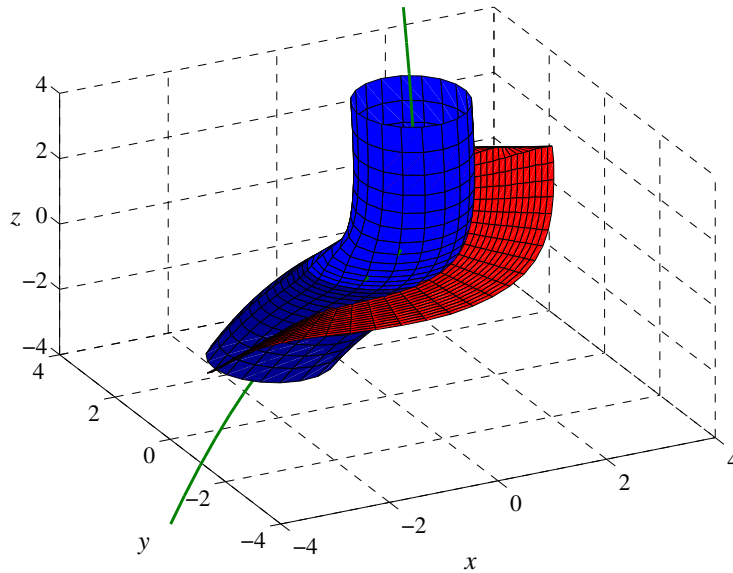


Рис. 1: Кривая  $\Gamma$ , рассеивающая кривая  $L(\Gamma)$  и поверхность уровня  $\Phi(1)$  функции оптимального результата при  $u(\mathbf{x}) = 1$ .

**Пример.** Пусть в задаче (1) целевое множество есть кривая  $\Gamma$ , заданная параметрически  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3 + t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Требуется построить решение в виде карты поверхностей уровня функции оптимального результата, выделив рассеивающую поверхность. Анализ кривой  $\Gamma$  с помощью теоремы, показывает, что она полностью состоит из псевдовершин. Центры соприкасающихся сфер в точках  $\mathbf{r}(t)$  образует край рассеивающей поверхности  $L(\Gamma)$ . Кривая  $\Gamma$  (зелёной линией), поверхность уровня функции оптимального результата  $\Phi(1) = \{\mathbf{x} : u(\mathbf{x}) = 1\}$  (синим цветом) и множество  $L(\Gamma)$  (красным цветом) представлены на рис. 1. Поверхность  $\Phi(1)$  теряет гладкость при пересечении с  $L(\Gamma)$ .

## Список литературы

- [1] Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин. Дифференциалы помогают геометрии. М: Просвещение, 1982.
- [2] А. И. Субботин. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336.
- [3] R. Isaacs. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965. 384.
- [4] P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. Combined algorithms for constructing a solution to the time-optimal problem in three-dimensional space based on the selection of extreme points of the scattering surface. *Ural Math. J.*, **8**: 2 (2022), 115–126
- [5] P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. Analytic-Numerical Approach to Construction of Minimax Solution to the Hamilton–Jacobi Equation in Three-Dimensional Space. *Journal of Mathematical Sciences*, **262**: 3 (2022), 291–300.
- [6] А. М. Нигмедзянова. Дифференциальная геометрия. Часть 1: Дифференциальная геометрия кривых. Учебно-методическое пособие. Казань: Казан. ун-т, 2014. 56.

## Расширение областей притяжений решений сингулярно возмущенных уравнений

Мусакулова Н. К.

Жалал-Абадский государственный университет имени Б. Осмонова, город Джалал-Абад,  
Кыргызстан  
kuralbekovna79@inbox.ru

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon(\varphi(t) + f(t, x(t, \varepsilon))), \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый вещественный параметр;  $x(t, \varepsilon)$  – неизвестная скалярная функция;  $t \in D \subset C$  – множество комплексных чисел, а  $D$  – односвязная, открытая, ограниченная область.

Пусть выполняются условия:

У1.  $a(t), \varphi(t) \in Q(D)$  – пространство аналитических функций в  $D$ .

У2.  $\forall t \in D (a(t) \neq 0)$ .

У3.  $f(t, 0) \equiv 0, f(t, x) \in Q(H), H = \{(t, x), t \in D, |x| \leq M_0\}$ .

У4.  $\forall ((t, \tilde{x})_0, (t, \tilde{x})) \in H \left( |f(t, \tilde{x}) - f(t, \tilde{x})| \leq M_1 |\tilde{x} - \tilde{x}| \right)$ .

$M_0, M_1$  – положительные постоянные не зависящие от  $\varepsilon$ .

**Определение.** Если существует область  $D_0 \subset D$  и  $x(t, \varepsilon)$  – решение задачи (1) - (2) определенное в области  $D_0$  и выполняется соотношение  $\forall t \in D_0 (x(t, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ по } \varepsilon)$ , тогда область  $D_0$  называется областью притяжения решения  $x(t, \varepsilon)$  к решению  $\xi(t) \equiv 0$  невозмущенного уравнения.

Сначала решается задача: при сделанных предположениях исследовать асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2) в области  $D$  и доказать существование области притяжения.

При решении поставленной задачи основное внимание уделено доказательству существования области притяжения решения задачи (1)-(2) к решению невозмущенного уравнения. Невозмущенное уравнение получается из (1) при  $\varepsilon = 0$ . В рассматриваемом случае невозмущенное уравнение имеет решение  $\xi(t) \equiv 0$ .

Таким образом, задача заключается в доказательстве соотношения

$$\exists D_0 \subset D (t_0 \in D_0) \wedge \forall t \in D_0 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = 0 \right).$$

В работах [1-4] рассмотрены аналогичные задачи и другие, связанные с областью притяжения, но вопрос о расширении границы  $D_0$  не исследован. В данной работе доказано, если существует область притяжения  $D_0 \subset D$ , то его границы можно расширить до границы области  $D$ . При решении используются методы изложенные в [5, 6, 7].

## Список литературы

- [1] П. С. Панков, К. С. Алыбаев, К. Б. Тампагаров, М. Р. Нарбаев. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. *Вестник ОшГУ, (специальный выпуск)*, **1** (2013), 227–231.
- [2] К. С. Алыбаев, К. Б. Тампагаров. Существование погранслойных линий для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями. *Актуальные проблемы, теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы II-й международной конференции, посвященной 20-летию профессора Я.В.Быкова*, Бишкек, 2023, 83–88.
- [3] К. С. Алыбаев, А. Б. Мурзабаева. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений. *Международный научно-исследовательский журнал*. **75**: 9 (2018), 7–11.

- [4] К. С. Алыбаев, Т. К. Нарымбетов. Области притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений при различных значениях. *Евразийское научное объединение, Интеграция науки в современном мире, 76я Международная конференция.*, 2019, 1–6.
- [5] К. С. Алыбаев, Н. К. Мусакулова. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений. *Вестник Ошского государственного университета*, 4 (2022), 206–217.
- [6] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1973).
- [7] М. В. Федорюк. Метод перевала. Москва: Наука, 1977.

## О свойствах множеств достижимости квазилинейных систем

Осипов И.О.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,  
Екатеринбург, Россия  
i.o.osipov@imm.uran.ru*

В работе исследуется выпуклость множеств достижимости квазилинейных систем в случае, когда ограничен ресурс управления. Объектом изучения является управляемая система с малой нелинейностью в правой части. При нулевом значении малого параметра, квазилинейная система становится линейной, а ее множество достижимости — выпуклым. Опираясь на работы Б.Т. Поляка о выпуклости образа малого гильбертова шара при его нелинейном отображении, удастся показать, что для сохранения выпуклости множеств достижимости таких систем при малых значениях параметра достаточно, чтобы производная нелинейного отображения была липшицевой. Доклад включает в себя постановку задачи, исследование нелинейного отображения с параметром, применение к квазилинейным системам управления и результаты численного моделирования.

Рассматривается квазилинейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \varepsilon f(x(t), t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^r$  — вектор управления,  $t_0$  — неотрицательное число,  $T$  — положительное число, а  $\varepsilon$  — малый параметр, такой, что  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ ,  $\bar{\varepsilon} > 0$ . Матричные отображения  $A : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  предполагаются непрерывными, а вектор-функция  $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагается непрерывной по паре  $(x, t)$  и непрерывно-дифференцируемой по  $x$ .

Управление  $u(\cdot)$  будем выбирать из шара радиуса  $\mu$  в пространстве  $\mathbb{L}_2[t_0, T]$ ,  $\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 = (u(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu^2$ , где  $\mu > 0$ . Обозначим этот шар через  $B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$ .

Для любого управления  $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$  и любого  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  существует единственное абсолютно непрерывное решение  $x(t, \varepsilon, u(\cdot))$  квазилинейной системы (1), удовлетворяющее начальным условиям  $x(t_0, \varepsilon, u(\cdot)) = x_0$  и определенное на некотором интервале  $[t_0, t_0 + \Delta]$ , где  $t_0 + \Delta < T$ .

В работе предполагается, что выполнены условия следующего предположения.

**Предположение 1.** Существует  $\bar{\mu} > \mu$ , такое что для всех  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  решения  $x(t, \varepsilon, u(\cdot))$ , порожденные управлениями  $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \bar{\mu})$  лежат в некотором выпуклом компакте  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Кроме того, предполагается, что функция  $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и ее производная по  $x$  удовлетворяют условию Липшица с константами  $L_f, l_f$  соответственно

$$\begin{aligned} \|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| &\leq L_f \|x_1 - x_2\|, \quad t \in [t_0, T], \quad x_1, x_2 \in D \\ \left\| \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial x} \right\| &\leq l_f \|x_1 - x_2\|, \quad t \in [t_0, T], \quad x_1, x_2 \in D. \end{aligned}$$

**Определение.** Множеством достижимости  $G(T, \mu, \varepsilon)$  квазилинейной системы (1) в момент  $T$  будем называть множество всех возможных состояний, в которые может быть переведена система к моменту  $T$  при помощи допустимых управлений.

$$G(T, \mu, \varepsilon) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu), x(T, \varepsilon, u(\cdot)) = \tilde{x}\}.$$

Известно, что опорная функция множества достижимости системы (1) непрерывно зависит от малого параметра  $\varepsilon$  [4]. Настоящая работа посвящена условиям, при которых множества достижимости системы (1) будут сохранять выпуклость при малых  $\varepsilon$ .

**Теорема.** Пусть выполнено Предположение 1. Тогда найдется такое положительное  $\varepsilon_0$  что множества достижимости  $G(T, \mu, \varepsilon)$  квазилинейной системы (1) будут выпуклыми при всех  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ .

## Список литературы

- [1] В. Т. Polyak. Convexity of Nonlinear Image of a Small Ball with Applications to Optimization. *Set-Valued Analysis*, **9** (2001), 159–168.
- [2] В. Т. Polyak. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L2 bounded controls. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems Ser. A Math. Anal.*, **11**: Suppl. 2-3 (2004), 255-267.
- [3] Н. Н. Красовский. Теория управления движением. М: Наука, 1968. 476.
- [4] Э. Г. Альбрехт. О сближении квазилинейных объектов в регулярном случае. *Дифференц. уравнения.*, **VII**: 7 (1971), 1171–1178.

## Обобщенная формула Хопфа для функции цены в позиционной дифференциальной игре "мальчик и крокодил"

Родин А.С.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

УрФУ, Екатеринбург, Россия

alexey.rodin.ekb@gmail.com

Рассмотрим позиционную дифференциальную игру "мальчик и крокодил". Ее динамика в приведенном виде выглядит следующим образом

$$\dot{x} = (T - t) \cdot u - v, \quad x \in R, \quad t \in [0; T], \quad u, v \in [-1; 1].$$

Рассмотрим функционал платы  $\sigma(x(T)) = \frac{x^2(T)}{2}$ . Целью первого игрока  $u$  является минимизация этого функционала, а второго игрока  $v$  максимизация.

Рассмотрим множества позиционных стратегий обоих игроков

$$\tilde{U} = \{[0; T] \times R \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in [-1; 1]\}, \quad \tilde{V} = \{[0; T] \times R \ni (t, x) \rightarrow v(t, x) \in [-1; 1]\}.$$

Будем сопоставлять стратегии  $U \in \tilde{U}$  функцию  $(t, x) \rightarrow u(t, x)$ , а стратегии  $V \in \tilde{V}$  функцию  $(t, x) \rightarrow v(t, x)$ . Введем разбиение  $\Delta$  полуинтервалами  $[\tau_i; \tau_{i+1})$  множества  $[t_0; T]$ ,  $t_0 \in [0; T]$ ,  $i = \{0, 1, \dots\}$ ,  $\tau_0 = t_0$ .

Назовем ломанной Эйлера для начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0; T] \times R$

$$x_\Delta(t) = x_\Delta(t, t_0, x_0, U, v(t)), \text{ где } v(t) = v_i \in [-1; 1], \text{ при } t \in [\tau_i; \tau_{i+1})$$

абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}_\Delta(t) = (T - t) \cdot u(\tau_i, x_\Delta(\tau_i)) - v_i, \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}), \quad i = \{0, 1, \dots\}, \quad \tau_0 = t_0.$$

Аналогично рассмотрим ломанную Эйлера для начальной позиции  $(t_0, x_0) \in [0; T] \times R$

$$x_\Delta(t) = x_\Delta(t, t_0, x_0, u(t), V), \text{ где } u(t) = u_i \in [-1; 1], \text{ при } t \in [\tau_i; \tau_{i+1})$$

абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}_\Delta(t) = (T - t) \cdot u_i - v(\tau_i, x_\Delta(\tau_i)), \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}), \quad i = \{0, 1, \dots\}, \quad \tau_0 = t_0.$$

Рассмотрим определения гарантированных результатов для  $U \in \tilde{U}$ ,  $V \in \tilde{V}$ :

$$\Gamma_1^0(t_0, x_0) = \lim_{diam(\Delta) \rightarrow 0} \sup_{v(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, U^0, v(t))) = \inf_{U \in \tilde{U}} \lim_{diam(\Delta) \rightarrow 0} \sup_{v(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, U, v(t)));$$

$$\Gamma_2^0(t_0, x_0) = \lim_{diam(\Delta) \rightarrow 0} \inf_{u(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, u(t), V^0)) = \sup_{V \in \tilde{V}} \lim_{diam(\Delta) \rightarrow 0} \inf_{u(\cdot)} \sigma(x_\Delta(T, t_0, x_0, u(t), V)).$$

Здесь  $diam(\Delta)$  есть диаметр разбиения  $\Delta$ .

Если для любой точки  $(t_0, x_0) \in [0; T] \times R$  существуют  $\Gamma_1^0(t_0, x_0)$ ,  $\Gamma_2^0(t_0, x_0)$  и совпадают, то игра имеет седловую точку  $\{U^0, V^0\}$ , а значение  $\Gamma_1^0(t_0, x_0) = \Gamma_2^0(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0)$  называется ценой игры для точки  $(t_0, x_0)$ . отображение  $[0, T] \times R \ni (t_0, x_0) \rightarrow \varphi(t_0, x_0) \in R$  называется функцией цены дифференциальной игры.

Известно, что в данной дифференциальной игре существует функция цены [1].

Для дифференциальной игры "мальчик и крокодил" можно найти гамильтониан  $H(t, s)$ :

$$\min_{u \in [-1; 1]} \max_{v \in [-1; 1]} (s \cdot ((T - t) \cdot u - v)) = \max_{v \in [-1; 1]} \min_{u \in [-1; 1]} (s \cdot ((T - t) \cdot u - v)) =$$



$$= \max_{v \in [-1;1]} (-|s| \cdot (T - t) - s \cdot v) = |s| \cdot (t + 1 - T) = H(t, s).$$

Рассмотрим следующую краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$D_t \varphi(t, x) + H(t, D_x \varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), \tag{1}$$

где  $t \in [0; T]$ ,  $x \in R$ ,  $H(t, s) = (t - 1) \cdot |s|$ ,  $T = 2$ ,  $\sigma(x) = \frac{x^2}{2}$ .

**Определение.** ([2], стр. 73) Непрерывная функция  $u(t, x)$  является минимаксным решением краевой задачи Коши уравнения Гамильтона-Якоби (1), если выполнены следующие условия

$$\varphi(T, x) = \sigma(x),$$

$$\inf \{ d^- u(t_0, x_0; (1, f)) - \langle s, f \rangle + H(t_0, s) : f \in R^n \} \leq 0,$$

$$\sup \{ d^+ u(t_0, x_0; (1, f)) - \langle s, f \rangle + H(t_0, s) : f \in R^n \} \geq 0,$$

для всех  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times R^n$ ,  $s \in R^n$ . Здесь

$$d^- u(t_0, x_0; (1, f)) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + \delta, x_0 + f \cdot \delta) - u(t_0, x_0)}{\delta},$$

$$d^+ u(t_0, x_0; (1, f)) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + \delta, x_0 + f \cdot \delta) - u(t_0, x_0)}{\delta}.$$

Согласно общей теории минимаксных решений [2] для данной задачи (1) справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** Минимаксное решение задачи (1) существует и единственно и оно совпадает с функцией цены в позиционной дифференциальной игре "мальчик и крокодил".

Рассмотрим следующие введенные функции

$$\Psi(t, s) = \sigma^*(s) - \int_t^T H(\tau, s) d\tau, \quad \forall t \in [0; T], \quad \sigma^*(s) = \sup_{x \in R^n} \langle x, s \rangle - \sigma(x), \tag{2}$$

$$\varphi(t, x) = \sup_{s \in R^n} \langle x, s \rangle - \Psi(t, s) = \sup_s x \cdot s - \frac{s^2}{2} + l(t) \cdot |s|, \quad l(t) = \left( t - \frac{t^2}{2} \right) \tag{3}$$

$$\bar{\varphi}(t, x) = \max \left\{ \varphi(t, x), \max_{\vartheta \in [t; 2]} \min_{x \in R} \varphi(\vartheta, x) \right\} = \max \left\{ \frac{(|x| + l(t))^2}{2}, \max_{\vartheta \in [t; 2]} \frac{l^2(\vartheta)}{2} \right\}. \tag{4}$$

**Теорема.** Функция  $\bar{\varphi}(t, x)$  является минимаксным решением краевой задачи Коши уравнения Гамильтона-Якоби (1).

Заключение. Функция  $\bar{\varphi}(t, x)$  заданная формулами (2), (3), (4) является обобщением формулы Хопфа для минимаксного решения задачи (1) для случая, когда гамильтониан не зависит от времени. Классический вариант формулы Хопфа имеет следующий вид

$$\varphi(t, x) = \sup_{s \in R^n} \langle x, s \rangle - \Psi(t, s), \quad \Psi(t, s) = \sigma^*(s) - (T - t)H(s).$$

## Список литературы

- [1] A. I.Subbotin. Generalization of the Main Equation of Differential Game Theory. *J. Optim. Theory Appl.*, **43**: 1 (1984), 103–133.
- [2] А. И. Субботин. Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Ин-т компьютерных исследований. М.: Ижевск, 2003. 336.

## О структуре множества выживаемости для модели химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону

Субботина Н.Н.

*ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
subb@uran.ru

Новоселова Н.Г.

*ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
n.g.novoselova@imm.uran.ru

Крупенников Е.А.

*ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
krupennikov@imm.uran.ru

В докладе обсуждается математическая модель процесса лечения злокачественной опухоли. Рассматривается модель — система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, использующая обобщенный логистический закон роста опухоли [1, 2]. Фазовые переменные модели — размер опухоли и объем лекарства в организме. Управление — скорость введения лекарства.

Особую роль в модели играет функция терапии. Это функция, описывающая эффективность воздействия лекарства на объем опухоли в зависимости от объема лекарства в организме. В данной работе рассматривается ранее не исследованная другими авторами структура функции терапии. А именно — гладкая функция с двумя максимумами, что отражает возможность применения двух лекарств.

На фиксированном отрезке времени  $[0, T]$  рассмотрена задача оптимального управления (оптимальной терапии), где качество проведенного лечения оценивается объемом опухоли в конечный (контрольный) момент времени  $T$ .

Рассматривается задача построения множества выживаемости для модели лечения раковой опухоли. Множество выживаемости — это множество начальных данных (момент начала лечения, начальный объем опухоли и начальное количество лекарства в организме) таких, что для этих данных можно указать протокол лечения (допустимое управление, удовлетворяющее заданным ограничениям) такой, что вплоть до контрольного момента (момента окончания лечения  $T$ ) объем опухоли не превосходит предела, совместимого с жизнью. Предложена конструкция множества выживаемости для модели, использующей обобщенный логистический закон роста. Обоснование построения основано на теории оптимального управления [3, 4] и теории обобщенных решений дифференциальных уравнений в частных производных [5]. Используются результаты работы [6], в которой построена оптимальная позиционная стратегия управления — оптимальный синтез, гарантирующий минимальный размер опухоли в контрольный момент времени окончания лечения  $T$ .

Множество выживаемости для модели опухоли, растущей по закону Гомперца, было описано ранее в [7].

## Список литературы

- [1] А. С. Братусь, Е. С. Чумерина. Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль. *Biosciences*, **48**: 6 (2008), 946–966.
- [2] H. Schattler, U. Ledzewicz. *Optimal Control for Mathematical Models of Cancer Therapies: An Applications of Geometric Methods*. Springer: New York, NY, USA, 2015.

- [3] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов, 4-е изд. М.: Наука, 1983.
- [4] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [5] A. I. Subbotin. Generalized Solutions of First Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser, Boston, 1995.
- [6] Н. Н. Субботина, Н. Г. Новоселова. О приложениях уравнений Гамильтона-Якоби и теории оптимального управления к задачам химиотерапии злокачественных опухолей. *Тр. Мат. Инст. Стеклова.*, **304** (2019), 273–284.
- [7] Н. Н. Субботина, Н. Г. Новоселова. Построение множества выживаемости в задаче химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по закону Гомперца. *Тр. ИММ УрО РАН.*, **26**: 1 (2020), 173–181.

## Численное построение и исследование структуры двумерного множества достижимости машины Дубинса при интегральном ограничении на управление

Трубников Г.И.

Уральский Федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

jora\_it@mail.ru

В работе анализируется двумерное множество достижимости машины Дубинса на плоскости геометрических координат при интегральном ограничении на управление. Дается сравнение с тем, что известно [1], [2] для случая геометрических ограничений на управление.

Движение машины Дубинса описывается соотношениями

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u.$$

Здесь  $x, y$  — геометрические координаты на плоскости;  $u$  — скалярное управление. Угол  $\varphi$  отсчитывается от положительного направления оси  $x$  против часовой стрелки. Полагаем  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$ . Интегральное ограничение является квадратичным:

$$\int_0^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu, \quad \mu > 0.$$

Множество достижимости  $\mathcal{G}(t_f, \mu)$  в момент  $t_f$  есть совокупность всех геометрических состояний  $(x(t_f), y(t_f))^\top$ , в каждое из которых можно перейти в момент  $t_f$  при помощи кусочно-непрерывного управления  $t \rightarrow u(t)$ , удовлетворяющего интегральному ограничению.

Известно, что в случае геометрического ограничения  $|u(t)| \leq 1$ ,  $t \in [0, t_f]$ , граница двумерного множества достижимости порождается кусочно-постоянными управлениями с не более чем одним моментом переключения [2]. Она состоит из двух эвольвент и двух кардиоид. Особенность структуры множества состоит в отсутствии односвязности на некотором интервале значений  $t_f$ .

Установлено, что при интегральном ограничении любое управление, ведущее на границу множества достижимости, имеет не более одного момента смены знака. Любое не равное тождественно нулю управление, ведущее на границу, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с краевым условием из работы [3] и является непрерывным. Граница составляется из четырех кривых. Аналогом эвольвенты служит кривая, порождаемая постоянными по знаку управлениями. Кривая, точки которой формируются управлениями с одним моментом смены знака, выступает в качестве аналога кардиоиды. Характер изменения множества достижимости во времени также похож: лишь на некотором интервале значений  $t_f$  отсутствует односвязность. Анализ использует результаты работы [4], посвященной построению трёхмерного множества достижимости машины Дубинса в координатах  $x, y, \varphi$  при интегральном ограничении на управление.

В докладе будут представлены результаты численных построений. Работа выполнена под руководством В.С. Пацко и А.А. Федотова.

## Список литературы

- [1] E. J. Cockayne, G. W. C. Hall. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control Optim.*, **13**: 1 (1975), 197–220.
- [2] Ю. И. Бердышев. Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение. Монография, Екатеринбург: УрО РАН, 2015.
- [3] И. В. Зыков. О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями. *CEUR Workshop Proceedings*, **1894** (2017), 88–97.
- [4] В. С. Пацко, Г. И. Трубников, А. А. Федотов. Трёхмерное множество достижимости машины Дубинса при интегральных ограничениях. *Сборник тезисов докладов XIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике*, 2023, 193–196).

**Устранение эффекта отражения волны при стабилизации взаимодействия удаленных QSR-диссипативных систем с задержкой по времени**

Усова А.А.  
 ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
 ausova@imm.uran.ru

В работе освещается возможность улучшения процесса стабилизации взаимодействия робототехнических систем, находящихся на удалении друг от друга и связанных посредством канала связи, вследствие чего могут возникать постоянные задержки по времени при передачи сигналов. Такие системы называют *телеоператорными*, что дословно означает *tele* – на расстоянии, *operation* – действие (работа), т.е. "действие на расстоянии". Структура этих систем изображена на рисунке 1.

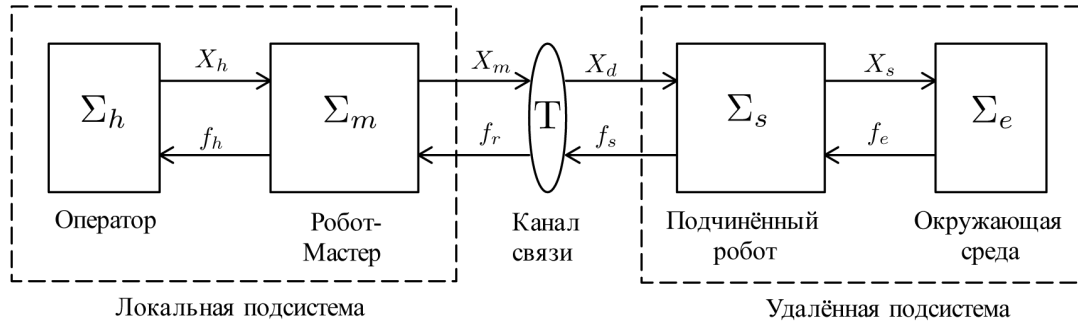


Рис. 1: Структура телеоператорной системы

Оператор задает траекторию движения  $X_h = (x_h^\top, \dot{x}_h^\top)^\top$ , взаимодействуя с роботом-мастером. Далее данная траектория  $X_m$  посредством канала связи передается на удаленную сторону - подчиненному роботу, который выполняет заданные движения  $X_d$ , взаимодействуя с внешней средой. Реакция среды  $f_e$  передается в виде силового сигнала  $f_s$  на локальную сторону телеоператора, и, таким образом, оператор получает обратную связь по силе  $f_r$ .

Для каждой из подсистем определяются входные  $\eta$  и выходные сигналы  $y$ , относительно которых для систем вводится понятие устойчивости, в частности, говорят, *система (слабо)  $\mathcal{L}_2$ -устойчива*, если  $\|y\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|\eta\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \beta$ , где  $\gamma, \beta > 0$  (понятие *слабой устойчивости* относится к системам с задержкой по времени, так как для них параметр  $\beta$  зависит не только от начальных условий при  $t = t_0$ , но и от значений на промежутке  $[t_0 - T, t_0]$ , где  $T$  - максимальная задержка по времени). В данном случае, предполагается, что все подсистемы являются QSR-диссипативными, то есть их функция расхода есть квадратичная форма относительно входно-выходных переменных,  $w(\eta, y) = (\eta^\top y^\top) \text{QSR} (\eta^\top y^\top)^\top$ . Более того, необходимым условием  $\mathcal{L}_2$ -устойчивости является выполнение условия «выживаемости» (по Виллемсу) [5], когда размерность входа совпадает с количеством неотрицательных собственных значений QSR-матрицы, то есть  $\dim \eta = \text{card} (\lambda_0^+(\text{QSR}))$ .

Процесс стабилизации всей телеоператорной системы заключается [1, 3] в применении преобразований рассеивания  $\mathbb{S}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$  ( $i = \{m, s\}$ , m – master, s – slave) ко входно-выходным сигналам  $(f_m^r, X_m)$  и  $(X_d, f_s^r)$  локальной и удаленной подсистем соответственно. В работах [2–4] подробно описана техника использования оператора рассеивания к QSR-диссипативным системам для обеспечения их устойчивого взаимодействия. Данный метод стабилизации предписывает передавать через канал связи не исходные выходные сигналы  $X_m$  и  $f_s^r$ , а волновые переменные  $U_m$  и  $U_s$ , которые получаются путем применения преобразования рассеивания к сигналам локальной и

удаленной подсистем

$$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix} = \mathbb{S}_m \begin{pmatrix} f_m^r \\ X_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_s \\ V_s \end{pmatrix} = \mathbb{S}_s \begin{pmatrix} X_d \\ f_s^r \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} U_s(t) = V_m(t - T_1) \\ U_m(t) = V_s(t - T_2) \end{cases} \quad (1)$$

Суть преобразования рассеивания состоит в диагонализации QSR-матрицы каждой из подсистем таким образом, чтобы выполнялись условия слабой  $\mathcal{L}_2$ -устойчивости [2–4]. В силу того, что преобразование рассеивания порождает новый выходной сигнал  $U_i$  (1), который есть линейная комбинация исходных сигналов, это приводит к тому, что в теории линий электропередач называется эффектом отражения волн, когда исходный сигнал становится зависимым от своей истории более, чем на величину задержки  $T_i$  ( $i = \{m, s\}$ ) в канале связи. В итоге, существенно увеличивается время стабилизации системы, что зачастую в реальных системах недопустимо.

Во избежание этой проблемы предлагается к локальной и удаленной подсистеме в контроллер добавить управления вида  $\tilde{f}_i = \tilde{K}_i \tilde{X}_i = (\tilde{K}_i^s, \tilde{K}_i^d) \tilde{X}_i$ , где  $\tilde{K}_i^s, \tilde{K}_i^d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – диагональные строго положительно определенные матрицы, а  $\tilde{X}_m = X_m$ ,  $\tilde{X}_s = (x_d^\top - x_s^\top, \dot{x}_d^\top - \dot{x}_s^\top)^\top$  – вектор полного состояния подсистем,  $i = \{m, s\}$ . Таким образом получается изображенная на Рис. 2 схема управления телеоператорной системой. Взаимосвязь двух подсистем осуществляется по правилу (1), что

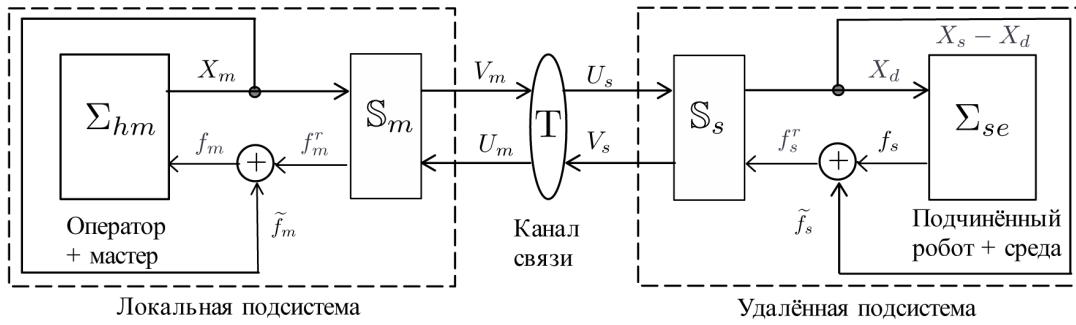


Рис. 2: Управление для подавления эффекта отражения волны

дает следующие соотношения в исходных переменных

$$\begin{aligned} U_m(t) = V_s(t - T_s) &\Rightarrow A_m f_m^r(t) + B_m X_m(t) = C_s X_d(t - T_s) + D_s f_s^r(t - T_s) \\ U_s(t) = V_m(t - T_m) &\Rightarrow A_s X_d(t) + B_s f_s^r(t) = C_m f_m^r(t - T_m) + D_m X_m(t - T_m) \end{aligned}$$

Используя контроллер вида  $f_s^r(t) = -\tilde{K}_s(X_s(t) - X_d(t))$ , выражаем из них входные сигналы  $f_m^r(t)$  и  $X_d(t)$  для локальной и удаленной подсистем

$$\begin{aligned} f_m^r(t) &= A_m^{-1}(-B_m X_m(t) + (C_s + D_s \tilde{K}_s) X_d(t - T_s) - D_s \tilde{K}_s X_s(t - T_s)), \\ (A_s + B_s \tilde{K}_s) X_d(t) &= C_m A_m^{-1}((C_s + D_s \tilde{K}_s) X_d(t - T_m - T_s) - D_s \tilde{K}_s X_s(t - T_m - T_s)) + \\ &+ B_s \tilde{K}_s X_s(t) + (D_m - C_m A_m^{-1} B_m) X_m(t - T_m) \end{aligned}$$

Во избежание влияния истории сигнала  $X_d(t - T_m - T_s)$  на его текущее значение  $X_d(t)$ , полагаем  $\tilde{K}_s = -D_s^{-1} C_s$  и  $\tilde{K}_m = A_m^{-1} B_m$ , что дает следующие соотношения

$$\begin{aligned} f_m^r(t) &= -A_m^{-1}(B_m X_m(t) - C_s X_s(t - T_s)), \\ (A_s + B_s \tilde{K}_s) X_d(t) &= (D_m - C_m A_m^{-1} B_m) X_m(t - T_m) - B_s D_s^{-1} C_s X_s(t) + C_m A_m^{-1} C_s X_s(t - T_m - T_s). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо утверждение

**Утверждение** Для устранения эффекта отражения волны необходимо в управление локальной и удаленной подсистемами добавить контроллеры

$$\tilde{f}_m(t) = A_m^{-1} B_m X_m(t), \quad f_s^r(t) = -D_s^{-1} C_s (X_s(t) - X_d(t)), \quad (2)$$

при этом телеоператорная система не теряет свойства устойчивости.

Следует отметить, что выбор контроллеров в виде (2) налагает дополнительные требования к преобразованиям рассеивания  $\mathbb{S}_m$  и  $\mathbb{S}_s$ , а именно их блоки  $A_m, B_m, D_s, C_s$  соответственно, должны удовлетворять следующим условиям: (1) матрицы  $A_m^{-1}B_m \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  и  $-D_s^{-1}C_s \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  состоят из блоков размера  $3 \times 3$ , (2) каждый из этих блоков является диагональной, строго положительно определенной матрицей. Поскольку преобразование рассеивания не единственно, и его задачей служит исключительно диагонализация QSR-матриц каждой из подсистем, данные требования не являются жесткими.

В заключение, отметим, что предложенные модификации алгоритмов управления телеоператорными системами позволяют ускорить процесс стабилизации замкнутой системы в целом. Ее устойчивость при этом гарантируется QSR-диссипативностью и выполнением условия «выживаемости» каждой из подсистем.

## Список литературы

- [1] R. J. Anderson, M. W. Spong. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC**: 34 (1989), 494–501.
- [2] I. G. Polushin. A Generalized Scattering Framework for Teleoperation with Communication Delays. *IFAC-PapersOnLine*, **53**: 2 (2020), 10064–10069.
- [3] A. A. Usova, I. G. Polushin, R. V. Patel. Scattering-based stabilization of non-planar conic systems. *Automatica*, **93** (2018), 1–11.
- [4] A. A. Usova, I. G. Polushin, R. V. Patel. Scattering-Based Stabilization of Complex Interconnections of (Q,S,R)-dissipative Systems with Time Delays. *IEEE Control Systems Letters*, **3**: 2 (2019), 368–373.
- [5] J. C. Willems, H. L. Trentelman. Synthesis of Dissipative Systems Using Quadratic Differential Forms: Part I. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**: 1 (2002), 53–69.

**Алгоритмы обучения с подкреплением в решении задач оптимального управления динамическими системами с производными дробного порядка<sup>1</sup>**

Чайков А.И.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
canderys@gmail.com

Плаксин А.Р.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
arplaksin@gmail.com

Сергеев В.

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
navitel365@gmail.com

В работе рассматриваются задачи оптимального управления на конечном отрезке времени, в которых динамическая система описывается дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, а функционал качества имеет форму Больца. Теоретически установлено [1], что в таких задачах оптимальные позиционные стратегии зависят не только от текущего момента времени, но и от всей предыдущей истории, что вносит существенные сложности в их решение. В данной работе мы исследуем работоспособность современных алгоритмов обучения с подкреплением в решении такого типа задач, а также зависимость их результата от использования истории движения в позиционных стратегиях.

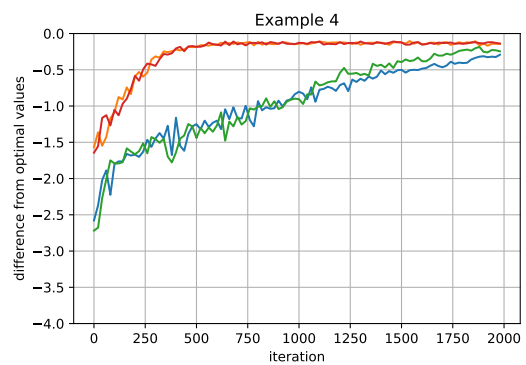
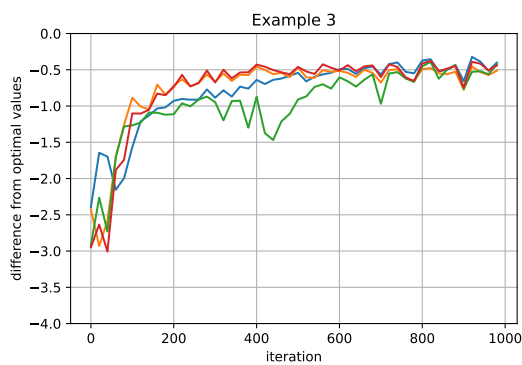
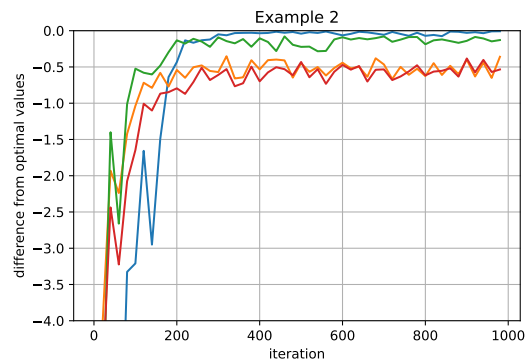
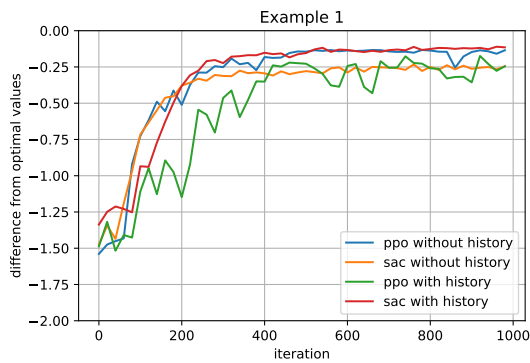
Для этого мы рассматриваем два алгоритма обучения с подкреплением - SAC [4] и PPO [5] и для каждого из них рассматриваем два случая: когда позиционная стратегия зависит только от текущего состояния системы  $(t, x(t))$  и когда она зависит от всей предыдущей истории  $(t, x_t(\cdot))$ . Для проверки работоспособности мы рассматриваем два примера (Example 1, 3) из работы [1], пример (Example 2) из [2] и пример (Example 4) из [3]. На графиках ниже представлены результаты алгоритмов при решении этих задач. По оси  $x$  - количество итераций обучения, а по оси  $y$  - разность полученных и оптимального значений функционала качества. Причем в Example 1-3, оптимальное значение может быть найдено аналитически для любой начальной точки. Поэтому в этих задачах мы можем запускать алгоритмы обучения с подкреплением для начальных точек, выбираемых случайным образом из некоторого заданного компакта, чтобы таким образом усложнить задачу алгоритмам. В Example 4 оптимальное значение получено численно для лишь конкретной начальной точки и поэтому мы запускаем алгоритмы из только нее.

На графиках видно, что во всех случаях алгоритмы сходятся к значениям близким к нулю, что в целом свидетельствует об их работоспособности в рассматриваемом классе задач. При этом интересно, что в наших экспериментах результаты стратегий с историей никак не отличаются от результатов стратегий без нее. Таким образом, по-видимому среди задач оптимального управления системами с производными дробного порядка существует достаточно большой подкласс задач, в которых результат позиционных стратегий без истории будет близок к оптимальному, а поиск задач, когда это не так является отдельным интересным направлением исследований. Вероятно, это могут быть либо задачи с более сложной динамикой, либо задачи с динамическими помехами или шумом.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-10070, <https://rscf.ru/project/21-71-10070/>).





## Список литературы

- [1] M. I. Gomoyunov. Optimal control problems with a fixed terminal time in linear fractional-order systems. *Archives of Control Sciences*, **30**: 4 (2020), 721–744.
- [2] M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. Approximation of Fractional Order Conflict-Controlled Systems. *Proc. Steklov Inst. Mathematics.*, **304**: Suppl.1 (2019), 68–75.
- [3] Iman Malmir. Novel closed-loop controllers for fractional linear quadratic time-varying systems. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, **14**: 2 (2022), 366–403.
- [4] T. Haarnoja, A. Zhou, P. Abbeel, S. Levine. Soft Actor-Critic: Off-Policy Maximum Entropy Deep Reinforcement Learning with a Stochastic Actors. *Proceedings of Machine Learning Research*, **80** (2018), 1856–1865.
- [5] J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal, A. Radford, O. Klimov. Proximal Policy Optimization Algorithms. [ArXiv:1707.06347v2](https://arxiv.org/abs/1707.06347v2).

Использование импульсных управлений для реализации движений манипуляторов<sup>1</sup>

Чупин И.А.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
mr.tchupin@yandex.ru

Рассматривается механическая модель манипуляционного робота, состоящая из конечного набора абсолютно твердых тел, соединения которых описываются идеальными стационарными геометрическими связями. Силовые взаимодействия в системе определяются потенциальными и управляющими силами.

Считаем, что система имеет  $n$  степеней свободы и положения манипулятора описываются обобщенными координатами  $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ .

Канонические уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} + u_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Требуется найти управления  $u_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которые позволяют перевести манипулятор из заданного начального положения равновесия  $q(0) = q^0$ ,  $p(0) = 0$  в заданное конечное положение равновесия  $q(T_k) = q^T$ ,  $p(T_k) = 0$ , где  $T_k$  – неизвестное время перехода манипулятора из начального положения равновесия в конечное положение равновесия.

В [1] приведена методика нахождения траектории свободного движения в фазовом пространстве, проекция которой на координатное пространство соединяет начальное и конечное положения. При движении по траектории свободного движения управления выключаются, движение манипулятора происходит по инерции за счет собственной энергии. Из начального положения равновесия движение манипулятора по этой траектории невозможно, и он приходит в конечное положение с ненулевой скоростью. Было показано, что используя специальные импульсные управления  $u_i(t)$ , можно в начальный момент времени  $t = 0$  вывести манипулятор на траекторию свободного движения и в конечный момент  $t = T_k$  погасить скорость. Эти идеальные импульсные управления определяются формулами

$$u_i(t) = S_i^0 \delta(t) + S_i^T \delta(t - T_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T_k],$$

$$S_i^0 = \frac{\partial W(q^0, a(h), h)}{\partial q_i}, \quad S_i^T = -\frac{\partial W(q^T, a(h), h)}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\delta(\cdot)$  – функция Дирака,  $W(q, a, h)$  – полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для консервативной системы,  $a = (a_1, \dots, a_{n-1})^T$ ,  $h$  – произвольные вещественные постоянные, такие, что  $a_i = a_i(h)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  – единственное решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (W(q^0, a, h) - W(q^T, a, h)) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Реализация предложенной методики нахождения свободной траектории для двухзвенного безинерционного манипулятора была приведена в [2].

В работе физически нереализуемые идеальные импульсные управления заменяются приближенными физически реализуемыми управлениями.

Замена функции Дирака прямоугольным импульсом является одним из подходов построения приближенных импульсных управлений, которые определяются формулами

$$u_{ni}(t) = \begin{cases} S_i^0 / \Delta, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \Delta \leq t < T_k - \Delta \\ -S_i^T / \Delta, & T_k - \Delta \leq t < T_k \end{cases}, \quad i = \overline{1, n},$$

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00714).

где  $\Delta$  — ширина прямоугольного импульса.

В работе предлагаются приближенные управления, задающиеся следующим образом

$$u_{li}(t) = \begin{cases} A_i t + B_i, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \Delta \leq t < T_k - \Delta \\ C_i t + D_i, & T_k - \Delta \leq t < T_k \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Задача заключается в нахождении параметров  $A_i, B_i, C_i, D_i$ , которые позволят в момент времени  $t = \Delta$  выйти на траекторию свободного движения в фазовом пространстве и погасить скорость к конечному моменту времени.

Для нахождения параметров  $A_i, B_i, C_i, D_i$  предлагается рассматривать упрощенные канонические уравнения

$$\dot{q}_i = \left( \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \right)_{q=q^0}, \quad \dot{p}_i = \left( -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \right)_{q=q^0} + u_{li}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, \Delta],$$

$$\dot{q}_i = \left( \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \right)_{q=q^T}, \quad \dot{p}_i = \left( -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \right)_{q=q^T} + u_{li}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [T_k - \Delta, T_k].$$

На примере [2] оценка погрешностей показала, что второй способ предпочтительнее с точки зрения точности. На рис. 1 представлен закон движения  $r(t)$  на участке  $[0, \Delta]$ . Синим выделена траектория соответствующая идеальным импульсным управлениям. Оранжевым выделена траектория, полученная путем замены функции Дирака прямоугольным импульсом. Красным выделена траектория, полученная в результате применения подхода приближения линейными функциями.

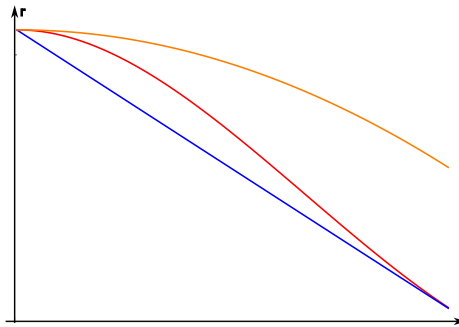


Рис. 1. Координата манипулятора  $r(t)$  на участке  $t \in [0, \Delta]$

## Список литературы

- [1] И. А. Чупин. Нахождение импульсных управлений для многосвязных манипуляционных роботов. *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 4 (2023), 53–65.
- [2] Ю. Ф. Долгий, И. А. Чупин. Импульсные управления двухсвязным манипуляционным роботом. *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, 57 (2021), 77–90. DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-02.

## О построении наихудших возмущений для наблюдателя в задачах гарантированного оценивания линейно-квадратичных систем

Юровских П.А.  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
iurowskix.p@yandex.com

Рассматривается линейная система вида (1) с квадратичными ограничениями (2), где  $k \in \mathbb{N}$ ;  $y_k$  — наблюдаемые координаты, а  $z_k$  — ненаблюдаемые. Возможен случай  $m = n$ , когда все координаты системы ненаблюдаемы.

$$\begin{aligned} y_k &= C_k^y y_{k-1} + A_k^y z_{k-1} + B_k^y v_k, \quad y_k \in \mathbb{R}^{n-m}, \\ z_k &= A_k^z z_{k-1} + C_k^z y_{k-1} + B_k^z v_k, \quad z_k \in \mathbb{R}^m, \quad v_k \in \mathbb{R}^q, \end{aligned} \quad (1)$$

Наблюдатель знает, что неизвестный входной сигнал  $v_\bullet$  и начальное состояние  $z_0$  ограничены

$$|z_0|^2 + \sum_{k=1}^N |v_k|^2 \leq 1. \quad (2)$$

Согласно общей теории гарантированного оценивания [1] дадим определение.

**Определение.** Семейство  $Z_N(y) \subset \mathbb{R}^n$  назовем информационным множеством (ИМ), если оно состоит из всех векторов  $z_N$ , для каждого из которых существует порождающая совместимая пара  $(z_0, v_\bullet)$ , удовлетворяющая ограничениям (2).

Для  $\forall k \in 1 : N$  ИМ  $Z_k(y) \neq \emptyset$ , т.к. по построению включает в себя истинное состояние  $z_k^* \in Z_k(y)$ .

Задача наблюдателя: построить ИМ. Задача контроллера: найти такое управление  $v_\bullet$ , чтобы из состояния  $z_0$  перевести систему в состояние  $z_N$ , выбирая наихудшие допустимые  $v_\bullet$ . При этом реализовался бы такой сигнал  $y_k$ , что ИМ в момент  $N$  имело бы максимальный размер, т.е. максимально затруднить наблюдателю определение неизвестного ему состояния  $z_N$  [3–5]. В рассматриваемом линейно-квадратичном случае известно, что ИМ — эллипсоид, под его размером будем понимать объем

$$\text{vol}(Z_N(y)) \rightarrow \max.$$

Для построения ИМ используется алгоритм, приведенный в работе [2]. Для нахождения наихудших возмущений используется cvx, пакет для решения задач выпуклой оптимизации [6, 7].

В докладе представлено несколько примеров.

## Список литературы

- [1] A. B. Kurzhanski, P. Varaiya. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. SCFA, Birkhäuser, 2014. 445.
- [2] Б. И. Ананьев, П. А. Юровских. Общая задача гарантированного оценивания для многошаговых систем. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.*, **45** (2023), 377–53.
- [3] В. И. Ширяев. Сигналы, наихудшие для наблюдения в задаче минимаксной фильтрации. *Гарантированное оценивание и задачи управления*. Свердловск. 1986. 127–131.
- [4] Б. И. Ананьев, В. И. Ширяев. Определение наихудших сигналов в задачах гарантированного оценивания. *Автомат. и телемех.*, **3** (1987), 49–58.
- [5] Б. И. Ананьев, В. И. Ширяев. О выборе наихудших сигналов в многошаговых задачах гарантированного оценивания. *Сборник "Динамические задачи оценивания в условиях неопределённости"* ред. М. И. Гусев и Т. Ф. Филиппова. Свердловск: Издательство УНЦ, 1989, 11–20.
- [6] M. Grant, S. Boyd. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
- [7] M. Grant, S. Boyd. Graph implementations for nonsmooth convex programs, *Recent Advances in Learning and Control (a tribute to M. Vidyasagar)*, Conference proceedings. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2008, 95–115

**Стохастическая динамика**  
(председатель д.ф.-м.н. Л.Б. Ряшко)

## Математическое моделирование и стохастический анализ нелинейных термохимических процессов<sup>1</sup>

Башкирцева И.А.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия  
irina.bashkirtseva@urfu.ru

Математические модели термохимической кинетики являются сильно нелинейными и характеризуются высокой чувствительностью к вариации параметров [1]. Даже в детерминированном случае это приводит к сложным бифуркационным сценариям со сменой динамических режимов, описываемых как регулярными, так и хаотическими аттракторами. В докладе обсуждаются внутренние механизмы, порождающие в термохимических моделях автоколебания спайкового и берстового типа, канардовские циклы, режимы мультиритмичности. Случайные возмущения, неизбежно присутствующие в термохимических процессах, являются дополнительным фактором, приводящим к формированию принципиально новых динамических сценариев и существенно усложняющим их исследование. В докладе дается обзор таких феноменов как стохастическая генерация сложных мультимодальных осцилляций спайкового типа, расщепление канардовских циклов, индуцированная шумом трансформация регулярной динамики в хаотическую, резонансные явления в системах с цветными шумами [2–4]. Показана эффективность аналитических методов в параметрическом исследовании этих явлений.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда №23-21-00042.

## Список литературы

- [1] В. И. Быков, С. Б. Цыбенова. Нелинейные модели химической кинетики. URSS: 2018.
- [2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. How noise induces multi-stage transformations of oscillatory regimes in a thermochemical model. *Physics Letters A*, **476** (2023), 128884.
- [3] I. Bashkirtseva, G. Ivanenko, D. Mordovskikh, L. Ryashko. Canards oscillations, noise-induced splitting of cycles and transition to chaos in thermochemical kinetics. *Mathematics*, **11**: 8 (2023), 1918.
- [4] L. Ryashko. Analysis of excitement caused by colored noise in a thermokinetic model. *Mathematics*, **11**: 22 (2023), 4676.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом Российского научного фонда №23-21-00042.

## Стохастические трансформации кальциевых осцилляций в зонах сосуществования аттракторов

Башкирцева И.А.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
irina.bashkirtseva@urfu.ru

Качусов С.М.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
stepanurfu@gmail.com

Кальциевая динамика представляет большой интерес в изучении функционировании любого живого организма. Колебания концентрации кальция в клетке способны передавать сигнал и регулировать сложные внутриклеточные и межклеточные процессы. Многие исследования кальциевой динамики основаны на математических моделях большой размерности, но и дифференциальные модели меньшей размерности [1, 2] способны подтвердить многие практические результаты.

В работе рассматривается модель Ли-Ринцеля кальциевой динамики [1]. Исследуется зависимость поведения системы модели от значений параметров модели [3]. Исследуется устойчивость аттракторов детерминированной системы. Определяются промежутки значений параметров, при которых системы имеют различное количество точек покоя и типы модуляции кальциевых осцилляций. Подробнее рассматривается конфигурация, при которой наблюдается зона тристабильности с сосуществованием автоколебательного и двух равновесных режимов. Исследуются переходы, вызываемые случайными возмущениями параметров кальциевых каналов, и выявляются условия, при которых случайные возмущения могут возбуждать импульсные колебания из равновесного режима и подавлять колебания больших амплитуд. Исследуется взаимосвязь устойчивости детерминированной и стохастической систем в зоне релаксационного автоколебательного режима. Для параметрического анализа этих явлений используются анализ межспайковых интервалов и аппарат функции стохастической чувствительности [4–8].

## Список литературы

- [1] Y.-X. Li, J. Rinzel. Equations for InsP3 receptor-mediated  $[Ca^{2+}]_i$  oscillations derived from a detailed kinetic model: A Hodgkin-Huxley like formalism. *J. Theor. Biol.*, **166**: 4 (1994), 461–473.
- [2] G. Dupont, A. Goldbeter. One-pool model for  $Ca^{2+}$  oscillations involving  $Ca^{2+}$  and inositol 1,4,5-trisphosphate as co-agonists for  $Ca^{2+}$  release. *Cell Calcium*, **14**: 4 (1993), 311–322.
- [3] M. De Pitta, V. Volman, H. Levine, G. Pioggia, D. De Rossi, E. Ben-Jacob. Coexistence of amplitude and frequency modulations in intracellular calcium dynamics. *Phys. Rev. E*, **77** (2008), 030903(R).
- [4] И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко. Компьютерное моделирование нелинейной динамики : Непрерывные модели. Учебное пособие. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2017. 84.
- [5] L. Ryashko, I. Bashkirtseva, O. Solovyova. Stochastic dynamics in the Li-Rinzel calcium oscillation model. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **45**: 13 (2022), 7962–7970.
- [6] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Generation of mixed-mode stochastic oscillations in a hair bundle model. *Phys.Rev.E*, **98** (2018), 042414.
- [7] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. How noise can generate calcium spike-type oscillations in deterministic equilibrium modes. *Phys.Rev.E*, **105** (2022), 054404.
- [8] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect. *Chaos*, **21** (2011), 047514.

## Трансформации регулярных и хаотических режимов в динамике стохастических метапопуляций<sup>1</sup>

Беляев А.В.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
belyaev.alexander1337@yandex.ru

В наши дни большое внимание ученых в области нелинейной динамики уделяется на исследование связанных систем. Несмотря на простое устройство динамических систем, связав их, можно продемонстрировать множество режимов, имеющих качественное различие: регулярных, бистабильных, а также хаотических [1, 2]. Особое внимание в области математического моделирования, связанного с экологией, требует изучение динамики популяционных систем, у которых существует связь через взаимную миграцию. При наличии случайных возмущений эта задача приобретает дополнительную сложность.

В текущем исследовании рассматривается метапопуляционная система, состоящая из двух связанных подсистем. Подсистемы моделируются дискретным отображением Рикера [3]. Подсистемы, не связанные друг с другом взаимной миграцией, демонстрируют различные динамические режимы: равновесный, периодический и хаотический. Подробный анализ и исследование стохастических эффектов для подсистем, одна из которых находится в регулярном режиме, а вторая – в хаотическом, был проведен в статье [4]. Целью же данной работы является анализ динамических режимов корпоративной динамики при варьировании интенсивности взаимной миграции между популяционными подсистемами, обе из которых демонстрируют в условиях изоляции периодические режимы. Представлены результаты бифуркационного анализа данной системы, выявлены зоны моно-, би- и три-стабильности с сосуществующими регулярными и хаотическими аттракторами. Также исследовано разнообразие аттракторов системы и проведен анализ колебательных режимов данных популяционных подсистем. Основной акцент в работе сделан на исследовании стохастической системы, которая учитывает влияние случайных возмущений. Представлены примеры воздействия шума на аттракторы данной метапопуляционной системы. Используя метод функции стохастической чувствительности и метод численного моделирования, изучены индуцированные шумом переходы между аттракторами, которые порождают новые режимы функционирования популяционных подсистем.

## Список литературы

- [1] I. Bashkirtseva, A. Pisarchik, Variability and effect of noise on the corporate dynamics of coupled oscillators. *AIP Conference Proceedings*, **070004**: 2172 (2019).
- [2] A. Belyaev, I. Bashkirtseva, L. Ryashko, Stochastic variability of regular and chaotic dynamics in 2D metapopulation model. *Chaos, Solitons and Fractals*, **151** (2021), 111270.
- [3] E. W. Ricker, Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, **11**: 5 (1954), 559–623.
- [4] A. Belyaev, I. Bashkirtseva, L. Ryashko, Noise-Induced Transformations in a System of Two Coupled Equilibrium and Chaotic Subpopulations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **32**: 14 (2022), 2250220.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00062).



## Применение связи между стохастическими уравнениями и уравнениями для вероятностных характеристик их решений<sup>1</sup>

Козлов М.И.  
УрФУ, Екатеринбург, Россия  
Maksim.Kozlov@urfu.me

Огнев И.В.  
УрФУ, Екатеринбург, Россия  
Ива.Огнев@urfu.me

Работа посвящена изучению связи стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), случайные возмущения которых обусловлены винеровским процессом  $W = \{W(t), t \geq 0\}$ , с детерминированными уравнениями в частных производных для вероятностных характеристик решений СДУ и применению этой связи для численного решения соответствующих УрЧП. Конкретно, в работе рассматриваются стохастические уравнения вида:

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = \xi, \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\sigma$  — коэффициенты сноса и волатильности, и уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad u(T, x) = h(x) \quad (2)$$

для вероятностных характеристик типа

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(T-t)} h(X(T)) \middle| X(t) = x \right], \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

в предположении  $\mathbb{E} \left[ h(X(T)) \middle| X(t) = x \right] < \infty$ .

Численная реализация решений уравнения для вероятностных характеристик на основе связи между уравнениями (1) и (2) предполагает на первом этапе численную реализацию винеровского процесса  $W$  и построение решения стохастического уравнения (1) различными численными методами [1]. На втором этапе построенное численное решение уравнения (1) используется для нахождения функции  $u$  — решения уравнения (2). В работе проведено сравнение численных решений указанных уравнений для характеристик, полученных с помощью классических разностных методов, и численных решений, полученных с помощью стохастических методов.

Мотивация применения стохастических методов к решению УрЧП связана с тем, что разностные методы позволяют эффективно проводить вычисления в одномерном случае, но работают медленнее в случае большей размерности. При этом вычисления численных решений стохастических уравнений хорошо поддаются распараллеливанию и позволяют эффективней проводить вычисления в случае больших размерностей.

Отметим, что для прикладных исследований в финансовой математике важным частным случаем вероятностных характеристик указанного типа являются цены европейских опционов покупки и продажи (см., например, [2, 3]). Другой важной прикладной задачей является анализ поведения цены акций на фондовом рынке. В качестве примера рассмотрена модель цены акций, определяемой обобщенным геометрическим броуновским движением:

$$S(t) = S(0) \exp \left( \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00199).

дающей решение стохастического уравнения (1) с постоянными коэффициентами сноса и волатильности. С помощью численной реализации винеровского процесса  $W$  построены численные реализации процесса цены акций  $S(t)$  и проведено сравнение с результатами статистических наблюдений акций Сбербанка. А именно, был взят график акций Сбербанка и на нем выбран некоторый малый промежуток  $[0, \tau]$ ,  $\tau < T$ , введено равномерное разбиение этого отрезка  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \tau$ , на основе которого найдены коэффициенты  $\alpha$  и  $\sigma$  уравнения (1) по формулам:

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} - \alpha \right)^2}, \quad k = \overline{1, N},$$

где  $S_k = S(t_k)$  — цена акции в момент времени  $t_k$ . По найденным коэффициентам  $\alpha$  и  $\sigma$  с помощью формулы (3) построены численные реализации процесса  $S(t)$  на промежутке  $[\tau, T]$  и дано сравнение со статистическими данными Сбербанка.

Все численные эксперименты были выполнены с помощью языка программирования Python.

## Список литературы

- [1] G. N. Milshtein, M. V. Tretyakov. Stochastic Numerics for Mathematical Physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
- [2] S. E. Shreve. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. New York: Springer Science & Business Media, 2004.
- [3] И. В. Мельникова, В. А. Бовкун. Введение в стохастический анализ на базе моделей финансовой математики. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2023.

**Тьюринговские паттерны и стохастические переходы в термохимической кинетике<sup>1</sup>**

Колениченко А. П.

*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

kolinichenko.ale@gmail.com

В современной науке большое внимание уделяется моделям нелинейной динамики и протекающим в них процессам самоорганизации. Один из механизмов самоорганизации, тьюринговская неустойчивость [1], связан с моделями с диффузией и генерацией устойчивых пространственно-неоднородных структур (паттернов). В диффузионных моделях с мультистабильностью таких паттернов может быть несколько при одних и тех же значениях параметров системы. Они различаются по структуре, времени генерации, степени чувствительности к шумам и другим характеристикам [2].

В данной работе рассмотрена стохастическая модель термохимической кинетики с диффузией [3]. В условиях отсутствия случайных шумов рассмотрена зона диффузионной неустойчивости. Демонстрируется разнообразие паттернов и мультистабильность модели. Процесс формирования паттерна исследован методом прямого компьютерного моделирования с применением методов гармонического анализа.

В модели со случайными возмущениями исследован феномен стохастического перехода между сосуществующими паттернами-аттракторами. Процесс исследован с помощью волновых коэффициентов, показана полезность этого подхода при фиксировании перехода. Для оценки степени стохастической чувствительности применяется метод функций стохастической чувствительности [4]. Связь стохастической чувствительности и переходов между паттернами обсуждается на примерах.

**Список литературы**

- [1] A. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.*, **237** (1952), 37–72.
- [2] A. Kolinichenko, L. Ryashko. Stochastic sensitivity analysis of stationary patterns in spatially extended systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**: 16 (2021), 12194–12202.
- [3] A. Uppal, W. H. Ray, A. B. Poore. The classification of the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors—influence of reactor residence time. *Chemical Engineering Science*, **3** (1976), 205–214.
- [4] I. Bashkirtseva, A. Kolinichenko, L. Ryashko. Stochastic sensitivity of Turing patterns: methods and applications to the analysis of noise-induced transitions. *Chaos, Solitons & Fractals*, **153**: 2 (2021), 111491.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00042

## Стохастическая динамика в популяционной модели с конкуренцией за ресурсы

Отман А.А.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия  
arlina2015@yandex.ru

Башкирцева И.А.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия  
irina.bashkirtseva@urfu.ru

В данной работе исследуется модель популяционной динамики с конкуренцией за ресурсы, задаваемая двумерным дискретным отображением Рикера [1, 2].

Стохастический вариант системы, моделирующий случайные возмущения в параметрах конкуренции  $\rho$  и  $\varphi$ , имеет вид:

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t e^{-x_t - (\rho + \varepsilon \xi_t) y_t}, \\ y_{t+1} = By_t e^{-(\varphi + \varepsilon \eta_t) x_t - y_t}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $A$  - коэффициент прироста популяции  $x$ ,  $B$  - коэффициент прироста популяции  $y$ ,  $\rho$  - коэффициент вымирания популяции  $x$  под воздействием популяции  $y$ ,  $\varphi$  - коэффициент вымирания популяции  $y$  под воздействием популяции  $x$ ,  $\xi_t, \eta_t$  - независимые случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону,  $\varepsilon$  - параметр интенсивности шума.

Для детерминированной модели аналитически найдены точки покоя, определены параметрические зоны их устойчивости. Построены и исследованы однопараметрические бифуркационные диаграммы, отражающие качественные изменения динамических сценариев. С помощью фазовых портретов продемонстрированы различные аттракторы системы. Исследована параметрическая зона мультистабильности и построены бассейны притяжения сосуществующих аттракторов.

В стохастическом случае, с учетом воздействия шума на параметры  $\rho$  и  $\varphi$ , исследован разброс случайных состояний вокруг аттракторов системы. Продемонстрирован качественно различный характер поведения стохастической системы при изменении интенсивности вносимого в нее шума и управляющих параметров модели. Исследован феномен концентрации случайных состояний вблизи  $x = 0$  и  $y = 0$ , возникающий при значении  $\rho\varphi$  близких к единице. Этот феномен исследован с помощью функции плотности вероятности. Показано, что при определенных значениях интенсивности шума система переходит в триггер-подобный режим.

## Список литературы

- [1] R. Luis, S. Elaydi, H. Oliveira. Stability of a Ricker-type competition model and the competitive exclusion principle. *J. Biol. Dyn.*, **5** (2011), 636–660.
- [2] M. Kulakov, G. Neverova, E. Frisman. The Ricker competition model of two species: dynamic modes and phase multistability. *Mathematics*, **10** (2022), 1076.

## Влияние Олли эффекта на динамику стохастической популяционной системы с миграциями

Павлецов М.М.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
makar.pavletsov@urfu.ru

Ряшко Л.Б.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
lev.ryashko@urfu.ru

В данной работе изучается стохастическая модель, состоящая из двух связанных подсистем, каждая из которых моделируется дискретным отображением Рикера, впервые описанным в [1]. Двухмерная модель с учетом параметрического шума таким образом имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i^2 e^{(\mu + \varepsilon \xi_1)(1-x_i)} + \sigma(y_i - x_i), \\ y_{i+1} = y_i^2 e^{(\mu + \varepsilon \xi_2)(1-y_i)} - \sigma(y_i - x_i). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x_i$  и  $y_i$  - плотности популяций,  $\mu$  - коэффициент скорости роста популяций,  $\sigma$  - коэффициент взаимных миграций между популяциями,  $\xi_{it}$  - некоррелированные Гаусовские шумы с параметрами  $\varepsilon \xi_t = 0$ ,  $\varepsilon \xi_t^2 = 1$ .

Для детерминированного варианта модели были построены бифуркационные диаграммы по параметрам  $\mu$  и  $\sigma$ , и выбраны наиболее интересные для изучения случаи. Обнаружены и описаны зоны параметров, при которых наблюдается мультистабильность системы. Также продемонстрирована устойчивость найденных аттракторов системы при помощи показателей Ляпунова. Изучены бассейны притяжения аттракторов для зон сосуществования нескольких аттракторов системы.

Для стохастического случая описано поведение аттракторов системы в зависимости от интенсивности вносимого параметрического шума  $\varepsilon$ . Описаны индуцированные шумом переходы между аттракторами для случаев, где наблюдается мультистабильность. Для анализа используется метод функции стохастической чувствительности [2], что позволяет описывать реакцию аттракторов системы на вносимый шум. Были найдены критические значения интенсивности шума  $\varepsilon$ , при которых наблюдается вымирание популяции.

## Список литературы

- [1] E. W. Ricker. Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, **11**: 5 (1954), 559–623.
- [2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for discrete dynamic systems. *Dyn. Contin., Discrete Impulsive Syst. Ser. A*, **17** (2010), 501–515.

## Стохастический анализ процессов самоорганизации в гликолизе

Панкратов А.А.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
alexandrpankratov9@gmail.com

В математических моделях типа реакция-диффузия часто наблюдаются явления, связанные с пространственной самоорганизацией. Аналитическое предсказание формирования негомогенных паттернов-аттракторов обычно затруднено ввиду того, что модели, описывающие биохимические процессы, как правило, сильно нелинейны. В докладе рассматриваются процессы самоорганизации в распределённых моделях гликолиза на примере гликолитических осцилляторов Хиггинса [1] и Селькова-Строгаца [2].

В докладе описаны некоторые обнаруженные в процессе исследований феномены самоорганизации, такие как мультистабильность, связанная с сосуществованием различных пространственных паттернов-аттракторов; индуцированное шумом формирование паттернов в параметрической зоне, соответствующей автоколебаниям точечной системы; переходы между сосуществующими паттернами в присутствии шума; подавление автоколебаний диффузией; явление "стохастического предпочтения" [3].

Обсуждаются методы, позволяющие обнаруживать указанные феномены с помощью автоматической интерпретации результатов прямого численного моделирования. Описаны подходы к статистическому анализу результатов моделирования поведения систем в присутствии шума и способы квантифицировать наблюдаемое поведение [4].

## Список литературы

- [1] J. Higgings. A chemical mechanism for oscillation of glycolytic intermediates in yeast cells. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **51**: 6 (1964), 989–994.
- [2] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison Wesley, 1994.
- [3] I. Bashkirtseva, A. Pankratov. Stochastic Higgins model with diffusion: pattern formation, multistability and noise-induced preference. *The European Physical Journal B*, **92**: 238 (2023), 1–9.
- [4] I. Bashkirtseva, A. Pankratov, L. Ryashko. Quantitative analysis of pattern formation in a multistable model of glycolysis with diffusion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **455** (2023), 133890.

## Анализ детерминированных и стохастических сценариев в модели финансовых рынков

Перевалова Т.В.  
tatyana.perevalova@gmail.com

Юнгайлгес Й.  
Университет Агдер, Кристиансанд, Норвегия  
jochen.jungeilges@uia.no

В работе рассматривается модель динамики цен  $\mathbf{p}$  на финансовом рынке, учитывающая наличие двух типов агентов [1]. Модель задается одномерным кусочно-гладким отображением с двумя точками сочленения и двумя точками разрыва:

$$p_{t+1} = f(p_t) + \varepsilon \xi_t. \quad (1)$$

$$f(\mathbf{p}) = \begin{cases} f_L(\mathbf{p}) = (1 - \alpha + \beta)\mathbf{p} + (\alpha - \beta)v + (\alpha_0 - \alpha)\gamma, & 0 \leq \mathbf{p} < v - \gamma, \\ f_K(\mathbf{p}) = (1 - \alpha_0 + \beta)\mathbf{p} + (\alpha_0 - \beta)v, & v - \gamma \leq \mathbf{p} \leq v - \epsilon^-, \\ f_M(\mathbf{p}) = (1 - \alpha_0)\mathbf{p} + \alpha_0 v, & v - \epsilon^- < \mathbf{p} < v + \gamma, \\ f_S(\mathbf{p}) = (1 - \alpha_0 + \beta)\mathbf{p} + (\alpha_0 - \beta)v, & v + \gamma \leq \mathbf{p} \leq v + \epsilon^-, \\ f_R(\mathbf{p}) = (1 - \alpha + \beta)\mathbf{p} + (\alpha - \beta)v + (\alpha - \alpha_0)\gamma, & v + \epsilon^- < \mathbf{p} \leq 1. \end{cases}$$

В детерминированном случае ( $\varepsilon = 0$ ) проводится анализ существования и устойчивости регулярных режимов и описываются бифуркационные сценарии [2]. Аналитически находятся параметрические условия бифуркации столкновения с границей, приводящие к исчезновению или появлению циклов. В силу того, что рассматриваемое отображение имеет и сочленения и разрывы, в нем наблюдается смешивание динамических сценариев, присущих кусочным отображениями, такие как добавление и приращение периода на единицу. Определяются границы бассейнов притяжения аттракторов.

В случае влияния на систему случайного возмущения ( $\varepsilon \neq 0$ ) находится чувствительность аттракторов [3, 4], строятся доверительные полосы для описания индуцированных шумом феноменов: переходов между равновесиями, перемежаемость, переходов между циклами, переходов между хаотическими и равновесными режимами, генерация большеамплитудных колебаний. Находятся значения критической интенсивности необходимой для возникновения стохастических феноменов.

## Список литературы

- [1] J. Jungeilges, E. Maklakova, T. Perevalova. Asset price dynamics in a "bull and bear market". *Structural Change and Economic Dynamics*, **56** (2021), 117–128.
- [2] V. Avrutin, L. Gardini, I. Sushko, F. Tramontana. Continuous and discontinuous piecewise-smooth one-dimensional maps: invariant sets and bifurcation structures. World Scientific, 2019.
- [3] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, **17**: 4 (2010), 501–515.
- [4] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, **381**: 37 (2017), 3203–3210.

**Вариативность режимов в динамике популяций с иммиграцией**

Проконова Н.О.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
nina30600@gmail.com

Ряшко Л.Б.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия  
lev.ryashko@urfu.ru

В данной работе исследуется популяционная модель, задаваемая двумерным дискретным отображением Рикера и учитывающая запаздывание [1], Олли эффект и иммиграцию [2].

Стохастический вариант модели при воздействии аддитивного шума имеет вид:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^\alpha e^{\mu(1-y_t)} + I + \varepsilon\xi_t \\ y_{t+1} = x_t, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha = 1.5$  определяет силу Олли эффекта на популяцию,  $\mu$  характеризует скорость роста,  $I$  задаёт уровень иммиграции,  $\xi$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $(0, 1)$ ,  $\varepsilon$  – параметр интенсивности шума.

При отсутствии притока аналитически получены равновесия и выявлены зоны их устойчивости, локализованы точки бифуркаций Неймарка-Сакера и кризиса, приводящих к квазипериодическим и хаотическим режимам. Исследованы деформации динамических режимов, вызываемые иммиграцией. Показано, как с ростом интенсивности притока изменяется геометрия зон выживаемости.

В стохастическом случае изучено явление вызываемого случайными возмущениями вымирания с использованием как метода прямого численного моделирования, так и аналитической техники стохастической чувствительности и метода доверительных областей [3].

**Список литературы**

- [1] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Stochastic Sensitivity Analysis of Noise-Induced Extinction in the Ricker Model with Delay and Allee Effect. *Bulletin of Mathematical Biology*, **80**: 6 (2018), 1596–1614.
- [2] I. Bashkirtseva, I. Kuleshova. Stochastic analysis of the Ricker population model with immigration and Allee effect. *Physics, Technologies and Innovation (PTI-2019): Proceedings of the VI International Young Researchers' Conference*. Ekaterinburg, 2019, **2174**: 1.
- [3] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, **381**: 37 (2017), 3203–3210.



## Анализ стохастических феноменов в четырёхмерной модели сердечного потенциала действия

Слепухина Е.С.

*Гогенгеймский университет, Штутгарт, Германия*

Evdokiiia.Slepukhina@uni-hohenheim.de

В докладе рассматривается четырёхмерная модель сердечного потенциала действия [1, 2]. В детерминированном варианте модели исследуются возможные динамические сценарии и бифуркации, определяющие переходы между ними. В стохастической системе исследуются индуцированные шумом ранние постдеполяризации в зоне параметров, соответствующей поведению с нормальными потенциалами действия. Это явление сопровождается увеличением периода колебаний и деформацией плотности распределения межспайковых интервалов. Обсуждаются причины соответственного качественного изменения динамики системы.

## Список литературы

- [1] C. H. Luo, Y. Rudy. A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization, and their interaction. *Circ. Res.*, **68** (1991), 1501–1526.
- [2] D. Sato et al., Irregularly appearing early afterdepolarizations in cardiac myocytes: random fluctuations or dynamical chaos? *Biophys. J.*, **99** (2010), 765–773.

**Машинное обучение**  
(председатель к.ф.-м.н. А.В. Коныгин)

## Применение алгоритмов компьютерного зрения для определения деформаций образцов, нагруженных в компьютерном томографе

Акифьев К.Н.

Казанский (Приволжский) Федеральный университет, Казань, Россия  
kirill.akifyev@mail.ru

Харин Н.В.

Казанский (Приволжский) Федеральный университет, Казань, Россия  
nik1314@mail.ru

Фархутдинов Д.М.

Казанский (Приволжский) Федеральный университет, Казань, Россия  
wf2018danil@mail.ru

На сегодняшний день одним из наиболее распространённых методов оценки внутренней структуры и механических свойств экспериментальных образцов является компьютерная томография [1,2]. В данной работе представлен алгоритм обработки компьютерных томографий с целью исследования внутренней структуры неоднородных образцов. Исследуемый образец подвергался серии последовательных нагружений внутри компьютерного томографа.

После проведения испытаний с помощью РКТ каждый снимок образца представлял трехмерный массив, значения которого характеризует величину коэффициента рентгеновского ослабления. Предварительно на образец наклеивалась регулярная сетка медной проволоки. Материал сетки был обусловлен условием контрастности в рентгеновском излучении. На начальном этапе производилась сегментация данных на материал образца и медную сетку. Для последующей оценки перемещений образцов на каждом шаге нагружения обрабатывались данные перемещений узлов медной сетки, которые предварительно находились на каждом шаге нагружения. С целью автоматизации нахождения реперных точек был использован детектор углов Харриса, в модификации для трехмерного случая [3].

На основе найденных точек на каждом шаге нагружения находился вектор перемещений, интерполируя результаты которого можно перенести перемещения узлов внешней сетки на сетку физических объемов внутри образца, Полученное поле перемещений узлов сетки физических объемов позволял расчетным образом определить деформированную геометрию каждого физического объема. Более подробно данная методика представлена в работе [4].

## Список литературы

- [1] K. N. Akifyev, N. V. Kharin, E. O. Statsenko, O. A. Sachenkov, P. V. Bolshakov. Pilot study of lattice endoprosthesis buckling by compression in-situ using X-ray tomography. *Russian Journal of Biomechanics*, **27**: 4 (2023), 32–39.
- [2] B. Wang, L. Sun, B. Pan. Mapping internal deformation fields in 3D printed porous structure with digital volume correlation. *Polymer Testing*, **78** (2019), article 105945.
- [3] D. A. Hafiz, A. B. Y. Bayumy, W. M. Sheta, A. H. Hanan. Interest point detection in 3D point cloud data using 3D Sobel-Harris operator. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, **29**: 7 (2015), vol. 29, article 1555014.
- [4] K. N. Akifyev, E. O. Statsenko, V. V. Smirnova, N. V. Kharin, P. V. Bolshakov, O. A. Sachenkov. Method for studying the porosity of fluid phase samples by X-ray computed tomography under uniaxial compression. *PNRPU Mechanics Bulletin*, **2** (2023), 11–21.

## Нейросетевая сегментация облачности и снежных покровов по мультиспектральным данным геостационарного гидрометеорологического спутника "Электро-Л № 2"<sup>1</sup>

Беляков Н.В.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*Факультет космических исследований МГУ, Москва, Россия*

nikita.belyakov@cosmos.msu.ru

Работа посвящена методике детектирования облачности и снежного покрова по мультиспектральным данным с аппаратуры МСУ-ГС геостационарного космического аппарата "Электро-Л № 2" [1] с применением нейронной сети сверточного типа. В качестве дополнительной информации используется географическая информация: широта, долгота и высота для пикселей снимков [3]. Результатами работы является два новых набора данных с метеорологических космических аппаратов GOES-16 [4], Meteosat-10 [5] и "Электро-Л № 2" с масками облачного и снежного покрова, а также обученная модель сегментации Multi-Scale Attention Network (MANet) [2] на этих наборах данных. Продукты L2 с GOES-16 [4], Meteosat-10 [5] были использованы для создания разметки облачных покровов для данных с МСУ-ГС путем их репроекции на точку стояния "Электро-Л № 2". Таким же образом были получены маски снега, взятые с продуктов системы MODIS [6]. Главная проблема поставленной задачи - разработка алгоритма выделения снежного и облачного покровов в условиях отсутствия узких коротковолновых инфракрасных (ИК) каналов (1300–1600 нм), необходимых для реализации алгоритмов сегментации и разделения снега от облачности. При данных ограничениях на характеристики съемочной аппаратуры единственным возможным решением задачи выделения снега и облаков на мультиспектральных снимках является разработка нейросетевой модели, способной извлечь неявные признаки и закономерности, по которым возможно дифференцировать снег от облаков. Для максимальной репрезентативности снимки в выборке включают в себя все времена года и разные уровни освещенности (12.00–17.00 UTC). Обученная нейронная сеть для сегментации облачности и снега протестирована по метрикам  $F1$  и  $IoU$ :

$$F1 = \frac{2PrecisionRecall}{Precision + Recall}, \quad (1)$$

$$IoU(Y_{gt}, Y_{pr}) = \frac{|Y_{pr} \cap Y_{gt}|}{|Y_{pr} \cup Y_{gt}|}, \quad (2)$$

где  $Y_{pr}$ ,  $Y_{gt}$  - предсказанные моделью классы текстур и истинные (gt) метки классов соответственно. Тестирование включало в себя разные снимки зимний и летний периоды года в дневное время суток при разном уровне освещенности снимков применительно к данным с прибора МСУ-ГС для зоны съемки спутника "Электро-Л № 2".

Разработанный алгоритм позволяет создавать маски облачности и снежного покрова для области, ограниченной значениями зенитного угла Солнца в диапазоне от 0 до 80 градусов [7] для дневного времени. Однако возможны некоторые ошибки в мисклассификации снега во время облачности из-за специфики используемых данных и ошибок на краях изображений из-за геометрических искажений и дисторсий. Описываемый в работе метод может быть перенесен для сегментации снежного покрова и облачности на данных, полученных с других спутников дистанционного зондирования Земли.

Применение моделей ИИ к рассматриваемой задаче при отсутствии коротковолновых ИК каналов позволяет осуществить ее решение, что представляется невозможным, если пытаться использовать классические пороговые или статистические алгоритмы, разработанные для решения схожих задач.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке некоммерческого фонда развития науки и образования "Интеллект".

## Список литературы

- [1] ntsomz.ru URL: <https://ntsomz.ru/elektro/> (дата обращения: 24.06.2023).
- [2] Segmentation-models-Pytorch документация: Pavel Yakubovskiy, 2020. [https://github.com/qubvel/segmentation\\_models.pytorch/](https://github.com/qubvel/segmentation_models.pytorch/) (дата обращения: 27.06.2023).
- [3] Xi Wu, Zhenwei Shi, Zhengxia Zou. A geographic information-driven method and a new large scale dataset for remote sensing cloud/snow detection. *2021 International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Inc. (ISPRS)*. <https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2021.01.023>
- [4] Данные с КА GOES-16, 17, 18: [https://home.chpc.utah.edu/~u0553130/Brian\\_Blaylock/cgi-bin/goes16\\_download.cgi](https://home.chpc.utah.edu/~u0553130/Brian_Blaylock/cgi-bin/goes16_download.cgi), <https://noaa-goes16.s3.amazonaws.com/index.html#ABI-L2-ACMF/2022/349/17/> (дата обращения: 27.04.2023).
- [5] Martijn de Ruyter de Wildt, Gabriela Seiz, Armin Gruen. Operational snow mapping using multitemporal Meteosat SEVIRI imagery. 0034-4257. 2007 Elsevier Inc. All rights reserved. doi:10.1016/j.rse.2006.12.008
- [6] Среднесуточные карты снежного покрова Terra/MODIS: [https://neo.gsfc.nasa.gov/view.php?datasetId=MOD10C1\\_D\\_SNOW&](https://neo.gsfc.nasa.gov/view.php?datasetId=MOD10C1_D_SNOW&) (дата обращения: 21.04.2023).
- [7] William F. Holmgren, Clifford W. Hansen, and Mark A. Mikofski. pvlib python: a python package for modeling solar energy systems. *Journal of Open Source Software*, **3**: 29 (2018), 884. <https://doi.org/10.21105/joss.00884>

## Оценка связности текста с помощью трансформерной модели BERT

Дрожащих Г.А.

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

stud0000246780@study.utmn.ru

Оценка связности текста является важной задачей области лингвистики и играет ключевую роль в смежных исследованиях, таких как: сложность восприятия учебных материалов [1], качество реферирования текста [2] и т. д.

Связность текста [3] – свойство, состоящее из совокупности лексических, анафорических отношений между двумя и более единицами в тексте, которое обеспечивает его единство как смыслового целого. Цель данной работы – выявить числовую оценку связности для пары предложений на русском языке с помощью трансформерной модели `gubert-base-cased` [4] для задачи `sentence-pair regression`. Модель имеет следующие параметры: 1 эпоха, скорость обучения  $3e-5$ , размер батча 8.

Для дообучения модели используется набор из 3503 текстов на русском языке разной жанровой направленности корпуса несовершенных переводов [5]. Средний объем текстов в токенах – 449,33, в предложениях – 26,02. На этапе предобработки данных тексты были токенизированы на предложения, предложения случайным образом были перемешаны и разбиты на пары.

С помощью разработанных методов с использованием библиотеки `guwordnet` [6], определяющих наличие повторов словоформ существительных, производной лексики, гипонимов, гиперонимов, кандидатов анафоры, каждой паре назначалась оценка 0 или 1. Итоговой набор содержит 13002 пар, из них 6501 имеют средство связности, другая половина – нет.

Соотношение обучающей выборки к тестовой составляет 80 на 20. Ниже приведены значения метрик на тестовой выборке и пример работы модели:

Таблица 1: Значения метрик на тестовой выборке

mae	mse	$R^2$	rmse
0,32007	0,16081	0,35672	0,40102

Таблица 2: Пример работы модели

Левое предложение	Правое предложение	Предсказание модели
Тиверзин шел по путям в направлении к городу.	Навстречу ему попадались люди, шедшие с получкою из конторы.	0.94433
Тиверзин шел по путям в направлении к городу.	Они простились и пошли в разные стороны.	0.15869

## Список литературы

- [1] В. Д. Соловьев, Ю. А. Вольская, М. И. Андреева, А. А. Заикин. Словарь русского языка с индексами конкретности/абстрактности. *Вестник РУДН. Серия: Лингвистика*, **2** (2022), 515–549.
- [2] Д. В. Белогорская, З. И. Резанова. Лингвистическая оценка автоматически сгенерированных рефератов новостных текстов. *Язык и культура*, **61** (2023), 15–28.
- [3] M. A. K. Halliday, R. Hasan. *Cohesion in English*. London: Routledge, 1976.
- [4] Y. Kuratov, M. Arkhipov. Adaptation of Deep Bidirectional Multilingual Transformers for Russian Language. [arxiv.org/pdf/1905.07213.pdf](https://arxiv.org/pdf/1905.07213.pdf)

- [5] A. B. Kutuzov, M. A. Kunilovskaya, A. Y. Chepurkova, A. Y. Oschepkov. Russian Learner Parallel Corpus as a Tool for Translation Studies. *Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: труды XVIII Международной конференции «Диалог 2012»: в 2-х томах, Бекасово, 30 мая – 03 июня 2012 года. Выпуск 11 (18). Том 1..* Бекасово: Российский государственный гуманитарный университет, 2012, 362–369.
- [6] D. Dale. Python-ruwordnet: <https://github.com/avidale/python-ruwordnet>.

## Адаптация сверточных нейронных сетей к новым данным

Дунаева А.В.

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия*

*Институт естественных наук и математики УрФУ, Екатеринбург, Россия*

av.dunaeva@urfu.ru

Доклад посвящен задаче адаптации домена при решении задач сегментации и классификации изображений свёрточными нейронными сетями. В докладе представлена постановка задачи и проведен обзор подходов адаптации сетей к новым доменам данных. Современные алгоритмы адаптации основываются на применении дискриминаторов [1] или генеративно-сопоставительных сетей [2, 3], а также могут требовать слабую разметку для целевого домена данных, или полностью автоматически настраивать веса сети для целевого набора данных. В задачах адаптации домена фигурируют исходный домен данных – данные, на которых первоначально обучали сеть, и целевой домен данных – данные, на которых сеть должна работать. В отличие от задачи переноса знаний (transfer learning) в постановке этой задачи множества классов двух доменов должны совпадать или пересекаться, то есть на изображениях исходного и целевого доменов изображены одни и те же классы объектов, но их внешний вид может существенно отличаться.

## Список литературы

- [1] S. Paul et al. Domain adaptive semantic segmentation using weak labels. *Computer Vision–ECCV 2020: 16th European Conference, Glasgow, UK, August 23–28, 2020, Proceedings, Part IX 16.* Springer International Publishing, 2020, 571-587.
- [2] I. Goodfellow et al. Generative adversarial networks. *Communications of the ACM*, **63**: 11 (2020), 139–144.
- [3] J. Hoffman et al. Cycada: Cycle-consistent adversarial domain adaptation. *International conference on machine learning*. Pmlr, 2018. 1989-1998.



## Применение больших языковых моделей для генерации доменных данных и их использование для оценки качества моделей в задачах Text-to-SQL

Каменев П.А.  
СКБ Контур, Екатеринбург, Россия  
kamushekp@gmail.com

### Введение

Упрощение доступа к данным через естественный язык делает информацию более доступной для широкого круга людей, не имеющих специализированных технических навыков, тем самым способствуя более широкому распространению знаний. Автоматизация перевода естественного языка в SQL-запросы (Text-to-SQL) может значительно повысить эффективность рабочих процессов в различных областях, включая научные исследования и бизнес-аналитику. Такая задача ставит перед моделями проблему разрешения неоднозначности в естественном языке и преобразования ее в точные технические запросы, что является значительным вызовом в области искусственного интеллекта.

Предобученные большие языковых моделей (LLM) показали себя эффективными также и для решения Text-to-SQL задач. Исследователям доступны различные варианты моделей - как проприетарные версии, такие как ChatGPT [1], так и свободно распространяемые, с доступом к весам и исходному коду, например, семейство моделей Llama [2, 3]. Таким образом, необходимо уметь решать проблему выбора модели: учитывать как показатели оценки качества в решаемой задаче, так и доступные вычислительные мощности, отдавая предпочтение моделям, которые при удовлетворительном качестве потребляют меньше ресурсов.

Для тестирования больших языковых моделей можно использовать открытые датасеты, такие как Spider [4] или представленный в работе [5] WikiSQL. Однако, часто конкретной предметной области присущи данные, которые отражают уникальные характеристики, терминологию и сущности, так называемые доменные данные. Исследования [6, 7] выявляли расхождение в качестве работы моделей на стандартных датасетах и на доменных данных, что подчеркивает необходимость тестирования языковых моделей, непосредственно на доменных данных. При этом подготовка доменного датасета является проблемой, поскольку сбор данных может быть осложнен как их спецификой (например, персональные данные), так и недостатком времени или человеческих ресурсов. В настоящей работе предложен подход, решающий эту проблему, путем тестирования моделей на генерируемых ими же синтетических данных.

### Ход исследования, модели и методология оценки

На первом этапе исследования языковые модели использовались для генерации синтетического датасета доменных данных. Моделям на вход подавались схемы таблиц и валидные SQL-запросы; Таблицы, на которых результат выполнения SQL-запроса являлся непустой таблицей, отбирались в синтетический датасет.

На втором этапе синтетические данные использовались для сравнения различных языковых моделей путем оценки качества генерации SQL-запросов на основе схемы базы данных и запроса на естественном языке.

Для исследования были отобраны четыре языковые модели. Эти модели были выбраны из открытых источников; в них различаются как количество весов, так и подходы к формированию обучающих выборок:

1. DeepSeek Coder 33B - модель с 33 миллиардами параметров, обученная на датасетах, преимущественно состоявших из программного кода.

2. DeepSeek Coder 6.7B - модель с 6 миллиардами параметров, обученная на датасетах, преимущественно состоявших из программного кода.
3. WizardLM 13B - модель с 13 миллиардами параметров, обученная на датасетах, преимущественно состоявших из естественного языка.
4. Dolphin Llama2 7B - модель с 7 миллиардами параметров, обученная на датасетах, преимущественно состоявших из естественного языка.

Эффективность языковых моделей оценивалась по следующим критериям: средняя уникальность строк, средняя уникальность значений в столбцах, корреляции Пирсона и Pointbiserial, а также общее количество успешно сгенерированных таблиц и запросов. Эти показатели позволили нам оценить способность моделей генерировать релевантные и уникальные данные.

Под уникальным значением в столбце подразумевается текстовое значение, которое ни разу не встречалось в этом столбце. Под уникальной строкой подразумевается совокупность текстовых значений в столбцах одной строки, которая ни разу не встречалась в таблице.

### Среднее количество уникальных строк

$$\text{Среднее количество уникальных строк} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Уникальные строки}_i}{n}$$

где  $n$  — общее количество строк в таблице.

### Среднее количество уникальных значений в столбце

$$\text{Среднее количество уникальных значений в столбце} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \text{Уникальные значения}_{ij}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

где  $m_i$  — количество уникальных значений в  $i$ -ом столбце,  $n$  — общее количество столбцов в таблице.

### Корреляция Пирсона

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)(n \sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

где  $x$  и  $y$  — два вектора значений переменных,  $n$  — размер выборки.

### Pointbiserial correlation coefficient

$$r_{pb} = \frac{M_1 - M_0}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_0}{n^2}}$$

где  $M_1$  — среднее значение континуальных переменных для множества из элементов соответствующих значению 1 бинарной переменной (далее, в зависимости от контекста, бинарная переменная - это факт синтаксически корректной генерации или таблиц, или запросов),  $M_0$  — среднее значение континуальных переменных для множества из элементов соответствующих значению 0 бинарной переменной,  $s$  — стандартное отклонение переменной,  $n_1$  — размер первого множества,  $n_0$  — размер второго множества,  $n$  — общий размер выборки.

### Генерация датасетов

Ниже предоставлены результаты первого этапа исследования, на котором выбранные модели использовались для генерации датасетов, оценивая их способность создавать синтаксически корректные и релевантные данные.

Модель с DeepSeek Coder с 33-ю миллиардами параметров, дообученная на корпусах с кодом, показывает наилучший результат с долей корректных таблиц равной 0.99. Это показывает ее высокую способность к генерации точных SQL-структур. Модели DeepSeek 6.7B и WizardLM 13B хорошо

Модель	SQL-корректные	SQL-запрос дает непустой результат
DeepSeek Coder 6.7B	0.92	0.80
DeepSeek Coder 33B	0.99	0.96
WizardLM 13B	0.89	0.49
Dolphin Llama2 7B	0.81	0.25

Таблица 3: Доля таблиц, соответствующих критериям

показали себя в создании синтаксически корректных запросов, тем не менее, несмотря на то, что у WizardLM почти в два раза больше параметров, относительно малое (по сравнению с текстами на естественном языке) количество программного кода в датасетах отрицательно сказалось на способности генерировать не только корректные, но и релевантные запросы.

Модель/Корреляция	С долей уникальных строк	С долей уникальных значений	С долей синтаксически корректных таблиц	С долей таблиц, на которых SQL-запрос дает непустой результат
DeepSeek Coder 6.7B	0.002	-0.07	<b>-0.15</b>	-0.05
DeepSeek Coder 33B	<b>0.12</b>	-0.01	0.05	0.02
WizardLM 13B	<b>-0.16</b>	<b>-0.19</b>	-0.03	<b>-0.13</b>
Dolphin-Llama2 7b	0.05	0.05	<b>-0.16</b>	-0.04

Таблица 4: Значения корреляций с длиной запроса

Для модели DeepSeek 6.7B корреляция с долей уникальных строк и уникальных значений практически отсутствует. Но модель показывает небольшую отрицательную корреляцию с долей синтаксически корректных таблиц, с коэффициентом -0.15. Что может говорить о том, что чем длиннее запрос, тем у модели с меньшим числом параметров меньше вероятность генерации синтаксически верного ответа. Отчасти это подтверждается тем, что у другой модели с малым числом параметров - Dolphin 7b тоже небольшая отрицательная корреляция, а у двух моделей размером побольше корреляция почти отсутствует. При этом DeepSeek 33B показывает положительную корреляцию с долей уникальных строк 0.12, что может указывать на то, что более длинные запросы приводят к генерации более разнообразных таблиц. Однако для WizardLM 13B увеличение длины запроса не приводит к увеличению уникальности данных, что говорит о важности дообучения на корпусе программных кодов.

## Генерация SQL-запросов

Ниже предоставлены результаты второго этапа исследования, в котором сгенерированные датасеты использовались для решения задачи генерации SQL-запросов на основе запросов на естественном языке.

Модель	Доля верных SQL-запросов	Корреляция с длиной запроса (pointbiserial)
DeepSeek Coder 6.7B	0.51	-0.28
DeepSeek Coder 33B	0.59	-0.03
WizardLM 13B	0.40	-0.08
Dolphin-Llama2 7b	0.02	-0.06

Таблица 5: Эффективность генерации SQL-запросов

Корреляция успешности генерации SQL-запроса с длиной запроса на естественном языке по-

казывает, что для малой модели длинный запрос на естественном языке скорее ведет к тому, что генерация будет неуспешной.

Был также проведен анализ независимости успешности генераций SQL-запросов от источника данных. Каждая из четырех моделей участвовала в генерации синтетических таблиц. Модели делали это с разной долей успешности и, как следствие, тестовые данные состоят из разных по количеству элементов выборок от разных моделей. Поэтому полезно посчитать, насколько успешно каждая из четырех моделей справляется с генерацией на каждой из четырех подвыборок.

Далее приведено четыре таблицы, где заголовок указывает на тестируемую модель, подзаголовок на то, какая модель генерировала синтетические данные для тестирования, а числовое значение - доля верных сгенерированных SQL-запросов.

<b>DeepSeek Coder-6.7B</b>			
DeepSeek 6.7B	DeepSeek 33B	WizardLM 13B	Dolphin 7B
0.54	0.48	0.5	0.54

<b>DeepSeek Coder-33B</b>			
DeepSeek 6.7B	DeepSeek 33B	WizardLM 13B	Dolphin 7B
0.62	0.6	0.6	0.3

<b>WizardLM-13B</b>			
DeepSeek 6.7B	DeepSeek 33B	WizardLM 13B	Dolphin 7B
0.4	0.39	0.41	0.35

<b>Dolphin-7b</b>			
DeepSeek 6.7B	DeepSeek 33B	WizardLM 13B	Dolphin 7B
0.01	0.02	0.02	0.01

Результаты показывают, что показатели точности отличаются незначительно, что позволяет заявить, что успешность генерации не зависит от того, какая модель использовалась для генерации.

## Выводы

1. Модель DeepSeek Coder-33B лучшая из тестируемых моделей в смысле генерации синтаксически корректных SQL-таблиц. Это объясняется размером модели и обучением на релевантных датасетах.
2. Разрыв в качестве между моделями DeepSeek Coder-6.7B и WizardLM-13B становится заметнее при оценке способности генерировать не только синтаксически правильные, но и релевантные запросы. Это указывает на значимость включения в датасеты для обучения корпусов с программным кодом для решения text-to-SQL задач.
3. В целом, длинные запросы на естественном языке могут уменьшать вероятность генерации синтаксически верного SQL-ответа на моделях с относительно малым количеством весов, тогда как большие модели показывают более устойчивые результаты, не зависящие от длины запроса.
4. Отклонение в точности генераций SQL-запросов моделями на различных подвыборках данных незначительно, следовательно предполагается независимость источника синтетических данных для тестирования с объектом тестирования, что позволяет говорить о том что предлагаемый подход к тестированию на доменных данных жизнеспособен.

## Список литературы

- [1] A. Liu, X. Hu, L. Wen, S. Yu. Philip. A comprehensive evaluation of ChatGPT's zero-shot Text-to-SQL capability, 2023 arXiv:2303.13547
- [2] H. Touvron et al. LLaMA: Open and Efficient Foundation Language Models, 2023 arXiv:2302.13971
- [3] H. Touvron et al. Llama 2: Open Foundation and Fine-Tuned Chat Models, 2023 arXiv:2307.09288

- [4] T. Yu et al. Spider: A Large-Scale Human-Labeled Dataset for Complex and Cross-Domain Semantic Parsing and Text-to-SQL Task. arXiv:1809.08887, 2018
- [5] V. Zhong, C. Xiong, R. Socher. Seq2SQL: Generating Structured Queries from Natural Language using Reinforcement Learning, 2017 arXiv:1709.00103
- [6] Y. Gan, X. Chen, M. Purver. Exploring Underexplored Limitations of Cross-Domain Text-to-SQL Generalization, 2021 arXiv:2109.05157
- [7] M. Pourreza, D. Rafiei. Evaluating Cross-Domain Text-to-SQL Models and Benchmarks, 2023. arXiv:2310.18538

## Сравнительный анализ методов дистанционной фотоплетизмографии

Коновалова Д. О.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*  
conovalova.d@yandex.ru

Измерение жизненно важных медицинских показателей, таких как частота сердечных сокращений, с помощью фотоплетизмографии было начато в ранних исследованиях Херцмана по кровообращению в конечностях. В настоящее время для измерения пульса широко используются пульсовые оксиметры. Эти измерения основаны на сигнале контактной фотоплетизмографии (PPG). Несмотря на успех этого метода, современные фотоплетизмографы не могут быть использованы в ситуациях с чувствительной и повреждённой кожей или в случае, когда измерение должно проходить бесконтактно. Поэтому в последнее время предпринимаются попытки к реализации методов получения сигналов дистанционной фотоплетизмографии (rPPG), в частности, основанных на применении сверточных нейронных сетей.

Целью данной работы является практическое сравнение некоторых методов получения сигнала rPPG с двух различных камер. Соответственно в данной работе будут представлены результаты сравнения таких методов извлечения дистанционного сигнала PPG, как CHROM [1], BPV [2], POS [3] и наша модификация метода POS, которые будут применены к данным, записанным с камер logitech C920 и orbbec astra s. В качестве контрольных результатов использованы данные PURE [4].

Все данные для работы были записаны в научно-исследовательском медико-биологическом инженерном центре высоких технологий ИРИТ-РтФ (НИМБИЦВТ) с помощью собственной программы записи видео. Были использованы две камеры logitech C920 (разрешение 1920 x 1080) и orbbec astra s (разрешение 640x480), запись производилась в одинаковых условиях, одновременно и синхронно с частотой дискретизации 23 кадра в секунду. Для валидации результатов производилась параллельная запись PPG с использованием Энцефалана (Медиком МТД).

Сравнительный анализ производился по нескольким метрикам: SNR [1], корреляция PPG-rPPG, корреляция ритмограмм PPG-rPPG во всех диапазонах частот и по поддиапазнам HF(0,4–0,15 Гц), LF(0,15–0,04 Гц), VLF(0,04–0,0033 Гц).

## Список литературы

- [1] G. de Haan, V. Jeanne. Robust pulse rate from chrominance-based rPPG. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **60**: 10 (2013), 2878–2886.
- [2] G. de Haan, A. van Leest. Improved motion robustness of remote-PPG by using the blood volume pulse signature. *Physiological Measurement*, **35**: 9 (2014), 1913–1922.
- [3] W. Wang, A. C. den Brinker, S. Stuijk, G. de Haan, Algorithmic principles of remote PPG. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **64**: 7 (2017), 1479–1491.
- [4] R. Stricker, S. Muller, H.-M. Gross. Non-contact Video-based Pulse Rate Measurement on a Mobile Service Robot. in: *Proc. 23st IEEE Int. Symposium on Robot and Human Interactive Communication (Ro-Man 2014)*, Edinburgh, Scotland, UK, 2014, 1056–1062.

## Неконтролируемая глубокая сеть с синусоидальными слоями (SineLayer) для получения полей смещения с 2D изображений<sup>1</sup>

Мангилева Д.В.

Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина,  
Екатеринбург, Россия  
daria.mangileva@urfu.ru

Многослойные перцептроны (MLP) появились в восьмидесятих годах прошлого столетия, однако их применения на практике для анализа цифровых изображений было крайне редким из-за того что они не были способны производить четкое изображение с мелкими деталями [1]. Однако, в 2020 году было предложено два основных метода, предотвращающую данную проблему: преобразование Фурье для поля координат, которое идет на вход сети и введение синусовых слоев (SineLayer) с периодической функцией активации в архитектуру [2, 3]. Из-за более легкой оптимизации, частота использования MLP резко возросла в последние годы и стали появляться исследования, представляющие возможность использования схем состоящих из MLP, не нуждающиеся в обучении, что особенно важно в обработке медико-биологических данных [4, 5]. В частности, в одном из последних исследований (Мангилева и др) [6], показано, что неконтролируемая нейронная сеть, состоящая из двух MLP: генератора сеток и генератора изображений, главной целью которой является преобразование текстуры, работает даже на низкоконтрастных изображениях, где применение классических фильтров не представляется возможным. Более того, в ходе работы выяснилось как в более ранних исследованиях, что с помощью подобной архитектуры возможно получение субпиксельного поля смещения более качественного по сравнению с классическими кросс-корреляционными методами. Однако данное поле имеет слабовыраженный градиентный переход, что делает его применение возможным только для обнаружения оптического потока. Таким образом в данной работе проводится исследование использования подобной архитектуры данной нейронной сети для получения полей смещения с пары изображений.

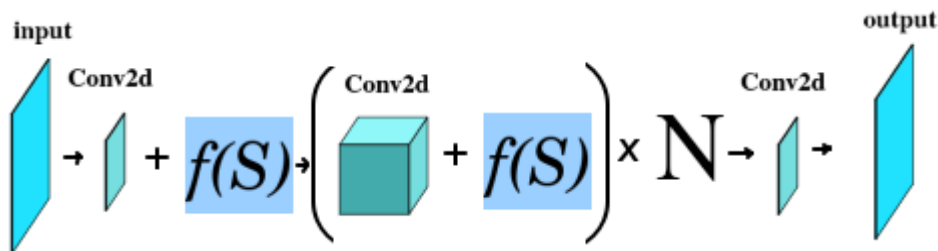


Рисунок 1 - Схема глубокой нейронной сети,  $f(S)$  - функция активации,  $N$  - количество внутренних слоев.

В ходе данного исследования были сгенерированы тестовые изображения 240x240, которые деформировались с помощью метода, описанного в исследованиях по данной теме [7, 8]. Далее, с помощью архитектуры, представленной на рисунке 1, определялись поля смещения для выявления оптимального количества внутренних слоев и метода преодоления недообучения MLP (SineLayer или Фурье преобразование). В ходе данного исследования выяснилось, что наилучшие результаты по показателям RMSE и SSIM имеет нейронная сети с четырьмя внутренними слоями для генератора сеток и изображений и имеющая в своей архитектуре синусовый слой. Более того, на тестовой выборке показано, что добавление случайного шума во вход генератора сеток также увеличивает показатель SSIM. Конечная архитектура сети была сравнена с наиболее современными методами получения полей смещения, в том числе с последней моделью DIC-corr [9], которая реализована в неконтрол-

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Программы развития Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина в соответствии с программой стратегического академического лидерства "Приоритет-2030"

лируемой и контролируемой версией. Было показано, что предложенная модель имеет неоспоримое преимущество при получении полей смещения на низкоконтрастных изображениях. На рисунке 2 показан пример получения поля с низкоконтрастного изображения.

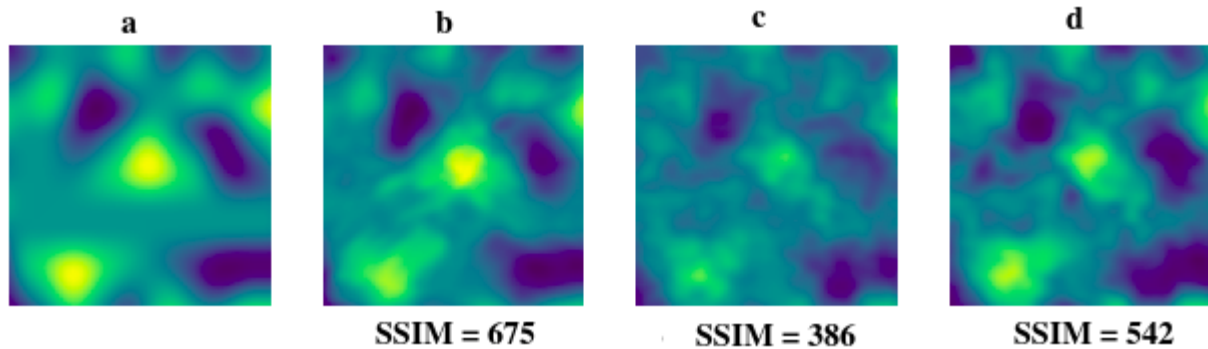


Рисунок 2 - Поле смещения полученное разными методами: а - эталон, b - предложенная модель, c - неконтролируемая DIC-corr, d - предобученная DIC-corr

Также помимо тестирования на синтетических изображениях, было проведено тестирование на изображениях сердечной ткани открытого сердца с дополнительными элементами, и так же проведено сравнение с другими методами. Более того выяснилось, что предложенная модель определяет поле смещение чуть хуже чем предобученная и неконтролируемая версия сети DIC-corr, однако они выдают большую ошибку в некоторых локальных областях. Это обусловлено тем, что архитектура, разработанная в данном исследовании, подстраивается индивидуально под каждую пару изображений. В итоге данной работы можно заключить, что использование предложенной метода для определения полей смещения имеет перспективу использования и доработки, особенно касательно относительно больших вычислительных затрат.

Расчеты были выполнены на суперкомпьютере "Уран" ИММ УрО РАН.

## Список литературы

- [1] Y. Xia, et al. Neural fields in visual computing and beyond. *Computer Graphics Forum*. **41**: 2 (2022), 641–676.
- [2] M. Tancik et al. Fourier features let networks learn high frequency functions in low dimensional domains. *Advances in Neural Information Processing Systems*, **33** (2020), 7537–7547.
- [3] V. Sitzmann et al. Implicit neural representations with periodic activation functions. *Advances in Neural Information Processing Systems*, **33** (2020), 7462–7473.
- [4] S. Nam, M. A. Brubaker, M. S. Brown. Neural image representations for multi-image fusion and layer separation. *European conference on computer vision*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2022.
- [5] R. Cao et al. Dynamic structured illumination microscopy with a neural space-time model. *2022 IEEE International Conference on Computational Photography (ICCP)*. IEEE, 2022.
- [6] D. Mangileva et al. Unsupervised deep network for image texture transformation: Improving the quality of cross-correlation analysis and mechanical vortex visualisation during cardiac fibrillation. *Heliyon*, **9**: 11 (2023), e22207.
- [7] S. Muller et al. GSTools v1. 3: a toolbox for geostatistical modelling in Python. *Geoscientific Model Development*, **15**: 7 (2022), 3161–3182.
- [8] Olufsen, S. Nordmark, M. E. Andersen, and E. Fagerholt. ?DIC: An open-source toolkit for digital image correlation. *SoftwareX* **11** (2020), 100391.
- [9] Y. Wang, C. Zhou. Unsupervised CNN-based DIC method for 2D displacement measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, **174** (2024), 107981.



## Реализация алгоритмов идентификации гидроакустических сигналов

Тугбаева А.С.

*Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук,  
Ижевск, Россия  
anastasia\_tugbaeva@mail.ru*

Ицков А.Г.

*Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук,  
Ижевск, Россия  
itscov@uni.udm.ru*

Гидросфера является недостаточно освоенной и ее исследование за последние десятилетия приобрело большие масштабы. Одной из важных задач в этой области является обнаружение и идентификация подводных объектов, решаемая с помощью анализа отраженных от них гидроакустических сигналов [1].

Для решения данной задачи проводились исследования в опытовом бассейне УдмФИЦ УрО РАН [2]. Были получены сигналы, отраженные от трёх объектов: алюминиевая трубка диаметром 10 мм., полипропиленовые трубки диаметрами 20 мм. и 30 мм. Идентификация этих объектов происходила посредством выделения признаков с помощью периодограмм, полученных по отражённым от них сигналам [3]. Далее под классом распознавания понимается набор сигналов, отражённых от одного объекта.

В качестве алгоритмов идентификации были рассмотрены некоторые модификации известного алгоритма голосования [4].

Первый из алгоритмов представляет собой сравнение значений признаков сигналов из контрольной выборки по эталонным значениям признаков, в качестве которых взяты средние значения по объектам обучающей выборки по каждому классу [5].

Следующая модификация алгоритма голосования основана на оценке близости значений признаков из контрольной выборки с каждым из значений признаков обучающей выборки по всем объектам классов. В данном алгоритме для признаков и объектов обучения подбирались веса с целью повышения качества идентификации.

Последний вариант алгоритма включает в себя использование формальной процедуры ранжирования признаков и объектов класса и назначение им весов путём корректировки функции близости признаков для каждого класса и построения матрицы близости, состоящей из 0 и 1. Таким образом находятся более информативные признаки и объекты обучения (то есть с большими разделяющими свойствами).

В докладе представлены результаты применения алгоритмов для исследования возможности идентификации подводных объектов по отраженным от них гидроакустическим сигналам. Если алгоритм первого типа показал достаточно высокую способность к распознаванию на уровне 75 %, то модификация алгоритма позволила получить безошибочную идентификацию всех объектов контрольной выборки.

Исследования демонстрируют возможность использования построенной по периодограммам системы признаков и применения предложенных алгоритмов голосования для данной задачи.

## Список литературы

- [1] Е. Ю. Бутырский. Математические модели гидроакустических сигналов и методы их обработки. Санкт-Петербург : Информационный издательский учебно-научный центр "Стратегия будущего 2018. 649.

- [2] В. А. Широков, В. Н. Милич. Экспериментальный комплекс для исследования возможностей использования гидроакустических датчиков в системах подводного видения. *Вестник ИжГТУ имени М.Т. Калашникова*, **24**: 4 (2021), 54–56.
- [3] А. С. Тугбаева, А. Г. Ицков, В. Н. Милич, В. А. Широков. Различение подводных объектов на основе периодограммного анализа отражённых гидроакустических сигналов. *Химическая физика и мезоскопия*, **24**: 3 (2022), 388–399.
- [4] Ю. И. Журавлев, В. В. Рязанов, О. В. Сенько. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. Москва: ФАЗИС, 2006. 176.
- [5] А. С. Тугбаева, А. Г. Ицков, В. Н. Милич, В. А. Широков. Идентификация подводных объектов по отраженным гидроакустическим сигналам. *Интеллектуальные системы в производстве*, **21**: 4 (2023), 31–41.

Конец сборника