

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ



СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы Международной (43-й Всероссийской)
молодежной школы-конференции,
29 января — 5 февраля 2012 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2012

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной
школы-конференции,
29 января — 5 февраля 2012 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2012

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ: тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012.

Настоящее издание включает тезисы Международной (43-й Всероссийской) школы-конференции молодых ученых, прошедшей с 29 января по 5 февраля 2012 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и дискретная математика, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, топология и геометрия, компьютерные науки, приближение функций, математическое программирование и машинное обучение, параллельные вычисления и техническое зрение, прикладной функциональный анализ и уравнения в частных производных, численные методы и математическое моделирование. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06802) и Президиума УрО РАН (грант поддержки молодежных научных школ и конференций).

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН А.А. Махнев.

Рецензенты:

чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.Л. Агеев, д.ф.-м.н. А.Г. Бабенко, к.ф.-м.н. А.Л. Гаврилюк, д.ф.-м.н. А.Р. Данилин, д.ф.-м.н. А.В. Ким, д.ф.-м.н. А.С. Кондратьев, д.ф.-м.н. А.И. Короткий, к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов, д.ф.-м.н. Н.Ю. Лукоянов, к.ф.-м.н. Н.В. Маслова, к.ф.-м.н. М.Ф. Прохорова, д.ф.-м.н. С.С. Титов, д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай, к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин, д.ф.-м.н. В.Т. Шевалдин.

Ответственные за выпуск:

Л.В. Камнева, Н.В. Маслова, М.С. Морина, С.Ф. Правдин.

МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОДОВ

Августинович С.В., Горкунов Е.В.¹

Рассмотрим булев куб $E^n = \{0, 1\}^n$ с расстоянием Хэмминга, заданным на его вершинах: $d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. *Двоичным кодом* длины n называется любое подмножество E^n . Минимальное расстояние между различными вершинами кода определяет его *кодовое расстояние*. Два кода *эквивалентны*, если существует изометрия булева куба, отображающая один код в другой.

Интересен вопрос о том, какие условия, параметры или части кодов позволяют восстанавливать их однозначно или, например, с точностью до эквивалентности. Один из естественных подходов к восстановлению кодов заключается в использовании их метрических свойств. Ситуация выглядит нетривиальной, поскольку наличие изометрии между кодами не гарантирует их задания в объемлющем пространстве даже с точностью до эквивалентности. Примером служат коды Адамара: хотя все эти коды изометричны друг другу, среди них имеются неэквивалентные. Здесь вопрос о восстановлении выступает как проблема метрической жёсткости кодов, разрешённая для отдельных классов кодов [1]. Напомним, что код называется метрически жёстким, если любая изометрия, определённая на вершинах кода, продолжается до изометрии всего пространства.

В качестве инвариантов для восстановления кода с некоторой степенью точности рассматривались также: граф минимальных расстояний между кодовыми вершинами [2]; множество вершин на заданном расстоянии r друг от друга [3]; треугольники, построенные на кодовых вершинах, и соответствующие им тройки попарных расстояний [4].

Одним из наиболее сильных инвариантов оказался [5] набор размерностей подкодов двоичного кода, где под размерностью $\text{Dim}(C)$ кода C понимается размерность минимальной грани булева куба, содержащей код. Впоследствии удалось уточнить [6], что для восста-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-01-00424), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0429).

новления двоичного кода с точностью до эквивалентности достаточно знать размерности его подкодов лишь чётной мощности. Точнее, эти размерности позволяют найти размерности всех остальных подкодов.

Пусть C — приведённый двоичный код мощности k длины n . Упорядочим векторы из $\{0\} \times E^{k-1}$ некоторым образом и обозначим $\alpha_0, \dots, \alpha_{2^{k-1}-1}$ количество столбцов соответствующего вида в проверочной матрице кода C с нулевой верхней строкой. Зная размерности подкодов чётной мощности кода C , можно составить $C_k^2 + C_k^4 + \dots = 2^{k-1} - 1$ уравнений, связывающих величины $\alpha_1, \dots, \alpha_{2^{k-1}-1}$. В дополнение имеем равенство для числа нулевых столбцов $\alpha_0 = n - \text{Dim}(C)$. В результате получаем квадратную систему линейных уравнений для α_i . Результаты статьи [6] показывают, что эта система имеет единственное решение и, тем самым, невырожденна.

Вопрос о минимальности набора размерностей подкодов чётной мощности в терминах построенной системы формулируется следующим образом. Будет ли система при удалении одного уравнения всякий раз иметь два или более целочисленных решения? Ответом на этот вопрос служит

Теорема. *Размерности подкодов чётной мощности двоичного кода образуют минимальный набор размерностей, определяющий код с точностью до эквивалентности.*

Одним из объектов, близких к кодам, для которого исследование восстановимости весьма актуально, является граф. Проблема изоморфизма графов является ориентиром в этом направлении. *Колодой* графа G называется мультимножество $\{G - v \mid v \in V(G)\}$, где $G - v$ — подграф графа G , полученный удалением вершины v и инцидентных ей рёбер. Известная гипотеза Улама о том, что колода графа определяет его с точностью до изоморфизма, доказана для отдельных классов графов [7]. Аналогичная гипотеза о рёберной восстановимости графа также является открытой, см., например, [8].

Литература

- [1] *Августиневич С.В., Соловьёва Ф.И.* К метрической жесткости двоичных кодов // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39, № 2. С. 23–28.

-
- [2] *Могильных И.Ю.* О слабых изометриях кодов Препараты // Пробл. передачи информ. 2009. Т. 45, вып. 2. С. 78–83.
- [3] *Красин В.Ю.* О слабых изометриях булева куба // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 4. С. 26–32.
- [4] *Абдурахманов Ж.К.* О геометрической структуре кодов, исправляющих ошибки: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Ташкент, 1991.
- [5] *Августинович С.В.* О сильной изометрии бинарных кодов // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 3–5.
- [6] *Горжунов Е.В., Августинович С.В.* О восстановлении двоичных кодов по размерностям их подкодов // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 15–21.
- [7] *Kelly P.J.* A congruence theorem for trees // Pacific Journal of Mathematics. 1957. Vol. 7. Pp. 961–968.
- [8] *Ramachandran S.* Graph reconstruction – some new developments // AKCE Journal of Graphs and Combinatorics. 2004. Vol. 1, № 1. Pp. 51–61.

**ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО
РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ
ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{19,16,8;1,2,8\}$**

Белоусов И.Н.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через Γ_i , где $i \leq d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X .

Граф называется *рёберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Предложение. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 1000$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 1$, то верно одно из утверждений:

(1) Γ — примитивный граф с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;

(2) Γ — антиподальный граф с $\mu = 2$ и массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{3, 4, \dots, 21\} \setminus \{10, 16\}$ и $v = 2r(r + 1)$;

(3) Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Предполагается исследование рёберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 19\}$ и верно одно из утверждений:

(1) Ω — пустой граф и либо

(i) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 60r$, $\alpha_2(g) = 20r + 50l - 20$ и $\alpha_1(g) = 180 - 80r - 50l$, либо

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 24r$ и $\alpha_2(g) = 8r + 20l$;

(2) $|\Omega| = 1$, $p = 19$, $\alpha_1(g) = 19$ и $\alpha_2(g) = 152$;

(3) $|\Omega| > 1$, $p = 2$ и либо

(i) $\alpha_3(g) = 0$ и $|\Omega| \leq 123$, либо

(ii) $\alpha_3(g) \neq 0$ и $|\Omega| \leq 87$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда $|G|$ равен $2^\beta \cdot 19$ или $2^\beta \cdot 3^\gamma$, $\gamma \leq 4$, в частности, граф Γ не является рёберно симметричным.

Литература

- [1] Буриченко В.П., Мазнев А.А. О вполне регулярных локально циклических графах / в сб. «Современные проблемы математики», тезисы 42-й Всероссийской молодежной конференции. С. 181–183.— Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.

О СТРОЕНИИ КОНЕЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЕЦ

Бестужев А.С.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя бинарными операциями: сложением $+$ и умножением \cdot , — для которых $\langle S, + \rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0 , $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1 и $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$, $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ для любых $a, b, c \in S$ [1].

(Мультипликативно) *циклическим* полукольцом называется полукольцо, все элементы которого, кроме нуля и единицы, являются натуральными степенями некоторого *образующего* элемента a ($a \neq 0$ и $a \neq 1$), нуль же может являться, а может и не являться степенью элемента a ; считаем, что $a^0 = 1$.

Строение бесконечных циклических полуколец известно и определяется одним из законов сложения: $a^m + a^n = a^{\min\{m,n\}}$; $a^m \cdot a^n = a^{\max\{m,n\}}$.

В дальнейшем рассматриваются только конечные циклические полукольца с образующим a .

Элемент x полукольца называется *нильпотентным*, если $x^n = 0$ для некоторого натурального числа n .

Теорема 1. *Если в циклическом полукольце образующий a nilьпотентен, то $a^m + a^n = a^{\min\{m,n\}}$ для любых целых неотрицательных чисел m, n .*

Теорема 2. *Если в циклическом полукольце образующий элемент не является nilьпотентным и сумма некоторых двух различных элементов равна нулю, то данное полукольцо является конечным полем.*

Далее, обозначим через s сумму всех элементов конечного циклического полукольца с образующим a . Если $s = 0$, то по теореме 2 получаем конечное поле. В случае $s \neq 0$ полукольцо будет устроено так: элементы $0, 1, a, a^2, a^3, \dots, a^{k-1}, a^k$ — различные, $a^k = a^{k+1}$. В дальнейшем будем рассматривать только такие полукольца, а элемент a^k будем называть *поглощающим*, так как a^k в произведении с любым ненулевым элементом дает a^k .

Предложение 1. Сумма $1 + a^k$, где a^k – поглощающий элемент, может принимать одно из двух значений: 1 или a^k .

Сложение в случае $1 + a^k = 1$ описано в теореме 1. В случае $1 + a^k = a^k$ сумма любого элемента с элементом a^k дает a^k . Это значит, что поглощающий по умножению элемент a^k будет еще и поглощающим по сложению.

Среди циклических полуколец существуют идемпотентные, в которых $1+1 = 1$, и неидемпотентные, в которых $1+1 = a^m$, где $m > 0$. Аддитивная полугруппа циклических идемпотентных полуколец является верхней полурешеткой.

Далее рассматриваются только неидемпотентные циклические полукольца $S = \{0, 1, a, a^2, \dots, a^k\}$, где $a^k = a^{k+1}$ – поглощающий элемент.

Чтобы задать полугруппу по сложению для такого полукольца, достаточно задать суммы единиц со всеми элементами, оставшиеся суммы находятся применением дистрибутивности.

Введем обозначения. Запись $a^{l, \dots, l+r}$ означает, что на месте $a^{l, \dots, l+r}$ может находиться любой из элементов $a^l, a^{l+1}, \dots, a^{l+r}$. Пусть дано полукольцо с поглощающим элементом a^k , где $k = m + n + p + 1$. При этом неотрицательные целые числа m, n, p таковы, что в полукольце выполняются равенства:

$$\begin{aligned} a^m + a^{m+n} &= a^{m+n+p}; \\ a^{0, \dots, k} + a^{m+n+1, \dots, k} &= a^{m+1, \dots, k} + a^{m+n} = a^k. \end{aligned} \quad (*)$$

Предложение 2. Если в полукольце выполняются равенства (*), то $p > m$.

Теорема 3. Возможен один из следующих четырех случаев:

- 1) $n - 1 < m$;
- 2) $n - 1 \geq m$, $p > n - 1$;
- 3) $n - 1 \geq m$, $p \leq n - 1$, $1 + 1 = a^{n+1 \dots k}$;
- 4) $n - 1 \geq m$, $n - 1 \geq p + m$, $1 + 1 = a^n$.

Для первых трех случаев получены формулы, описывающие строение всех таких полуколец. Для четвертого случая строение полукольца зависит от значения сумм $1 + a^{0, \dots, m}$. Зная значения сумм $1 + a, \dots, 1 + a^m$, можно указать точные значения сумм $1 + a^{n+1}, \dots, 1 + a^{n+m}, a + a^n, \dots, a^m + a^n$. Чтобы убедиться в том, что

данная структура (для четвертого случая) является полукольцом, нужно проверить справедливость равенств:

$$1 + (a^q + a^l) = (1 + a^q) + a^l = (1 + a^l) + a^q.$$

Теорема 4. Пусть неотрицательные целые числа t и r такие, что $t + r < m + 1$. Тогда:

- 1) $1 + a^t = a^{n+t}$ тогда и только тогда, когда $1 + a^{n+t} = a^t + a^n = +a^{n+t+p}$;
- 2) $1 + a^t = a^{n+t+r}$ тогда и только тогда, когда $1 + a^{n+t} = = 1 + a^{n+t+r} = a^t + a^n = a^{t+r} + a^n = a^{n+t+r+p}$;
- 3) $1 + a^{n+t} = a^{n+m+1, \dots, k}$ тогда и только тогда, когда $1 + a^{n+t} = = a^t + a^n = a^k$.

Предложение 3. Если для какого-то элемента a^t ($0 < t < m + 1$) выполняется равенство $1 + a^t = a^{n+t}$, то для всех таких k , что $kt < m + 1$, верно $1 + a^{kt} = a^{n+kt}$.

Следствие 1. Если $1+a = a^{n+1}$, то $1+a^2 = a^{n+2}, \dots, 1+a^m = a^{n+m}$.

Литература

- [1] Golan J.S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

НЕЗАВИСИМЫЕ СЛОВА В СИММЕТРИЧЕСКИХ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУППАХ

Бородина Е.В.¹

Определение. Рассмотрим некоторое множество слов V в алфавите X . Слово v называется независимым относительно V в алфавите X , если для любого $w \in V$ невозможна ситуация $w = pvq$, где p и q – некоторые слова и по крайней мере одно из них непусто.

При компьютерном моделировании конечных бернсайдовых групп $B(2, 3)$, $B(2, 4)$, $B(3, 3)$, $B_0(2, 5)$ использование независимых слов в алфавите образующих существенно сокращало время расчета указанных групп, что было связано с тем обстоятельством, что таблица умножения, состоящая из независимых слов, содержала все элементы группы, в то время как само количество независимых слов приблизительно равнялось $\sqrt{|G|}$, где G – одна из перечисленных выше групп.

В работе [1] эти два факта были подтверждены для некоторых симметрических групп малых степеней. Кроме того, выяснилось, что количество независимых слов зависит от выбора образующих. В связи с этим возникает задача о минимальном количестве независимых слов для данной группы и поиска образующих группы, которое это минимальное количество обеспечивают. В моей работе данная задача решена для групп S_5 и A_5 . Указанное число независимых слов для группы S_5 равно 15, где a – инволюция, $a b$ – элемент порядка 5. Для группы A_5 это число равно 14, где a и b – элементы порядка 5.

Литература

- [1] Бородина Е.В. Независимые слова в симметрических группах / в сб. «Студент и научно-технический прогресс», труды XLIX Международной научной студенческой конференции. С. 6. — Новосибирск: НГУ, 2011.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00509-а и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/3023.

КОМБИНАТОРНАЯ СЛОЖНОСТЬ ПЕРЕСТАНОВОК, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ НЕКОТОРЫХ РАВНОБЛОЧНЫХ БИНАРНЫХ МОРФИЗМОВ

Валюженич А.А.

Бесконечное вправо слово над алфавитом Σ — это слово вида $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\dots$, где каждое $\omega_i \in \Sigma$. Для слова ω определим бинарное действительное число $R_\omega(i) = 0.\omega_i\omega_{i+1}\dots = \sum_{k \geq 0} \omega_{i+k}2^{-(k+1)}$. Отображение $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ называется *морфизмом*, если $h(xy) = h(x)h(y)$ для любых слов $x, y \in \Sigma^*$. Будем говорить, что ω — *неподвижная точка* морфизма φ , если $\varphi(\omega) = \omega$. Всякий морфизм однозначно определяется образами символов алфавита Σ , которые мы будем называть *блоками*. Морфизм называется *равноблочным*, если его блоки имеют одинаковую длину. Морфизм $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ называется *маркированным*, если его блоки имеют вид:

$$\varphi(a_i) = b_i x c_i,$$

где x — произвольное слово, а b_i и c_i — символы алфавита Σ , причем все b_i (как и все c_i) различны. В дальнейшем мы будем рассматривать только маркированные равноблочные морфизмы с длиной блоков l . Отметим, что для всех неподвижных точек $\varphi(\omega) = \omega$ рассматриваемых нами морфизмов существует число L_ω такое, что любое подслово слова ω длины не менее L_ω однозначно разбивается на блоки. Определим функцию $\gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a) | a \in \mathbb{R}\} \rightarrow \{<, >\}$, которая двум различным действительным числам ставит в соответствие их отношение.

Равноблочный морфизм $\varphi : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ будем называть *сравнимым*, если его неподвижная точка $\omega = \varphi(\omega)$ удовлетворяет следующему условию: пусть $\omega_i = \omega_j$, где $i \equiv i' \pmod{l}$, $j \equiv j' \pmod{l}$ и $0 \leq i', j' \leq l-1$, причем i' и j' фиксированы. Если $i' \neq j'$ или если ω_i и ω_j лежат в блоках разного типа в правильном разбиении ω , то отношение $\gamma(R_\omega(i), R_\omega(j))$ определено однозначно.

В следующих трех утверждениях мы находим условие, по которому можно определить, является ли маркированный морфизм сравнимым.

Утверждение 1. Пусть ω — неподвижная точка маркированного равноблочного морфизма φ , причем $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = B$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) если $0u1$ является подсловом A или B , причем $A = 0u0x$, где x — некоторое слово, то φ не является сравнимым морфизмом;
- 2) если $1u0$ является подсловом A или B , причем $B = 1u1x$, где x — некоторое слово, то φ не является сравнимым морфизмом.

Утверждение 2. Пусть ω — неподвижная точка маркированного равноблочного морфизма φ , причем $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = B$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) если $0u$ является суффиксом A или B , причем $A = 0u0x$, где x — некоторое слово, то φ не является сравнимым морфизмом;
- 2) если $1u$ является суффиксом A или B , причем $B = 1u1x$, где x — некоторое слово, то φ не является сравнимым морфизмом.

Утверждение 3. Пусть ω — неподвижная точка маркированно-го равноблочного морфизма φ , для которого не выполнены условия утверждений 1 и 2. Тогда φ — сравнимый морфизм.

Пусть ω — бесконечное вправо непериодическое слово над алфавитом Σ . Тогда определим *бесконечную перестановку*, порождаемую словом ω , как упорядоченную тройку $\delta = \langle \mathbb{N}, <_\delta, < \rangle$, где $<_\delta$ и $<$ — линейные порядки на \mathbb{N} . При этом $<_\delta$ определяется следующим образом: $i <_\delta j$ тогда и только тогда, когда $R_\omega(i) < R_\omega(j)$. Определим *комбинаторную сложность* $\lambda(n) = |\text{Perm}(n)|$ перестановки δ_ω , порождаемой некоторым словом ω как число различных её подперестановок. Понятие бесконечной перестановки было введено в [1], где, кроме того, исследовались свойства периодичности и низкая комбинаторная сложность перестановок. Понятие перестановки, порожденной бесконечным непериодическим словом, было введено Макаровым в [2]. В работе [3] тот же автор вычислил комбинаторную сложность перестановок, порожденных хорошо известным семейством слов Штурма. В работе [5] Уидмер вычислил комбинаторную сложность перестановки Туэ-Морса. В настоящей работе найдена комбинаторная сложность перестановок, порожденных неподвижными точками сравнимых морфизмов.

Определим функцию $\delta(n, z)$: если $n = l^s|z| + 1$ для некоторого натурального s , то $\delta(n, z) = 1$, иначе $\delta(n, z) = 0$.

Теорема 1. Пусть ω — неподвижная точка сравнимого морфизма φ . Тогда комбинаторная сложность перестановки, порожденной ω , вычисляется следующим образом: $\lambda(n) = \sum_{a_1 \in A_1} [C_{a_1}^{nar}(n)(m_{a_1} + n_{a_1}) + (C_{a_1}^{bad}(n) + C_{a_1}^{wide}(n))(m_{a_1} + 2n_{a_1})] + \sum_{a_2 \in A_2} C_{a_2}(n)m_{a_2} - \sum_{z \in Z} [S_z(n-1)(k_z + t_z + r_z)(1 - \delta(n, z)) + (k_z + r_z)\delta(n, z)]$ для $n \geq L_\omega$.

Все функции, входящие в условие теоремы, определяются в работе [4].

Литература

- [1] *Fon-Der-Flaass D.-G., Frid A.E.* On periodicity and low complexity of infinite permutations // European J. Combin. 2007. Vol. 28, № 8. Pp. 2106-2114.
- [2] *Makarov M.A.* On permutations generated by infinite binary words // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2006. Vol. 3. Pp. 304-311.
- [3] *Makarov M.A.* On the permutations generated by the Sturmian words // Sib. Math. J. 2009. Vol. 50, № 3. Pp. 674-680.
- [4] *Valyuzhenich A.* Permutation complexity of the fixed points of some uniform binary morphisms // EPTCS 63 (2011), Proceedings of WORDS 2011. Pp. 257-264.
- [5] *Widmer S.* Permutation complexity of the Thue-Morse word // Adv. in Appl. Math. 2010.

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМАХ ТРОЕК

Воробьёв К.В.¹

Граф $G = (V, E)$ называется сильно регулярным с параметрами (v, k, λ, μ) , если $|V| = v$, граф G является связным регулярным степени k , любая смежная пара вершин имеет λ общих соседей, и любая пара несмежных вершин имеет μ общих соседей [1].

Д.Г. Фон-Дер-Флаассом было введено определение сильно регулярной системы троек. Пусть V – конечное множество, пусть T – подмножество множества трёхэлементных подмножеств V . T называется сильно регулярной системой троек с параметрами $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $M = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, если для любых трех различных вершин u, v, w верно следующее:

1. Если $\{u, v, w\} \in T$, то

- (a) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\}, \{u, x, w\}, \{u, v, x\} \notin T\}| = \lambda_0$;
- (b) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\}, \{u, x, w\}, \notin T, \{u, v, x\} \in T\}| = \lambda_1$;
- (c) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\} \notin T, \{u, v, x\}, \{u, x, w\} \in T\}| = \lambda_2$;
- (d) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\}, \{u, x, w\}, \{u, v, x\} \in T\}| = \lambda_3$.

2. Если $\{u, v, w\} \notin T$, то

- (a) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\}, \{u, x, w\}, \{u, v, x\} \notin T\}| = \mu_0$;
- (b) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\}, \{u, x, w\}, \notin T, \{u, v, x\} \in T\}| = \mu_1$;
- (c) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\} \notin T, \{u, v, x\}, \{u, x, w\} \in T\}| = \mu_2$;
- (d) $|\{x \in V \setminus \{u, v, w\} | \{x, v, w\}, \{u, x, w\}, \{u, v, x\} \in T\}| = \mu_3$.

¹Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для молодых ученых (МК-1700.2011.1).

Для любой системы троек T и любой ее вершины u определен граф G на $V \setminus \{u\}$: его ребрами являются те пары $\{v, w\}$, для которых $\{u, v, w\} \in T$. Будем говорить, что граф G индуцирован системой T и вершиной u . Несложно доказать, что индуцированные графы сильно регулярной системы троек являются сильно регулярными, при этом относительно любой вершины системы троек индуцируется сильно регулярный граф с одинаковым набором параметров (v, k, λ, μ) .

Сильно регулярная система троек T называется *сильно регулярным расширением* графа G , если в результате этой операции относительно любой вершины системы троек получается граф, изоморфный G . В работе исследуется существование сильно регулярных расширений сильно регулярных графов на небольшом количестве вершин. Основным результатом работы является

Теорема. *Существуют сильно регулярные расширения графа Петерсена с параметрами $\Lambda = (2, 2, 0, 0)$ и $M = (2, 1, 1, 0)$ и графа решетки 3×3 с параметрами $\Lambda = (0, 2, 0, 1)$ и $M = (1, 0, 2, 0)$. Не существует сильно регулярных расширений графов Шрикхандэ, Пэли порядка 13 и $L(K_6)$.*

Литература

- [1] Брауэр А.Е., Ван Линт И.Х. Сильно регулярные графы и частичные геометрии / в Киберн. сб. № 24. С. 186–229. М.: Наука, 1987.

О НЕИЗОМОРФНЫХ СОВЕРШЕННЫХ 2-РАСКРАСКАХ ГРАФА ДЖОНСОНА $J(10, 3)$

Гаврилюк А.Л., Горяинов С.В., Могильных И.Ю.¹

Графом Джонсона $J(v, k)$ называется граф, вершинами которого являются все k -элементные подмножества некоторого v -элементного множества; два подмножества смежны, если они имеют точно $k - 1$ общих элементов. Графы $J(v, k)$ и $J(v, v - k)$ изоморфны, поэтому далее считаем, что $k \leq v/2$. Граф Джонсона является дистанционно-регулярным, см. [1], имеет диаметр k и $k + 1$ различных собственных значений: $\theta_i = (k - i)(v - k - i) - i$, $i = 0, \dots, k$.

Совершенной раскраской графа Γ в t цветов (далее, для краткости t -раскраской) называется разбиение множества вершин Γ на t классов (цветов) C_1, \dots, C_t такое, что для любых $i, j \in \{1, \dots, t\}$ любая вершина из класса C_i смежна с одним и тем же числом вершин, а именно, c_{ij} , из класса C_j . Матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,t}$ называется *матрицей параметров t -раскраски*. Мы не различаем раскраски, полученные переименованием цветов.

Хорошо известно [2], что собственные значения матрицы параметров совершенной раскраски являются собственными значениями графа. В частности, если C — матрица параметров совершенной 2-раскраски графа Джонсона $J(v, k)$, то она имеет два собственных значения: $\theta_0 = k(v - k)$ — валентность графа $J(v, k)$ и θ_i , $i > 0$.

Изучение совершенных 2-раскрасок графов Джонсона связано с гипотезой Дельсарта о несуществовании совершенных кодов в этих графах и более общей задачей изучения полностью регулярных кодов, см. [3]. Из работ [4] и [2] следует описание 2-раскрасок $J(v, k)$, матрицы параметров которых имеют собственные значения θ_1 или θ_k . В серии работ [3], [5], [6] были описаны совершенные 2-раскраски графов Джонсона $J(v, k)$ при $v \leq 8$ и $J(v, 2)$. В частности, в работе [3] был поставлен вопрос о существовании 2-раскраски графа $J(9, 3)$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, отрицательный ответ на кото-

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00551-а, программой совместных исследований УрО РАН с СО РАН, программой поддержки молодых ученых УрО РАН, третий автор поддержан грантами МК-1700.2011.1, РФФИ № 09-01-00244 и РФФИ 10-01-00616-а.

рый дает одна из следующих двух теорем из [7].

Теорема 1. При нечетных v граф $J(v, 3)$ не допускает совершенных 2-раскрасок, матрица параметров которых имеет собственное значение θ_2 .

Теорема 2. Если v четно и A — симметричная матрица параметров совершенной 2-раскраски графа $J(v, 3)$, имеющая собственное значение θ_2 , то $v \equiv 2 \pmod{4}$, $A = \begin{pmatrix} 2v-8 & v-1 \\ v-1 & 2v-8 \end{pmatrix}$ и либо $v = 6$ или 10 , либо $v > 22$.

Пример раскраски из теоремы 2 при $v = 6$ был построен в работе [6], а при $v = 10$ — в работе [3].

Назовем две раскраски графа *изоморфными*, если одна из них может быть получена из другой переименованием цветов или действием некоторого автоморфизма графа. Насколько известно авторам, вопрос изоморфизма раскрасок ранее специально не изучался. Известно лишь, что системы троек и четверок Штейнера и кратные совершенные коды в $J(6, 3)$ (в некотором смысле, тривиальные конструкции) дают примеры неизоморфных раскрасок с одинаковыми матрицами параметров.

В данной работе показано, что граф $J(10, 3)$ имеет две неизоморфные совершенные 2-раскраски с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Как отмечалось выше, одна из них построена в [3]. Новая, найденная в данной работе, может быть описана с помощью орбит некоторой подгруппы группы автоморфизмов графа $J(10, 3)$. Рассмотрим граф Σ , состоящий из двух изолированных 5-циклов. Занумеруем его вершины некоторым образом и сопоставим естественным образом каждой тройке вершин графа Σ некоторую вершину графа $J(10, 3)$. Группа автоморфизмов графа Σ действует транзитивно на следующих множествах троек вершин из Σ (и, значит, соответствующих множествах вершин $J(10, 3)$):

- тройки вершин из Σ , образующих 2-пути в обоих циклах (всего 10 таких троек);
- тройки вершин из Σ , две вершины из которых смежны в одном

из циклов, а оставшаяся вершина принадлежит другому циклу (имеется 50 таких троек);

- тройки вершин из Σ , все три вершины которых лежат в одном цикле и состоят из пары смежных вершин и одной изолированной от них вершины (всего 10 таких троек);
- тройки вершин из Σ , пара вершин которых принадлежит одному циклу и несмежна, а оставшаяся вершина принадлежит другому циклу (имеется 50 таких троек).

Теперь два подграфа графа $J(10, 3)$, индуцированные объединением двух первых множеств и двух последних множеств соответственно, задают совершенную 2-раскраску $J(10, 3)$ с указанной матрицей параметров. Легко проверить, что она не изоморфна 2-раскраске, описанной в [3].

Литература

- [1] *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-regular graphs // Berlin, New-York, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
- [2] *Martin W.J.* Completely regular designs of strength one // J. Algebr. Comb. 1994. Vol. 3. Pp. 170–185.
- [3] *Августинович С.В., Могильных И.Ю.* Совершенные раскраски графов Джонсона $J(8, 3)$ и $J(8, 4)$ в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 2. С. 3–19.
- [4] *Meyerowitz A.D.* Cycle-balanced partitions in distance-regular graphs // J. Combin. Inform. System Sci. 1992. Vol. 17. Pp. 39–42.
- [5] *Могильных И.Ю.* О несуществовании некоторых совершенных 2-раскрасок графов Джонсона // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 5. С. 52–68.
- [6] *Mogilyukh I.Yu., Avgustinovich S.V.* Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6, 3)$ and $J(7, 3)$ // Lect. Notes Comp. Sci. Vol. 2008. 5228. Pp. 11–19.
- [7] *Gavrilyuk A.L., Goryainov S.V.* On perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(v, 3)$ / Тез. докл. Межд. конф. «Мальцевские чтения». С. 64–65. Новосибирск, 2011.

ГРАФЫ ДЕЗА С 4-МЯ РАЗЛИЧНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Гаврилюк А.Л., Шалагинов Л.В.¹

Для вершины x графа Γ через $\Gamma_1(x)$ обозначим множество соседей вершины x . *Сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф Γ такой, что для любых его вершин x, y множество $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)$ содержит k вершин, если $x = y$, λ вершин, если вершины x, y смежны, и μ вершин, если x, y не смежны.

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a) (для определенности $b \geq a$) называется граф Δ такой, что для любых его вершин x, y множество $\Delta_1(x) \cap \Delta_1(y)$ содержит k вершин, если $x = y$, и a или b вершин, если $x \neq y$, вне зависимости от смежности вершин x, y . Ясно, что графы Деза можно рассматривать как обобщение сильно регулярных графов. Далее под графами Деза мы будем понимать точные графы Деза, т.е. не являющиеся сильно регулярными.

Матрицей смежности графа Γ на v вершинах называется $(0, 1)$ -матрица A размера $v \times v$, строки и столбцы которой проиндексированы вершинами Γ , и для вершин x, y графа Γ имеем $A_{x,y} = 1$, если x и y смежны, и $A_{x,y} = 0$ в противном случае. *Спектром (собственным значением)* графа называется спектр (собственное значение) его матрицы смежности.

Хорошо известно, что регулярный граф (в котором каждая вершина имеет одно и то же число соседей), имеющий точно 3 различных собственных значения, сильно регулярен. Более того, эти собственные значения могут быть вычислены из параметров v, k, λ, μ . Для графов Деза подобная характеристика не известна авторам. Спектр графов Деза не определяется из параметров v, k, b, a — по крайней мере, с точностью до кратностей собственных значений.

Теперь понятно, что граф Деза имеет по крайней мере 4 различных собственных значения. В докладе речь пойдет об этом экстремальном случае. В частности, в работе вычислены спектры некоторых конструкций графов Деза из [1] и показано, что многие из

¹Работа поддержана программой совместных исследований УрО РАН с СО РАН, программой поддержки молодых ученых УрО РАН, грантом МК-938.2011.2.

них имеют точно 4 различных собственных значения. В статье [2] показано, что еще одна конструкция графов Деза (являющихся подграфами определенного вида в симплектических сильно регулярных графах) дает графы точно с 4 различными собственными значениями. Построенные в статье [3] графы Деза имеют 5 различных собственных значений. Среди всех графов Деза с не более чем 16 вершинами (их описание см. в [4]) имеется граф с параметрами $(16, 5, 2, 1)$, спектр которого имеет 7 различных собственных значений. С другой стороны, не сложно получить следующий результат.

Утверждение 1. *Для любого натурального s существует граф Деза, имеющий не менее s различных собственных значений.*

Пример такого графа обеспечивает конструкция прямого произведения двух графов Деза с параметрами $b = 2, a = 0$. Заметим, что графы Деза с условием $a = 0$ могут иметь диаметр больше 2.

Предложение 1. *Граф Деза с параметрами $(v, k, b, 0)$ и точно 4-мя различными собственными значениями имеет диаметр 2.*

В связи с утверждением 1 интересно, существуют ли константы $A > 0$ или $0 < M < 1$ такие, что любой граф Деза на v вершинах имеет не более чем $v - A$ или vM различных собственных значений.

Интересные примеры графов Деза можно получать из сильно регулярных графов с помощью следующей конструкции [1].

Утверждение 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$ и с матрицей смежности A . Пусть также P — матрица перестановки, отвечающая автоморфизму порядка 2 графа Γ , сдвигающему только несмежные вершины. Тогда $M = PA$ — матрица смежности точного графа Деза Δ с параметрами $(v, k, \max\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\})$.*

Заметим, что эта конструкция позволяет получать графы Деза с одинаковыми параметрами и одинаковыми наборами различных собственных значений, но в общем случае с различными их кратностями. Пусть k, r, s — различные собственные значения матрицы смежности A сильно регулярного графа Γ с кратностями 1, f, g соответственно. Тогда матрица смежности M графа Деза Δ , полученного из Γ с помощью утверждения 2, имеет собственные значения $k, \pm r, \pm s$

с кратностями $1, f^+, f^-, g^+, g^-$ соответственно, причем $f^+ + f^- = f$, $g^+ + g^- = g$. Таким образом, построенные с помощью конструкции 2 графы Деца имеют не более 5 различных собственных значений.

Предложение 2. *Если граф Деца Δ , полученный из сильно регулярного графа с помощью утверждения 2, имеет точно 4 различных собственных значения, то автоморфизм P действует на $V(\Gamma)$ без неподвижных точек и либо $f^- = f, g^- = -fr/s, g^+ = -k/s$, либо $g^- = g, f^- = -gs/r, f^+ = -k/r$.*

Сильно регулярный граф $n \times n$ -решетки при четном n и его автоморфизм порядка 2, соответствующий центральной симметрии (суперпозиции симметрий относительно главной и побочной диагоналей), дают пример сильно регулярного графа с автоморфизмом порядка 2, действующим без неподвижных точек и сдвигающим только несмежные вершины. Однако построенный из него с помощью конструкции 2 граф Деца имеет пять различных собственных значений.

Гипотеза 1. Графы Деца, построенные с помощью конструкции 2, имеют 5 различных собственных значений.

В работе также изучаются графы Деца с 4-мя различными собственными значениями, три из которых — иррациональные числа. Это, возможно, единственный случай, когда собственные значения и их кратности выражаются через параметры графа. Соответствующие соотношения и некоторые примеры будут приведены в докладе.

Литература

- [1] *Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D., Hemmeter J.* Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // *J. Comb. Designs.* 1999. Vol. 7. Pp. 359–405.
- [2] *Guo J., Wang K., Li F.* Deza graphs based on symplectic spaces // *Eur. J. of Comb.* 2010. Vol. 31. Pp. 1969–1980.
- [3] *Haemers W.H., Kharaghani H., Meulenberg M.A.* Divisible design graphs // *J. Comb. Theory, A.* Vol. 118, № 3. Pp. 978–992.
- [4] *Горяинов С.В., Шалагинов Л.В.* О графах Деца на 14, 15 и 16 вершинах // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2011. № 8. С. 105–115.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ ПОЛЯХ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Глуско Кр.Л., Титов С.С.

В современных каналах связи используются многобитовые последовательности, которые можно интерпретировать как элементы конечных полей характеристики два, поэтому важной задачей становится использование многочленов больших степеней, задающих эти поля. Вычисление элементов неприводимых многочленов также необходимо для решения квадратных уравнений в конечных полях характеристики два, что нашло применение в эллиптической криптографии: это позволяет в 2 раза уменьшить количество бит для хранения точек эллиптической кривой.

Различают понятия абсолютного и относительного следа элемента поля.

В произвольном поле $GF(q)$ формула будет выглядеть следующим образом: $Tr(z) = z + z^p + z^{p^2} + \dots + z^{p^{n-1}}$, где $q = p^n$. $Tr(z) \in GF(p)$ и может принимать значения $0, 1, \dots, p-1$.

Если поле $GF(q^m)$ является расширением поля $GF(q)$, то речь уже идет о вычислении относительного следа элемента поля $GF(q^m)$. Известно, что относительный след – единственная линейная операция, отображающая элементы поля F в элементы поля K , обладающая свойствами идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности [1].

Для решения уравнения $x^2 + x = z$ в полях $GF(2^n)$ при нечетном n используется так называемая формула полуследа:

$$Sr(z) = x = z + z^4 + z^{16} + \dots + z^{2^{n-1}}, \text{ причём } z^{2^n} = z.$$

Утверждение 1. *Формула полуследа дает решение квадратного уравнения с нулевым следом в поле $GF(2^n)$, где n нечетное.*

В книге [2] вычисление решения квадратного уравнения в полях $GF(2^n)$, где n четное, сводится к системе линейных уравнений.

Однако на основании исследований можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. *При четном n не существует многочлена вида, дающего решение квадратного уравнения $z^2 + z = a$.*

В многочленах четных степеней появятся две степени подряд, поэтому при сложении $z + z^2$ некоторые позиции сократятся и не дадут полной формулы, аналогичной для многочленов нечетной степени.

Можно ставить задачу поиска многочлена, корень которого является решением квадратного уравнения $z^2 + z$ в поле $GF(2^n)$, где n четное.

Для поиска решения уравнения больших степеней можно использовать идею расширения полей: зная формулу решения квадратного уравнения в полях $GF(2^n)$, где n нечетно, и зная формулу решения этого уравнения в полях $GF(2^k)$, мы сможем найти формулу решения в поле $GF(2^{nk})$, $k = 2, 4, 8, 16, \dots$ (см. рис. 1).

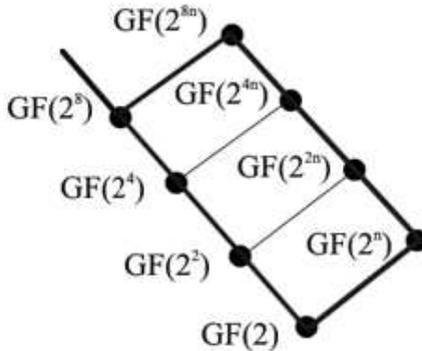


Рис. 1: схема расширения полей

Решение квадратного уравнения при четном $n = 2m$ можно выразить следующим образом:

$$z \in GF(2^n) \iff z = x + \alpha y, x, y \in GF(2^m)$$

$$\begin{aligned} Tr(z) = z + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^{2n-1}} &= (z + z^4 + z^{16} + z^{2^{2n-2}} + (z^2 + \\ &+ z^8 + \dots + z^{2^{2n-1}}) = (x + x^2 + \dots + x^{2^{n-1}}) + \alpha(y + y^4 + y^{16} + \dots + \\ &+ y^{2^{n-1}}) + \alpha^2(y^2 + y^8 + y^{32} + \dots + y^{2^n}). \end{aligned}$$

$$z^2 + z + z_1 \implies (x^2 + \alpha^2 y^2) + (x + \alpha y) + (x_1 + \alpha y_1), \text{ где } \alpha^2 = \alpha + 1.$$

$$(x^2 + x + y^2) + \alpha(y^2 + y) = x_1 + \alpha y_1.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} Tr(y_1) = 0, \\ Tr(x_1 + y^2) = 0. \end{cases}$$

При n нечетном $Tr(Sr(a)) = 0$, если $Tr(a) = 0$.

Одно из решений при условии, если $Tr(x_1) = 0$:

$$y = Sr(y_1) = y_1 + y_1^4 + y_1^{16} + \dots + y_1^{2^{n-1}}.$$

$$y^2 = [Sr(y_1)]^2 = y_1^2 + y_1^8 + y_1^{32} + \dots + y_1^{2^{n-2}} + y^{2^n} = y_1 + y_1^2 + y_1^8 + y_1^{32} + \dots + y_1^{2^{n-2}}.$$

Сложив эти выражения, получим: $y + y^2 = y_1 = Tr(y_1) + y_1 \implies Tr(y_1) = 0$.

Если $Tr(x_1) = 1$, то

$Tr(x_1 + y^2) = Tr(x_1) + Tr(y^2) = Tr(x_1) + Tr(y) = Tr(x_1)$, что противоречит начальным утверждениям.

Поэтому условия таковы: $Tr(x_1) = Tr(y_1) = 0$, а формула – такова:

$$\begin{cases} y = Sr(y_1) + Tr(x_1); \\ x = Sr(x_1 + y^2) = Sr(x_1) + Sr(y_1^2) = Sr(x_1) + Tr(x_1) + Sr(y_1^2). \end{cases}$$

Но нас интересует универсальная формула для нахождения корня квадратного уравнения для многочленов как нечетной, так и четной степени. Таким образом, возникает вопрос выбора базиса.

На основании проведенных исследований можно сказать, что надо выбирать базис $GF(2^s)$, $s = 2^k$ через симметричный, или самовозвратный многочлен. Это связано с тем, что нормальный базис при последовательном возведении в степень создает цикл, что упрощает расчеты.

В заключении можно сделать вывод, что такая процедура решения квадратных уравнений является очень эффективной и сокращает временные затраты на вычисления.

Литература

- [1] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: в 2-х тт. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. С. 71–72.
- [2] Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: алгебраические и алгоритмические основы. – М.: КомКнига, 2006. С. 49–50, 60–62.

О ГРАФАХ ДЕЗА, ПОЛУЧАЕМЫХ ИЗ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Горяинов С.В., Шалагинов Л.В.¹

Мы рассматриваем конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. Графом Деза с параметрами (v, k, b, a) , где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k , и любые две вершины которого имеют a или b общих соседей.

Определение 2. Пусть G_1 и G_2 — графы. Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1) \times V(G_2)$ такой, что вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны тогда и только тогда, когда либо u_1 смежна с v_1 , либо $u_1 = v_1$ и u_2 смежна с v_2 , см. [2].

В статье [1] были предложены некоторые конструкции для построения точных графов Деза. Среди них конструкция, позволяющая строить граф Деза с помощью разностного множества в конечной группе.

Пусть Γ — группа и $D \subset \Gamma$. Определим D^{-1} как множество $\{d^{-1} : d \in D\}$ и определим DD^{-1} как мультимножество $\{dd^{-1} : d, d' \in D\}$ (в DD^{-1} могут быть повторяющиеся элементы). Для подмножеств A и B множества элементов Γ и целых чисел a и b будем писать $DD^{-1} = aA + bB$, если в DD^{-1} содержится a копий каждого элемента из A и b копий каждого элемента из B .

Теорема 1. [1] Пусть D — подмножество элементов группы Γ такое, что

$$(i) \quad |\Gamma| = v \text{ и } |D| = k;$$

(ii) единица группы Γ не содержится в D ;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1), программы УрО РАН для молодых ученых и фонда поддержки молодых ученых ЧелГУ.

$$(iii) D^{-1} = D;$$

$$(iv) DD^{-1} = aA + bB + ke, \text{ где } A, B \text{ и } \{e\} - \text{ разбиение } \Gamma.$$

Пусть G — граф, множество вершин которого — все элементы группы Γ , и вершины u и v которого смежны тогда и только тогда, когда $v^{-1}u \in D$. Тогда G — граф Деза с параметрами (v, k, b, a) .

Теорема 2. [1] Если G_1 — сильно регулярный граф с параметрами (n, k, λ, μ) и G_2 — граф Деза с параметрами (n', k', b, a) , то $G_1[G_2]$ — регулярный граф степени $(k' + kn')$ на nn' вершинах. Этот граф является графом Деза тогда и только тогда, когда

$$\{|a + kn', b + kn', \mu n', \lambda n' + 2k'\} \leq 2.$$

Приведем пример: если $G_1 = K_x$ (полный граф на x вершинах) и $G_2 = yK_2$ (y копий K_2), тогда граф $G_1[G_2]$ является графом Деза с параметрами $(2xy, 1 + 2y(x - 1), 2y(x - 1), 2 + 2y(x - 2))$.

Теорема 3. [1] Пусть G — граф Деза с параметрами (n, k, b, a) . Тогда $k = b$ в том и только том случае, если G изоморфен $G_1[G_2]$, где $G_1 = (n_1, k_1, \lambda_1)$ и $G_2 = \overline{K_{n_2}}$ для некоторых n_1, n_2, k_1, λ_1 . При этом его параметры равны

$$n = n_1 n_2, \quad k = b = k_1 n_2, \quad a = \lambda_1 n_2.$$

В данной работе с помощью компьютерного перебора найдены все графы Деза, которые можно получить, используя теорему 1, из циклических групп C_n при $n \leq 56$.

Лемма 1. Пусть $G = K_x[yK_2]$ — граф Деза. Тогда в группе C_{2xy} найдется множество D , удовлетворяющее условию теоремы 1 такое, что полученный граф Деза изоморфен G .

В таблице 1 приведены все графы Деза, получаемые с использованием теоремы 1 из циклических групп C_n при $n \leq 56$, для каждого графа найдено множество D и построена его матрица смежности. Не указаны сильно регулярные графы (они хорошо известны), графы с $k = b$ (они описываются теоремой 3), все возможные композиции $K_x[yK_2]$ и произведения $K_n \times K_4$, а также простые случаи: объединения циклов, полных графов, полных двудольных графов, полные двудольные графы с удаленным паросочетанием и т.п.

Таблица 1: параметры графов, получаемых из циклических групп

Параметры	Описание
(19,6,2,1)	локально циклический изоморфен $M(19)$ [3]
(20,13,9,8)	
(21,12,7,6)	
(26,13,12,6)	$Paley(13)[K_2]$ [4]
(28,19,15,12)	
(34,17,16,8)	$Paley(13)[K_2]$ [4]
(37,18,9,8)	имеет те же параметры, что и $Paley(37)$
(37,24,16,15)	
(41,20,10,9)	имеет те же параметры, что и $Paley(41)$
(53,26,13,12)	имеет те же параметры, что и $Paley(53)$

Литература

- [1] *Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D., Hemmeter J.* Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // *J. Comb. Designs.* 1999. Vol. 7. Pp. 359-405.
- [2] *Harary F.* Graph theory. Reading: Addison-Wesley, 1969. Pp. 36-37.
- [3] *Заринов С.Р., Махнев А.А., Яблонко И.П.* О сильно регулярных графах без треугольников / в сб. «Алгебра и линейная оптимизация», тр. Междунар. семинара, посвящ. 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова. С. 117-121. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002.
- [4] *Ермакова Г.М., Кабанов В.В.* Графы Деза, которые являются кликовыми расширениями сильно регулярных графов / в сб. «Проблемы теорет. и прикл. математики», тр. 37-й Регион. молодёж. конф. С. 27-29. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2006.

ДЛИНА ОДНОПОРОЖДЕННОЙ КРАТНО Ω-РАССЛОЕННОЙ ФОРМАЦИИ T-ГРУПП

Демина Е.Н.

Аддитивная группа G с нулевым элементом 0 называется мультиоператорной T -группой с системой мультиоператоров T (или, коротко, T -группой), если в G задана еще некоторая система n -арных алгебраических операций T при некоторых n , удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ выполняется условие $t(0, \dots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n -арна [1, гл. VI, с. 356]. Используемые обозначения и определения можно найти в работах [1–5]. Пусть \mathfrak{C} – класс всех T -групп с конечными композиционными рядами. Все рассматриваемые T -группы принадлежат классу \mathfrak{C} . Пусть \mathfrak{I} – класс всех простых \mathfrak{C} -групп, Ω – непустой подкласс класса \mathfrak{I} , $\Omega' = \mathfrak{I} \setminus \Omega$ и $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых \mathfrak{C} -групп, изоморфных композиционным факторам \mathfrak{C} -группы G . Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω -группой. Обозначим через \mathfrak{C}_Ω класс всех Ω -групп, принадлежащих \mathfrak{C} , и положим $O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{C}_\Omega}$.

Функция $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации } T\text{-групп}\}$ называется ΩF -функцией; функция $\varphi: \mathfrak{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга } T\text{-групп}\}$ называется FR -функцией. Формация $\Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$ называется Ω -расслоенной формацией T -групп с Ω -спутником f и направлением φ (φ – r -направление, если $\mathfrak{C}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, $\varphi_0(A) = \mathfrak{C}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$). Обозначим через ΩF_n^φ множество всех n -кратно Ω -расслоенных \mathfrak{C} -формаций с направлением φ . Пусть $\Omega F_n(G, \varphi) \in \Omega F_n^\varphi$ -формация, порожденная \mathfrak{C} -группой G . Через $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех ΩF_n^φ -подформаций в $\mathfrak{F} \in \Omega F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и φ – произвольное направление.

Для любых двух формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 полагают $\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Всякое множество формаций, замкнутое относительно операций \wedge и \vee , является решеткой [2].

Лемма 1. [4, теорема 4] *Решетка ΩF_n^φ является полной и модулярной для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$.*

Используя свойства полноты и модулярности решетки, Ски-

ба А.Н. ввел понятие длины формации. Сформулируем его для мультиоператорных T -групп.

Определение 1. Пусть Θ – полная модулярная решетка формаций мультиоператорных T -групп, 0_Θ – нуль решетки Θ . Будем говорить, что Θ -формация $\mathfrak{F} \neq 0_\Theta$ имеет Θ -длину n , и обозначать $l_\Theta(\mathfrak{F}) = n$, если существует такая совокупность Θ -формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_0 = 0_\Theta$, $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F}_{i-1} – максимальная Θ -подформация Θ -формации \mathfrak{F}_i , $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – набор \mathfrak{C} -формаций таких, что $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (0)$, $i, j \in I$, $i \neq j$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \{A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_n} | A_{i_j} \in \mathfrak{F}_{i_j}, i_j \in I, j = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}\}$, где $A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_n}$ – внешняя прямая сумма \mathfrak{C} -групп A_{i_j} , $j = 1, 2, \dots, n$, является \mathfrak{C} -формацией.

Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$, где \mathfrak{F}_i – непустая \mathfrak{C} -формация из ΩF_n^φ с r -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{C}_A \mathfrak{C}_A$ для любого $A \in \mathcal{I}$, и $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}_i) = n_i < \infty$ для любого $i = 1, 2, \dots, t$. Тогда $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = n_1 + n_2 + \dots + n_t + 1 - t$.

Для формулировки следствий из теоремы приведем некоторые вспомогательные результаты.

Определение 2. [1] Элемент \mathfrak{B} решетки \mathfrak{C} -формаций Θ с нулем (0) называется атомом, если $\mathfrak{B} \neq (0)$ и $(0) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{H} \in \Theta$, влечет, что $\mathfrak{H} = (0)$ или $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$.

Лемма 2. [5, лемма 6] Если $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, то решетка $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ содержит лишь конечное число атомов.

Определение 3. [1] Ограниченную решетку \mathfrak{C} -формаций Θ будем называть решеткой с дополнениями, если для любой непустой \mathfrak{C} -формации $\mathfrak{B} \in \Theta$ существует \mathfrak{C} -формация $\mathfrak{H} \in \Theta$ такая, что $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = (0)$ и $\mathfrak{B} \vee_\Theta \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, где \mathfrak{F} – максимальный элемент решетки Θ .

Определение 4. [1] Решетка называется булевой, если она дистрибутивна и является решеткой с дополнениями.

Лемма 3. [5, теорема 2] Пусть $\mathfrak{F} \in \Omega F_n^\varphi$, где φ – r -направление такое, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{C}_A \mathfrak{C}_A$ для любого $A \in \mathcal{I}$. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) решетка $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ булева;
 (2) $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$;
 (3) в \mathfrak{F} дополняем каждый элемент решетки $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, где G – \mathfrak{C} -группа и φ – r -направление такое, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{C}_{A'} \mathfrak{C}_A$ для любого $A \in \mathfrak{J}$. Если решетка $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ булева, то $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = t + 1$, где t – число атомов решетки $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, где G – \mathfrak{C} -группа и φ – r -направление такое, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{C}_{A'} \mathfrak{C}_A$ для любого $A \in \mathfrak{J}$. Если в \mathfrak{F} дополняем каждый элемент решетки $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$, то $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = t + 1$, где t – число атомов решетки $L_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$.

Литература

- [1] Скорняков Л.А. Общая алгебра. Т. 2. — М.: Наука, 1991.
 [2] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.
 [3] Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Минск: Беларуская навука, 1997.
 [4] Ведерников В.А., Демина Е.Н. Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.
 [5] Демина Е.Н. Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций мультиоператорных T -групп / в сб. «Теория групп и ее приложения», труды восьмой Межд. школы-конф., посв. 75-летию В.А. Белоногова. С. 86–93. — Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2010.

О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ГРУПП

Дуж А.А., Шлепкин А.А.¹

Пусть G — группа, \mathfrak{K} — множество групп. Будем говорить, что группа G насыщена группами из \mathfrak{K} , если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной некоторой группе из \mathfrak{K} .

Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть \mathfrak{N} — некоторое множество неизоморфных циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M} = \{X\}$, где $X \simeq L_3(q)$, $q = 2^m$ — фиксированное число, т.е. \mathfrak{M} состоит из одной группы X . Положим $\mathfrak{K} = \{X \times Y \mid X \in \mathfrak{M}, Y \in \mathfrak{N}\}$. Таким образом, множество \mathfrak{K} состоит из набора конечных групп, каждая из которых является прямым произведением двух групп: X — конечной простой неабелевой группы, изоморфной $L_3(q)$, и Y — некоторой подгруппы нечетного порядка.

Ранее в работе [1] было доказано, что группа Шункова, насыщенная прямыми произведениями линейных групп размерности 2 над локально конечными полями характеристики 2 на циклические группы без инволюций, обладает периодической частью. Естественно перенести результаты работы [1] на случай, когда линейные группы имеют размерность 3. Мы получили следующий результат:

Теорема. *Группа Шункова G , насыщенная группами из множества \mathfrak{K} , обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $L \times V$, где $L \simeq L_3(Q)$, для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V — локально циклическая группа без инволюций.*

Литература

- [1] Дуж А.А., Шлепкин А.А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Математические системы. 2011. Вып. 10 (в печати).

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00509-а и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/3023.

ЛОКАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ЛИЕВЫХ АЛГЕБР НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Елисова А.П.¹

Локальным автоморфизмом K -алгебры A называют K -линейный автоморфизм ее аддитивной группы A^+ , который на каждый элемент алгебры действует как некоторый ее автоморфизм. Аналогично определяют локальные дифференцирования алгебр.

Тривиальные локальные автоморфизмы (и дифференцирования) – это обычные автоморфизмы (соответственно, дифференцирования) алгебры A . Они характеризуются действием на любом множестве, порождающем A как алгебру. Локальный случай характеризуется действием на множестве, которое K -линейно порождает A . В частности, справедливо

Предложение. *Неединичный локальный автоморфизм алгебры нетривиален, если он единичен на каком-либо множестве, порождающем алгебру.*

Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования алгебр изучаются с 90-х годов. В [7] показано, что нетривиальные локальные автоморфизмы полной алгебры комплексных $n \times n$ матриц есть антиавтоморфизмы. В 2000 году пример нетривиального локального автоморфизма определенной алгебры треугольных комплексных 3×3 матриц указал R. Crist [5]. См. также [6].

Новые примеры построены в [1] и [2] для алгебры $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над ассоциативно коммутативным кольцом K с единицей. Ее порождают K -линейно матричные единицы e_{km} ($1 \leq m < k \leq n$); матрицы e_{i+1i} ($1 \leq i < n$) порождают ее как K -алгебру. Заметим, что с любой ассоциативной алгеброй A ассоциируют алгебру Ли, которую обозначаем через $\Lambda(A)$.

Пусть $R = NT(n, K)$. В [2] и [3] описаны при $n = 3$ все локальные автоморфизмы алгебр R и $\Lambda(R)$; они расширяют автоморфизмы с помощью нетривиальных локальных автоморфизмов вида $1 + \delta_c$,

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00717-а.

где δ_c есть дифференцирование $\alpha \rightarrow ca_{n1}e_{n1}$ ($\alpha = \|a_{km}\| \in R$) для элемента $c \in K$ с обратимым $1 + c$.

Локальные автоморфизмы алгебры R над полем K при $n = 4$ удается описать, вместе с локальными дифференцированиями [3, Теорема 1], используя новые нетривиальные локальные автоморфизмы, не тождественные на e_{31} или e_{42} и тождественные на элементах e_{i+1i} .

Для ассоциированной алгебры Ли $\Lambda(R)$ найдены другие нетривиальные локальные автоморфизмы. А именно,

$$1 + \delta_{km,c} : \alpha \rightarrow \alpha + ca_{km}e_{km} \quad (\alpha = \|a_{km}\| \in R), \quad c \in K;$$

$$1 + \rho_k : \alpha \rightarrow \alpha + a_{43}ke_{42} \quad (\alpha = \|a_{km}\| \in R), \quad k \in K.$$

С использованием описания $Aut \Lambda(R)$ [4] доказана

Теорема. *Всякий локальный автоморфизм алгебры Ли $\Lambda(R)$ над полем K при $n = 4$ есть произведение ее автоморфизма и локальных автоморфизмов вида $1 + \rho_s$, $1 + \delta_{31,m}$, $1 + \delta_{42,t}$ на локальный автоморфизм алгебры R .*

Локальные дифференцирования алгебры Ли $NT(4, K)$ исследуем, используя [8].

Литература

- [1] Елисова А.П. Локальные автоморфизмы алгебры нильтреугольных матриц над кольцом / в сб. «Алгебра, логика и методика обучения математике», материалы Всероссийской конференции. С. 37–42. — Красноярск: КГПУ, 2010.
- [2] Елисова А.П., Зотов И.Н., Левчук В.М., Сулейманова Г.С. Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр // Известия ИГУ. 2011. Т. 4, № 1. С. 9–19.
- [3] Елисова А.П. Локальные автоморфизмы и дифференцирования алгебр нильтреугольных матриц / в сб. «Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию со дня рождения А. И. Ширишова», тезисы докладов. С. 8–10. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2011.

-
- [4] *Левчук В.М.* Связи унитарной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 543–557.
- [5] *Crist R.* Local automorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 128. Pp. 1409–1414.
- [6] *Kadison R.* Local derivations // J. Algebra. 1990. Vol. 130. Pp. 494–509.
- [7] *Larson D.R., Souvour A.R.* Local derivations and local automorphisms of $B(H)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 51. Pp. 187–194.
- [8] *Levchuk V.M., Radchenko O.V.* Derivations of the locally nilpotent matrix rings // J. Algebra and Applications. 2010. Vol. 9, № 5. Pp. 717–724.

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С $B_1 = 6$

Ефимов К.С., Махнев А.А.¹

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через a^\perp обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a . Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. В дальнейшем слово «подграф» будет означать индуцированный подграф.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , а каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$).

Графом Джонсона $J(n, t)$ называется граф, вершинами которого являются t -подмножества данного n -множества X , и две вершины a, b смежны тогда и только тогда, когда $|a \cap b| = t - 1$. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$t \times n$ -решеткой*, если $|X| = t$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1) , (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в регулярном графе Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Положим $a_i(u, w) = k - b_i(u, w) - c_i(u, w)$. Заметим, что в реберно регулярном графе

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси, грантом УрО РАН для молодых ученых за 2012 год.

с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и любых вершин u, w , находящихся на расстоянии i в Γ , имеем $b_i(u, w) = b_i$ и $c_i(u, w) = c_i$.

В следствии 1.1.6 из [1] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n \times 2}$. В работах А.А. Махнева и его учеников [2]-[4] были изучены вполне регулярные графы с $2 \leq b_1 \leq 5$. В статье [5] изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ было редуцировано к исследованию графов с $k \in \{10, 11, 12\}$. В [6], [7] рассмотрены случаи $b_1 = 6$, $k = 10, 11$ соответственно. В данной работе завершено изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$.

Теорема. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 12, 5, \mu)$. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) диаметр Γ равен 2 и либо Γ — граф с параметрами $(25, 12, 5, 6)$, либо Γ является 7×7 -решеткой;
- (2) $\mu = 1$, Γ — реберный граф регулярного графа Δ без треугольников степени 7 и обхвата, не меньшего 5;
- (3) $\mu = 4$ и Γ — граф Джонсона $J(7, 3)$.

Следствие. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с $b_1 = 6$. Тогда Γ является одним из следующих графов:

- (1) полный многодольный граф $K_{r \times 7}$, граф с параметрами $(25, 12, 5, 6)$, 7×7 -решетка, треугольный граф $T(9)$, дополнительный граф к 5×5 -решетке или к треугольному графу $T(7)$, граф Хоффмана-Синглтона или его дополнение, граф с параметрами $(26, 10, 3, 4)$ или его дополнение;
- (2) полный двудольный граф $K_{8,8}$ с удаленным максимальным паросочетанием, граф Тэйлора с параметрами $(28, 13, 6, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Пэли $P(13)$ или граф Тэйлора с параметрами $(32, 15, 8, 6)$, в котором окрестности вершин изоморфны треугольному графу $T(6)$;
- (3) $\mu = 1$, окрестность каждой вершины является 7-кликкой, или объединением изолированных n -клик для $n = 2, 3$ или 6;
- (4) $\mu = 2$ и верно ровно одно из утверждений:
 - (i) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересе-

- чений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$, граф Конвея-Смита или граф Доро,
- (ii) Γ является прямоугольником с $v \leq 2^7$ и диаметра, не большего 7 (в случае $v = 2^7$ или $d(\Gamma) = 7$ граф Γ является 7-кубом),
- (iii) окрестность каждой вершины в Γ является объединением четырех изолированных ребер;
- (5) $\mu = 3$ и либо
- (i) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$, либо
- (ii) Γ — локально девятиугольный граф диаметра 3, каждый μ -подграф является 3-кликкой или объединением изолированной вершины и ребра, $b_2(u, x) \leq 3$ для любых вершин u, x с $d(u, x) = 2$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$, либо
- (iii) $k = 10$, диаметр Γ равен 3 и $34 \leq v \leq 37$, либо
- (iv) $k = 11$, диаметр Γ равен 3, $v = 36$ и $\Gamma_3(u)$ является 2-кликкой для некоторой вершины u ;
- (6) $\mu = 4$ и Γ — граф Джонсона $J(7, 3)$.

Литература

- [1] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
- [2] Махнев А.А. О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН, сер. матем. 2004. Т. 68. С. 159-172.
- [3] Васильев С.А., Махнев А.А. О вполне регулярных графах с $b_1 = 4$ // Известия Гомельского госуниверситета. 2006. С. 101-108.
- [4] Казарина В.И., Махнев А.А. О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Владикавказский матем. ж-л. 2009. Т. 11, № 1. С. 29-42.
- [5] Ефимов К.С., Махнев А.А. Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ // Журнал Сибирского Фед. ун-та. 2009. Т. 2, № 1. С. 63-77.
- [6] Ефимов К.С., Махнев А.А., Нирова М.С. О вполне регулярных графах с $k = 10$, $\lambda = 3$ // Труды Института математики и механики. 2010. Т. 16, № 2. С. 75-90.
- [7] Ефимов К.С., Махнев А.А. О вполне регулярных графах с $k = 11$, $\lambda = 4$ // Тезисы докладов Международной конференции по алгебре и геометрии. С. 203-205. — Екатеринбург, 2011.

О ПРОСТЫХ ГРУППАХ С ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, КАК У ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ

Звездина М.А.¹

Графом простых чисел конечной группы G называют граф, вершинами которого являются простые делители порядка группы G , а ребро (p, q) для различных простых чисел p и q существует тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq . В [1] А.В. Васильевым был поставлен вопрос:

Вопрос 16.26. Существует ли такое натуральное k , что никакие k попарно неизоморфных конечных неабелевых простых групп не могут иметь один и тот же граф простых чисел? *Гипотеза:* $k = 5$.

В работе рассматриваются неабелевы простые группы, граф простых чисел которых совпадает с графом простых чисел знакопеременной группы подстановок A_n при $n \geq 5$. В этом направлении получен следующий частичный результат:

Теорема. Пусть L — знакопеременная группа A_n , $n \geq 5$, а S — либо знакопеременная группа A_m , $m \geq 5$, либо спорадическая группа, либо простая линейная группа $PSL_2(q)$. Предположим, что L и S неизоморфны. Тогда $GK(L) = GK(S)$ тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев: $(L, S) = (A_n, A_{n-1})$, где n нечетное, а числа n и $n - 4$ не являются простыми, либо $(L, S) = (A_9, J_2)$, либо $(L, S) = (A_7, PSL_2(49))$.

Замечание. В случае, когда обе группы L и S являются знакопеременными, результат получен по модулю гипотезы Гольдбаха в следующей формулировке: для любого четного числа $n > 6$ найдется пара различных простых чисел p и q таких, что $n = p + q$.

Литература

- [1] Нерешенные вопросы теории групп, Коуровская тетрадь, 16-е изд., Институт математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск), 2006.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (НШ-3669.2010.1).

О ГРАФАХ ДЕЗА, ПОЛУЧАЕМЫХ ИЗ ДИЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП

Кабанов В.В., Шалагинов Л.В.¹

Мы рассматриваем конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. Графом Деза с параметрами (v, k, b, a) , где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k , и любые две вершины которого имеют a или b общих соседей.

Определение 2. Диэдральной группой D_n называется полная группа преобразований симметрии правильного n -угольника. Она состоит из группы поворотов на угол $\frac{2\pi l}{n}$ ($l = 1, \dots, n-1$), которую в дальнейшем будем называть циклической подгруппой, и множества отражений.

Определение 3. Пусть G_1 и G_2 — графы. Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1) \times V(G_2)$ такой, что вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны тогда и только тогда, когда либо u_1 смежна с v_1 , либо $u_1 = v_1$ и u_2 смежна с v_2 , см. [2].

Определение 4. (v, k, λ) разностным множеством называется подмножество $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ группы Γ такое, что любой элемент $g \in \Gamma$ может быть представлен в виде $g = d_i d_j^{-1}$ точно λ способами. Если Γ — циклическая группа, то разностное множество называется циклическим. Полный список циклических разностных множеств с $k \leq 100$ приводится в работе [4].

В статье [1] были предложены некоторые конструкции для построения точных графов Деза. Среди них конструкция, позволяющая строить граф Деза с помощью разностного множества в конечной группе.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.2), программы УрО РАН для молодых ученых и фонда поддержки молодых ученых ЧелГУ.

Пусть Γ — группа и $D \subset \Gamma$. Определим D^{-1} как множество $\{d^{-1} : d \in D\}$ и определим DD^{-1} как мультимножество $\{dd'^{-1} : d, d' \in D\}$ (в DD^{-1} могут быть повторяющиеся элементы). Для подмножеств A и B множества элементов Γ и целых чисел a и b будем писать $DD^{-1} = aA + bB$, если в DD^{-1} содержится a копий каждого элемента из A и b копий каждого элемента из B .

Теорема 1. [1] Пусть D — подмножество элементов группы Γ такое, что

- (i) $|\Gamma| = v$ и $|D| = k$;
- (ii) единица группы Γ не содержится в D ;
- (iii) $D^{-1} = D$;
- (iv) $DD^{-1} = aA + bB + ke$, где A, B и $\{e\}$ — разбиение Γ ;

Пусть G — граф, множество вершин которого — все элементы группы Γ , и его вершина u смежна с v тогда и только тогда, когда $v^{-1}u \in D$. Тогда G — граф Деза с параметрами (v, k, b, a) .

Лемма 1. Возьмем в качестве Γ группу D_n , и пусть все элементы циклической подгруппы из D_n содержатся в множестве D . Если для Γ и D выполняется условие теоремы 1, то $b = 2(k - n + 1)$ и $a = 2(k - p)$ для некоторого целого числа p .

Обозначим через y количество элементов циклической подгруппы, встречающихся b раз в DD^{-1} , и положим $x = k - n + 1$.

Теорема 2. Возьмем в качестве Γ группу D_n , и пусть все элементы циклической подгруппы из D_n содержатся в множестве D . Если для Γ и D выполняется условие теоремы 1, то

$$x^2 - (2n - 1)x + (p^2 - p - 2y) = 0.$$

Решая это уравнение относительно x , получим (так как $x < p$)

$$x = p - \frac{1 + \sqrt{8y + 1}}{2}. \quad (1)$$

Следствие 1. Пусть выполняется условие теоремы 2 и $y = 0$. Тогда G — граф Деза с параметрами (v, k, b, a) , построенный в теореме 1, будет изоморфен $G_1[G_2]$, где $G_1 = (v_1, k_1, \lambda)$ граф (сильно регулярный граф с $\mu = \lambda$) и $G_2 = \overline{K_{n_2}}$ для некоторых v_1, n_2, k_1, λ . При этом его параметры равны

$$v = v_1 n_2, \quad k = b = k_1 n_2, \quad a = \lambda n_2.$$

Теорема 3. Возьмем в качестве Γ группу D_n . Пусть все элементы циклической подгруппы из D_n содержатся в множестве D и $y = p - 1$. Множество D , удовлетворяющее условию теоремы 1, и соответствующий граф Деза существуют тогда и только тогда, когда существует $(n, x, \frac{x(x-1)}{n-1})$ циклическое разностное множество.

Следствие 2. Используя множество D , удовлетворяющее условию теоремы 3, можно построить графы Деза с параметрами $(14, 9, 6, 4)$, $(22, 16, 12, 10)$, $(74, 64, 56, 54)$. Первый из этих графов был также найден с помощью перебора в работе [3].

Литература

- [1] Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D., Hemmeter J. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. Pp. 359-405.
- [2] Harary F. Graph theory // Addison-Wesley, Reading. 1969. Pp. 36—37.
- [3] Горяинов С.В., Шалагинов Л.В. О графах Деза на 14, 15 и 16 вершинах // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 105-115.
- [4] Baumert L.D. Cyclic Difference Sets // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1971. Vol. 182.

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП В ТЕРМИНАХ СЛАБО КВАЗИПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

Ковалева В.А.

Все рассматриваемые группы являются конечными.

Пусть A — подгруппа группы G , $K \leq H \leq G$. Тогда мы говорим, что A покрывает пару (K, H) , если $AH = AK$; A изолирует пару (K, H) , если $A \cap H = A \cap K$.

Определение. Пусть A — подгруппа группы G . Тогда мы говорим, что A является слабо квазиперестановочной в G , если в группе G существуют такие подгруппы T и C , что $G = AT$, $T \cap A \leq C \leq A$ и C покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G .

Теорема 1. Пусть E — нормальная подгруппа группы G . Предположим, что все циклические подгруппы простого порядка и порядка 4 из E слабо квазиперестановочны в G . Тогда каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим.

Произведение всех нормальных подгрупп группы G , чьи нефратиньевы G -главные факторы являются циклическими, называется $\mathcal{U}\Phi$ -гиперцентром группы G [1] и обозначается $Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$.

Теорема 2. Пусть E — нормальная подгруппа группы G . Предположим, что для любой силовской подгруппы P из E каждая ее максимальная подгруппа либо каждая ее циклическая подгруппа простого порядка и циклическая подгруппа порядка 4 (если P — неабелева 2-группа) слабо квазиперестановочна в G . Тогда $E \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$.

Следствие 1. [2] Пусть G — группа. Если все максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из G дополняемы в G , то G сверхразрешима.

Подгруппа H группы G называется s -нормальной в G [3], если в G найдется такая нормальная подгруппа N , что $G = HN$ и $H \leq N \leq HG$.

Следствие 2. [3] Пусть G — группа. Если все подгруппы простого порядка и порядка 4 из G являются s -нормальными в G , то G сверхразрешима.

Следствие 3. [3] Пусть G — группа. Если все максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из G являются s -нормальными в G , то G сверхразрешима.

Подгруппа H группы G называется квазинормальной [4] или перестановочной [5] в G , если $HE = EH$ для всякой подгруппы E из G .

Следствие 4. [6] Пусть G — группа. Если все максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из G квазинормальны в G , то G сверхразрешима.

Если \mathcal{F} — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, то справедливы также следующие результаты.

Следствие 5. Пусть G — группа с такой нормальной подгруппой E , что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что для любой силовской подгруппы P из E каждая ее максимальная подгруппа либо каждая ее циклическая подгруппа простого порядка и циклическая подгруппа порядка 4 слабо квазиперестановочна в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

Подгруппа A группы G называется s -добавляемой в G [7], если в G найдется такая подгруппа T , что $TA = G$ и $T \cap A \leq A_G$.

Следствие 6. Пусть G — группа с такой нормальной подгруппой E , что $G/E \in \mathcal{F}$. Если все циклические подгруппы простого порядка и порядка 4 из E либо s -нормальны [8], либо s -добавляемы [9] в G , то $G \in \mathcal{F}$.

Следствие 7. Пусть G — группа с такой нормальной подгруппой E , что $G/E \in \mathcal{F}$. Если все максимальные подгруппы каждой силовской подгруппы из E либо s -нормальны [10], либо s -добавляемы [2] в G , то $G \in \mathcal{F}$.

Следствие 8. [8] Пусть G — группа. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 из $G^{\mathcal{F}}$ являются s -нормальными в G , то $G \in \mathcal{F}$.

Следствие 9. [11] Пусть G — группа с такой нормальной подгруппой E , что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что силовская 2-подгруппа из G является абелевой. Если все минимальные подгруппы из E квазинормальны в G , то $G \in \mathcal{F}$.

Литература

- [1] *Shemetkov L.A., Skiba A.N.* On the $\mathcal{X}\Phi$ -hypercentre of finite groups // J. Algebra. 2009. № 322. Pp. 2106–2117.
- [2] *Ballester-Bolinches A., Guo X.Y.* On complemented subgroups of finite groups // Arch. Math. 1999. № 72. Pp. 161–166.
- [3] *Wang Y.* c -normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. № 180. Pp. 954–965.
- [4] *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. № 5. Pp. 431–460.
- [5] *Stonehewer S.E.* Permutable subgroups in Infinite Groups // Math. Z. 1972. № 125. Pp. 1–16.
- [6] *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. № 35. Pp. 210–214.
- [7] *Wang Y.* Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c -Supplemented // J. Algebra. 2000. № 224. Pp. 464–78.
- [8] *Ballester-Bolinches A., Wang Y.* Finite groups with some c -normal minimal subgroups // J. Pure Appl. Algebra. 2000. № 153. Pp. 121–127.
- [9] *Ballester-Bolinches A., Wang Y., Guo X.Y.* c -supplemented subgroups of finite groups // Glasgow Math. J. 2000. № 42. Pp. 383–389.
- [10] *Wei H.* On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2001. № 29. Pp. 2193–2200.
- [11] *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M.C.* On minimal subgroups of finite groups // Acta Math. Hungar. 1996. № 73. Pp. 335–342.

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЧЕТЫРЕПРИМАРНЫХ ГРУПП ПО ГРАФУ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Кондратьев А.С., Храмцов И.В.¹

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G , т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G , в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если она определяется своим спектром с точностью до изоморфизма. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [1]) тесно связано направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

Наряду с вопросами распознаваемости конечных групп по графу простых чисел, возникает также интересная более общая задача: описать все конечные группы, графы простых чисел которых равны заданному графу.

Прежде всего вызывает интерес более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Это мотивировано следующим. Этот класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга — Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. [2]). Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна. Результаты о строении

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00342), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

конечных групп Фробениуса входят в фундамент теории групп.

Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [2] и первого автора [3]. Они составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие «малые» в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Например, все конечные простые группы исключительного лиева типа, кроме групп $E_7(q)$ при $q > 3$, а также простые группы из известного «Атласа конечных групп» [5], кроме группы A_{10} , имеют несвязный граф простых чисел.

В контексте этой задачи авторами исследуются конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет небольшое число вершин. Ранее авторами [4] были исследованы конечные группы, чей граф простых чисел несвязен и имеет не более трех вершин. Из этой работы легко извлекается, что конечная простая трипримарная группа с несвязным графом простых чисел является распознаваемой по графу простых чисел тогда и только тогда, когда она изоморфна $L_2(17)$.

В данной работе исследуются конечные четырехпримарные группы с несвязным графом простых чисел. В основном описаны главные факторы таких групп. В качестве следствия этого описания получается

Теорема. *Конечная четырехпримарная простая группа простых чисел распознаваема по графу простых тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих групп: A_8 , $L_3(4)$ или $L_2(q)$, где $|\pi(q^2 - 1)| = 3$, $q > 17$ и либо $q = 3^m$ и m — простое нечетное число, либо q — простое число и $q \not\equiv 1 \pmod{12}$ или $q \in \{97, 577\}$.*

Эта теорема значительно усиливает результат работы [6], где показано, что любая конечная четырехпримарная простая группа, кроме группы A_{10} , распознаваема по порядку и графу простых чисел.

Литература

- [1] Мазуров В.Д. Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36 (Математика и механика, вып. 7). С. 119–138.
- [2] Williams J.S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. Pp. 487–513.

- [3] *Кондратьев А.С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787-797.
- [4] *Кондратьев А.С., Храпцов И.В.* О конечных трипримарных группах // Труды Института математики и механики. 2010. Т. 16, № 3. С. 150-158.
- [5] *J.H. Conway [et. al.]* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [6] *Zhang L.C., Shi W.J.* OD-Characterization of simple K_4 -groups // Algebra Colloquium. 2009. Vol. 16, № 2. Pp. 275-282.

К ВОПРОСУ П. КАМЕРОНА О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНЫМ В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ

Коньгин А.В.¹

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [1] и [5, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X , $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на орбите $G_x(y)$ (т.е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т.е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [2–4]).

Можно показать, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ при условии $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G , то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X .

Ранее было доказано, что если цоколь группы G не является степенью исключительной группы лиева типа, изоморфной ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$, то для группы G выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № проект 10-01-00349-а, программой Отделения математических наук РАН, грантом УрО РАН для молодых ученых за 2012 год.

Теорема. Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X . Предположим, что цокелем группы G является исключительная группа лиева типа, изоморфная ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$. Кроме того, предположим, что для $x \in X$ и некоторого простого r выполняется $O_r(G_x) \neq 1$. Тогда для группы G выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

Литература

- [1] *Cameron P.J.* Suborbits in transitive permutation groups // *Combinatorics* / M. Hall, Jr. and J. H. van Lint, eds. Amsterdam: Math. Centrum. 1975. Pp. 419–450.
- [2] *Reitz H.L.* On primitive groups of odd order // *Amer. J. Math.* 1904. Vol. 26. Pp. 1–30.
- [3] *Weiss M.J.* On simply transitive groups // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1934. Vol. 40. Pp. 401–405.
- [4] *Wielandt H.* Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964.
- [5] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. Новосибирск: Ин-т матем. СО РАН, 2006.

ОБРАТИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В КОЛЬЦАХ ВЫЧЕТОВ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ

Кривова А.С.

В [1] была показана важность изучения обратимых элементов колец вычетов колец целых подполей круговых полей. Важнейшим классом таких полей являются квадратичные поля, для которых в [2] найдены экспоненты мультипликативных групп колец вычетов колец целых.

В данной работе продолжено изучение обратимости элементов колец вычетов по простому натуральному модулю колец целых квадратичных полей.

Теорема. Пусть p, q — простые числа, I — кольцо целых квадратичного поля $Q(\sqrt{p})$, $A = I/q^\alpha I$ — кольцо вычетов кольца I по модулю q^α и x — число обратимых элементов в A . Тогда

- (1) если $p = q$, то $x = q^{2\alpha-1}(q-1)$;
- (2) если $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, то $x = q^{2\alpha-2}(q-1)^2$;
- (3) если $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, то $x = q^{2\alpha-2}(q^2-1)$.

Также изучается строение группы обратимых элементов в кольцах вычетов колец целых квадратичных полей для q^α и простых p и q . Доказана цикличность данных групп при $p = q$ и $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$. При $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ ситуация более сложная, данная группа раскладывается в прямое произведение трех циклических групп.

Литература

- [1] Алеев Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды. 2000. Т. 3, № 1. С. 3–37.
- [2] Алеев Р.Ж. Числа Хигмана конечных групп // Матем. труды. 2000. Т. 3, № 2. С. 3–28.

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ И ЗАМКНУТЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПОЛУКОЛЕЦ $C_P(X, \mathbf{I})$

Лубягина Е.Н.

Пусть $\mathbf{I} = [0, 1]$ — единичный числовой отрезок, рассматриваемый с операциями сложения \max (\vee) и обычного умножения \cdot , в стандартной топологии. Через $C(X, \mathbf{I})$ обозначается полукольцо всех непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце \mathbf{I} , с поточечно определенными операциями [1].

Для произвольного топологического пространства X существует тихоновское (то есть вполне регулярное хаусдорфово) пространство τX и его компактификация Стоуна-Чеха $\beta(\tau X) = Z$ [2] такие, что $C(X, \mathbf{I}) \cong C(\tau X, \mathbf{I}) \cong C(Z, \mathbf{I})$.

Будем считать далее X тихоновским пространством. Заметим, что тихоновские пространства X не обязаны определяться полукольцами $C(X, \mathbf{I})$, но компакты X определяются даже решетками идеалов и конгруэнций полуколец $C(X, \mathbf{I})$ [3].

Для изучения свойств полуколец $C(X, \mathbf{I})$ целесообразно ввести на них топологию. Полукольцо $C(X, \mathbf{I})$ будем понимать как подпространство декартова произведения \mathbf{I}^X с топологией поточечной сходимости. Получаем топологическое полукольцо $C_p(X, \mathbf{I})$. Отметим, что топологические полукольца $C_p(X, S)$ всех непрерывных функций со значениями в некоторых топологических полукольцах S рассматривались в [4].

Теорема 1. *Любое тихоновское пространство X определяется топологическим полукольцом $C_p(X, \mathbf{I})$ однозначно с точностью до гооморфизма.*

Следующая два утверждения, опирающиеся на определение тихоновского пространства, позволяют строить функции из рассматриваемого нами полукольца $C(X, \mathbf{I})$ по заданным параметрам и получать полезную комбинацию окрестностей пространства X .

Утверждение 1. *Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$. Тогда существует такая функция $e \in C(X, \mathbf{I})$, что $e(x_1) = 1$ и $e(x_i) = 0, i = 2, \dots, k$.*

Утверждение 2. Пусть U — окрестность точки $x \in X$. Тогда существуют такие окрестности $V \subseteq W$ точки x и функция $f \in C(X, \mathbf{I})$, что $\overline{W} \subseteq U$, $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$.

Идеал J полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$ называется *замкнутым идеалом*, если J есть замкнутое множество в $C_p(X, \mathbf{I})$. Легко показать, что в топологическом полукольце $C_p(X, \mathbf{I})$ замкнутые идеалы *выпуклые*, то есть со своими любыми двумя сравнимыми элементами содержат и элементы, лежащие между ними.

Для любого непустого подмножества J множества $C(X, \mathbf{I})$ введем обозначение $r_J = \sup J \in \mathbf{I}^X$, и назовем функции такого вида *sc-функциями*. Произвольной функции $\varphi \in \mathbf{I}^X$ соответствует замкнутый идеал $J(\varphi) = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f \leq \varphi\}$ в $C_p(X, \mathbf{I})$.

Предложение 1. Для произвольного идеала J полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$, любых функций $\varphi, \psi \in \mathbf{I}^X$ и $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ выполняются следующие свойства:

- 1) $r_{J(\varphi)} \leq \varphi$, $J(r_J) = \overline{J}$, $r_{\overline{J}} = r_J$,
- 2) $r_J \leq r_I \Leftrightarrow J \subseteq I$; если $\overline{J} \subseteq \overline{I}$, то $r_J < r_I$;
- 3) если $\varphi \leq \psi$, то $J(\varphi) \subseteq J(\psi)$; $r_{J(\varphi)} = r_{J(\psi)} \Leftrightarrow J(\varphi) = J(\psi)$;
- 4) $J(f) \vee J(g) = J(f \vee g)$.

Теорема 2. Замкнутые идеалы в полукольце $C_p(X, \mathbf{I})$ в точности совпадают с идеалами $J(\varphi)$ по различным sc-функциям $\varphi \in \mathbf{I}^X$.

В частности, в топологическом полукольце \mathbf{I} идеалы — это в точности множества $[0, r)$ и $[0, r]$, а замкнутые идеалы — множества $[0, r]$ по всем значениям $r \in \mathbf{I}$.

В полукольцах $C(X, \mathbf{I})$ все классы по любой конгруэнции выпуклые. Конгруэнция ρ называется *замкнутой*, если множество $\{(f, g) : f \rho g\}$ замкнуто в тихоновском произведении $X \times X$. Критерием замкнутости конгруэнции будет

Предложение 2. Конгруэнция ρ топологического полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$ замкнута тогда и только тогда, когда множество $[f]_\rho$ замкнуто в $C_p(X, \mathbf{I})$ для любой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$.

Любой функции $\varphi \in \mathbf{I}^X$ соответствует следующая замкнутая конгруэнция $\rho(\varphi)$ на $C_p(X, \mathbf{I})$: для любых функций $f, g \in C_p(X, \mathbf{I})$ положим $f \rho(\varphi) g$ тогда и только тогда, когда $g(x) = h(x)$ для всех точек $x \in X$, где $(g \vee h)(x) > \varphi(x)$.

Теорема 3. Замкнутые конгруэнции полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$ совпадают с конгруэнциями $\rho(\varphi)$ по всем sc-функциям $\varphi \in \mathbf{I}^X$.

В случае топологического полукольца \mathbf{I} получаем ровно четыре типа конгруэнций, определяемых следующими разбиениями отрезка $[0, 1]$ на классы:

- 1) $\sigma(0, r) : (0, r), \{0\}, \{\{x\} : x \geq r\}$ для $0 < r \leq 1$;
- 2) $\sigma(0, r] : (0, r], \{0\}, \{\{x\} : x > r\}$ для $0 < r \leq 1$;
- 3) $\sigma[0, r) : [0, r), \{\{x\} : x \geq r\}$ для $0 < r \leq 1$;
- 4) $\sigma[0, r] : [0, r], \{\{x\} : x > r\}$ для $0 \leq r \leq 1$.

Замкнутыми будут в точности конгруэнции последнего типа.

Дадим далее полукольцевые характеристики некоторых топологических свойств пространств X (см. также [1]).

Предложение 3. Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X есть F -пространство;
- 2) все главные идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$ замкнуты в $C_p(X, \mathbf{I})$.

Предложение 4. Для всякого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:

- 1) X — дискретное пространство;
- 2) все sc -функции на X непрерывны;
- 3) все замкнутые идеалы топологического полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$ главные.

Литература

- [1] Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. Т. 4, № 2. С. 493–510.
- [2] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. Van Nostrand, Princeton, 1976.
- [3] Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н. Определяемость компактов решетками идеалов и конгруэнций полуколец непрерывных $[0, 1]$ -значных функций // *Известия вузов. Математика*. 2012. № 1 (в печати).
- [4] Смирнова (Подлевских) М.Н. Замкнутые идеалы в полукольцах непрерывных функций с топологией поточечной сходимости // *Вестник Вятского гос. пед. ун-та. Математика, информатика, физика*. 1996. Вып. 1. С. 16–18.

О НЕИДЕМПОТЕНТНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЬЦАХ С НЕКОММУТАТИВНЫМ СЛОЖЕНИЕМ

Лубягина И.В.

Данная работа посвящена изучению строения циклических полуколец с неидемпотентным некоммутативным сложением. Строение бесконечных циклических полуколец с коммутативным сложением было получено Е. М. Вечтомовым. Изучение конечных циклических полуколец с коммутативным сложением ведется А. С. Бестужевым. О строении конечных циклических полуколец с идемпотентным некоммутативным сложением автором доложено на конференции в КФУ. Теперь рассмотрим конечные циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением и коротким хвостом.

Пусть далее $S = (a)$ – неидемпотентное циклическое полукольцо типа (k, n) с некоммутативным сложением и условием $k \leq n$. Цикл C полукольца S изоморфен прямому произведению подполупол $C + e$ и $e + C$ порядков m и h соответственно. Тогда $n = m \cdot h$, где m и h – взаимно простые натуральные числа.

Рассмотрим разложения натурального числа z , где $0 \leq z \leq k + n - 1$:

$$z = hi_1 + mj_1, \quad \text{где } 1 \leq mj_1 \leq n, \quad (1)$$

$$z = hi_2 + mj_2, \quad \text{где } 1 \leq hi_2 \leq n \quad (2)$$

для $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$.

Следующая теорема дает необходимые условия для сложения на полукольце S .

Теорема. *Сложение в полукольце $S = (a)$ обладает следующими свойствами:*

$$1) \quad 1 + a^z = \begin{cases} a^{mj_1+n}, & \text{если } mj_1 - hi_1 < k; \\ a^{mj_1} \text{ или } a^{mj_1+n}, & \text{если } mj_1 - hi_1 \geq k; \end{cases}$$

где z удовлетворяет (1);

$$2) \quad a^z + 1 = \begin{cases} a^{hi_2+n}, & \text{если } hi_2 - mj_2 < k; \\ a^{hi_2} \text{ или } a^{hi_2+n}, & \text{если } hi_2 - mj_2 \geq k; \end{cases}$$

где z удовлетворяет (2).

Следующие четыре предложения дают некоторые связи для аддитивной структуры полукольца $S = (a)$.

Рассмотрим целые числа hi_1, mj_1, hi_2, mj_2 , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 1 \leq hi_1 < k; \\ 1 \leq mj_2 < k; \\ 1 \leq hi_1 + mj_1 < k; \\ 1 \leq hi_2 + mj_2 < k; \\ hi_2 + mj_1 < k. \end{cases} \quad (3)$$

Предложение 1. Пусть в $S = (a)$ выполняются равенства

$$1 + a^{hi_1+mj_1} = a^{mj_1} \quad \text{и} \quad a^{hi_2+mj_2} + 1 = a^{hi_2+n},$$

причем имеет место система (3). Тогда:

(1) если $hi_2 + mj_2 < mj_1$, то

$$1 + a^{-hi_2+(mj_1-mj_2)} = a^{mj_1-mj_2+n};$$

(2) если $hi_2 + mj_2 > mj_1$, то

$$a^{hi_2+(mj_2-mj_1)} + 1 = a^{hi_2+n}.$$

Предложение 2. Пусть в $S = (a)$ выполняются равенства

$$1 + a^{hi_1+mj_1} = a^{mj_1+n} \quad \text{и} \quad a^{hi_2+mj_2} + 1 = a^{hi_2},$$

причем имеет место система (3). Тогда:

(1) если $hi_2 < hi_1 + mj_1$, то

$$1 + a^{(hi_1-hi_2)+mj_1} = a^{mj_1+n};$$

(2) если $hi_2 > hi_1 + mj_1$, то

$$a^{(hi_2-hi_1)-mj_1} + 1 = a^{hi_2-hi_1+n}.$$

Пусть теперь целые числа hi_1, mj_1, hi_2, mj_2 удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} 1 \leq mj_1 \leq n; \\ 1 \leq mj_2 \leq n; \\ 1 \leq hi_1 + mj_1 < k; \\ 1 \leq hi_2 + mj_2 < k. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда верны утверждения:

Предложение 3. Пусть в $S = (a)$ для некоторых hi_1, mj_1, hi_2, mj_2 таких, что $hi_1 + mj_1 < hi_2 + mj_2$, имеет место система (4) и выполняется $1 + a^{hi_1 + mj_1} = a^{mj_1 + n}$. Тогда

1) если $mj_2 - mj_1 \geq 0$, $1 + a^{(hi_2 - hi_1) + (mj_2 - mj_1)} = a^{mj_2 - mj_1}$, то

$$1 + a^{hi_1 + mj_2} = a^{mj_2 + n};$$

2) если $mj_2 - mj_1 < 0$, $1 + a^{(hi_2 - hi_1) + (mj_2 - mj_1)} = a^{mj_2 - mj_1 + n}$, то

$$1 + a^{hi_1 + mj_2 + n} = a^{mj_2 + n}.$$

Предложение 4. Пусть в $S = (a)$ для некоторых hi_1, mj_1, hi_2, mj_2 таких, что $hi_1 + mj_1 > hi_2 + mj_2$, имеет место система (4) и выполняется $1 + a^{hi_1 + mj_1} = a^{mj_1 + n}$.

Тогда:

1) если $0 \leq hi_1 - hi_2 \leq n$, $a^{(hi_1 - hi_2) + (mj_1 - mj_2)} + 1 = a^{hi_1 - hi_2}$, то

$$1 + a^{hi_1 + mj_2} = a^{mj_2 + n};$$

2) если $hi_1 - hi_2 > n$, $a^{(hi_1 - hi_2) + (mj_1 - mj_2)} + 1 = a^{hi_1 - hi_2 - n}$, то

$$1 + a^{hi_1 + mj_2 - n} = a^{mj_2 + n};$$

3) если $-n \leq hi_1 - hi_2 < 0$, $a^{(hi_1 - hi_2) + (mj_1 - mj_2)} + 1 = a^{hi_1 - hi_2 + n}$, то

$$1 + a^{hi_1 + mj_2 + n} = a^{mj_2 + n};$$

4) если $hi_1 - hi_2 < -n$, $a^{(hi_1 - hi_2) + (mj_1 - mj_2)} + 1 = a^{hi_1 - hi_2 + 2n}$, то

$$1 + a^{hi_1 + mj_2 + 2n} = a^{mj_2 + n}.$$

ДВА НАИБОЛЬШИХ ПОРЯДКА ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

Лыткин Д.В.¹

Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p . Обозначим p через $ch(G)$. Предположим, что G задана как подгруппа в $GL_n(q)$, порожденная некоторым множеством матриц X . Одной из задач вычислительной теории групп является нахождение $ch(G)$ по X за полиномиальное время.

В [1] разработан алгоритм Монте-Карло для решения этой задачи, основанный на следующем свойстве простых групп лиева типа над полями нечётных характеристик: если G и H — простые группы лиева типа над полями нечётных характеристик такие, что в множествах порядков элементов групп G и H совпадают три самых больших числа, то $ch(G) = ch(H)$ (см. [1, теорема 1.2]). Также в этой работе высказано предположение о том, что данным свойством обладают все пары простых групп лиева типа, кроме конечного числа явно указанных пар (см. [1, гипотеза 5.9]), но авторы исключают группы над полями характеристики 2 из рассмотрения ввиду сложности подсчёта максимальных порядков элементов симплектических и ортогональных групп над полями характеристики 2.

Обозначим через $m_1(G)$ и $m_2(G)$ два наибольших порядка элементов группы G , $m_1(G) > m_2(G)$. В [2] были найдены явные формулы для подсчёта $m_1(G)$ в случае, когда G — простая симплектическая группа над полем чётного составного порядка. В настоящей работе удалось найти соответствующие формулы для числа $m_2(G)$.

Теорема. Пусть $G = \text{Sp}_{2n}(q)$, где $q = 2^k > 2$. Тогда

- (1) если $n = 2$, то $m_1(G) = q^2 + 1$ и $m_2(G) = q^2 - 1$;
- (2) если $n = 4$, то $m_1(G) = [q + 1, q^3 - 1]$ и $m_2(G) = q^4 + 1$;

¹Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (НШ-3669.2010.1) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726).

- (3) если $n > 4$ чётно и t — наибольшее натуральное число такое, что $2^t \leq n/3$, то

$$m_1(G) = [q + 1, q^2 + 1, q^4 + 1, \dots, q^{2^t} + 1, q^{n-2^{t+1}+1} - 1],$$

$$m_2(G) = [q + 1, q^2 + 1, q^4 + 1, \dots, q^{2^{t+1}} + 1, q^{n-2^{t+2}+1} - 1]$$

при $5 \cdot 2^t \leq n$ и

$$m_2(G) = [q + 1, q^2 + 1, q^4 + 1, \dots, q^{2^{t-1}} + 1, q^{n-2^t+1} - 1]$$

иначе;

- (4) если $n > 1$ нечётно, то

$$m_1(G) = [q^{n_1} + 1, q^{n_2} + 1, \dots, q^{n_t} + 1],$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_t$ — двоичное разложение числа n , и

$$m_2(G) = [q^{n'_1} + 1, q^{n'_2} + 1, \dots, q^{n'_s} + 1, q^{3 \cdot 2^r} + 1],$$

где 2^r — второй после наибольшего член двоичного разложения числа n , а $n'_1 + n'_2 + \dots + n'_s$ — двоичное разложение числа $n - 3 \cdot 2^r$.

На основе полученных формул было доказано, что симплектические группы над полями чётного составного порядка можно отличить от групп лиева типа над полями нечётных характеристик по двум наибольшим порядкам элементов.

Предложение. Пусть $G = \text{Sp}_{2n}(q)$, где $q = 2^k > 2$ и H — простая группа лиева типа такая, что $m_1(G) = m_1(H)$ и $m_2(G) = m_2(H)$. Тогда $ch(H) = 2$.

Замечание. Хорошо известно, что некоторые простые группы лиева типа над полями разных характеристик могут быть изоморфны между собой. Такие изоморфизмы исчерпываются следующим списком: $L_2(4) \simeq L_2(5)$, $L_3(2) \simeq L_2(7)$, $L_2(9) \simeq S_4(2)'$, $L_2(8) \simeq {}^2G_2(3)'$, $U_3(3) \simeq G_2(2)'$ и $U_4(2) \simeq S_4(3)$, где через G' обозначается коммутант группы G . Несложно проверить, что порядки элементов в указанных группах не превосходят 12, поэтому группа H в предложении отлична от всех этих групп и число $ch(H)$ определено корректно.

Литература

- [1] *Kantor W.M., Seress A.* Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups // *J. Algebra*. 2009. Vol. 322, № 3. Pp. 802–832.
- [2] *Лыткин Д.В.* О максимальных порядках элементов простых симплектических и ортогональных групп в характеристике 2 // в сб. «Современные проблемы математики», тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 217–218. — Екатеринбург, 2011.

О ПИРСОВСКИХ ЦЕПЯХ ПОЛУМОДУЛЕЙ

Марков Р.В.

В [1, 2] введено понятие пирсовской цепи идеалов кольца (см. также [3]) и показаны применения этой конструкции. Нашей задачей является построение теории пирсовских цепей для полуколец и полумодулей. С необходимыми определениями, связанными с полукольцами и пучковыми представлениями, можно познакомиться в [4, 5].

Множество BS всех дополняемых центральных идемпотентов полукольца S образует булево кольцо [5]. Множество A_S — правый полумодуль над полукольцом S . Для любого максимального идеала M из BS определяется пирсовский слой A_S/ρ_M полумодуля A_S , где конгруэнция ρ_M задается следующим образом:

$$a \sim b(\rho_M) \iff ae^\perp = be^\perp$$

для дополнения e^\perp к некоторому $e \in M$ и некоторых $a, b \in A_S$.

Пусть A_S — правый полумодуль, ρ_0 — нулевая конгруэнция на A_S . Если α — непредельный ординал, то ρ_α — такая конгруэнция на A_S , что A_S/ρ_α — некоторый пирсовский слой полумодуля $A_S/\rho_{\alpha-1}$. Если α — предельный ординал, то $\rho_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} \rho_\beta$ — точная верхняя грань ранее определенных конгруэнций ρ_β . Существует такой ординал γ , что $\rho_\gamma = \rho_{\gamma+1}$. Линейно упорядоченное по включению множество $\{\rho_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$ назовем *пирсовской цепью конгруэнций* правого полумодуля A_S .

В терминах пирсовских слоев и пирсовских цепей получены характеристики некоторых классов полумодулей. Как иллюстрацию укажем один из результатов.

Известно, что A_S — правый полумодуль Безу в точности тогда, когда для любых $m, n \in A_S$ существуют такие $a, b, c, d \in S$, что

$$m = tac + nbc, n = nbd + mad.$$

Теорема. *Для полумодуля A_S равносильны условия:*

- 1) A_S — полумодуль Безу;
- 2) все пирсовские слои полумодуля A_S являются полумодулями Безу.

Литература

- [1] *Burgess W. D., Stephenson W.* An analogue of the Pearce sheaf for noncommutative rings // *Comm. Algebra.* 1978. Vol. 6, № 9. Pp. 863–886.
- [2] *Burgess W. D., Stephenson W.* Rings all of whose Pearce stalks are local // *Canad. Math. Bull.* 1979. Vol. 22, № 2. Pp. 159–164.
- [3] *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические кольца и модули. — М.: МЦНМО, 2009.
- [4] *Golan J. S.* Semirings and their applications. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [5] *Черных В. В.* Функциональные представления полуколец. — Киров: ВятГГУ, 2010.

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ХОЛЛОВЫ

Маслова Н.В., Ревин Д.О.¹

Термин «группа» употребляется в значении «конечная группа».

Подгруппа называется *холловой*, если ее порядок и индекс взаимно просты. Будем говорить, что G — группа с *холловыми максимальными подгруппами*, если каждая максимальная подгруппа группы G холлова.

Подгруппа H группы G называется *дополняемой* в группе G , если в G существует дополнение к ней, т.е. подгруппа K такая, что $H \cap K = 1$ и $HK = G$. Будем говорить, что G — группа с *дополняемыми максимальными подгруппами*, если каждая максимальная подгруппа группы G дополняема в G .

В качестве объекта исследования группы с холловыми максимальными подгруппами впервые возникли в работах В.М. Левчука и А.Г. Лихарева [1] и В.Н. Тютянова [2], где было установлено, что простая группа с дополняемыми максимальными подгруппами изоморфна одной из групп $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$, $PSL_2(11)$ или $PSL_5(2)$. Во всех этих группах каждая максимальная подгруппа является холловой. В 2008 г. Т.В. Тихоненко [3] показала, что неабелевы простые группы с холловыми максимальными подгруппами исчерпываются с точностью до изоморфизма группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$. В 2008 г. В.С. Монахов [4] описал нормальное строение конечных разрешимых групп с холловыми максимальными подгруппами. В этой же работе была сформулирована проблема: *описать неабелевы композиционные факторы конечной неразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы холловы*, которая была позднее записана в «Коуровскую тетрадь» [5] под номером 17.92. Проблема Монахова была решена первым автором [6]. Доказано, что неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы с холловыми максимальными подгруппами исчерпываются с точностью до изоморфизма группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$.

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 11-01-00456, № 10-01-00391, № 10-01-90007 и № 10-01-00324, программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН и УрО РАН с НАН Беларуси, грантом УрО РАН для молодых ученых за 2012 год.

Следующий естественный шаг — попытаться получить описание всех групп с холловыми максимальными подгруппами и понять, как в общем случае связана холловость максимальных подгрупп с их дополняемостью. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *В конечной группе G все максимальные подгруппы холловы тогда и только тогда, когда G обладает нормальным рядом*

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n = 1$$

таким, что:

- (1) при $i > 1$ группа G_{i-1}/G_i элементарная абелева, изоморфная некоторой силовской подгруппе группы G , и действие сопряжениями группы G/G_{i-1} на G_{i-1}/G_i как на векторном пространстве неприводимо (в частности, все подгруппы G_i , $i = 0, 1, \dots, n$, холловы);
- (2) для факторгруппы $\bar{G} = G/G_1$ справедливо одно из следующих утверждений:
 - (а) \bar{G} имеет простой порядок;
 - (б) $\bar{G} \simeq PSL_5(2)$;
 - (в) $\bar{G} \simeq PSL_2(11)$;
 - (г) $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \simeq PSL_2(7)$ и $\Phi(\bar{G}) = O_3(\bar{G})$.

Следствие. *Пусть G — конечная группа с холловыми максимальными подгруппами. Тогда разрешимый радикал группы G обладает силовской башней, а факторгруппа по нему либо тривиальна, либо проста. В частности, G имеет не более одного неабелева композиционного фактора.*

В [4] показано, что в конечной разрешимой группе все максимальные подгруппы холловы тогда и только тогда, когда все максимальные подгруппы дополняемы. С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, все максимальные подгруппы которой холловы. Тогда все максимальные подгруппы группы G дополняемы.*

Обратное утверждение неверно: в группе $G = C_3 \times PSL_2(7)$ все максимальные подгруппы дополняемы, однако максимальная подгруппа, изоморфная $PSL_2(7)$, не является холловой подгруппой.

Литература

- [1] *Левчук В. М., Лихарев А. Г.* Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 798–810.
- [2] *Тютянов В. Н.* Конечные группы с дополняемыми подгруппами // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. Т. 6. С. 178–183.
- [3] *Тихоненко Т. В.* Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2008. Т. 50, № 5. С. 198–206.
- [4] *Монахов В. С.* Конечные π -разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Математические заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
- [5] *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 17-е изд. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.
- [6] *Маслова Н. В.* Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы / в сб. «Современные проблемы математики», тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 221–223. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ЛОКАЛЬНО GQ(4,6)-ГРАФАХ

Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М.¹

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup \Gamma(a)$. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$.

Пусть \mathcal{F} — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально \mathcal{F} -графом*, если $[a]$ лежит в \mathcal{F} для любой вершины a графа Γ . Если при этом класс \mathcal{F} состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ , то граф Γ назовем *локально Δ -графом*.

Геометрия G ранга 2 — это система инцидентности с множеством точек P и множеством блоков \mathcal{B} , не имеющая кратных блоков. При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек и инцидентность становится обычным включением. Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Точечный граф* геометрии G — это граф на множестве точек P , в котором две точки смежны, если они различны и коллинеарны. Аналогично определяется блок граф.

Для $a \in P$ *вычетом G_a* называется геометрия с множеством точек P_a , коллинеарных с a , и множеством блоков $\mathcal{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathcal{B}\}$. Если $a \in P, B \in \mathcal{B}$ и $a \notin B$, то пара (a, B) называется *антифлагом*. Если любые два блока из \mathcal{B} пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков называется *множеством прямых \mathcal{L}* , а геометрия (P, \mathcal{L}) называется *частичным пространством прямых*. Частичное пространство прямых имеет порядок (s, t) , если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку и каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой. Частичное пространство прямых порядка (s, t) называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$, если для любого антифлага (a, L) найдется единственная

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УРО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

прямая M , содержащая a и пересекающая L . Точечный граф геометрии $GQ(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1$, $\mu = t + 1$.

Точка x обобщенного четырехугольника $GQ(s, t)$ называется регулярной, если $|(\{x, y\}^\perp)^\perp| = t + 1$ для любой точки $y \notin x^\perp$. Для регулярной точки x обобщенного четырехугольника $\mathcal{S} = (P, \mathcal{L})$ порядка (s, s) обобщенный четырехугольник $P(\mathcal{S}, x)$ порядка $(s - 1, s + 1)$ имеет множество точек $P' = P - x^\perp$ и множество прямых \mathcal{L}' , состоящее из прямых \mathcal{L} , не содержащих x , и гиперболических прямых $(\{x, y\}^\perp)^\perp$, $y \notin x^\perp$.

Задача классификации локально $GQ(s, t)$ -графов является классической и решена для малых s . Например, в [1] завершена классификация локально $GQ(3, t)$ -графов, в [2], [3] классифицированы вполне регулярные локально $GQ(4, t)$ -графы для $t = 2, 4$ соответственно. В данной работе изучаются вполне регулярные локально $GQ(4, 6)$ -графы.

Теорема. Пусть Γ является связным вполне регулярным локально $GQ(4, 6)$ -графом на v вершинах. Тогда v делится на 3 и выполняется одно из утверждений:

(1) диаметр Γ равен 2, Γ имеет параметры $(726, 125, 28, 20)$ и собственные значения 15 и -7 кратностей 225 и 500;

(2) Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ на 378 вершинах и спектром $125^1, 1^{125}, 5^{42}, -20^{168}$;

(3) Γ — граф диаметра 3 с $\mu \in \{20, 24, 25, 30, 32, 40\}$.

Следствие 1. Пусть Γ является связным вполне регулярным локально $GQ(4, 6)$ -графом, в котором окрестность некоторой вершины является известным обобщенным четырехугольником $P(W(5), x)$. Тогда Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$.

Следствие 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом, в котором окрестность каждой вершины является обобщенным четырехугольником $GQ(4, 6)$. Тогда либо диаметр Γ равен 2 и Γ имеет параметры $(726, 125, 28, 20)$, либо Γ — граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$.

Подмножество точек Λ обобщенного четырехугольника называется *гиперовалом*, если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам. То есть гиперовал в $GQ(s, t)$ — это регулярный подграф без треугольников степени $t + 1$, имеющий четное число вершин. Хорошо известно, что μ -подграфы в локально $GQ(s, t)$ -графах являются гиперовалами. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ , и положим $x_i(\Delta) = |X_i(\Delta)|$.

Лемма. Пусть обобщенный четырехугольник $P(W(5), x)$ порядка $(4, 6)$ содержит связный гиперовал Δ , $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $|\Delta| = 20$, $x_4 = 105$;
- (2) $|\Delta| = 24$, $x_0 = 2$, $x_4 = 48$, $x_6 = 48$, $x_8 = 3$ и X_0 является ребром;
- (3) $|\Delta| = 32$, $x_0 = 3$, $x_4 = 9$, $x_6 = 30$, $x_8 = 30$, $x_{10} = 18$, $x_{12} = 3$ и X_0 является кокликкой;
- (4) $|\Delta| = 36$, $x_0 = 2$, $x_2 = 4$, $x_4 = 1$, $x_6 = 10$, $x_8 = 30$, $x_{10} = 32$, $x_{12} = 8$, $x_{14} = 2$ и X_0 является кокликкой;
- (5) $|\Delta| = 40$, $x_0 = 5$, $x_8 = 10$, $x_{10} = 40$, $x_{12} = 30$ и X_0 является кокликкой;
- (6) $|\Delta| = 44$, $x_0 = 3$, $x_8 = 1$, $x_{10} = 18$, $x_{12} = 45$, $x_{14} = 14$ и X_0 является кокликкой;
- (7) $|\Delta| = 48$ (две орбиты), $x_0 = 1$, $x_{12} = 28$, $x_{14} = 48$.

Доказательство. Компьютерные вычисления в GAP.

Литература

- [1] Мазнев А.А. Локально $GQ(3,5)$ -графы и геометрии с короткими прямыми // Дискр. математика. 1998. Т. 10, № 2. С. 72-86.
- [2] Мазнев А.А., Падучих Д.В. Расширения $GQ(4, 2)$, вполне регулярный случай // Дискретная математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 91-109.
- [3] Мазнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально $GQ(4, 4)$ -графах // Доклады академии наук. 2010. Т. 434, № 5. С. 583-586.

**ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО
РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ
ПЕРЕСЕЧЕНИЙ** {35, 32, 8; 1, 2, 28}

Махнев А.А., Циовкина Л.Ю.¹

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ , число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через $\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_t}$, где $i_j \leq d$ для всех $j = 1, \dots, t$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ в Γ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси, грантом УрО РАН для молодых ученых за 2012 год.

Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются *числами пересечения* графа Γ . Для произвольного автоморфизма g графа Γ через $\alpha_j(g)$ обозначим число вершин x таких, что $d(x, x^g) = j$.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Предложение. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 1000$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 1$, то верно одно из утверждений:

(1) Γ — примитивный граф с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;

(2) Γ — антиподальный граф с $\mu = 2$ и массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{3, 4, \dots, 21\} \setminus \{10, 16\}$ и $v = 2r(r + 1)$;

(3) Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$.

Граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ имеет $v = 1 + 35 + 560 + 160 = 756$ вершин и спектр $35^1, 7^{270}, -1^{245}, -7^{240}$, причем Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(756, 160, 40, 32)$ и спектром $160^1, 16^{245}, -8^{510}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняются следующие утверждения:

- (1) Ω — пустой граф и либо
- (i) $p = 7$, $\alpha_3(g) = 168s$, $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 42$ и $\alpha_2(g) = 798 - 98l - 210s$, либо
 - (ii) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 72s$, $\alpha_1(g) = 42l + 18s$ и $\alpha_2(g) = 756 - 42l - 90s$, либо
 - (iii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 48s$, $\alpha_1(g) = 28l + 12s$ и $\alpha_2(g) = 756 - 28l - 60s$;
- (2) Ω состоит из вершин, попарно находящийся на расстоянии 3 в Γ и либо
- (i) $p = 5$, $|\Omega| = 1$, $\alpha_3(g) = 120s + 40$ и $\alpha_1(g) = 70l + 30s + 5$, либо
 - (ii) $p = 7$, $|\Omega| = 7r$, $\alpha_3(g) = 168s + 112/r$ и $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 49r$, $s \leq 2/r$, $r \in \{1, 2\}$ или $|\Omega| = 21$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 98l + 49$, $l \leq 6$;
- (3) $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $\alpha_3(g) = 48l - 16t$, $\alpha_1(g) = 28s + 12l - 14t$ и либо
- (i) для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ не пересекает Ω и $|\Omega| \leq 36$, либо
 - (ii) Ω содержит вершину степени 1 и $|\Omega| \leq 50$, либо
 - (iii) степень любой вершины в Ω не меньше 3 и не больше 19, а $|\Omega| \leq 82$.

Следствие. Граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ не является реберно симметричным.

Литература

- [1] Буриченко В.П., Махнев А.А. О вполне регулярных локально циклических графах // в сб. «Современные проблемы математики», тезисы 42-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 181-183.
- [2] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
- [3] Cameron P.J. Permutation Groups // London Math. Soc. Student Texts. Vol. 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

ТОЧНЫЕ ГРАФЫ ДЕЗА БЕЗ 3-ЛАП

Митянина А.В.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны. Граф $K_{1,3}$ называется *3-лапой*.

Определение 1. Граф называется *графом Деца с параметрами* (v, k, b, a) , где $v > k > b > a$, если он является регулярным на v вершинах степени k , в котором любые две различные вершины имеют либо b , либо a общих соседей.

Определение 2. Граф является *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ) , если он является регулярным степени k , и для любых различных вершин u и v имеем $|[u] \cap [w]| = \lambda$, если $u \sim w$, и $|[u] \cap [w]| = \mu$ в противном случае.

Определение 3. *Точным графом Деца* называется граф Деца, не являющийся сильно регулярным и имеющий диаметр 2.

В статье [1] приводится полный список графов Деца с числом вершин, не превышающим 13, а также дается несколько способов построения графов Деца из разностных множеств, композиций и произведений графов и из сильно регулярных графов.

В статье [2] авторы находят все графы Деца на 14, 15 и 16 вершинах и описывают конструкции для построения каждого из графов.

В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Если граф Γ является точным графом Деца с параметрами (v, k, b, a) и удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) Γ не содержит 3-лап;
- 2) Γ содержит 3-кликку;
- 3) Γ является объединением окрестностей некоторых двух несмежных вершин,

тогда он имеет параметры $(9, 4, 2, 1)$ или $(12, 6, 3, 2)$.

В доказательстве теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1. *Если граф удовлетворяет условию теоремы, то $k \in \{2b, 2b + 1, 2b + 2\}$.*

Лемма 2. *Если граф удовлетворяет условию теоремы, то он не содержит 4-клик.*

В ходе доказательства теоремы строятся возможные конфигурации графа Γ в зависимости от расположения вершин из некоторой 3-кликки в замкнутых окрестностях вершин A и B , где $\Gamma = A^\perp \cup B^\perp$.

Литература

- [1] *Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D., Hemmeter J.* Deza Graphs: A Generalization of Strongly Regular Graphs // J. Combin. Designs. 1999. Vol. 7. Pp. 395-405.
- [2] *Горяинов С.В., Шалагинов Л.В.* О графах Деза на 14, 15 и 16 вершинах // в сб. «Современные проблемы математики», тезисы 42-й Всероссийской молодежной школа-конференции. С. 56–59. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.

ПОЛНОСТЬЮ РЕГУЛЯРНЫЕ КОДЫ В ГРАФАХ ДЖОНСОНА И БЛОК-СХЕМЫ

Могильных И.Ю.¹

Рассмотрим регулярный граф G . Для всякого кода (т.е. подмножества вершин) C в графе G определим дистанционное разбиение множества вершин V этого графа относительно C : $V = \bigcup_{i=0, \dots, \rho} C_i$, где $\rho := \max\{d(x, C) : x \in C\}$ называется *радиусом покрытия* кода C . Код C в G называется *полностью регулярным*, если любая вершина из слоя C_j имеет γ_j , α_j и β_j соседей соответственно из слоев C_{j-1} , C_j и C_{j+1} . Набор чисел $\{\gamma_j, \alpha_j, \beta_j : j = 0, \dots, \rho\}$ называется массивом пересечения кода C .

Вершинами графа Джонсона $J(n, w)$ являются все w -элементные подмножества n -элементного множества; две вершины смежны, если их пересечение имеет мощность $w - 1$.

Совокупность w -элементных подмножеств n -элементного множества, именуемых блоками, называется $t - (n, w, \lambda)$ -схемой, если любое t -элементное подмножество содержится в точности в λ блоках. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь схемы, все блоки которой различны. Блоки такой схемы можно рассматривать как вершины графа Джонсона. Силой схемы называется максимальное t , для которого она является $t - (n, w, \lambda)$ -схемой.

В работе Дельсарта [1] установлено, что всякий полностью регулярный код в графе Джонсона является $t - (n, w, \lambda)$ -схемой. Более того, в случае $\rho = 1$ числа t, λ однозначно определяются массивом пересечений полностью регулярного кода: t определяется из соотношения:

$$(w - (t + 1))(n - w - t - 1) - t - 1 = \alpha_0 - \gamma_1, \quad 0 \leq t \leq w,$$

а λ равняется $\gamma_1 \binom{n-t}{k-t} / (\gamma_1 + \alpha_1)$.

Итак, полностью регулярные коды в графах Джонсона можно рассматривать как подкласс t -схем со специальными комбинаторными свойствами.

В работе [2] получено конструктивное описание всех полностью регулярных кодов силы 0 в графах Джонсона. В [3] показано, что

¹Работа поддержана грантом МК-1700.2011.1 и грантами РФФИ № 09-01-00244, 12-01-00551-а и 10-01-00616-а.

всякая блок-схема силы $w - 1$ и с размером блока w является полностью регулярным кодом в графе $J(n, w)$. Эти схемы включают в себя широко известные системы троек и четверок Штейнера.

В данной работе мы рассматриваем классические конструкции Оллтопа [4] расширения блок-схем из существующих и показываем, что их применение к полностью регулярным кодам дает новые полностью регулярные коды. В качестве исходных блок-схем для этих конструкций берутся блок-схемы с размером блока, равным половине от числа точек.

Пусть D является $t - (n, w, \lambda)$ -схемой. Введем следующие обозначения

$$D' = \{\Delta \cup (n + 1) : \Delta \in D\}, \quad D'' = \{\{1, \dots, n\} \setminus \Delta : \Delta \in D\}.$$

Рассмотрим случай, когда n равно $2w$. Любой полностью регулярный код в графе $J(2w, w)$ наследует [5] свойство антиподальности графа: код является либо *плюс-антиподальным* (т.е. любые две антиподальные вершины являются одновременно либо кодовыми, либо некодовыми), либо *минус-антиподальным* (в любой паре антиподальных вершин одна вершина является кодовой, а другая — нет).

Теорема 1. [4] Пусть D является $t - (2w, w, \lambda)$ -схемой, t четно, и $D = D''$. Тогда D является $(t + 1) - (2w, w, \eta)$ -схемой, где $\eta = \lambda(w - t)/(2w - t)$.

Следствие. Пусть C является *плюс-антиподальным* полностью регулярным кодом в $J(2w, w)$ с $\rho = 1$. Тогда сила C как блок-схемы является нечетным числом.

Опишем две конструкции Оллтопа. Ниже \overline{D} обозначает подмножество вершин графа $J(2w + 1, w)$, дополнительное к D .

Теорема 2. [4] Пусть D является $t - (2w + 1, w, \lambda)$ -схемой, t четно. Тогда $D' \cup D''$ является $(t + 1) - (2w + 2, w + 1, \lambda)$ -схемой.

Теорема 3. [4] Пусть D является $t - (2w + 1, w, \lambda)$ -схемой, t нечетно и $|D| = \binom{2w+1}{w}/2$. Тогда $D' \cup \overline{D''}$ является $(t + 1) - (2w, w, \lambda)$ -схемой.

Вариант этих утверждений для полностью регулярных кодов принимает следующий вид:

Теорема 4. Пусть C является полностью регулярным кодом с $\rho = 1$ в $J(2w + 1, w)$. Тогда код $C' \cup C''$ является полностью регулярным в $J(2w + 2, w + 1)$.

Теорема 5. [4] Пусть C является полностью регулярным кодом с $\rho = 1$ в $J(2w + 1, w)$, $|C| = \binom{2w+1}{w}/2$. Тогда код $C' \cup \overline{C''}$ является полностью регулярным в $J(2w + 2, w + 1)$.

В данной работе, используя эти два утверждения и классификацию полностью регулярных кодов в $J(9, 4)$ с радиусом покрытия 1 [6], мы построили полностью регулярные коды в графе $J(10, 5)$ с массивами пересечений $\{\alpha_0 = 13, \beta_0 = 12, \gamma_1 = 16, \alpha_1 = 9\}$ и $\{\alpha_0 = 5, \beta_0 = 20, \gamma_1 = 8, \alpha_1 = 17\}$. Отметим, что конструкции расширения полностью регулярных кодов применимы к кодам произвольной силы t (в отличие от варианта конструкций для блок-схем).

Литература

- [1] *Delsarte P.* An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Res. Rep. Suppl. 1973. Vol. 10. Pp. 1–97.
- [2] *Meyerowitz A.* Cycle-balanced partitions in distance-regular graphs // Discr. Math. 2003. Vol. 264. Pp. 149–165.
- [3] *Martin W. J.* Completely Regular Designs // J. Combin. Designs. 1998. Vol. 6, № 4. Pp. 261–273.
- [4] *Alltop W.O.* Extending t-designs // Journal of Combinatorial Theory Ser. A. 1975. Vol. 18, iss. 2. Pp. 177–186.
- [5] *Avustinovich S.V., Mogilnykh I.Yu.* Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6, 3)$ and $J(7, 3)$ // LNCS, Springer. 2008. Vol. 5228. Pp. 11–19.
- [6] *Avustinovich S.V., Mogilnykh I.Yu.* On completely regular codes in Johnson graphs $J(2w + 1, w)$ with covering radius 1 // Proceedings of 12th International workshop on Algebraic Combinatorial Coding Theory (ACCT-2010). Pp. 20–26. Novosibirsk, 2010.

КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА $Aut_0(\Lambda^d)$ -СИММЕТРИЧЕСКИХ q -РАСШИРЕНИЙ РЕШЕТКИ Λ^d ДЛЯ ПРОСТОГО q

Неганова Е.А., Трофимов В.И.¹

Пусть d — целое положительное число. Под d -мерной решеткой Λ^d далее, как обычно, понимается граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы (a_1, \dots, a_d) из d целых чисел, и две вершины (a'_1, \dots, a'_d) и (a''_1, \dots, a''_d) смежны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$|a'_1 - a''_1| + \dots + |a'_d - a''_d| = 1.$$

Сдвигом решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину (a_1, \dots, a_d) в вершину $(a_1 + k_1, \dots, a_d + k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел k_1, \dots, k_d . Обозначим через $Aut_0(\Lambda^d)$ изоморфную \mathbb{Z}^d подгруппу группы автоморфизмов решетки Λ^d , состоящую из всех ее сдвигов.

Пусть q — целое положительное число. Связный граф Γ называется $Aut_0(\Lambda^d)$ -симметрическим q -расширением решетки Λ^d , если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q , что для некоторого изоморфизма φ графа Γ/σ на решетку Λ^d справедливо $\varphi G \sigma \varphi^{-1} = Aut_0(\Lambda^d)$.

$Aut_0(\Lambda^d)$ -симметрические q -расширения решеток Λ^d для $d \geq 1$ и $q > 1$ представляют интерес (см. [1]) в связи с кристаллографией частиц с внутренней структурой и теорией струн.

В общем случае открытым является вопрос о конечности множества $Aut_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d для произвольных целых положительных чисел d и q (см. вопрос 3 из [1]).

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Для произвольного целого положительного числа d и для произвольного целого простого числа q имеется лишь конечное множество $Aut_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d .*

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00349-а), программы Отделения математических наук РАН и программы совместных исследований УРО РАН с СО РАН, грантом УРО РАН для молодых ученых за 2012 год.

Литература

- [1] *Trofimov V.I.* Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 185–189.

О СТРУКТУРЕ НЕРАЗРЕШИМЫХ SM_2 -ГРУПП

Поляков С.В.

Наша цель — описать структуру конечных неразрешимых групп, у которых квадрат любого неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений с малыми кратностями.

Определение 1. Конечную группу G назовем SM_m -группой¹, если тензорный квадрат любого ее неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими m .

Интерес к рассматриваемым группам вызван недавно полученными результатами для конечных SR и ASR групп. Было доказано (см. работы [2] и [3]), что эти группы являются разрешимыми. Этого уже нельзя сказать про SM_2 -группу A_5 .

Для доказательства основных результатов была использована теорема Классификации конечных простых неабелевых групп. В ряде случаев необходимые вычисления велись в системе GAP ([7]).

Свойства SM_m -групп

Перечислим здесь свойства, вытекающие непосредственно из определения конечных SM_m -групп:

Утверждение 1. Пусть G — конечная SM_m -группа, χ — ее неприводимый характер, а $k(G)$ — число классов сопряженных элементов в G . Тогда

- 1) $\chi(1) \leq mk(G)$;
- 2) $|G| \leq m^2 k(G)^3$;
- 3) $\chi^2(1) \leq m\sqrt{|G|k(G)}$;
- 4) $\chi(1) \leq mk(G) - m$, если G — неразрешимая группа.

Используя эти свойства для $m = 2$, удалось значительно сократить список простых и почти простых неабелевых SM_2 -групп. После дополнительной проверки при помощи GAP, а также таблиц характеров была доказана

¹ от Square multiplicity

Теорема 1. Пусть G — конечная почти простая SM_2 -группа. Тогда $G \cong PGL_2(q)$.

В ходе доказательства также были получены утверждения, касающиеся ряда простых групп, в частности, групп $L_2(q)$, $L_3(q)$ и $U_3(q)$:

1. Группа $L_2(q)$, для нечетных q , за исключением группы $L_2(5) \cong A_5$, не является SM_2 -группой.
2. Группы $PGL_2(q)$ являются SM_2 -группами для любого $q > 3$.
3. Если $L_2(q) < G \leq Aut(L_2(q))$, $q > 3$, и $G \neq PGL_2(q)$, то G не SM_2 -группа.
4. В группе $L_3(q)$ найдутся неприводимые характеры χ , ψ степеней $(q+1)(q^2+q+1)$ и $(q-1)^2(q+1)$ соответственно такие, что $[\chi^2, \psi] = (q-1, n) \cdot (q+3)$.
5. В группе $U_3(q)$, для подходящего q , найдутся неприводимые характеры χ , ψ степеней степеней q^3+1 и $(q+1)^2(q-1)$ такие, что $[\psi^2, \chi] = q+2$.

Неразрешимые SM_2 -группы

Опытным путем для неразрешимых SM_2 -групп небольшого порядка было установлено, что все их неабелевы композиционные факторы изоморфны $L_2(q)$. Будем считать, что G — неразрешимая SM_2 -группа наименьшего порядка, в которой существуют неабелевы композиционные факторы, отличные от $L_2(q)$. В этом случае оказывается верна:

Теорема 2. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда:

- 1) G/N — разрешимая группа, а N — цоколь группы G ;
- 2) $N \cong L_1 \times \cdots \times L_k$, где L_i изоморфны простой неабелевой группе L ;
- 3) G — подгруппа сплетения $Aut(L) \wr S$, где $S \leq S_k$ — подгруппа симметрической группы степени k , действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N .

Из теоремы 2, с учетом свойств SM_2 -группы, доказывается, что поколь N представляет собой прямое произведение групп, изоморфных $L_2(q)$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть G — неразрешимая SM_2 -группа. Тогда ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $L_2(q)$.

В заключении отметим, что в рассмотренных примерах SM_2 -групп количество факторов, изоморфных $L_2(q)$, не превосходит двух.

Литература

- [1] Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. — Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
- [2] Казарин Л.С., Янишевский В.В. О конечных просто приводимых группах // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 6. С. 86-116.
- [3] Казарин Л.С., Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 27-40.
- [4] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups. — Oxford: Clarendon Press, 1985. <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>
- [5] Isaacs I.M. Character theory of finite groups. — N.Y.: Acad. Press, 1976.
- [6] Simpson W.A., Frame W.A. The character tables for $SL(3, q)$, $SU(3, q)$, $PSL(3, q)$, $PSU(3, q)$ // Can. J. Math. 1973. Vol. XXV, № 3. Pp. 486-494.
- [7] The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10, Aachen, St. Andrews, 2008; <http://www.gap-system.org>
- [8] Wigner E.P. On representations of finite groups // Amer. J. Math. 1941. Vol. 63. Pp. 57-63.

ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Сабодах И.В., Шлепкина А.А.

Понятие насыщенности группы заданным множеством групп появилось в 1993 году в работе А.К. Шлепкина [1].

Группа G насыщена группами из множества групп \mathfrak{M} , если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из \mathfrak{M} .

В настоящее время сложилась следующая терминология и обозначения, связанные с условием насыщенности. Насыщающее множество – это множество \mathfrak{M} из определения насыщенности. Группа G насыщена группой M – это случай, когда насыщающее множество $\mathfrak{M} = \{M\}$ состоит из одной группы.

В работе [2] доказано, что периодическая группа, насыщенная одной группой, являющейся прямым произведением конечных простых неабелевых групп, конечна при условии, что централизатор силовской 2-подгруппы каждого множителя прямого произведения не содержит элементов нечетного порядка из этого множителя.

В работе [3] доказано, что периодическая группа, насыщенная прямыми произведениями линейных групп размерности 2, при условии, что число прямых множителей элементов насыщающего множества равно 2, локально конечна.

Нами продолжено изучение групп, насыщенных прямым произведением различных групп. Пусть множество $\mathfrak{M} = \{M\}$ состоит из одной группы M , являющейся прямым произведением групп из $\{L_3^{\delta_i}(p_i^{n_i}) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, где через $L_3^{\delta}(p^n)$ обозначается группа $L_3(p^n)$, если $\delta = +$, и группа $U_3(p^n)$, если $\delta = -$.

Доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть группа Шункова G насыщена группой M . Тогда G обладает периодической частью $T(G) \simeq M$.*

Литература

- [1] *Шлепкин А.К.* Сопряженно бипрimitивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы / Труды III международной конференции по алгебре. С. 363. — Красноярск, 1993.
- [2] *Сабодах И.В., Шлепкин А.А.* Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп / в сб. «Студент и научно-технический прогресс: Математика», материалы XLIX Международной научной студенческой конференции. С. 21. — Новосибирск, 2011.
- [3] *Сабодах И.В., Шлепкин А.А.* Группы, насыщенные прямыми произведениями линейных групп размерности 2 / в сб. «Современные проблемы математики», тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 240. — Екатеринбург, 2011.

О СВОЙСТВАХ ХРОМАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА $PT(G, \chi + 1)$

Сеньчонок Т.А.

Пусть G — произвольный (n, m, k) -граф, т.е. граф, имеющий n вершин, m рёбер и k компонент связности. Раскраской, или t -раскраской, графа G называется отображение ϕ из множества вершин V в множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots, t\}$ такое, что для любых двух различных смежных вершин u и v графа G выполняется $\phi(u) \neq \phi(v)$, т.е. любые две различные смежные вершины имеют разный «цвет». Граф называется t -раскрашиваемым, если он обладает t -раскраской, и t -хроматическим, если он t -раскрашиваемый, но не является $(t - 1)$ -раскрашиваемым; в этом случае число t называют хроматическим числом графа G и обозначают через $\chi(G)$.

Для натурального числа x через $P(G, x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа G в x заданных цветов, причем не предполагается, что в раскраске должны быть использованы все x цветов. Хорошо известно (см. [1]), что функция $P(G, x)$ является многочленом степени n от x , который называют хроматическим многочленом графа G . Два графа называются хроматически эквивалентными или χ -эквивалентными, если они имеют одинаковые хроматические многочлены.

Граф является хроматически определяемым или χ -определяемым, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие ввели Chao C.Y. и E.G. Whitehead Jr. [2]. Различными авторами были проведены многочисленные исследования по изучению хроматической эквивалентности и хроматической определяемости для графов. Большое место в них уделено изучению хроматической определяемости полных многодольных графов.

Граф G называют t -дольным графом, если множество его вершин можно разбить на t непустых подмножеств (долей) так, что любое ребро данного графа соединяет вершину из одной доли с вершиной из другой доли; если каждая вершина из одной доли соединена с каждой вершиной из других долей, то G называют полным t -дольным графом и обозначают через $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$, где n_1, n_2, \dots, n_t — числа элементов в долях этого графа.

В 1990 г. Коh К.М. и Тео К.Л. [3] доказали, что полный t -дольный граф $K(n_1, n_2)$ хроматически определяем при $n_1 \geq n_2 \geq 2$. Тогда же Li N.Z. и Liu R.Y. [4] доказали, что граф $K(1, n_2, \dots, n_t)$ χ -определяем тогда и только тогда, когда $\max\{n_2, \dots, n_t\} \leq 2$. Известны многочисленные работы китайских авторов на эту тему. Они рассматривали графы для различных конкретных наборов (n_1, n_2, \dots, n_t) и доказывали их хроматическую определяемость при достаточно большом количестве вершин в долях.

В ходе исследований различных авторов возникла следующая гипотеза: любой полный t -дольный граф $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ является хроматически определяемым при $t \geq 3$ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 2$.

Предположим, что каждому графу приписано некоторым образом число. Это число называют *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов. Хроматическими инвариантами являются числа вершин, рёбер и компонент связности графа [5]. Число рёбер графа G будем обозначать через $I_2(G)$. Отметим, что число его вершин можно было бы обозначить через $I_1(G)$. Ещё одним хроматическим инвариантом является $I_3(G)$ — число треугольников в графе G (см. [6] или [7]).

Далее через $pt(G, i)$ мы будем обозначать число разбиений множества вершин графа G на i непустых коклик, т.е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин графа G . По теореме Зыкова (см. [8]),

$$P(G, x) = \sum_{i=\chi}^n pt(G, i)x^{(i)},$$

где через $x^{(i)}$ обозначается *факториальная степень* переменной x , т.е. $x^{(i)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)$, а через χ — хроматическое число графа G . В силу указанной теоремы числа $pt(G, i)$ при $\chi \leq i \leq n$ являются хроматическими инвариантами. Нас особенно будет интересовать инвариант $pt(G, \chi + 1)$.

Вычислим значение инварианта $pt(G, \chi + 1)$ для полного t -дольного графа $G = K(n_1, n_2, \dots, n_t)$, где $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 1$. Здесь $\chi = t$ и раскраска графа в t цветов даёт единственное разбиение множества его вершин на t коклик — долей этого графа. Разбиение на $t + 1$ непустых коклик получается из предыдущего разбиения разбиением одной из долей на два непустых подмножества. Следовательно, $pt(K(n_1, n_2, \dots, n_t), t + 1) = 2^{n_1-1} - 1 + \dots + 2^{n_t-1} - 1 =$

$$= 2^{n_1-1} + \dots + 2^{n_t-1} - t.$$

Любой граф G с хроматическим числом $\chi = t$ может быть представлен в виде $G = K - E$, где $K = K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ — это некоторый полный t -дольный граф, а E — множество отбрасываемых рёбер.

Основным нашим результатом является следующая

Теорема. Если $|E| = k$, то $k \leq pt(K, \chi + 1) - pt(G, \chi + 1) \leq 2^k - 1$.

Полученная оценка для изменения инварианта $pt(G, \chi + 1)$ может быть эффективно использована для доказательства хроматической определяемости графов.

Литература

- [1] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матрицы, алгоритмы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [2] Chao C.Y., E.G. Whitehead Jr. On chromatic equivalence of graphs // Theory and applications of graphs. 1978. Vol. 642. Pp. 121–131.
- [3] Koh K.M., Teo K.L. The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. Pp. 259–285.
- [4] Li N.Z., Liu R.Y. The chromaticity of the complete t -partite graph $K(1; p_2; \dots; p_t)$ // Xinjiang Univ. Natur. Sci. 1990. Vol. 7, № 3. Pp. 95–96.
- [5] Read R.C. An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. Pp. 52–71.
- [6] Farrell E.J. On chromatic coefficients // Discrete Math. 1980. Vol. 29. Pp. 257–264.
- [7] Баранский В.А., Вихарев С.В. О хроматических инвариантах двудольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Математика и механика. Вып. 7, № 36. С. 25–34.
- [8] Зыков А.А. Основы теории графов. — М.: Вузовская книга, 2004.

ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С МАХ-СЛОЖЕНИЕМ

Сидоров В.В.

Целью работы является описание изоморфизмов решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с мах-сложением.

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $\mathbb{R}^+(\mathbb{P})$ — множество всех неотрицательных (положительных) действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует полукольцо $C^+(X)$. Если вместо обычного сложения взять мах-сложение (обозначается \vee):

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ для всех } x \in X,$$

то получим аддитивно-идемпотентное полукольцо $C^\vee(X)$. Под полукольцом мы понимаем алгебраическую структуру, отличающуюся от ассоциативного кольца возможной необратимостью операции сложения, в которой аддитивный нуль является мультипликативным нулем. Под подалгебрами полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ понимаем произвольные их подполукольца, выдерживающие умножение на константы из \mathbb{R}^+ . Обозначим через $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ решетки всех подалгебр полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ относительно отношения включения. Топологическое пространство X называется хьюиттовским (или Q -пространством, вещественно полным, функционально замкнутым), если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени числовой прямой \mathbb{R} .

Следующее хорошо известное предложение отражает важность хьюиттовских пространств в теории колец и полуколец непрерывных функций.

Предложение 1. *Для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX (тихоновизация пространства X) и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ такие, что канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а зна-*

чит, соответствующие им полукольца:

$$C^+(X) \cong C^+(\tau X) \cong C^+(\nu\tau X), \quad C^\vee(X) \cong C^\vee(\tau X) \cong C^\vee(\nu\tau X).$$

В 1997 г. Е. М. Вечтомов [1] доказал, что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфность решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ равносильна гомеоморфности хьюиттовских пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$. В связи с развитием теории полукольцев непрерывных функций возникло желание перенести упомянутый результат на случай решеток подалгебр полукольцев $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$. Данная задача решена нами в работах [2] и [3].

Теорема 1. *Для любых топологических пространств X и Y равносильны следующие условия:*

- 1) $\mathbb{A}(C^+(X)) \cong \mathbb{A}(C^+(Y))$;
- 2) $\mathbb{A}(C^\vee(X)) \cong \mathbb{A}(C^\vee(Y))$;
- 3) $\tau\nu X \cong \tau\nu Y$.

Опишем изоморфизмы решеток подалгебр $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$, $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(C^\vee(Y))$. Так как при изоморфизме $\varphi: C^+(X) \rightarrow C^+(Y)$ образом произвольной подалгебры A полукольца $C^+(X)$ служит подалгебра $\varphi(A)$ полукольца $C^+(Y)$, то ограничение $\varphi|_{\mathbb{A}(C^+(X))}$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$. Описание изоморфизмов φ хорошо известно.

Предложение 2. *Для произвольных топологических пространств X и Y любой изоморфизм полукольцев $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ порождается некоторым (единственным) гомеоморфизмом хьюиттовских пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.*

В работе [3] нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для произвольных топологических пространств X и Y любой изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$ индуцируется однозначно определенным изоморфизмом полукольцев $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ за исключением случая, когда $\tau X = \{x, y\}$ — несвязное двоеточие: в этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между изоморфизмами решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$ и парами автоморфизмов (γ_x, γ_y) цепи $[0, 1]$.*

В случае полукольцев $C^\vee(X)$ ситуация осложняется тем, что при изоморфизме $\varphi: C^\vee(X) \rightarrow C^\vee(Y)$ образ $\varphi(A)$ подалгебры A полукольца $C^\vee(X)$ не обязан быть подалгеброй полукольца $C^\vee(Y)$.

Предложение 3. Для того чтобы при изоморфизме $\varphi: C^\vee(X) \rightarrow C^\vee(Y)$ образом подалгебры полукольца $C^\vee(X)$ была подалгебра полукольца $C^\vee(Y)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

Нами получен следующий результат.

Теорема 3. Пусть X и Y — произвольные хьюиттовские пространства, $|X| \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $\alpha: A(C^\vee(X)) \rightarrow A(C^\vee(Y))$ найдутся число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu: Y \rightarrow X$ такие, что

$$\alpha: \langle f \rangle \rightarrow \langle f^t \circ \mu \rangle \text{ для всех } f \in C^\vee(X).$$

В случае $|X| = 2$ имеется континуум изоморфизмов α , действующих иначе.

Из него, с учетом предложения 3, получаем описание изоморфизмов полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$, сохраняющих подалгебру констант.

Теорема 4. Пусть X и Y — произвольные хьюиттовские пространства и $\varphi: C^\vee(X) \rightarrow C^\vee(Y)$ — изоморфизм, причем $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Тогда существуют число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu: Y \rightarrow X$ такие, что

$$\varphi: f \rightarrow f^t \circ \mu \text{ для любой } f \in C^\vee(X).$$

Литература

- [1] Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.
- [2] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 11. С. 112–125.
- [3] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16. Вып. 3. С. 63–103.

О РАСПОЗНАВАНИИ ГРУПП ПО ГРАФУ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Старолетов А.М.¹

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G , $\omega(G)$ — спектр группы G , т.е. множество порядков ее элементов. Граф простых чисел (граф Грюнберга–Кегеля) $GK(G)$ группы G определяется следующим образом: его вершинами служат элементы множества $\pi(G)$, и две различные вершины r и s соединены ребром тогда и только тогда, когда число rs лежит в $\omega(G)$. Далее под графом группы будем подразумевать граф простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу*, если для любой группы H из $GK(H) = GK(G)$ следует, что $H \simeq G$. Аналогичным образом определяется понятие распознаваемости группы по спектру. Нетрудно заметить, что из распознаваемости по графу следует распознаваемость по спектру. Обратное неверно, например, группа Alt_5 распознаваема по спектру, но $GK(Alt_5) = GK(Alt_6)$. Ранее было доказано, что группы $PSL(2, q)$ распознаваемы по спектру при $q \neq 9$ [1]. Распознаваемость по спектру групп $G_2(3^n)$ была установлена в [2]. Оказывается, что не все из этих групп являются распознаваемыми по графу, например, несложно проверить, что $GK(PSL(2, 13)) = GK(G_2(3))$ вопреки основным результатам, полученным в [3, 4]. В связи с этим получен следующий результат.

Теорема. Пусть G — конечная группа и $GK(G) = GK(L)$ для некоторой неабелевой простой конечной группы L . Если G обладает единственным неабелевым композиционным фактором S и $(L, S) = (G_2(q), L_2(p))$ или $(L, S) = (L_2(p), G_2(q))$, где q — степень простого числа, а p — простое число, то $q = 3, p = 13$.

Литература

- [1] Brandl R., Shi W.J. A characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. Vol. 163, № 1. Pp. 109-114.

¹При финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), Лаврентьевского гранта для коллективов молодых ученых СО РАН, постановление Президиума СО РАН №43 от 04.02.2010.

-
- [2] *Vasil'ev A. V.* Recognizing groups $G_2(3^n)$ by their element orders // Algebra Logika. 2002. Vol. 41, № 2. Pp. 130–142.
- [3] *Zhang Q., Shi W., Shen R.* Quasirecognition by prime graph of the simple groups $G_2(q)$ and ${}^2B_2(q)$ // J. Algebra Appl. 2011. Vol. 10, № 2. Pp. 309–317.
- [4] *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* On the prime graph of $PSL(2, p)$ where $p > 3$ is a prime number // Acta. Math. Hung. 2007. Vol. 116, №4. Pp. 295–307.

ПАРКЕТНЫЕ ГРАНИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Табинова О.А.¹

Путь к обобщению известной теоремы, указывающей на все выпуклые правильные многогранники, намечен в 1974 г. [1]. В частности, в процитированной работе без доказательства приведён список всех паркетных многоугольников, т. е. каждый из них выпуклый и составлен более, чем из одного равноугольного многоугольника. Планируется представить на конференцию проведённое по следующей схеме доказательство полноты этого списка, поскольку оно до сих пор не опубликовано.

Заметив, что угол паркетного многоугольника может быть только таким, как угол правильного m -угольника при $m = 3, 4, 5, 6, 12, 30$ и паркетный k -угольник обладает x_m углами такими, как углы правильного m -угольника, приходим к системе

$$\begin{cases} 10x_3 + 15x_4 + 18x_5 + 20x_6 + 25x_{12} + 28x_{30} = 30(k - 2); \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_{12} + x_{30} = k. \end{cases} \quad (1)$$

Каждой вершине паркетного многоугольника можно приписать такое число n , что угол в этой вершине равен углу правильного n -угольника. Расположив эти числа в строку так, что соседним, а также первому и последнему числу соответствуют смежные вершины, получим упорядоченный набор, который называется *типом* паркетного многоугольника. Таким образом, каждому решению системы (1) могут соответствовать несколько типов, либо один тип, либо ни одного типа паркетного многоугольника.

Например, решению $(2, 0, 0, 2, 0, 0)$ соответствуют типы $(3, 6, 3, 6)$ и $(3^2, 6^2)$, которые можно реализовать в виде составленного из двух правильных треугольников ромба и трапеции, состоящей из трёх правильных треугольников, соответственно (рис. 1). Система (1) имеет 149 решений. Прежде, чем проверять, какие из них каким типам соответствуют, доказываем справедливость следующих предположений, каждое из которых уменьшает число проверяемых решений, всего до 49 решений.

¹Работа поддержана грантом КГПУ им. В.П. Астафьева № 16-11-2/МП.

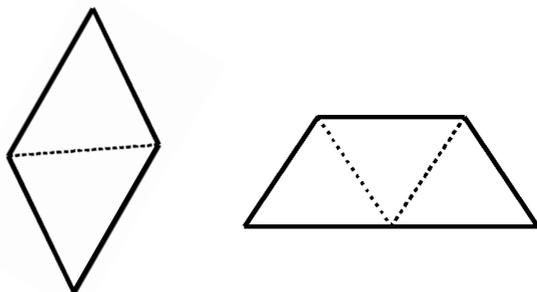


Рис. 1: паркетные многоугольники типов $(3, 6, 3, 6)$, $(3^2, 6^2)$

Предложение 1. Если в решении есть число 30 и отсутствует число 5, то этому решению не соответствует ни один тип.

Предложение 2. Если решение содержит число 30 и отсутствуют оба числа 3 и 6, то этому решению не соответствует ни один тип.

Предложение 3. Если решение содержит число 5, то оно не имеет чисел 4 и 12.

Предложение 4. Если решение содержит число 5, то оно не имеет числа 4.

Предложение 5. Если решение содержит число 5, то оно не имеет числа 12.

Предложение 6. Если решение содержит число 4 и число 3, то оно не имеет числа 6.

Предложение 7. Если решение содержит число 4 и число 6, то оно не имеет числа 3.

Нахождение указанных выше 49 решений осуществлено командами системы компьютерной алгебры GAP. А ответ на вопрос о том, какие типы паркетных многоугольников соответствуют каждому из этих решений, найден вручную. Выделим из паркетных многоугольников многоугольники, не рассекаемые никакой прямой на паркетные многоугольники, получим, что верна

Теорема. *Каждый паркетный многоугольник можно составить из одного или нескольких паркетных многоугольников типов $(6, 12^{10})$, $(6, 12^2, 6, 12^6)$, $(6, 12^4, 6, 12^4)$, $(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$, $(4, 12^2, 4, 12^4)$, $(4, 12^2, 4, 12, 6, 12)$, (12^{12}) .*

Литература

- [1] *Пряхин Ю.А.* Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 111–112.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОНОМИАЛЬНЫХ БАЗИСОВ АЛГЕБР ЛИ

Тарасов Ю.С.

1. Введение.

В Днестровской тетради за номером 3.74 записан вопрос Созутова А.И.: «Описать конечномерные простые алгебры Ли с мономиальным базисом» [3]. Базис B алгебры L над полем F называется *мономиальным*, если $ab = \alpha_{ab}c$ для любых $a, b \in B$, где $c \in B$, $\alpha_{ab} \in F$, и *однородным*, если структурные константы α_{ab} принадлежат $\{-1, 0, -1\}$ [4, 5]. В процессе поиска подходов к решению поставленной проблемы А.И. Созутов предложил автору сконструировать мономиальные базисы для алгебр Ли, построенных на основе графов Дынкина E_6, E_7, E_8 , ввиду их исключительности [1]. Поставленная задача была решена нами для графа E_6 [6], при этом использовался интуитивный эвристический перебор вариантов расстановки знаков в таблице умножения элементов базиса. В настоящей работе представлен метод построения мономиальных базисов. Метод использован при построении алгебр Ли с мономиальными базисами для графов E_6, E_7, E_8 .

2. Построение таблицы умножения элементов базиса.

Как и в работе [6], определим B – множество всех нечетносвязных фрагментов исходного графа. Пусть $a, b \in B$, далее определим c как симметрическую разность a и b . Если $c \notin B$, произведением элементов a и b будем считать ноль конструируемой алгебры. Если $c \in B$, то произведением a и b считаем c .

3. Упорядочивание элементов базиса.

Из элементов B формируем последовательность \vec{B} . Первыми в \vec{B} включаем $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}$ такие, что: $b_{1,1} \times b_{1,2} = b_{1,3}$; $b_{1,1} \times b_{1,3} = b_{1,2}$; $b_{1,2} \times b_{1,3} = b_{1,1}$. Если исходный граф имеет хотя бы две вершины, то такая тройка всегда найдется. Далее выбираем последовательно, одну за другой, все тройки $b_{i,1}, b_{i,2}, b_{i,3}$ такие, что: $b_{i,1} \times b_{i,2} = b_{j,3}$; $b_{i,1} \times b_{i,3} = b_{j,2}$; $b_{i,2} \times b_{i,3} = b_{j,1}$, где $i \neq j$, присоединяя элементы троек к \vec{B} . Элементы, не вошедшие в тройки, последовательно дописываются в конец \vec{B} .

4. Разбиение таблицы на прямоугольные фрагменты.

Таблица умножения элементов базиса, упорядоченная в соответствии с п. 3, имеет структурированный вид и состоит из фрагментов вида:

$$\begin{aligned}
 1. & \left| \begin{array}{ccc} 0 & b_{i,3} & b_{i,2} \\ b_{i,3} & 0 & b_{i,1} \\ b_{i,2} & b_{i,1} & 0 \end{array} \right|, \quad 2. \left| \begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array} \right|, \quad 3. | b_{i,1} | b_{i,2} | b_{i,3} |, \\
 4. & \left| \begin{array}{c} b_{i,1} \\ b_{i,2} \\ b_{i,3} \end{array} \right|, \quad 5. | 0 | 0 | 0 |, \quad 6. \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|, \quad 7. | b |, \quad 8. | 0 |.
 \end{aligned}$$

5. Расстановка знаков в таблице.

Каждому фрагменту таблицы, исключая фрагменты, содержащие только 0, присвоим знак «+» или «-» по правилу: фрагментам, расположенным на главной диагонали таблицы и выше, присваиваем знак «+», остальным фрагментам – знак «-». Определим правило расстановки знаков внутри фрагмента в зависимости от знака фрагмента и его вида. Если фрагменту присвоен знак «+», то внутри фрагмента знаки расставляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 1. & \left| \begin{array}{ccc} 0 & +b_{i,3} & +b_{i,2} \\ -b_{i,3} & 0 & +b_{i,1} \\ -b_{i,2} & -b_{i,1} & 0 \end{array} \right|; \quad 3. | +b_{i,1} | +b_{i,2} | +b_{i,3} |; \quad 4. \left| \begin{array}{c} +b_{i,1} \\ +b_{i,2} \\ +b_{i,3} \end{array} \right|; \\
 7. & | +b |.
 \end{aligned}$$

Если фрагменту присвоен знак «-», то внутри фрагмента знаки сначала расставляются по правилу для фрагмента со знаком «+», а потом меняются на противоположные.

Затем проверяем все возможные варианты тождества Якоби для элементов \vec{B} . Если тождество Якоби для каких-то элементов не выполняется, выявляются фрагменты таблицы, в которых расположены произведения этих элементов. Из отмеченных фрагментов выбирается тот, у которого знак после первоначальной расстановки знаков не менялся. Для данного фрагмента знак меняется на противоположный, соответственно меняются знаки внутри фрагмента. И вновь проводится проверка всех возможных вариантов тождества Якоби для элементов \vec{B} . Не следует менять знаки фрагментов более одного раза, в этом случае, через некоторое количество итераций, добиваемся выполнения всех возможных вариантов тождества Якоби для элементов \vec{B} .

6. Выводы.

Изложенный метод позволяет значительно сократить размерность задачи расстановки знаков в таблице умножения элементов мономиального базиса алгебры Ли.

Применяя данный метод, построены алгебры Ли с мономиальными базисами: 36-мерная для E_6 , 64-мерная для E_7 , 119-мерная для E_8 . Выполнение аксиом алгебры Ли для построенных алгебр доказывается применением дистрибутивного закона и перегруппировкой мономов [2].

Литература

- [1] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
- [2] *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.
- [3] *Филипов В.Т., Харченко В.К., Шестаков И.П.* Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей. — Новосибирск, 1993.
- [4] *Созутов А.И.* Группы, порожденные 3-транспозициями, и алгебры Ли с мономиальным базисом / в сб. «Конечная математика», труды семинара ВЦ РАН в г. Красноярске. Т. 1. С. 17-19. Красноярск, 1992.
- [5] *Созутов А.И.* Об алгебрах Ли с мономиальным базисом // Междунар. конф. по алгебре, посвященная памяти А.И. Ширшова: тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей. С. 112-113. Новосибирск, 1991.
- [6] *Созутов А.И., Тарасов Ю.С.* О мономиальных базисах некоторых алгебр Ли / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», труды 41-й Всероссийской молодежной конференции. С. 78–83. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010.

**ПОРОЖДАЮЩИЕ ТРОЙКИ ИНВОЛЮЦИЙ
ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП РАЗМЕРНОСТИ 2
НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ**

Тимофеенко И.А.

Пусть $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ — группа всех обратимых матриц размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, где i — корень из -1 , $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ — её подгруппа матриц с определителем 1, а $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$, $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ — их фактор-группы по центру соответственно. В докладе для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел рассматриваются следующие задачи:

А. Порождается ли данная группа тремя инволюциями $((2, 2, 2)$ -порождаемость)?

Б. Порождается ли данная группа тремя инволюциями, две из которых перестановочны $((2 \times 2, 2)$ -порождаемость)?

Группа $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ обладает единственной инволюцией, поэтому справедливо

Предложение 1. *Группа $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не порождается никаким множеством инволюций.*

В группе $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ у любой инволюции определитель может быть равен только ± 1 . Но в $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ есть матрица, определитель которой равен i , например, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Значит, справедливо

Предложение 2. *Группа $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не порождается никаким множеством инволюций.*

В следующих предложениях для элементов группы $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ используется матричная запись, при этом два элемента считаются равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу (а нескалярная матрица является инволюцией, если её квадрат равен скалярной матрице).

Предложение 3. *Группа $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ порождается тремя инволюциями*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства предложения 4 понадобятся следующие два утверждения, причем для доказательства второго требуется первое.

Утверждение 1. Для любых трёх нецентральных элементов α, β, γ из $GL_2(\mathbb{C})$, удовлетворяющих следующему условию:

- 1) $\alpha\beta = \beta\alpha$;
- 2) элементы $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ лежат в центре $GL_2(\mathbb{C})$ — справедливо равенство

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha = \beta^{-1}\gamma\beta. \quad (1)$$

Утверждение 2. Любая подгруппа M , порожденная тремя нецентральными инволюциями из группы $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, две из которых перестановочны, имеет следующую структуру:

$$M = \langle \gamma, \delta \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (2)$$

где

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = (\alpha\beta)^2 = \alpha\gamma\alpha\delta = \beta\gamma\beta\delta = 1. \quad (3)$$

Более того, подгруппа $\langle \gamma, \delta \rangle \triangleleft M$ и группа M либо конечна, либо $M = \langle \gamma, \delta \rangle \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$.

Предложение 4. Группа $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Доказательство. В любой порождающей тройке инволюций группы $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не может быть центральной инволюции, в силу простоты группы A_6 , которая является гомоморфным образом группы $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$. С другой стороны, группа A_6 не может быть гомоморфным образом группы M из утверждения 2. Следовательно, группа $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не может порождаться тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. Группа $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Доказательство. Известно, что $PSL_2(9)$ не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. А так как существует гомоморфизм $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \rightarrow PSL_2(9)$, то $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не

порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Предложение 5 доказано.

Через $SL_2^\pm(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ обозначим подгруппу матриц из $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$, определитель которых равен ± 1 .

Предложение 6. *Группа $SL_2^\pm(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ порождается тремя следующими инволюциями:*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть G — одна из следующих групп:

$$GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i), PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i), SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i), PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i).$$

Тогда ответы на приведенные выше задачи для группы G указаны в таблице, где «+» означает положительное решение, «-» — отрицательное решение, «?» — ответ неизвестен.

Задача	$GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$	$PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$	$SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$	$PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$
(2, 2, 2)	—	+	—	?
(2 × 2, 2)	—	—	—	—

Литература

- [1] Нуржин Я.Н., Тимофеев И.А. Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел // Владикавказский матем. журнал. 2009. Т. 11, № 4. С. 59–62.
- [2] Нуржин Я.Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики II // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 4. С. 422–440.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Хохлова И.А.¹

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда π -холловой подгруппой группы G называется π -подгруппа S такая, что ее индекс $|G : S|$ не делится на числа из π . Мы говорим, что группа G обладает свойством E_π , если в ней существует π -холлова подгруппа; группа обладает свойством C_π , если π -холловы подгруппы существуют и сопряжены, и D_π , если максимальные подгруппы группы G сопряжены. Группа G называется почти простой, если существует простая группа S такая, что

$$S \simeq \text{Inn}(S) \leq G \leq \text{Aut}(S).$$

В 2006 году Д.О. Ревиним и Е.П. Вдовиным в работе [1] был получен критерий наличия свойства D_π в простой группе. В работе [2] получено арифметическое описание простых D_π -групп. В работе [3] получен критерий наличия свойства E_π в конечных простых группах.

Наша цель — арифметическое описание почти простых E_π -групп. Мы будем изучать почти простые группы вместо простых потому, что E_π -критерий [4] использует строение почти простых групп.

На данный момент получен арифметический критерий наличия свойства E_π в $PSL_n(q) \leq G \leq \text{Aut}(PSL_n(q))$ в том случае, когда $p \in \pi$. А именно, доказана следующая теорема, которая уточняет предыдущие результаты в этом направлении.

Теорема. Пусть $L = PSL_n(q)$ — простая проективная специальная линейная группа размерности n над полем порядка q и характеристики p и G — почти простая группа с простым цоколем L . Предположим также, что множество простых чисел π содержит p . Тогда группа G обладает собственной π -холловой подгруппой в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих утверждений:

¹Работа поддержана грантом РФФИ №10-01-00391 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт №14.740.11.0346).

- (1) $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q-1) \cup \{p\}$ и $\pi \cap \pi(n!) = \emptyset$. В случае справедливости этого утверждения все π -холловы подгруппы сопряжены с π -холовой подгруппой группы всех верхнетреугольных матриц. Поэтому любая группа G содержит π -холовы подгруппы.
- (2) n является нечётным простым числом, $q \not\equiv 1 \pmod{n}$ и $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi((q^2-1)(q^3-1)\dots(q^{n-1}-1))$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно два класса сопряжённых π -холовых подгрупп.
- (3) $n = 4$, $q = 2^{2k+1}$, где k является неотрицательным целым числом, и $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi(q^2-1)$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно один класс сопряжённых π -холовых подгрупп.
- (4) $n = 5$, $q = 2^{4k+t}$, где k – целое неотрицательное число, $t \not\equiv 0 \pmod{4}$ и $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi((q^2-1)(q^3-1))$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно два класса сопряжённых π -холовых подгрупп.
- (5) $n = 5$, $q = 2^{4k+t}$, где k является целым неотрицательным числом, $t = 1$ или $t = 3$, $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi(q^2-1)$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно три класса сопряжённых π -холовых подгрупп.
- (6) $n = 7$, $(35, q-1) = 1$, $(3, q+1) = 1$ и $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi((q^4-1)(q^3-1))$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно два класса сопряжённых π -холовых подгрупп.
- (7) $n = 8$, $q = 2^{4(3k+t)+2}$, где k является целым неотрицательным числом, $t = 2$ или $t = 3$, $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi((q^8-1)(q^3-1))$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно один класс сопряжённых π -холовых подгрупп.
- (8) $n = 11$, $q = 2^{6k+t}$, где k является целым неотрицательным числом, $t = 1$ или $t = 5$, $\pi \cap \pi(G) = \{p\} \cup \pi((q^6-1)(q^5-1)(q^4-1))$. В случае справедливости этого утверждения существует ровно два класса сопряжённых π -холовых подгрупп.

Литература

- [1] *Revin D.O., Vdovin E.P.* Hall subgroups of finite groups // Contemporary Mathematics. 2006. Vol. 402. Pp. 229-265.
- [2] *Ревин Д.О.* Характеризация конечных D_π -групп // ДАН. 2007. Т. 417, № 5. С. 601-604.
- [3] *Revin D.O., Vdovin E.P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // Journal of Algebra. 2010. Vol. 324. Pp. 3614-3652.
- [4] *Revin D.O., Vdovin E.P.* An existence criterion for Hall subgroups of finite group // Journal of Group Theory. 2011. Vol. 14. Pp. 93-101.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Шапрынский В.Ю.¹

Существует ряд работ, посвященных изучению специальных элементов решетки **SEM** всех многообразий полугрупп (см. § 14 в обзорной статье [1] и более поздние работы [2]–[5]). Можно выделить восемь основных типов специальных элементов, представляющих интерес с точки зрения теории решеток: нейтральные, дистрибутивные, кодистрибутивные, стандартные, костандартные, модулярные, нижнемодулярные и верхнемодулярные элементы. Все эти типы являются частными случаями одного общего понятия. Пусть I – произвольное решеточное тождество вида $s(x_0, \dots, x_n) = t(x_0, \dots, x_n)$. Элемент x решетки L назовем I -элементом, если

$$\forall x_1, \dots, x_n \in L: \quad s(x, x_1, \dots, x_n) = t(x, x_1, \dots, x_n).$$

Помимо упомянутых восьми типов, к I -элементам решетки также относятся элементы, которые порождают главный идеал, удовлетворяющий заданному тождеству. В частности, многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых удовлетворяет какому-либо решеточному тождеству, являются I -элементами решетки **SEM**. Исследование таких многообразий представляет собой обширное направление в теории многообразий полугрупп, обзору полученных здесь результатов посвящен §11 работы [1].

Таким образом, понятие I -элемента позволяет объединить два направления исследований по решеткам многообразий полугрупп. В связи с этим представляет интерес изучение I -элементов решетки **SEM** в общем виде. Многообразие полугрупп, являющееся I -элементом решетки **SEM** для нетривиального тождества I , мы для краткости будем называть I -многообразием. Наиболее общей задачей в обсуждаемом направлении является задача описания произвольных I -многообразий. Эта задача представляется весьма сложной, поскольку понятие I -многообразия является очень общим. Ни

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00542 и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/13995).

из каких априорных соображений не вытекает, что I -многообразия вообще должны обладать какими-либо общими свойствами. Оказывается, однако, что по крайней мере одно такое свойство существует.

Теорема. *Всякое I -многообразие полугрупп либо совпадает с многообразием всех полугрупп, либо является периодическим многообразием.*

Утверждение данной теоремы ранее было доказано во всех упомянутых выше частных случаях. При этом для различных типов элементов доказательства существенно различались между собой.

Возникает естественный вопрос: не является ли необходимое условие для свойства «быть I -элементом», указанное в теореме, достаточным? Ответ на него оказывается отрицательным.

Предложение. *Существуют периодические многообразия полугрупп (более того, нильмногообразия), не являющиеся I -многообразиями.*

Литература

- [1] Шеврин Л.Н., Верников Б.М., Волков М.В. Решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2009. № 3. С. 3–36.
- [2] Верников Б.М., Шапрынский В.Ю. Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 303–330.
- [3] Shaprynskiĭ V.Yu., Vernikov B.M. Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties. III // Acta Sci. Math. (Szeged). 2010. Vol. 76, № 3–4. Pp. 371–382.
- [4] Верников Б.М. Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 13–21.
- [5] Shaprynskiĭ V.Yu. Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties // Semigroup Forum, submitted.

РЕШЕНИЕ ПО ШТАКЕЛЬБЕРГУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В КЛАССЕ КВАЗИСТРАТЕГИЙ

Авербух Ю.В., Бакланов А.П.¹

Настоящая работа посвящена исследованию решений по Штакельбергу неантагонистической дифференциальной игры двух лиц. Как известно, в этом случае один из игроков является лидером и сообщает свою стратегию ведомому, второй максимизирует свой выигрыш с использованием полученной информации. Мы рассматриваем случай, когда ведомый игрок доброжелателен к лидеру и из всех своих максимизирующих стратегий выбирает наилучшую для лидера. Мы рассматриваем формализацию игры в классе квазистратегий игрока-лидера. То есть игрок-лидер выбирает квазистратегию – неупреждающий отклик на управление ведомого, которому она известна. Этот подход переключается с формулировкой обратного решения по Штакельбергу, разрабатываемой в работах G.J. Olsder [1]. Множество выигрышей при формализации в классе квазистратегий совпадает с множеством выигрышей при переборе позиционных решений по Штакельбергу [2].

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Мы считаем, что u – управление первого игрока, он является лидером, v – управление второго игрока, он является ведомым. Цель первого игрока – максимизировать терминальный выигрыш $\sigma_1(x(\vartheta_0))$, цель второго игрока – максимизировать свой терминальный выигрыш $\sigma_2(x(\vartheta_0))$. Накладываются стандартные предположения на динамику системы.

Мы будем использовать обобщенные управления – мерозначные функции. Пусть E – некоторый конечномерный компакт, $\mathcal{B}(E)$ – σ -алгебра множеств, измеримых по Борелю, τ – некоторый момент из

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-7320.2010.1), РФФИ (грант № 09-01-00436-а) и программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

$[t_0, \vartheta_0]$. Будем называть функцию $\mu : [\tau, \vartheta_0] \times \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, 1]$ обобщенным управлением, если при каждом t $\mu(t, \cdot)$ мера на $\mathcal{B}(E)$, а $\mu(\cdot, \cdot)$ слабо измерима. Через $\mathcal{R}(\tau; E)$ обозначим множество всех обобщенных управлений на $[\tau, \vartheta_0]$.

Если $\eta \in \mathcal{R}(t_*; P \times Q)$, то движение, порожденное этим управлением, выходящим из позиции (t_*, x_*) , есть решение уравнения

$$\dot{x} = \int_{P \times Q} f(t, x(t), u, v) \eta(t, d(u, v)), \quad x(t_*) = x_*.$$

Обозначим порожденное движение через $x(\cdot, t_*, x_*, \eta)$.

Будем говорить, что обобщенные управления $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{R}(\tau; E;)$ совпадают на $[\tau; \theta]$, если $\mu_1(t, \cdot) = \mu_2(t, \cdot)$ для почти всех $t \in [\tau, \theta]$. Квазистратегией первого игрока на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ называется любое отображение $\alpha : \mathcal{R}(t_*; Q) \rightarrow \mathcal{R}(t_*; P \times Q)$, обладающее свойствами согласованности и неупреждаемости [3].

Согласованность. Для всех измеримых $\Upsilon \subset Q$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливо равенство $\alpha[\nu](t; P \times \Upsilon) = \nu(t; \Upsilon)$.

Неупреждаемость. Из того, что $\nu_1 \in \mathcal{R}(t_*; Q)$ совпадает на $[t_*, \theta]$ с $\nu_2 \in \mathcal{R}(t_*; Q)$ следует, что $\alpha[\nu_1]$ совпадает с $\alpha[\nu_2]$ на $[t_*, \theta]$.

Множество всех квазистратегий игрока-лидера на $[t_*, \vartheta_0]$ обозначим через $QS^1(t_*)$. Если α — квазистратегия первого игрока в позиции (t_*, x_*) , то обозначим

$$\begin{aligned} V^b[\alpha, t_*, x_*] &\triangleq \{\nu_* \in \mathcal{R}(t_*; Q) : \sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha[\nu_*])) = \\ &= \max_{\nu \in \mathcal{R}(t_*; Q)} \sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha[\nu]))\}. \end{aligned}$$

Решением по Штакельбергу типа при доброжелательном выборе ведомого в классе квазистратегий в позиции (t_*, x_*) будем называть пару квазистратегии первого игрока $\alpha_s \in QS^1(t_*)$ и обобщенного управления второго игрока $\nu_s \in \mathcal{R}(t_*; P)$ таких, что $\nu_s \in V^b[\alpha_s, t_*, x_*]$ и

$$\max_{\alpha \in QS^1(t_*)} \max_{\nu \in V^b[\alpha, t_*, x_*]} \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha[\nu])) = \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha_s[\nu_s])).$$

Обозначим через ω_2 функцию цены в игре Γ_2 , в которой второй игрок стремится максимизировать свой выигрыш $\sigma_2(x(\vartheta_0))$, а первый игрок ему противодействует:

$$\omega_2(t_*, x_*) \triangleq \min_{\alpha \in QS^1(t_*)} \max_{\nu \in \mathcal{R}(t_*; Q)} \sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \alpha[\nu])).$$

Пусть $A[t_*, x_*]$ – множество совместных управлений таких, что на порожденных движениях цена игры Γ_2 ограничена значением в последний момент:

$$A[t_*, x_*] \triangleq \{ \eta \in \mathcal{R}(t_*; Q) : \omega_2(t, x(t)) \leq \omega_2(\vartheta_0, x(\vartheta_0)), \\ t \in [t_*, \vartheta_0], \quad x(\cdot) = x(\cdot, t_*, x_*, \eta) \}.$$

Теорема. Если пара (α_s, ν_s) реализует в позиции (t_*, x_*) решение по Штакельбергу типа при доброжелательном выборе ведомого с лидером первым игроком, то для $\eta_s \triangleq \alpha_s(\nu_s)$ выполняются свойства:

1. $\eta^* \in A[t_*]$,
2. $\max_{\eta \in A[t_*, x_*]} \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta)) = \sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta^*))$.

Пусть $\eta^* \in \mathcal{R}(t_*, P \times Q)$ удовлетворяет свойствам 1 и 2, тогда можно построить квазистратегию первого игрока α_s и управление второго игрока ν_s , реализующие решение по Штакельбергу типа при доброжелательном выборе ведомого, такие, что выигрыш по этой паре равен $(\sigma_1(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta^*)), \sigma_2(x(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta^*)))$. При этом $\alpha_s[\nu_s] = \eta^*$.

Построение квазистратегии лидера ведется с использованием метода стратегий-наказания. Таким образом, множество выигрышей в ситуациях равновесия по Штакельбергу при формализации в классе квазистратегий лидера совпадает с множеством выигрышей при позиционной формализации [2]. Также в работе рассмотрен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Литература

- [1] *Olsder G. J.* Phenomena in Inverse Stackelberg Games, Part 2: Dynamic Problems // *ЖОТА*. 2009. V. 143, No. 3. Pp. 601-61.
- [2] *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. — Екатеринбург: Наука, 1993.
- [3] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НА МНОЖЕСТВЕ ЧИСТО КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР

Бакланов А.П.¹

В задачах управления часто приходится вводить расширение множества обычных управлений, в силу того что отсутствуют теоремы существования оптимального решения, а также существует необходимость «регуляризации» практически интересных постановок [1], связанных, в частности, с поиском асимптотического результата при ослаблении ограничений на допустимые управления. Неудивительно, что игровые задачи также требуют расширения, причем их можно разделить на два типа: те, для которых корректно лишь расширение произведения исходных множеств обычных управлений игроков, и те, для которых достаточно расширения множеств обычных управлений каждого из игроков. В задачах последнего типа обобщенный максимин принимает следующий вид:

$$V = \max_{\nu \in B} \min_{\mu \in A} \tilde{\alpha}(\mu, \nu),$$

где A, B — некоторые множества обобщенных элементов, а $\tilde{\alpha}$ — обобщенная функция платы. В работе [2] используется общий подход, связанный с использованием расширений в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер, в таком случае множества A и B есть некоторые компакты в $*$ -слабой топологии, суженной на соответствующее подмножество к.-а. мер (в [2] были использованы к.-а. $(0,1)$ -меры). Аппарат к.-а. мер позволяет обрабатывать разрывные функции в коэффициентах при управлении. Более того, именно множество чисто к.-а. мер позволяет делать это, чем и обусловлено обязательное вхождение чисто к.-а. мер в множества A, B в задачах, подобных рассмотренной в [2]. Интересен, однако, нетипичный случай, когда множества A, B состоят только из чисто к.-а. мер. Ниже будет описана содержательная постановка игровой задачи (используя результаты [3]), где множества обобщенных элементов каждого из игроков состоят только из чисто к.-а. мер.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-90432-укр_ф_а.

Итак, фиксируем два неограниченных метрических пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) , а также произвольные точки $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Через S_X^ε обозначаем ε -окрестность точки x_0 в метрике ρ_X , аналогично S_Y^κ — κ -окрестность точки y_0 в метрике ρ_Y , где $\varepsilon \in]0, \infty[$, $\kappa \in]0, \infty[$. Пусть $H_X^\varepsilon \triangleq X \setminus S_X^\varepsilon$, $H_Y^\kappa \triangleq Y \setminus S_Y^\kappa$. Введем следующие семейства множеств: $\mathcal{H}_X \triangleq \{H_X^\varepsilon : \varepsilon \in]0, \infty[\}$, $\mathcal{H}_Y \triangleq \{H_Y^\kappa : \kappa \in]0, \infty[\}$. Множества $\mathcal{H}_X, \mathcal{H}_Y$ являются базами фильтров в множествах X, Y соответственно. Пусть заданы ограниченные вектор-функции $\mathbf{u} : X \rightarrow \mathbf{R}^k$ и $\mathbf{v} : Y \rightarrow \mathbf{R}^l$, где \mathbf{R}^n — n -мерное арифметическое пространство. Пусть определена непрерывная по совокупности переменных функция платы $\Upsilon : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}$. Следовательно, $\Upsilon(\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(y)) \in \mathbf{R} \forall \varepsilon \in]0, \infty[\forall x \in H_X^\varepsilon \forall \kappa \in]0, \infty[\forall y \in H_Y^\kappa$. Теперь можно рассмотреть игровую постановку: при заданных $\mathbf{u}, \mathbf{v}, x_0 \in X, y_0 \in Y$ первый игрок пытается минимизировать значение функции Υ путем выбора $x \in H_X^\varepsilon$, второй же игрок ставит своей целью максимизировать Υ , выбирая $y \in H_Y^\kappa$. Следовательно, мы рассматриваем задачу

$$\Upsilon(\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(y)) \rightarrow \sup_{y \in H_Y^\kappa} \inf_{x \in H_X^\varepsilon},$$

где $\varepsilon \in]0, \infty[$, $\kappa \in]0, \infty[$. В дальнейшем, однако, нам будет интересен асимптотический вариант данной постановки (ε, κ бесконечно большие), который позволит уйти от фиксации x_0, y_0 .

Пусть $V(\varepsilon, \delta) \triangleq \sup_{y \in H_Y^\kappa} \inf_{x \in H_X^\varepsilon} \Upsilon(\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(y))$. В работе показано, что

$$V(\varepsilon, \delta) = \max_{b \in cl(\mathbf{v}^1(H_Y^\kappa), \tau_{\mathbf{R}}^{(l)})} \min_{a \in cl(\mathbf{u}^1(H_X^\varepsilon), \tau_{\mathbf{R}}^{(k)})} \Upsilon(a, b) \in \mathbf{R} \forall \varepsilon, \kappa \in]0, \infty[$$

где $\tau_{\mathbf{R}}^{(k)}, \tau_{\mathbf{R}}^{(l)}$ — обычные топологии покоординатной сходимости. Более того, определен асимптотический максимин $\mathcal{V} \triangleq \max_{b \in \mathbb{G}_2} \min_{a \in \mathbb{G}_1} \Upsilon(a, b) \in \mathbf{R}$, где асимптотические области достижимости

$$\mathbb{G}_1 \triangleq \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} cl(\mathbf{u}^1(H_X^\varepsilon), \tau_{\mathbf{R}}^{(k)}), \quad \mathbb{G}_2 \triangleq \bigcap_{\kappa \in]0, \infty[} cl(\mathbf{v}^1(H_Y^\kappa), \tau_{\mathbf{R}}^{(l)})$$

являются компактными. С учетом положений [4] устанавливается

Теорема. *Выполняется следующее утверждение об аппроксимации \mathcal{V} : $\forall \xi \in]0, \infty[\exists \theta_\xi \in]0, \infty[: |\mathcal{V} - V(\varepsilon, \delta)| < \xi \forall \varepsilon \in]0, \theta_\xi[\forall \kappa \in]0, \theta_\xi[$.*

Расширение исходной задачи происходит следующим образом: каждая точка множества X, Y переводится оператором погружения в меру Дирака, сосредоточенную в этой точке. Полученное подмножество конечно-аддитивных $(0,1)$ -мер является компактом. Более того, оно содержит обобщенные множества притяжения A_p, B_p соответственно первого и второго игрока, которые состоят только из чисто к.-а. мер.

Предложение. *Выполняется $\mathcal{V} = \max_{\nu \in B_p} \min_{\mu \in A_p} \tilde{\alpha}(\mu, \nu)$, где $\tilde{\alpha}$ — обобщенная функция платы.*

В связи с постановками подобных задач см. [5] — [7].

Литература

- [1] *Ченцов А.Г.* Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. — Екатеринбург: Наука, 1993.
- [2] *Бакланов А.П., Ченцов А.Г.* К вопросу о расширении одной игровой задачи в классе двузначных конечно-аддитивных мер // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, № 1. С. 15–38.
- [3] *Морина С.И., Ченцов А.Г.* Об одной задаче асимптотической оптимизации // Вестник Челябинского государственного университета. Математика, Механика, Информатика. 1994. Т. 2, № 1. С. 80–87.
- [4] *Ченцов А.Г.* О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. Вып. 3. С. 104–119.
- [5] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
- [6] *Даффин Р.Дж.* Бесконечные программы / в сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». С. 263–267. — М.: ИИЛ, 1959.
- [7] *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971.

**К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА
УБЕГАЮЩИХ, ДОСТАТОЧНОГО
ДЛЯ РАЗРЕШИМОСТИ ГЛОБАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
УКЛОНЕНИЯ В ИГРАХ СО СКАЛЯРНОЙ МАТРИЦЕЙ**

Банников А.С.

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m .

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = -a(t)x_i(t) + u_i(t), \quad u_i \in Q.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j(t) = -a(t)y_j(t) + v_j(t), \quad v_j \in Q.$$

При $t = t_0$ заданы начальные позиции преследователей x_1^0, \dots, x_n^0 и убегающих y_1^0, \dots, y_m^0 , причём

$$z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0 \neq 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $a(t)$ — вещественная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t .

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы «поймать» всех убегающих. Цель группы убегающих — помешать этому, то есть предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи.

Пусть $z_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z_0)$.

Будем предполагать, что убегающие используют кусочно-программные стратегии, а преследователи используют кусочно-программные контрстратегии (см., например, [1]).

$$\text{Пусть } g(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} a(s) ds \, d\tau, \quad \lambda_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(t)}.$$

Далее предполагаем, что выполнено следующее условие: $\lambda_0 = 0$.

Определение 1. В игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит поимка, если существует $T > t_0$ и по любым стратегиям V_1, \dots, V_m убегающих E_1, \dots, E_m существуют контрстратегии U_1, \dots, U_n преследователей P_1, \dots, P_n такие, что существуют моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_m \in [t_0, T]$ и номера $s_1, \dots, s_m \in \{1, \dots, n\}$, для которых

$$x_{s_i}(\tau_i) = y_i(\tau_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

где $x_q(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя P_q .

Определение 2. В игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > t_0$ существуют стратегии V_1, \dots, V_m убегающих E_1, \dots, E_m такие, что для любых траекторий $x_1(t), \dots, x_n(t)$ преследователей P_1, \dots, P_n существует номер $s \in \{1, \dots, m\}$, что

$$y_s(t) \neq x_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [t_0, T],$$

где $y_s(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего P_s .

Определение 3. Если для любого z_0 в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи, то будем говорить, что разрешима глобальная задача уклонения.

Теорема 1 (Разрешимость глобальной задачи уклонения, [2]).

Для любых натуральных p, m таких, что $m \geq p \cdot 2^p + 2$, в игре $\Gamma(2^p + 1, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи для любого z_0 .

Определим функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом:

$f(n) = \min \{m \mid \text{в } \Gamma(n, m, z_0) \text{ происходит уклонение от встречи для любого } z_0\}$.

Теорема 2 (Оценка сверху, [2]). *Существует константа $C_1 > 0$ такая, что для всех натуральных $n \geq 2$ справедливо следующее неравенство:*

$$f(n) \leq C_1 n \lg n.$$

Теорема 3 (Оценка снизу). *Существует константа $C_2 > 0$ такая, что для всех натуральных $n \geq 2$ справедливо следующее неравенство:*

$$f(n) \geq C_2 n \lg n.$$

Следствие 1 (Ср. с [3]). Для любого натурального ℓ существуют натуральные n и m , существует z_0 , такие, что $m - n > \ell$ и в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит поимка.

Следствие 2. Для любого натурального ℓ существуют натуральные n и m такие, что в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ происходит уклонение от встречи для любого z_0 , а в игре $\Gamma(n+1, m+\ell, z'_0)$ происходит поимка при некотором z'_0 .

Литература

- [1] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992.
- [2] Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 17–22.
- [3] Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1366–1374.

**СТРУКТУРА МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ
СТОХАСТИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**Башкирцева И.А., Нурмухаметова Д.Р.¹

Рассмотрим управляемую стохастическую систему

$$dx = f(x, u)dt + \varepsilon\sigma(x, u)dw, \quad (1)$$

где $f(x, u)$ – достаточно гладкая вектор-функция, зависящая от управляющего параметра $u \in R^l$; $x, f \in R^n$; $w(t)$ – стандартный винеровский процесс; $\sigma(x, u)$ – достаточно гладкая $n \times n$ -матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния и управления; ε – скалярный параметр интенсивности возмущений.

Рассматривается задача построения регулятора

$$u(x) = K(x - \bar{x}), \quad (2)$$

выбранного в форме линейной обратной связи по отклонению состояний системы от равновесия \bar{x} соответствующей детерминированной системы ($\varepsilon = 0$) и позволяющего добиться у стохастического равновесия заданных вероятностных свойств.

В качестве основной вероятностной характеристики стохастического равновесия рассматривается матрица стохастической чувствительности W [1], которая связывает интенсивность случайной помехи с ковариацией случайных состояний системы. Матрица W является решением следующего матричного уравнения

$$(A + BK)W + W(A + BK)^T + S = 0, \quad (3)$$

где $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0)$, $K = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x})$, $S = \sigma(\bar{x}, 0)\sigma^T(\bar{x}, 0)$.

Рассмотрим двумерный случай ($n = 2$).

Если $\text{rang } B = 2$, то система является полностью стохастически управляемой. Это означает, что для любой наперед заданной симметрической положительно определённой матрицы $W =$

¹Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10-01-96022урал.

$= \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix}$ существует матрица K , обеспечивающая у замкнутой системы (1), (2) равновесие \bar{x} со стохастической чувствительностью W .

В случае, когда $\text{rank } B = 1$, система не является полностью стохастически управляемой и возможности выбора элементов W ограничены некоторым множеством достижимости.

Утверждение. Для $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ множество достижимости задается системой

$$\begin{aligned} aw_{11} + bw_{12} &= c, \\ w_{11} &> 0, \\ w_{11}w_{22} &> w_{12}^2, \end{aligned}$$

где $a = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})$, $b = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x})$, $c = -\frac{s_{11}}{2}$.

Возможные конфигурации множества достижимости описаны в следующей теореме.

Теорема. Пусть $\text{rank } B = 1$. Область множества достижимости системы (1), (2) на плоскости в координатах w_{11}, w_{22} представляет собой либо пустое множество (детерминированная система не стабилизируема), либо прямую, параллельную оси, вдоль которой действует управление (детерминированная система стабилизируема, но не является полностью управляемой), либо неограниченную область, расположенную выше ветви гиперболы, задающей границу множества (детерминированная система полностью управляема).

Интересной здесь представляется задача построения оптимального регулятора $u(x_1, x_2) = k_1(x_1 - \bar{x}_1) + k_2(x_2 - \bar{x}_2)$, позволяющего добиться наименьшего разброса случайных состояний системы при заданном значении величины $\|K\|^2 = k_1^2 + k_2^2$. Величина $\|K\|^2$ характеризует затраты на управление.

На рис. 1 пунктиром обозначена граница множества достижимости для стохастического брасселятора

$$\dot{x}_1 = 0.2 - 2.1x_1 + x_1^2x_2 + \varepsilon\dot{w}_1, \quad \dot{x}_2 = 1.1x_1 - x_1^2x_2 + \varepsilon\dot{w}_2 + u, \quad (4)$$

а сплошными линиями — линии уровня, соответствующие некоторым заданным значениям $\|K\|^2$.

Зафиксируем $\|K\|^2 = 0.8$ и, решив задачу минимизации, найдём точку кривой (на рис. 1 эта точка выделена), соответствующую матрице W с минимальной чувствительностью: $w_{11} + w_{22} \rightarrow \min$.

На рис. 2 приведены результаты компьютерного моделирования стохастического равновесия, соответствующего полученному управлению (управление в системе подключается в момент $t = 1000$).

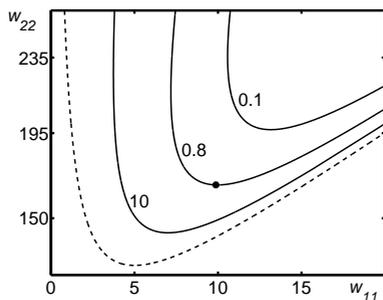


Рис. 1: множество достижимости для стохастического брюсселятора и линии уровня функции затрат

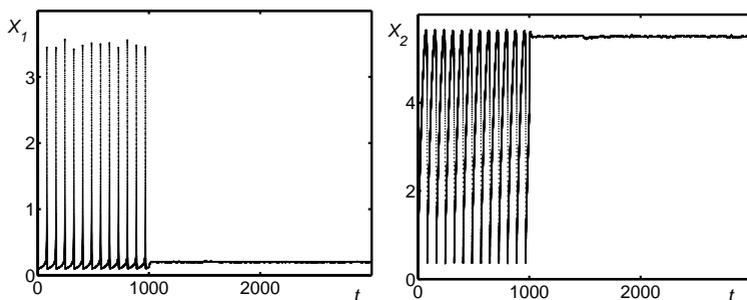


Рис. 2: стабилизация стохастических осцилляций брюсселятора

Литература

[1] Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Об управлении стохастической чувствительностью // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 78–89.

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ РЛС ПО АЗИМУТУ

Бедин Д.А.¹

Работа продолжает исследование [1]. Рассматривается задача наблюдения с помощью нескольких радиолокационных станций (РЛС) за воздушным судном (ВС) при следующих предположениях:

- ВС и все РЛС находятся в одной плоскости $\Pi \simeq \mathbb{R}^2$;
- ВС движется равномерно и прямолинейно;
- интервал наблюдения недолгий; как следствие, всё движение заключено в достаточно малой области $X \subset \Pi$ по сравнению с расстояниями до каждого радиолокатора.

Будем считать заданными последовательность времён замеров $\{t_i\}_{i=1}^N$ и числовую функцию $k(i)$, возвращающую номер измеряющего радиолокатора. Количество РЛС равно M . Положение ВС на момент времени t_i обозначим через координатный вектор-столбец x_i . Замер РЛС в тот же момент обозначим символом z_i .

Пусть x_* — средняя точка области X и d_k — расстояние от x_* до k -й РЛС. Вектор единичной длины $e_{1,k}$ будет указывать направление на k -ю РЛС из x_* . Также введём вектор $e_{2,k}$, получаемый поворотом $e_{1,k}$ на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Замер z_i связан с положением x_i в тот же момент уравнением наблюдения (наблюдает радиолокатор с номером $k = k(i)$):

$$z_i = x_i + e_{2,k(i)}d_{k(i)}\lambda_{k(i)} + e_{2,k(i)}d_{k(i)}\sigma_{2,k(i)}w_i^\varphi + e_{1,k(i)}\sigma_{1,k(i)}w_i^d. \quad (1)$$

Здесь λ_k — искомая систематическая ошибка по азимуту для k -й РЛС; w_i^φ , w_i^d — случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; величина w_i^φ отражает ошибку радиолокации по углу, $\sigma_{2,k}$ — её интенсивность; w_i^d связана с ошибкой радиолокации по дальности, интенсивность $\sigma_{1,k}$.

¹Работа выполнена при поддержке УрО РАН, проект № 09-С-1-1010, а также при поддержке гранта РФФИ № 10-01-96006.

Поскольку ВС движется равномерно и прямолинейно: $x_i = x_0 + v_0 t_i$ (x_0 и v_0 — векторы начального положения и скорости), уравнение (1) можно переписать в более удобном матричном виде

$$z_i = C_{i,k(i)} y + D_{k(i)} w_i, \quad (2)$$

где в $y = [x_0^T \ v_0^T \ \lambda_1 \cdots \lambda_M]^T$ записаны все неизвестные переменные, а в $w_i = [w_i^d \ w_i^e]^T$ — ошибки радиолокации. Таким образом, задача нахождения систематических ошибок РЛС по азимуту сводится к задаче оценивания неизвестных постоянных параметров y при линейном уравнении наблюдения (2).

Для таких задач наилучшей оценкой y в смысле минимума критерия $\mathbf{E} [(y - \hat{y})^2]$ является условное математическое ожидание по последовательности замеров \hat{y} . Существуют простые формулы для выражения оценки [2]. Точность оценивания характеризуется матрицей ковариации ошибки, вычисляемой по формуле

$$P = \mathbf{E} [(y - \hat{y})(y - \hat{y})^T] = \left(\sum_{i=1}^N C_i^T (D_i D_i^T)^{-1} C_i \right)^{-1}. \quad (3)$$

Поскольку в (2) стоит y , то вместе с λ_k оцениваются x_0 и v_0 . Оценка точности одних только λ_k предоставляет соответствующая часть $P_{\lambda\lambda}$ матрицы ковариаций. Однако выражение (3) сложно для анализа, если требуется изучить зависимость точности от взаимного геометрического расположения на плоскости П области наблюдения X и всех РЛС. Получена формула для $P_{\lambda\lambda}$, позволяющая упростить анализ геометрического фактора точности. Вводя обозначения

$$\Sigma_1 = \text{diag} \left(\frac{\sigma_{1,1}^2}{N_1}, \dots, \frac{\sigma_{1,M}^2}{N_M} \right), \quad \Sigma_2 = \text{diag} \left(\frac{\sigma_{2,1}^2}{N_1}, \dots, \frac{\sigma_{2,M}^2}{N_M} \right),$$

$$D = \text{diag} (d_1, \dots, d_M), \quad V = \begin{bmatrix} e_{2,1}^T e_{2,1} & \cdots & e_{2,1}^T e_{2,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{2,M}^T e_{2,1} & \cdots & e_{2,M}^T e_{2,M} \end{bmatrix},$$

$$u = \sum_{k=1}^M \sum_{l=k+1}^M \left(N_k \sigma_{1,k}^{-2} N_l \sigma_{1,l}^{-2} \right) \sin^2(\varphi_k - \varphi_l),$$

где символ diag означает диагональную матрицу, N_k – число замеров k -й РЛС, запишем эту формулу:

$$P_{\lambda\lambda} = \Sigma_2 + \frac{1}{u} D^{-1} V \Sigma_1^{-1} V D^{-1}. \quad (4)$$

Второе слагаемое в формуле (4) меняется в зависимости от расположения области наблюдения X относительно РЛС. На рис. 1 показаны линии уровня выражения $\sqrt{\text{tr}[P_{\lambda\lambda}]}$ как функции средней точки области X . РЛС расположены в местах светлых пятен.

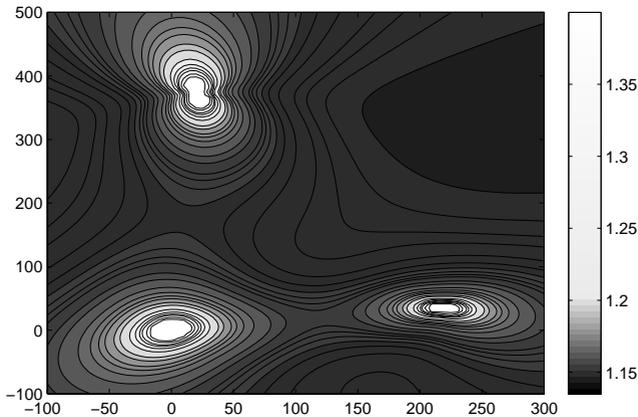


Рис. 1: функция $\sqrt{\text{tr}[P_{\lambda\lambda}]}$

Литература

- [1] Бедин Д.А. Алгоритм расчёта систематических ошибок нескольких РЛС по азимуту на основе фильтрации Калмана / в сб. «Современные проблемы математики». Тезисы 42-й Всероссийской молодёжной школы-конференции конференции. С. 8–10. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.
- [2] Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 1. Введение в теорию оценивания. — СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2010.

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Востриков И.В.¹

Рассматривается линейная управляемая система с запаздыванием:

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(\tau) = x^0(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0]. \quad (2)$$

Под пространством H будем понимать прямое произведение пространств $L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ и \mathbb{R}^n :

$$H = L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, \quad \text{где число } h > 0.$$

Под $\mathcal{E}(q, Q)$, где $q \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q' = Q > 0$, будем понимать эллипсоид с центром q и матрицей Q .

Решение системы (1), (2) будем понимать в смысле Каратеодори и рассматривать в конечномерном пространстве как векторную функцию $x(\tau)$, определенную в каждый момент времени $\tau \in [t_0 - h, t_1]$. Однако, уравнение (1) можно рассматривать как эволюционное уравнение в пространстве функций $x_t(\cdot)$ из H :

$$\frac{dx_\tau(\cdot)}{d\tau} = Ax_\tau(\cdot),$$

где A — линейный оператор в пространстве H ([1, с. 162]).

Таким образом, проблему нахождения областей достижимости данной системы можно рассматривать в двух постановках: конечномерной и функциональной.

Конечномерный случай. Наложим на управление и начальные условия следующие ограничения:

$$u(\tau) \in \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) \quad \text{при } \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x^0(\tau) \in \mathcal{E}(x_0(\tau), X_0(\tau)), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0].$$

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 09-01-00589-а и МК-1111.2011.1.

Множество достижимости можно представить в виде суммы эллипсоида и интегралов от эллипсоидов:

$$X[t] = x^*(t) + S(t, t_0)\mathcal{E}(0, X_0(t_0)) + \int_{t_0}^t S(t, \tau)B(\tau)\mathcal{E}(0, Q(\tau))d\tau + \\ + \int_{t_0-h}^{t_0} S(t, \tau+h)A_1(\tau+h)\mathcal{E}(0, X_0(\tau))d\tau.$$

Внутренние оценки

Используя аппарат внутреннего эллипсоидального оценивания [2], можно показать, что множество достижимости $X[t]$ есть объединение эллипсоидов по всевозможным $T(\cdot), T_0(\cdot)$:

$$X[t] = \cup\{\mathcal{E}(x^-(t), X^-(t))|T(\cdot), T_0(\cdot)\},$$

$$X^-(t) = Q^*(t)'Q^*(t).$$

Матрица $Q^*(t)$ является решением следующего дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$\dot{Q}^*(\tau) = Q^*(\tau)A_0'(\tau) + Q^*(\tau-h)A_1'(\tau) + T(\tau)Q^{1/2}(\tau)B'(\tau), \quad \tau \in [t_0, t],$$

при начальных условиях

$$Q^*(\tau) = T_0(\tau)X_0^{1/2}(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0],$$

$T_0(\cdot), T(\cdot)$ — любые измеримые по Лебегу функции, значениями которых являются ортогональные матрицы в $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Внешние оценки

Используя аппарат внешнего эллипсоидального оценивания [3], можно показать, что множество достижимости $X[t]$ есть пересечение эллипсоидов:

$$X[t] = \cap(\mathcal{E}(x_+, X_+(t))|p(\cdot), p_0(\cdot)) \\ X_+(t) = \left(\int_{t_0-h}^{t_0} p_0(\tau)d\tau + p_0(t_0) + \int_{t_0}^t p(\tau)d\tau \right) \times \\ \times \left(\int_{t_0-h}^{t_0} p_0^{-1}(\tau)S(t, \tau+h)A_1(\tau+h)X_0(\tau)A_1(\tau+h)S'(t, \tau+h)d\tau + \right. \\ \left. + p_0^{-1}(t_0)S(t, t_0)X_0(t_0)S'(t, t_0) + \int_{t_0}^t p^{-1}(\tau)S(t, \tau)Q(\tau)S'(t, \tau)d\tau \right).$$

Вводя дополнительные обозначения, можно получить дифференциальное уравнение для $X_+(t)$:

$$\dot{X}_+(t) = A_0(t)X_+(t) + X_+(t)A'_0(t) + \Pi(t)(A_1(t)Q(t-h, t) + Q'(t-h, t)A'_1(t)) + \pi^{-1}(t)Q(t) + \pi(t)X_+(t),$$

$$\frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial t} = A_0(t)Q(t, \tau) + A_1(t)Q(t-h, \tau) + p^{-1}(t)Q(t)S'(\tau, t).$$

Функциональный случай

Справедливо следующее выражение для множества достижимости:

$$X[t] = x_t^*(\cdot) + S_t(\cdot, t_0)\mathcal{E}(0, X_0(t_0)) + \int_{t_0}^t S_t(\cdot, \tau)\mathcal{E}(0, Q(\tau))d\tau + \int_{t_0-h}^{t_0} S_t(\cdot, \tau+h)A_1(\tau+h)\mathcal{E}(0, X_0(\tau))d\tau.$$

Метод внутреннего эллипсоидального оценивания интегралов от эллипсоидов переносится на интегралы от множеств эллипсоидального типа. Можно вывести выражения для внутренних оценок множества достижимости в пространстве H . Эти оценки являются множествами эллипсоидального типа, и их объединение является искомым множеством достижимости в пространстве H .

Литература

- [1] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis: internal approximation // System and Control Letters. 2000. V. 41. Pp. 201-211.
- [3] Kurzhanski A.B., Varaiya P. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External Approximations // Optimization methods and software. 2002, V. 17, №2, pp. 177-206.
- [4] Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Гомоюнов М.И.¹

В рамках теоретико-игрового подхода [1–3] рассматривается задача о вычислении величины оптимального гарантированного результата управления и построении оптимальной позиционной стратегии управления для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A_0(t)x(t) + \sum_{m=1}^M A_m(t)x(t - h_m) + \int_{t_0 - h_0}^t K_1(t, \xi)x(\xi)d\xi + \\ & + B_0(t)u(t) + \sum_{k=1}^K B_k(t)u(t - \tau_k) + \int_{t_0 - \tau_0}^t K_2(t, \xi)u(\xi)d\xi + C(t)v(t), \quad (1) \\ & t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad v \in \mathbb{R}^s \end{aligned}$$

с начальным условием

$$x[t_0 - h_0[\cdot]t_0] = x_0[t_0 - h_0[\cdot]t_0], \quad u[t_0 - \tau_0[\cdot]t_0] = u_0[t_0 - \tau_0[\cdot]t_0] \quad (2)$$

при показателе качества

$$\begin{aligned} \gamma = & \sqrt{\|D^{(1)}(x[\vartheta^{(1)}] - g^{(1)})\|^2 + \dots + \|D^{(N)}(x[\vartheta^{(N)}] - g^{(N)})\|^2 +} \\ & + \int_{t_0}^{\vartheta} [\langle u[t], \Phi(t)u[t] \rangle - \langle v[t], \Psi(t)v[t] \rangle] dt. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь t – текущий момент времени, x – вектор состояния системы, u – воздействие управления, v – воздействие неконтролируемой помехи. Величины запаздываний $h_0 \geq h_m > 0$, $m \in \overline{1, M}$, и $\tau_0 \geq \tau_k > 0$, $k \in \overline{1, K}$, постоянны. Моменты времени t_0 и ϑ заданы. Матрицы-функции $A_m(t)$, $m \in \overline{0, M}$, $B_k(t)$, $k \in \overline{0, K}$, $C(t)$, $K_1(t, \xi)$ и $K_2(t, \xi)$ непрерывны. История движения $x_0[t_0 - h_0[\cdot]t_0] = \{x_0[\xi] \in \mathbb{R}^n, \xi \in [t_0 - h_0, t_0]\}$ предполагается непрерывной, история

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00313 и Программой Президиума РАН «Математическая теория управления».

управления $u_0[t_0 - h_0[\cdot]t_0) = \{u_0[\xi] \in \mathbb{R}^r, \xi \in [t_0 - h_0, t_0)\}$ – ограниченной и измеримой по Борелю. Натуральное число N ; моменты времени оценки качества движения $\vartheta^{(i)} \in [t_0, \vartheta]$, $\vartheta^{(i+1)} > \vartheta^{(i)}$, $i \in \overline{0, N-1}$, $\vartheta^{(N)} = \vartheta$; $(p^{(i)} \times n)$ -матрицы $D^{(i)}$ и целевые векторы $g^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1, N}$, а также симметричные непрерывные матрицы-функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ заданы. Квадратичные формы $\langle u, \Phi(t)u \rangle$ и $\langle v, \Psi(t)v \rangle$ положительно определены.

Цель задачи управления – доставить показателю (3) как можно меньшее значение.

На основе функциональной трактовки процесса управления, близкой [4, 5] и опирающейся на своеобразный прогноз движений, исходная задача (1)–(3) сводится к вычислению функции цены и построению оптимальных позиционных стратегий во вспомогательной дифференциальной игре, описываемой уравнением движения

$$\dot{z}(t) = \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t)v(t), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta \quad (4)$$

$$z \in \mathbb{R}^p, \quad p = \sum_{i=1}^N p^{(i)}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad v \in \mathbb{R}^s$$

и показателем качества

$$\gamma_z = \|z[\vartheta]\| + \int_{t_0}^{\vartheta} [\langle u[t], \Phi(t)u[t] \rangle - \langle v[t], \Psi(t)v[t] \rangle] dt, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{B}(t) = \{B^{(i)}(t), i \in \overline{1, N}\}, \quad \mathbf{C}(t) = \{C^{(i)}(t), i \in \overline{1, N}\},$$

$$B^{(i)}(t) = D^{(i)} \left(F(\vartheta^{(i)}, t) B_0(t) + \sum_{k=1}^K F(\vartheta^{(i)}, t + \tau_k) B_k(t + \tau_k) + \int_t^{\vartheta^{(i)}} F(\vartheta^{(i)}, \xi) K_2(\xi, t) d\xi \right), \quad C^{(i)}(t) = D^{(i)} F(\vartheta^{(i)}, t) C(t), \quad i \in \overline{1, N},$$

$F(\xi, t)$ – матрица Коши уравнения (1). Известно (см., например, [1]), что такая игра имеет цену и седловую точку из оптимальных позиционных стратегий.

Данное сведение позволяет применить для решения исходной задачи (1)–(3) методы позиционного управления обыкновенными дифференциальными системами. Несмотря на то что размерность p фазового вектора вспомогательной системы (4) может быть достаточно велика, в рассматриваемой задаче, как и в [6, 7], такой подход оказывается эффективным.

Для вычисления цены дифференциальной игры (4), (5) используется метод выпуклых сверху оболочек [3, 5] вспомогательных функций из стохастического программного синтеза [1], для построения оптимальной стратегии – метод экстремального сдвига на сопутствующие точки [1, 3].

Приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

- [1] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
- [2] *Осипов Ю.С., Пименов В.Г.* К теории дифференциальных игр в системах с последствием // ПММ. 1978. Т. 42, Вып. 6. С. 963–977.
- [3] *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. — Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.
- [4] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
- [5] *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60, Вып. 6. С. 885–900.
- [6] *Стихина Т.К.* К теории позиционного управления в системах с запаздыванием // Деп. в ВИНТИ 06.04.1984, № 2051.
- [7] *Лукоянов Н.Ю., Решетова Т.Н.* Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // ПММ. 1998. Т. 62, Вып. 4. С. 586–597.

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Гребенникова И.В.

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$ при части производных) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $u \in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0 , Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Управление $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, $P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t), t \in T\}$.

Рассматривается минимаксная задача управления: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)), \quad (2)$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящих из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Пусть $Z[t, \tau]$ есть фундаментальная матрица решений системы (1) ($u \equiv 0$) $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$, E — единичная матрица. Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Для реализации итерационной процедуры [1] построения оптимального решения задачи (2) важно правильно выбрать начальную асимптотику. Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований [1]. В [1] приведены рекуррентные формулы для вычисления блоков $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau]$ ($i, j = 1, 2$), $k = 0, 1, 2, \dots$, определяющих асимптотику матрицы $Z[t, \tau]$ относительно малого параметра $\mu > 0$.

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. При $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, справедливо

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}),$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p, q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}),$$

$$\chi^{(k)}(p, q) = -h_{(k)}^{**}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} \rho(-r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) \mid P(\tau)) d\tau -$$

$$- \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} \rho(-r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) \mid V(s)) ds, \quad V(s) = P(t_1 - \mu s),$$

где $\alpha_k(\mu) > 0$: $\alpha_k(\mu) = o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$, причем функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q)$, $i = 1, 2$, определяются следующим образом: при $t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) = (p' Z_{11}^{(k)}[t_1, \tau] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] (A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, \tau] + G_2(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, \tau]) ds) B_0(\tau) -$$

$$- \frac{d}{d\tau} \left(p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu s, \tau] ds \right) \times$$

$\times A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau)$, при $0 \leq s < \alpha_k(\mu)/\mu$

$$r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) = [q' \Phi[t_1, s] + \frac{d}{ds} (p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, t_1 - \mu s] +$$

$$+ \int_0^s q' \Phi[t_1, \sigma] A_{21}(t_1 - \mu \sigma) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu \sigma, t_1 - \mu s] d\sigma) A_{22}^{-1}(t_1 - \mu s)] \times$$

$$\times B_2(t_1 - \mu s) + \mu \xi(p, q, \mu),$$

здесь $\Phi[t_1, s] = Y[t_1, t_1 - \mu s]$, $Y[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau, \tau] = E$; $\xi(p, q, \mu) = O(\mu^{k+1})$,

$$\begin{aligned}
 h_{(k)}(p, q) &= \varphi^*(p, q) - \rho(p'Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s](A_{21}(t_1 - \mu s) \times \\
 &\times Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] + G_2(t_1 - \mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0])ds | X_0) - \\
 &- \rho(p'Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s](A_{21}(t_1 - \mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] + \\
 &+ G_2(t_1 - \mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0])ds | Y_0) - \\
 &- \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_h^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi(\tau - h))d\tau, \\
 r_h^{(k)}(\tau, t, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])G_0(\tau) - \\
 &- \frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t, s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau);
 \end{aligned}$$

$\varphi^*(p, q)$ – функция, сопряженная к $\varphi(p, q)$; $h^{**}(p, q) = \overline{(co\ h)}(p, q)$ – замыкание выпуклой оболочки функции $h(p, q)$; $\rho(q|X)$ – опорная функция множества X на элементе q .

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu), \\ v^{(k)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha_k(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$

$u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:

при почти всех $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)], s \in [0, \alpha_k(\mu)/\mu]$

$$\begin{aligned}
 r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u^{(k)}(\tau) &= \min_{u(\tau) \in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u(\tau), \\
 r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v^{(k)}(s) &= \min_{v(s) \in V(s)} r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v(s).
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $0 < \mu \leq \mu_0, \mu_0$ достаточно мало. Тогда $u_\mu^{(k)}(\cdot)$ представляет оценку

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}).$$

Литература

- [1] Гребенникова И.В. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 14–22.

ОБ ОДНОЙ ИЗ РЕАЛИЗАЦИЙ СЕТОЧНОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ

Зимовец А.А.¹

В работе рассматривается численный метод построения множеств достижимости управляемых систем с учетом фазовых ограничений. Особенность предложенного в исследовании метода заключается в том, что в процессе вычислений участвуют не все точки множества, а только точки из его внутреннего граничного слоя некоторой заданной толщины ε . Такой подход позволяет избежать ряда проблем, связанных с обходом только граничных точек сеточными методами. Данная работа является дальнейшим развитием идей и подходов, описанных в работах [1–3, 5].

Будем считать, что динамика рассматриваемой системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in P, \quad (1)$$

где x — n -мерный фазовый вектор системы в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , u — вектор управляющих воздействий, P — компакт в евклидовом пространстве \mathbb{R}^p .

Предполагается, что выполнены следующие условия:

Условие А. Вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных (t, x, u) в области $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$, а также для любой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует такая константа $L = L(\mathcal{D}) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^*, u) - f(t, x_*, u)\| \leq L \|x^* - x_*\|$$

для всех $(t, x, u) \in \mathcal{D} \times P$.

Условие В. Существует такая константа $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \mu(1 + \|x\|)$$

для всех $(t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96006-р_урал а по программе Президента РФ НШ-64508.2010.1 и программе Президиума РАН «Математическая теория управления» № 29.

Следует отметить, что в простейшей реализации сеточного метода построения множества достижимости системы (1) для каждого узла заранее заданной сетки, принадлежащего исходному множеству, приближенно вычисляется его локальное множество достижимости, а затем полученные множества объединяются. Однако реализация данного метода приводит к необходимости выполнения очень большого объема вычислений для получения итогового результата. Отсюда вытекает необходимость в сокращении количества выполняемых операций.

Объем вычислений можно уменьшить, если вместо расчета локальных множеств достижимости всех узлов сетки, принадлежащих исходному множеству, рассчитать локальные множества достижимости только его граничных узлов, а затем произвести заполнение внутренней части вычисленного множества с помощью одного из алгоритмов заливки [4]. Под граничными узлами будем понимать узлы из рассматриваемого множества, имеющие хотя бы один соседний узел, не принадлежащий этому множеству. Однако для реализации данного метода необходимо решить следующие проблемы:

1. Проблема разрывности границы. При наличии «дыр» в границе процесс заливки может выйти за пределы рассматриваемого множества.
2. Проблема определения внутренней и внешней стороны границы. К этой проблеме также примыкает проблема выявления и удаления получающихся в процессе расчета ложных границ, обе стороны которых являются внутренними.

Первую из этих проблем можно решить путем построения выпуклых оболочек локальных множеств достижимости всех связок из n соседних узлов, составляющих границу исходного множества. При этом количество вычислений можно уменьшить, если предварительно произвести триангуляцию границы.

Вторую из этих проблем, обусловленную погрешностями вычислений, можно решить путем рассмотрения, помимо самой границы исходного множества, некоторой ее ε -окрестности, расположенной внутри этого множества. При этом выбор величины ε , компенсирующей погрешность вычислений, позволит гарантированно определить

внутреннюю и внешнюю стороны новых границ и правильно удалить все ложные границы.

Данный подход также позволяет легко учесть накладываемые на систему (1) фазовые ограничения. Для этого построение нового множества достижимости на каждом шаге итерационного процесса необходимо разбить на два этапа. На первом этапе строится множество достижимости без учета фазовых ограничений. На втором этапе полученные узлы сетки проверяются на принадлежность фазовым ограничениям и те из них, которые не удовлетворяют фазовым ограничениям, отбрасываются. Из оставшихся узлов сетки формируется итоговое множество достижимости для следующего шага итерационного процесса.

Литература

- [1] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
- [2] *Матвейчук А.Р., Ушаков В.Н.* О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5-20.
- [3] *Михалев Д.К.* Построение решений в дифференциальных играх на конечном промежутке времени и визуализация решений: дисс. на соискание уч. степ. к.ф.-м.н. по спец. 05.13.18 математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Челябинск 2009.
- [4] *Роджерс Д.* Алгоритмические основы машинной графики. — М.: Мир, 1989.
- [5] *Ушаков В.Н., Незнахин А.А.* Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2001. Т. 41, Вып. 6. С. 895–908.

АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТОЙ-НОСИТЕЛЕМ ПРИ ВЫВОДЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОКОЛОЗЕМНУЮ ОРБИТУ

Кандоба И.Н., Костоусов В.Б., Ложников А.Б.¹

В докладе обсуждаются постановки задач управления нелинейной динамической системой, описывающей движение ракеты-носителя (РН) на безатмосферном участке полета. Рассматриваемая математическая модель описывает управляемое движение, в частности, перспективных РН типа Союз-2 (производитель ЦСКБ «Прогресс», г. Самара) на участках второй и третьей ступеней РН. Системы управления для этих типов РН разрабатываются в НПО автоматики им. акад. Н.А. Семихатова (г. Екатеринбург). Основное внимание уделяется актуальным для разработчиков систем управления задачам, в основе постановок которых лежит [1] следующая управляемая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= W(t, x, \vartheta, \psi) + g(x), \\ \dot{\vartheta} &= u_1(t), \\ \dot{\psi} &= u_2(t),\end{aligned} \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (1)$$

Здесь $x, v \in \mathbb{R}^3$ — координаты и скорости центра масс РН в некоторой инерциальной прямоугольной системе координат; $W(t, x, \vartheta, \psi) \in \mathbb{R}^3$ — реактивное ускорение; $g(x) \in \mathbb{R}^3$ — гравитационное ускорение; ϑ, ψ — углы тангажа и рыскания РН; t_0 — момент начала движения РН; t_f — момент выхода РН на заданную орбиту, $u_1(t), u_2(t)$ — функции управления, модули значений которых ограничены сверху некоторыми константами. В момент времени t_0 для системы (1) определены начальные условия. Кроме того, могут быть заданы дополнительные ограничения на фазовые переменные и на всем промежутке $[t_0, t_f]$. К таким дополнительным условиям приводят, например, требования падения отделяемых частей РН в определенные районы Земли или ограничения на максимальную перегрузку [2] на спускаемый аппарат, возвращаемый на Землю с любой точки траектории движения

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00493.

РН, например, в случае возникновения каких-либо непредвиденных ситуаций во время полета.

В настоящее время особый интерес вызывает задача построения программного управления, удовлетворяющего указанным ограничениям и обеспечивающего выход РН на заданную околоземную эллиптическую орбиту или в конкретную ее точку за минимальное время. Такая орбита определяется пятью параметрами: наклонение плоскости орбиты i , долгота восходящего узла Ω , максимальная h_{\max} и минимальная h_{\min} высоты, аргумент перигея ω . Точка выведения на орбите может быть задана приведенной широтой U . Здесь перечисленные параметры орбиты выведения могут быть выражены в терминах координат и скорости центра масс РН в момент t_f .

Следует отметить, что данная задача хорошо изучена только для некоторых частных случаев. Например, в работе [3] рассматривается случай плоского движения РН (угол рыскания равен нулю) в плоскопараллельном гравитационном поле без учета ограничений на управление и фазовые переменные. Для этой задачи в такой постановке методами вариационного исчисления определена структура оптимального программного управления по углу тангажа в виде дробно-линейного тангенса. Здесь параметры управления находятся решением двухточечной краевой задачи. В общей же постановке сформулированная задача до сих пор до конца не исследована — для нее существуют лишь приемлемые инженерные решения, обеспечивающие достаточно надежные пуски РН.

Для математической модели (1) достаточно актуальными для теоретиков и востребованными практиками являются и многие другие задачи, среди которых стоит выделить следующие:

1. Исследование вопроса существования допустимых управлений для различных начальных данных.
2. Построение множества достижимых орбит и достижимых точек орбиты для заданных начальных данных.
3. Построение допустимых и оптимального управления с учетом дополнительных ограничений на фазовые переменные.
4. Оценка влияния неопределенностей, обусловленных случайной природой термодинамических характеристик атмосферы

(плотность, температура, давление, ветер) и неточностью задания технических параметров РН (массы конструктивных блоков, запасов топлива, удельные тяги двигателей и т.п.).

5. Оценка максимальной величины массы выводимой на заданную орбиту полезной нагрузки и гарантийного запаса топлива.
6. Определение наилучших исходных данных для построения аварийных трасс полета с учетом ограничений на максимальную перегрузку.

В настоящее время продолжается интенсивное освоение околоземного пространства, поэтому потребность в фундаментальных и прикладных исследованиях в этой области по-прежнему остается очень высокой. Бурное развитие компьютерной техники и информационных технологий открывает новые возможности для создания высокоэффективных методик и алгоритмов, которые позволили бы повысить оперативность расчетов, снизить затраты на выведение на орбиту полезной нагрузки, обеспечить более высокую надежность и безопасность космических полетов. Решение сформулированных выше задач направлено на достижение этих целей и будет способствовать разработке более совершенных систем управления для РН различных типов.

Литература

- [1] *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. — М.: Наука, 1990.
- [2] *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. — М.: Наука, 1975.
- [3] *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С НЕТЕРМИНАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Корнев Д.В.¹

Рассмотрим дифференциальную игру [1–3], описываемую уравнением движения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leq t < \vartheta, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s, \end{aligned}$$

и показателем качества

$$\gamma = \sqrt{\mu_1^2(D_1(x(t_1) - c_1)) + \dots + \mu_N^2(D_N(x(t_N) - c_N))},$$

где x — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно. Заданы начальный и терминальный моменты времени t_0 и ϑ , моменты оценки качества движения $t_i \in [t_0, \vartheta]$ ($t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \dots, N-1$, $t_N = \vartheta$), $p_i \times n$ -матрицы D_i , целевые векторы $c_i \in \mathbb{R}^n$ и нормы $\mu_i(\cdot)$. Матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ кусочно непрерывны, P и Q компактны. Первый игрок нацелен минимизировать показатель γ , второй — максимизировать. Требуется численно найти приближенное значение цены игры $\rho(t_0, x_0)$, а также построить позиционные ζ -оптимальные законы управления первого и второго игроков.

В [3] дана следующая процедура для приближенного вычисления цены этой игры. Назначается разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$:

$$\Delta_k = \{\tau_j : \tau_1 = t_0, \tau_j < \tau_{j+1}, j = 1, \dots, k, \tau_{k+1} = \vartheta\}.$$

Определяются вспомогательные функции

$$\begin{aligned} h(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } t < t_1, \\ \max\{i = 1, \dots, N \mid t^{[i]} \leq t\}, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \Delta\psi_j(m) &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v) \rangle d\tau, \\ & m \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-12088.

где $X[\vartheta, \tau]$ – матрица Коши для уравнения $\dot{x} = A(t)x$, символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.

Попятно по шагам разбиения Δ_k определяются множества G_j векторов m и функции $\varphi_j(m), m \in G_j$. При $j = k + 1$ полагается

$$G_{k+1} = \{m = 0\}, \varphi_{k+1}(m) = 0, m \in G_{k+1},$$

а для текущего j , если $h(\tau_j) = h(\tau_{j+1})$:

$$G_j = G_{j+1}, \varphi_{j+1}^*(m) = \varphi(m), m \in G_j,$$

иначе, для $h = h(\tau_j) + 1$:

$$\begin{aligned} G_j &= \{m = \nu m_* + X^T[t_h, \vartheta] D_h^T l \mid l \in \mathbb{R}^{p_h}, \\ &\quad \mu_h^*(l) \leq \sqrt{1 - \nu^2}, \nu \in [0, 1], m_* \in G_{j+1}\}, \\ \varphi_{j+1}^*(m) &= \max_{m_*, \nu, l} [\nu \varphi_{j+1}(m_*) - \langle l, D_h c_h \rangle], m \in G_j, \end{aligned} \quad (1)$$

и, вне зависимости от условия:

$$\psi_j(m) = \Delta \psi_j(m) + \varphi_{j+1}^*(m), m \in G_j, \quad \varphi_j(m) = \{\psi_j\}_{G_j}^*(m), \quad (2)$$

где верхний индекс “ T ” обозначает транспонирование, $\mu_h^*(\cdot)$ – норма, сопряженная к $\mu_h(\cdot)$, символ $\{\psi_j\}_{G_j}^*$ обозначает вогнутую оболочку функции ψ_j на множестве G_j .

Рассмотрим величины

$$e_j(x) = \max_{m \in G_j} [\langle m, X[\vartheta, \tau_j] x \rangle + \varphi_j(m)], \quad j = 1, \dots, k + 1, x \in \mathbb{R}^n.$$

Цена игры приближенно равна $e_1(x_0)$. Система величин e_j удобна (см., например, [2]) для построения ζ -оптимальных законов управления игроков методом экстремального сдвига на сопутствующую точку.

При программной реализации численного метода приближенного вычисления цены игры и построения ζ -оптимальных законов управления по описанной выше процедуре возникают две проблемы. Первая обусловлена трудоемкостью пересчета (1) при переходе через оценочные точки t_i . Вторая – известными сложностями построения вогнутых оболочек (2). Эти проблемы можно решать независимо друг от друга. Первая из них рассматривалась в [5].

В качестве языка программирования был выбран C++. Используются библиотеки Boost.

Применяется так называемый “пиксельный” метод: компактные множества покрываются ε -сетями и представляются в виде конечно-го набора узловых точек этих сетей. Все функции хранятся таблично: функции времени в виде массивов, функции векторов m в виде хеш-массивов `boost::unordered`.

Вогнутые оболочки функций ψ_j аппроксимируются опорными гиперплоскостями с фиксированным набором нормалей. В качестве этого набора можно использовать, например, семейство векторов, лежащих на $(n + 1)$ -мерной единичной верхней полусфере, параметризованных n углами, которые берутся с равномерным шагом из отрезка $[0, \pi]$. Для повышения точности процедуры построения вогнутой оболочки в качестве семейства нормалей можно брать набор, получаемый в результате работы алгоритма `qhull` [4]. Ускорить процедуру возможно при помощи распараллеливания на несколько ядер центрального либо графического процессора.

Направлением дальнейшего развития является рассмотрение вопросов скорости сходимости построенного численного метода.

Литература

- [1] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. – М: Наука, 1985.
- [2] *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. – Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.
- [3] *Лукоянов Н.Ю.* Одна дифференциальная игра с нетерминальной платой // Известия академии наук. Теория и системы управления, 1997, № 1, с. 85-90.
- [4] *C. Bradford Barber, David P. Dobkin, Hannu Huhdanpaa.* The Quickhull Algorithm for Convex Hulls // ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 22, No. 4, December 1996, Pp. 469-483.
- [5] *Корнев Д.В.* К вопросу о программной реализации решения дифференциальной игры с нетерминальной платой // «Современные проблемы математики»: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011, с. 34-37.

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

Коробицина Н.С.

Рассматривается следующая задача оптимального управления [3]

$$L_\varepsilon z = f + u, \quad x \in [0, 1], \quad z \in H_0^1([0, 1])$$

$$z(0) = z(1) = 0,$$

где $L_\varepsilon z := \varepsilon^2 z'' - z' - \alpha^2 z$, управление u – кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию: $|u| \leq 1$ почти всюду, $H_0^1[0, 1]$ – соболевское пространство функций, равных нулю на границе отрезка $[0, 1]$. Критерий качества для управления:

$$J := \int_0^1 (z^2(x) + u^2(x)) dx \rightarrow \inf.$$

В силу принципа максимума Понтрягина единственное оптимальное управление u_ε и соответствующее ему z_ε можно найти как решение следующей задачи:

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = f - F(p_\varepsilon), \quad L_\varepsilon^* p_\varepsilon = z_\varepsilon, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1[0, 1], \quad (1)$$

$$\text{где } L_\varepsilon^* p = \varepsilon^2 p'' + p' - \alpha^2 p, \quad F(p) = \begin{cases} 1, & p > 1 \\ p, & |p| \leq 1 \\ -1, & p < -1 \end{cases}$$

В этом случае управление u_ε можно найти из соотношения: $u_\varepsilon = F(p_\varepsilon)$.

В статье [1] рассматривалась задача такого же типа и были получены асимптотические оценки решений задачи, аппроксимирующей исходную. Из теоремы 2 этой работы следует, что формальное асимптотическое разложение решения задачи (1) является и истинной асимптотикой.

Соотношения, даваемые оператором F , разбивают отрезок $[0, 1]$ на несколько областей, на каждой из которых система выглядит по-разному. В рамках данной работы найдено формальное асимптотическое решение задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ в случае, когда таких областей для предельной задачи оказывается две. То есть, если обозначить решение предельной задачи z_0, p_0 , то отрезок $[0, 1]$ разбивается соотношениями $|p_0| \leq 1, p_0 > 1, p_0 < -1$ на две части следующим образом: отрезок $[0, \Theta_0]$ (здесь $p_0 \geq 1$) и отрезок $[\Theta_0, 1]$ (здесь $|p_0| \leq 1$). В точке Θ_0 , которую можно вычислить и которая считается известной, p_0 равна единице.

Асимптотическое представление состоит из внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение состоит из двух пар функций: $\overset{+}{z}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{+}{z}_k(x), \overset{+}{p}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{+}{p}_k(x), x \in [0, \Theta_0]$; и $\overset{o}{z}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{o}{z}_k(x), \overset{o}{p}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{o}{p}_k(x), x \in [\Theta_0, 1]$. Каждая пара разложений есть внешнее разложение в обычном смысле для системы вида, соответствующего рассматриваемой области.

Отметим, что у допредельной задачи в окрестности нуля появляется новая область постоянства вида системы и ее граница – точка ϑ_ε такая, что $p_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = 1$. В окрестности точки Θ_0 также появляется новая точка θ_ε , в которой p_ε равна единице, и соответственно меняется вид системы. Пограничные слои возникают в окрестностях границ областей, в которых постоянен вид системы допредельной задачи.

На интервале $(0, \vartheta_\varepsilon)$ нужны функции пограничного слоя $r(\xi, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} r_k(\xi)$ и $q(\xi, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} q_k(\xi)$ в растянутой переменной $\xi = x/\varepsilon^2$, такие, чтобы суммы $r + \overset{+}{z}$ и $q + \overset{+}{p}$ удовлетворяли системе нужного вида:

$$\begin{cases} L_\varepsilon(r + \overset{+}{z}) = f(x) - \overset{+}{p} - q, \\ L_\varepsilon^*(q + \overset{+}{p}) = \overset{+}{z} + r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_\varepsilon r = 1 - \overset{+}{p} - q, \\ L_\varepsilon^* q = r \end{cases} \quad (2)$$

Решениями систем (2) являются экспоненциально убывающие и полиномиальные функции. Последние требуют согласования на бесконечности. Для этой цели вводятся еще две функции: $\hat{r}(x), \hat{q}(x)$. Их область определения – отрезок $[\vartheta_\varepsilon, \theta_\varepsilon]$. Они находятся из однородной системы того же типа, что и $\overset{+}{z}(x), \overset{+}{p}(x)$.

Чтобы удовлетворить всем условиям, требуется ввести еще два экспоненциально убывающих пограничных слоя: слева от точки ϑ_ε

– функции $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_k(\zeta)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} t_k(\zeta)$ с растяжением аргумента $\zeta = (\vartheta_\varepsilon - x)/\varepsilon^2$; и справа – $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_k(\lambda)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} v_k(\lambda)$ с растяжением аргумента $\lambda = (x - \vartheta_\varepsilon)/\varepsilon^2$. Оба слоя являются функциями, удовлетворяющими однородным системам соответствующего области вида.

Внутреннее разложение на второй области $[\theta_\varepsilon, 1]$ вводится аналогичным образом. То есть так же в окрестностях граничных точек области появляются экспоненциально убывающие пограничные слои и слой, содержащий полиномиальные слагаемые. Для согласования последнего вводится дополнительно ряд, асимптотически удовлетворяющий однородной системе того же типа, что и $\overset{\circ}{z}(x)$, $\overset{\circ}{p}(x)$.

Теорема. *Решение задачи (1) $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ раскладывается в асимптотический ряд равномерно по x при $\varepsilon \rightarrow 0$. Разложение составляется с помощью внешнего и внутреннего разложений, описанных выше. При построении используется метод согласования асимптотических разложений [2].*

Членами разложения являются известные дважды непрерывно дифференцируемые функции такие, что частичные суммы Z_k и P_k рядов удовлетворяют системе (1) с точностью до $O(\varepsilon^{2k})$ в метрике пространства $C^2([0, 1])$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Кроме того, если рассматривать частичные суммы Z_k и P_k рядов для какого-то фиксированного $k \geq 1$, то верны следующие асимптотические оценки:

$$z_\varepsilon - Z_k = O(\varepsilon^{2k-2}), \quad p_\varepsilon - P_k = O(\varepsilon^{2k-2})$$

в метрике пространства $C([0, 1])$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Литература

- [1] Данилин А.Р. Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления с геометрическими ограничениями на управление // Труды ИММ УрО РАН, 2003, Т. 9 № 1. С. 71-78.
- [2] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
- [3] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — М.: Мир, 1972.

ОБ УПРОЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВЫИГРЫША В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Костюнин С.Ю., Шевкопляс Е.В.

В большинстве приложений дифференциальных игр используются следующие два подхода к тому, на каком временном промежутке рассматривать игру. Согласно первому подходу, игра развивается во времени при $t \in [t_0, T]$, причем момент окончания игры T фиксирован и известен заранее. Игры такого типа называют дифференциальными играми с предписанной продолжительностью. Согласно второму подходу, игра рассматривается на бесконечном временном промежутке $t \in [t_0, \infty)$, а функция мгновенного выигрыша дисконтируется при помощи экспоненциальной функции.

В работах [1–3] использовался другой подход, а именно, рассматривалась дифференциальная игра, оканчивающаяся в случайный момент времени T . Для случайной величины T предполагалась заданная функция распределения $F(t)$, $t \in [t_0, \infty)$. В задачах со случайной продолжительностью под объектом максимизации, как правило, понимается математическое ожидание функционала интегрального или смешанного типа [2, 3, 5, 7, 8]. Это означает, что ожидаемые интегральные выигрыши игроков (функционалы) имеют вид повторных интегралов (1):

$$K_i(t_0, x_0, u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^t h_i(\tau) d\tau dF(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Как оказывается, при некоторых дополнительных предположениях повторный интеграл при помощи перестановки соответствующих интегралов может быть приведён к стандартному для динамического программирования виду, что существенно упрощает дальнейшее решение задачи со случайной продолжительностью. Однако в большинстве зарубежных работ по оптимальному управлению этот факт используется по умолчанию и корректность использования интегрального функционала в упрощенном виде никак не проверяется. Стоит отметить работы [5, 7], в которых указываются некоторые

условия для справедливого использования интеграла в преобразованном виде.

В области дифференциальных игр первая попытка исследования этого вопроса была предпринята в [3]. В статье [4] развивается это исследование, результаты которого могут быть использованы и для задач со случайной продолжительностью неигрового типа и имеют следующую формулировку.

Утверждение 1. Пусть функция мгновенного выигрыша $h_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяет свойству неотрицательности $\forall t \in [t_0, \infty)$ и является ограниченной кусочно-непрерывной функцией времени t . Тогда ожидаемый выигрыш (1) игрока i представим в следующем виде:

$$K_i(t_0, x_0, u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} h_i(\tau)(1 - F(\tau))d\tau, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

причём интегралы в (1), (2) существуют или не существуют одновременно.

Пусть теперь на функцию мгновенного выигрыша h_i не накладывается требование неотрицательности. Будем понимать внешний несобственный интеграл в правой части (1) в смысле Римана. При таком рассмотрении правая часть (1) представляет собой ожидаемый выигрыш игрока i в случае абсолютной сходимости внешнего интеграла. Иными словами, для существования математических ожиданий в (1) необходимо и достаточно, чтобы следующие интегралы существовали в смысле несобственных интегралов Римана:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left| \int_{t_0}^t h_i(\tau)d\tau \right| dF(t) < +\infty, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Утверждение 2. При выполнении условий (3) ожидаемый выигрыш может быть представлен в виде (2), если справедливо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1 - F(T)) \int_{t_0}^T h_i(t)dt = 0. \quad (4)$$

В работе также приводится контрпример, когда интегральный функционал не может быть представлен в упрощённой форме. В качестве примера изучается теоретико-игровая модель управления вредными выбросами [6] при условии случайной продолжительности игры. В данном примере задача сводится к стандартному виду, а решение ищется в классе программных стратегий.

Литература

- [1] *Петросян Л.А., Мурзов Н.В.* Теоретико-игровые проблемы в механике // Литовский математический сборник, VI-3, 1966, с. 423–433.
- [2] *Петросян Л.А., Шевкопляс Е.В.* Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Вестник СПбГУ. 2000. Сер. 1. Вып. 4. С. 18–23.
- [3] *Шевкопляс Е.В.* Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 2. С. 98–118.
- [4] *Костюнин С.Ю., Шевкопляс Е.В.* Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Вестник СПбГУ. 2011. Сер. 10. Вып. 4, с. 47–56.
- [5] *Boukas E.K., Haurie A., Michel P.* An Optimal Control Problem with a Random Stopping Time // Journal of optimization theory and applications: Vol. 64, №3, 1990. Pp. 471-480.
- [6] *Breton M., Zaccour G., Zahaf M.* A Differential Game of Joint Implementation of Environmental Projects // Automatica, vol. 41, 10, 2005. Pp. 1737–1749.
- [7] *Chang F.R.* Stochastic Optimization in Continuous Time. — Cambridge Univ. Press, 2004.
- [8] *Marin-Solano J., Shevkoplyas E.* Non-constant discounting in differential games with random time horizon // Automatica, vol. 48, 50, 2011. DOI: 10.1016/j.automata.2011.09.010.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Крупенников Е.А., Токманцев Т.Б., Субботина Н.Н.¹

В данной работе рассматривается следующая модель макроэкономической системы, предложенная Э.Н. Альбрехтом [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= u_1 \frac{\partial G(p,q)}{\partial q}, \\ \frac{dq}{dt} &= u_2 \frac{\partial G(p,q)}{\partial p}, \\ p(0) &= p_0, q(0) = q_0, \\ t \in [0, T], \quad |u_1| &\leq U_1, \quad |u_2| \leq U_2, \quad U_1 > 0, \quad U_2 > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве основных показателей фигурируют конечный валовый продукт q , материальные затраты p и чистая прибыль $h = G(p, q)$, заданные статистическими данными $\bar{p}_i = \bar{p}_i(t_i)$, $\bar{q}_i = \bar{q}_i(t_i)$, $\bar{h}_i = \bar{h}_i(t_i)$, $t_i = i * \frac{T}{n}$, $i \in \overline{0, n}$, причем изначально вид функции $G(p, q)$, называемой макроэкономическим потенциалом, неизвестен. Предполагается, что структура функции $G(p, q)$ имеет вид

$$G(p, q) = pq(a_0 + a_1p + a_2q),$$

где значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 вычисляются, исходя из статистических данных методом наименьших квадратов. Задача идентификации этой модели по статистическим данным состоит в определении коэффициентов a_0, a_1, a_2 , ограничений U_1, U_2 и законов управления $u_1(t), u_2(t)$ таких, что динамика модели $p(t), q(t)$ наиболее приближена к заданной статистике.

Вводится функционал

$$I(t_0, x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_0^T (p(t) - \bar{p}(t))^2 + (q(t) - \bar{q}(t))^2 + \epsilon(u_1(t)^2 + u_2(t)^2) dt, \quad (2)$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00214 и программой Президиума РАН «Математическая теория управления».

где $\bar{p}(t)$ и $\bar{q}(t)$ — непрерывные интерполяции дискретных статистических данных, $p(t)$ и $q(t)$ — решения системы (1), порождаемые допустимыми программными управлениями $(u_1(t), u_2(t)) \in U_0 = \{\forall u_1(\cdot), u_2(\cdot) : [0, T] \rightarrow U_1 \times U_2 - \text{измеримые}\}$, а ϵ — некоторый малый регулирующий параметр.

Таким образом, мы можем свести задачу идентификации к задаче оптимального управления системой (1) с функционалом (2). Гамильтониан имеет вид

$$H(t, s_1, s_2, p, q, \epsilon) = \min_{|u_1| \leq U_1, |u_2| \leq U_2} \left[s_1 u_1 \frac{\partial G}{\partial p} - s_2 u_2 \frac{\partial G}{\partial q} + (p - \bar{p}(t))^2 + (q - \bar{q}(t))^2 + \epsilon(u_1^2 + u_2^2) \right].$$

Согласно предположениям, задача оптимального управления имеет решение в U_0 . Тогда, согласно принципу максимума Понтрягина, для оптимальных управлений $(\hat{u}_1(\cdot), \hat{u}_2(\cdot)) \in U_0$ и порожденных ими траекторий системы (1) $\hat{p}(t)$ и $\hat{q}(t)$ с начальными условиями $\hat{p}(0) = p_0$, $\hat{q}(0) = q_0$ найдутся функции $s_1(t)$, $s_2(t)$, удовлетворяющие гамильтоновой системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}(t)}{dt} &= \hat{u}_1(t) \frac{\partial G(\hat{p}(t), \hat{q}(t))}{\partial q} = \frac{\partial H(t, \hat{p}(t), \hat{q}(t), s_1(t), s_2(t))}{\partial s_1}, \\ \frac{\hat{q}(t)}{dt} &= \hat{u}_2(t) \frac{\partial G(\hat{p}(t), \hat{q}(t))}{\partial p} = \frac{\partial H(t, \hat{p}(t), \hat{q}(t), s_1(t), s_2(t))}{\partial s_2}, \\ \frac{s_1(t)}{dt} &= \frac{\partial H(t, \hat{p}(t), \hat{q}(t), s_1(t), s_2(t))}{\partial p}, \\ \frac{s_2(t)}{dt} &= \frac{\partial H(t, \hat{p}(t), \hat{q}(t), s_1(t), s_2(t))}{\partial q}, \end{aligned} \quad (3)$$

с краевыми условиями

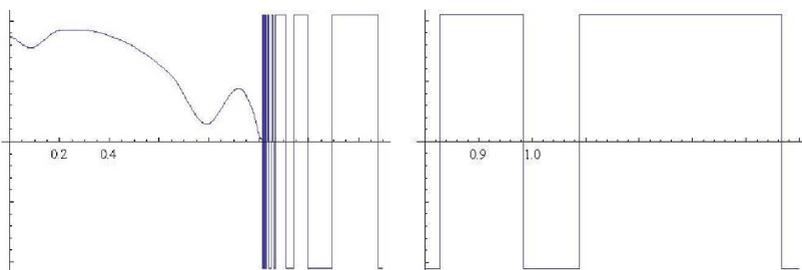
$$\hat{p}(0) = p_0, \quad \hat{q}(0) = q_0, \quad s_1(T) = 0, \quad s_2(T) = 0.$$

Рассмотрим решения системы (3) $\hat{p}(t, p_1, q_1)$, $\hat{q}(t, p_1, q_1)$, удовлетворяющие условиям $\hat{p}(T) = p_1$, $\hat{q}(T) = q_1$, $\hat{p}(0, p_1, q_1) = p_0$, $\hat{q}(0, p_1, q_1) = q_0$. Нетрудно заметить, что эти решения будут удовлетворять необходимым условиям оптимальности. Таких решений, отвечающих различным p_1 и q_1 , может быть несколько. То из них, что вкупе с соответствующими ему управлениями, связанными с ним системой (1), минимизирует функционал (2), является оптимальным.

Используя эти результаты, были предложены алгоритмы анализа и численного решения задачи идентификации, базирующиеся на попятной процедуре интегрирования гамильтоновой системы (3).

Анализ графиков, полученных при реализации метода в прикладном пакете «Wolfram Mathematica», показал, что параметры модели при реалистичных ограничениях на управления должны быть нестационарными, а реализуемое управление — релейным.

Ниже приведены графики, демонстрирующие эти результаты (слева — управление для стационарной модели на отрезке времени $[0, 1.5]$, справа — для нестационарной на отрезке времени $[0.8, 1.5]$).



Литература

- [1] *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». 2002. Т. 5. С. 54-86.
- [2] *Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.* Об эффективности сеточного оптимального синтеза в задачах оптимального управления с фиксированным моментом окончания // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1651-1662.
- [3] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. — М.: Наука, 1969.

МАКСИМАЛЬНЫЕ СТАБИЛЬНЫЕ МОСТЫ В МОДЕЛЬНОЙ ИГРЕ С ДВУМЯ ДОГОНЯЮЩИМИ И ОДНИМ УБЕГАЮЩИМ

Кумков С.С.¹

Рассматривается модельная дифференциальная игра [1] с двумя преследователями и одним убегающим. Три инерционных объекта движутся по прямой. Динамика преследователей P_1 , P_2 и убегающего E описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{P_1} &= a_{P_1}, & \ddot{z}_{P_2} &= a_{P_2}, & \ddot{z}_E &= a_E, \\ \dot{a}_{P_1} &= (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, & \dot{a}_{P_2} &= (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, & \dot{a}_E &= (v - a_E)/l_E, \\ |u_1| &\leq \mu_1, & |u_2| &\leq \mu_2, & |v| &\leq \nu, \\ a_{P_1}(t_0) &= 0, & a_{P_2}(t_0) &= 0, & a_E(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь z_{P_1} , z_{P_2} , z_E — геометрические координаты объектов; a_{P_1} , a_{P_2} , a_E — ускорения, порождаемые управлениями u_1 , u_2 , v . Постоянные времени l_{P_1} , l_{P_2} , l_E определяют, насколько быстро управления влияют на систему.

Зафиксируем моменты T_1 и T_2 . В момент T_1 замеряется расстояние r_1 между первым преследователем и убегающим, а в момент T_2 — расстояние r_2 между вторым преследователем и убегающим:

$$r_{P_1,E}(T_1) = |z_E(T_1) - z_{P_1,E}(T_1)|, \quad r_{P_2,E}(T_2) = |z_E(T_2) - z_{P_2,E}(T_2)|.$$

Предположим, что преследователи действуют координированно. Тогда их можно объединить в одного игрока P , распоряжающегося векторным управлением $u = (u_1, u_2)$. Убегающий рассматривается как второй игрок. Платой в такой игре выберем результирующий промах:

$$\varphi = \min\{r_{P_1,E}(T_1), r_{P_2,E}(T_2)\}.$$

Эта игра была предложена в [2].

Исследование задачи проводится в координатах (x_1, x_2) , имеющих смысл прогнозируемых на соответствующий момент окончания

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 10-01-96006 и 11-01-12088

отклонений первого и второго преследователей от убегающего. Размерность нового фазового вектора равна 2.

Главная цель доклада — изложение результатов численного исследования качественно различных вариантов максимальных стабильных мостов, возникающих в данной задаче при различных параметрах. Численный метод, используемый при построениях, изложен в работе [3].

Для представления трёхмерных изображений максимальных стабильных мостов в пространстве (t, x_1, x_2) используется система визуализации, разработанная с участием автора [4]. На рис. 1 показан пример получаемого изображения.

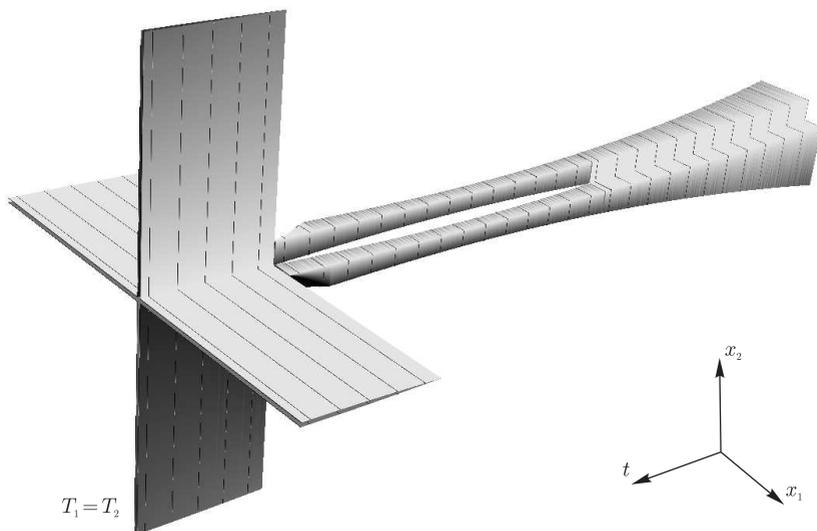


Рис. 1: пример максимального стабильного моста в рассматриваемой задаче

Литература

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.

- [2] *Le Méneç S.* Linear differential game with two pursuers and one evader / в сб. «Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 11: Advances in Dynamic Games. Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games», под ред. М. Breton, К. Szajowski. С. 209–226. — Boston: Birkhauser, 2011.
- [3] *Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Méneç S., Patsko V.S.* Numerical study of a linear differential game with two pursuers and one evader / в сб. «Contributions to Game Theory and Management», под ред. L.A. Petrosyan, N.A. Zenkevich. С. 154–171. — СПб.: СПбГУ.
- [4] *Васёв П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю.* О создании среды разработки систем научной визуализации / в сб. «Тезисы XIII Международного семинара “Супервычисления и математическое моделирование”». С. 50–51. — Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР
СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ «К МОМЕНТУ»**

Лобов С.А., Самойлов А.Л., Токманцев Т.Б.

Рассматривается дифференциальная игра с динамикой:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + B(x)u + C(x)v, \quad x \in R^n, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Здесь x — фазовый вектор из R^n , t — время, u и v — управления первого и второго игроков, ограниченные многогранниками P и Q соответственно, B , C — матрицы-функции, g — вектор-функция. На правую часть системы накладываются условия, обеспечивающие существование решений. Задан функционал платы

$$\gamma(x(\cdot)) = \min_{t \in [0, T]} \rho(x(t)). \quad (2)$$

Первый игрок стремится минимизировать функционал, второй — его максимизировать. Задача считается решенной, если построена функция цены $V(t, x)$. Для решения задачи воспользуемся численным алгоритмом, предложенным в работе [3].

Введем гамильтониан динамической системы

$$H(x, s) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (s, g(x) + B(x)u + C(x)v).$$

Конусом линейности гамильтониана называется множество, где гамильтониан линеен по последнему аргументу. В нашем случае конус линейности определяется как пересечение нормальных конусов к многогранникам P и Q в вершинах $u^{(j)}$ и $v^{(k)}$ соответственно.

Основной элемент аппроксимационной схемы — разностный оператор, действующий на шаге длины $\Delta t > 0$ разбиения отрезка времени игры. Аппроксимация функции цены задачи (1)-(2) получается последовательным применением разностного оператора.

Пусть $\Gamma = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T\}$ — разбиение отрезка $[0, T]$. Определим функцию $\tilde{V}(t_i, x) : \Gamma \times R^n \rightarrow R$ по рекуррентным фор-

мулам:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t_{i-1}, x) = & \sup_{y \in O(x, \lambda(x)\Delta_i)} \max_{j, k} \max_{p \in \partial \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, x, y, j, k)} \{ \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, y) + \\ & + \Delta_i (\langle p, g(x) \rangle + \langle p, B(x)u^{(j)} \rangle + \langle p, C(x)v^{(k)} \rangle) + \langle p, x - y \rangle \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\lambda(x)$ — функция Липшица гамильтониана,

$O(x, r) = \{y \in R^n : \|y - x\| < r\}$ — окрестность точки x радиуса r ,

$\text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, y)$ — выпуклая оболочка функции $\tilde{V}_\rho(t_i, y) = \min\{\tilde{V}(t_i, y), \rho(y)\}$,

$\partial \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, y)$ — субдифференциал выпуклой оболочки [6], вычисленный в точке y ,

$\partial \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, x, y, j, k)$ — пересечение субдифференциала выпуклой оболочки функции \tilde{V}_ρ , вычисленного в точке y , с конусом линейности гамильтониана $H(x, s)$.

Требуется построить аппроксимацию функции цены в каждый момент разбиения отрезка времени на заданной сетке в фазовом пространстве.

Алгоритм решения данной задачи:

1. Задаются начальные данные.
2. Инициализируются сетки для каждого шага по времени t .
3. Задается значение $\tilde{V}(T, x) = \rho(x)$ в каждом узле.
4. Для $i = N, \dots, 1$ выполняются шаги 4а–4е
 - (а) Для каждой точки сетки находятся точки из $O(x, r)$.
 - (б) Строится выпуклая оболочка полученных точек.
 - (в) Строится субдифференциал для каждой точки из области.
 - (г) Находятся пересечения субдифференциала с конусами линейности.
 - (е) Находится значение $\tilde{V}(t_{i-1}, x)$ по формуле (3).

Вышеизложенный алгоритм аналогичен использованным в работе [5]. Главное отличие заключается в том, что алгоритм применяется к задачам с трехмерным фазовым пространством. Сущность алгоритма в целом не меняется, но из-за необходимости работы с трехмерными объектами существенно усложняется реализация.

Для построения выпуклой оболочки множества точек в четырехмерном пространстве применяется модифицированный алгоритм «Quick Hull». Обсуждаются проблемы, связанные с увеличением размерности, способы их решения. Предложенные алгоритмы реализованы в виде программы, представлены результаты решения модельных примеров.

Литература

- [1] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [2] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. — М.: Наука, 1991.
- [3] *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Конечно-разностный метод построения функции оптимального гарантированного результата. — Сборник трудов «Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации – 1991». М.: Наука, 1992. С. 166-172.
- [4] *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.
- [5] *Ермаков Н.В., Лобов С.А., Самойлов А.Л., Токманцев Т.Б.* Численный алгоритм решения дифференциальной игры сближения-уклонения «к моменту» // Современные проблемы математики: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции, С. 28–30. — Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
- [6] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ, МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Малютина Е.В., Филиппова О.В.¹

В работе изучаются управляемые системы с фазовыми ограничениями по управлению, многозначными импульсными воздействиями и запаздыванием.

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное пространство с нормой $|\cdot|$; $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых компактов пространства \mathbb{R}^n ; $\text{conv}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых выпуклых компактов пространства \mathbb{R}^n ; $\mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ – пространство измеримых по Лебегу ограниченных в существенном функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_\infty^n[a, b]} = \text{vraisup}\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Пусть $t_k \in [a, b]$ ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) – конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{\mathcal{C}}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, \dots , $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathcal{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Пусть задана непрерывная функция $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и непрерывное по Хаусдорфу многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{conv}[\mathbb{R}^m]$. Рассмотрим управляемую систему с запаздыванием и многозначными импульсными воздействиями

$$\dot{x} = f(t, x[p(t)], u(t)), \quad x(t) = \varphi(t), \quad \text{если } p(t) < a, \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$u(t) \in U(t, x[g(t)]), \quad x(t) = \psi(t), \quad \text{если } g(t) < a,$$

$$\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x(a) = x_0, \quad (3)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, функции $\varphi : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны и ограничены, непрерывные функции $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», ГК № 14.740.11.0349), РФФИ № 11-01-00-645.

для любого $t \in [a, b]$ удовлетворяют неравенствам $p(t) \leq t$, $g(t) \leq t$. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, \dots, m$, непрерывны по Хаусдорфу, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $\tau \in [a, b]$. Определим непрерывные операторы $\mathcal{P}_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$, $\mathcal{G}_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$ равенствами

$$(\mathcal{P}_\tau x)(t) = \begin{cases} x[p(t)], & \text{если } p(t) \in [a, \tau], \\ \varphi[p(t)], & \text{если } p(t) < a, \end{cases} \quad (4)$$

$$(\mathcal{G}_\tau x)(t) = \begin{cases} x[g(t)], & \text{если } g(t) \in [a, \tau], \\ \psi[g(t)], & \text{если } g(t) < a. \end{cases} \quad (5)$$

Под допустимым управлением на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$) системы (1)-(2) будем понимать такую измеримую по Лебегу функцию $u : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой существует кусочно-непрерывная функция $x : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при всех $t \in [a, \tau]$ представлению

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, (\mathcal{P}_\tau x)(s), u(s)) ds + \sum_{k: t_k \in (a, \tau)} \chi_{(t_k, b]}(t) \Delta(x(t_k)),$$

где $\Delta(x(t_k))$, $t_k \in (a, \tau)$, удовлетворяют равенствам (2), $\chi_{(c, d]}(\cdot)$ – характеристическая функция полуинтервала $(c, d]$, что при почти всех $t \in [a, \tau]$ выполняется включение

$$u(t) \in U(t, (\mathcal{G}_\tau x)(t)).$$

Пару (u, x) будем называть допустимой на отрезке $[a, \tau]$. Систему (1)-(2) будем называть управляемой системой с фазовыми ограничениями по управлению и многозначными импульсными воздействиями.

Отметим, что, в силу теоремы об измеримом выборе (см. [1], [2]), управляемая система (1)-(2) с начальным состоянием (3) эквивалентна задаче Коши для дифференциального включения (см. также [3])

$$\dot{x}(t) \in f(t, (\mathcal{P}_\tau x)(t), U(t, (\mathcal{G}_\tau x)(t))), \quad t \in [a, \tau], \quad (6)$$

с многозначными импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3), где $P_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$, $G_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, \tau]$ определены равенствами (4), (5) соответственно.

Включение (6) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) будем называть дифференциальным включением, порожденным управляемой системой (1)-(2) с начальным состоянием (3). Задача (6), (2), (3) описывает всё множество фазовых траекторий управляемой системы (1)-(2).

Для задачи (1)-(3) рассмотрены вопросы продолжаемости допустимых пар (см. [4], [5]). Получены оценки допустимых траекторий, аналогичные оценкам В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппова (см. [5], [6]). Сформулировано определение допустимой квазитраектории. Получены достаточные условия выполнения принципа плотности для рассматриваемой системы (см. [5]).

Литература

- [1] *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. и мех. 1959. № 2. С. 25–32.
- [2] *Ченцов А.Г.* Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010.
- [3] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
- [4] *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
- [5] *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI // Вестник Тамб. ун-та. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275–1313.
- [6] *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д., Ушаков А.В.¹

Доклад посвящен дифференциальным включениям (д.в.) и управляемым системам на конечном промежутке времени. Исследуются задачи, связанные с вычислением множеств достижимости д.в. Как правило, множества достижимости не поддаются эффективному аналитическому описанию. В то же время часто возникает потребность в их вычислении. Довольно часто она проявляется в теории управления, стимулируя развитие методов и алгоритмов приближенного вычисления множеств достижимости.

Набор этих методов достаточно богат. В основном, они связаны с теми или иными способами подмены управляемой системы или д.в. на д.в. с более простой динамикой. В докладе для определенного класса дифференциальных включений представлена одна общая схема пошагового приближенного вычисления множеств достижимости д.в. Она сводится фактически к замене конечного промежутка времени, на котором рассматривается д.в., конечным разбиением и к подмене локальных множеств достижимости на промежутках разбиения некоторыми близкими множествами, удобными для вычислений. Корректность такой подмены подтверждается оценками, из которых следует, что результаты приближенных вычислений множеств достижимости д.в. сходятся к множествам достижимости д.в. при шаге разбиения, стремящемся к нулю.

Тематика доклада близка к работам [1–6], в которых исследуются интегральные воронки динамических систем, свойство инвариантности в различных формулировках, а также рассматриваются вопросы, связанные с аппроксимацией множеств достижимости динамических систем.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587-а), регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085) и гранта ОФИМ-1 «Методы позиционных дифференциальных игр в задачах техники, экономики и экологии» 11-01-12088.

Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задано д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ удовлетворяет условиям

A.1. $F(t, x)$ — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

A.2. $(t, x) \mapsto F(t, x)$ непрерывно на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ в хаусдорфовой метрике.

A.3. $(t, x) \mapsto F(t, x)$ локально-липшицево по x : для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая константа $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$d(F(t, x_*), F(t, x^*)) \leq L \|x_* - x^*\|, \quad (2)$$

здесь $L = L(D) \in (0, \infty)$ при (t, x_*) и (t, x^*) из D .

A.4. Существует такая константа $\gamma \in (0, \infty)$, что выполняется неравенство

$$\max_{f \in F(t, x)} \|f\| \leq \gamma(1 + \|x\|) \quad (3)$$

при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Здесь $d(F_*, F^*)$ — хаусдорфово расстояние между компактами F_* и F^* из \mathbb{R}^n .

В докладе представлена некоторая пошаговая (по времени) конструкция приближенного вычисления множеств достижимости $X(t_i) = X(t_i, t_0, X_0)$, где t_i — моменты некоторого разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, а X_0 — начальное множество, компакт в \mathbb{R}^n . Эта конструкция основана на подмене локальных множеств достижимости д.в. (1) $X(t^*, t_*, X_*)$, $t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$, при малых $\delta = t^* - t_* > 0$ множествами $\tilde{X}(t^*, t_*, x_*) = x_* + \delta F(t_*, x_*)$, где обозначено $x_* + \delta F(t_*, x_*) = \{x_* + \delta f_* : f_* \in F(t_*, x_*)\}$. Однако сама по себе такая замена еще не решает проблемы приближенного вычисления множеств достижимости д.в. Дополнительно к ней на каждом шаге $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ проводится еще дискретизация вычисляемых множеств достижимости $\tilde{X}(t_i) = \tilde{X}(t_i, t_0, X_0)$ и локальных множеств достижимости $\tilde{X}(t_{i+1}, t_i, x(t_i))$, $x(t_i) \in \tilde{X}(t_i)$. При определенных условиях на эту дискретизацию в работе [4] обоснована ее корректность.

В докладе приведены примеры управляемых систем на плоскости, в том числе, и нелинейных управляемых систем.

Литература

- [1] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
- [2] *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston: Birkhauser. 1997.
- [3] *Гусев М.И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 82–94.
- [4] *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, № 2. С. 179–187.
- [5] *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
- [6] *Филиппова Т.Ф.* Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 263–269.

ОДИН ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Морина М.С.

В работе предлагается эвристический алгоритм для решения задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования [1], в которой функция стоимости перемещений явным образом зависит от списка заданий. Упомянутые особенность и ограничения мотивированы интересами решения прикладной задачи о демонтаже оборудования энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. В этой задаче функция стоимости имеет смысл дозы облучения за счет элементов оборудования, не демонтированных на момент перемещения. Дозы облучения, полученные в процессе элементарных перемещений, суммируются. Совокупная доза зависит от маршрута, который требуется выбрать в интересах ее минимизации.

Постановка задачи. Задано натуральное число $N \geq 2$, определяющее количество заданий, подлежащих последовательному выполнению. Задания нумеруются числами из множества $\overline{1, N}$.

Мы располагаем возможностью выбора перестановки λ (маршрута) в $\overline{1, N}$. Выбор λ стеснен условиями предшествования, определяемыми посредством множества $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$ адресных пар (отправитель, получатель); требуется, чтобы маршрут для всякой адресной пары обеспечивал посещение отправителя раньше, чем посещение получателя. Заданы функции стоимости $c : \overline{1, N} \times \overline{1, N} \times \mathfrak{N} \rightarrow [0, \infty[$, где \mathfrak{N} — семейство всех непустых подмножеств $\overline{1, N}$.

Перемещения характеризуются затратами $\Pi(\lambda) \triangleq c_{0, \lambda(1)}(\overline{1, N}) + \sum_{i=2}^N c_{\lambda(i-1), \lambda(i)} \left[\{ \lambda(j) : j \in \overline{i, N} \} \right]$. Наша цель состоит в минимизации $\Pi(\lambda)$ посредством рационального выбора $\lambda \in \mathbf{K}$; иными словами, выбор λ подчинен интересам минимизации дозовой нагрузки.

Метод решения. Задача решается с помощью приближенного метода, использующего на каждом шаге перемещения процедуру, в структурном отношении подобную уравнению Беллмана [2], для которой, однако, сама функция Беллмана заменена некоторой огрубленной характеристикой.

Будем исходить из предположения, что очередное задание j , под-

лежащее исполнению, выбирается из условия:

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} (c_{i,j}[K] + \alpha \cdot \min_{s \in \mathbf{I}(K \setminus \{j\})} c_{j,s}[K \setminus \{j\}] + (1 - \alpha) \cdot \max_{s \in \mathbf{I}(K \setminus \{j\})} c_{j,s}[K \setminus \{j\}]),$$

где i — текущее положение (изначально $i = 0$); K — текущее множество заданий; $K \setminus \{j\}$ — множество заданий за вычетом выполненного задания с номером j ; $\mathbf{I}(K) \subset K$ — множество всех допустимых для выполнения на следующем шаге заданий (см. [2]); $c_{i,j}[K] = \sum_{s \in K} c_{i,j}[\{s\}] \geq 0$ — совокупное вредное воздействие; значения $c_{i,j}[\{s\}]$ вычисляются по методике, предложенной в [3, с. 66-69]; α играет роль параметра управления и выбирается из отрезка $[0, 1]$.

Вычислительный эксперимент. Вышеизложенный алгоритм был реализован в виде программного комплекса. Проведены тестовые расчеты на серии модельных примеров.

Рассмотрим следующий пример: имеется 50 заданий, расположенных на плоскости и заданных координатами (x, y) :

1(185,174); 2(187,112); 3(214,54); 4(158,54); 5(183,24); 6(182,-36); 7(156,-96); 8(213,-98); 9(181,-158); 10(-178,-185); 11(-176,-71); 12(-174,81); 13(-174,21); 14(-84,145); 15(-28,141); 16(66,143); 17(68,-190); 18(-54,-194); 19(-114,-130); 20(-179,-126); 21(-111,-189); 22(31,-190); 23(164,-189); 24(-174,-33); 25(-176,-152); 26(-174,138); 27(-117,140); 28(122,134); 29(54,113); 30(-70,115); 31(-134,45); 32(-146,192); 33(225,-33); 34(231,-144); 35(116,-181); 36(94,-127); 37(34,-124); 38(-2,-157); 39(3,-185); 40(-59,-128); 41(-117,-66); 42(-116,-8); 43(-208,-33); 44(-207,-99); 45(-204,-157); 46(-205,25); 47(-209,110); 48(30,147); 49(3,113); 50(93,113); база ($i = 0$) совпадает с началом координат.

Результаты расчета

1. Без условий предшествования: суммарное значение вредного воздействия 80.512; лучшее значение параметра $\alpha = 1$; путь представлен на рис. 1, а.
2. С условиями предшествования.

На маршрут наложены следующие ограничения: (49,32); (48,15); (30,16); (14,29); (27,50); (26,28); (47,1); (12,2); (31,3); (42,4); (41,5); (13,6); (46,33); (43,8); (24,34); (11,9); (44,23); (20,35); (10,17); (21,22).

Суммарное значение вредного воздействия 80.463; лучшее значение параметра $\alpha = 1$; путь представлен на рис 1, б.

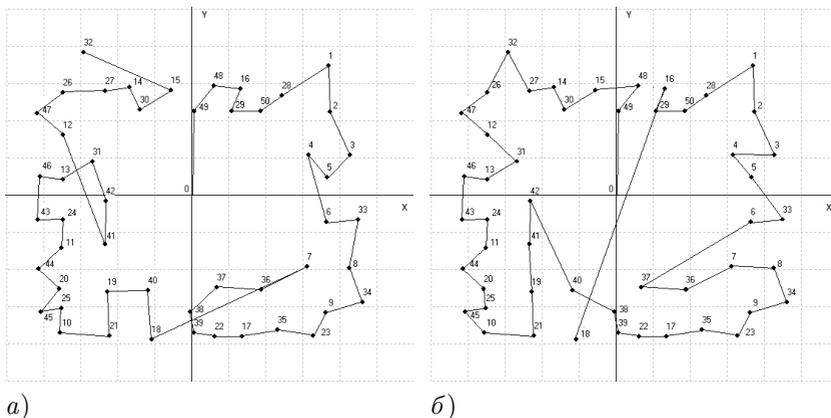


Рис. 1: а) маршрут без учета ограничений, б) маршрут с учетом ограничений

Как видим, предложенный алгоритм позволяет строить маршруты с соблюдением условий предшествования и, в зависимости от входных данных, приводить к улучшению результатов алгоритма без учета условий предшествования.

Литература

- [1] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
- [2] Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Известия РАН, ТиСУ, 2010. № 2. С. 68–77.
- [3] Морина М.С. Об одном алгоритме маршрутизации в случае, когда функция стоимости зависит от списка заданий // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. Вып. 11. С. 61–72.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПОВОДЫРИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Плаксин А.Р.

Эта работа, примыкающая к [1–3] и посвященная процедурам управления наследственными динамическими системами на основе моделей-поводырей [4], инициирована работой [5], в которой предложено использовать в качестве поводырей для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичные рассматриваемым в [1–3]. Обоснование подобной процедуры управления для достаточно общего класса функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа составляет основную цель представляемого исследования.

Рассматривается динамическая система, описываемая следующим функционально-дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}[t] &= f(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]), \quad t \in [t_0, T], x[t] \in \mathbb{R}^n, u[t] \in \mathbb{U}, v[t] \in \mathbb{V}, \\ x_{t_0}[\vartheta] &= x[t_0 + \vartheta] = z[\vartheta], \quad \vartheta \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t – переменная времени, $x[t]$ – вектор состояния в момент времени t , $h = \text{const} > 0$, $x_t[\cdot]$ – история движения на $[t-h, t]$, причем $x_t[\vartheta] = x[t + \vartheta]$, $\vartheta \in [-h, 0]$. Функция $z[\cdot]$ принадлежит компакту $Z \subset C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, $u[t]$ – текущее управляющее воздействие, $v[t]$ – воздействие помехи, \mathbb{U} и \mathbb{V} – компакты конечномерных пространств.

Допустимыми будем считать измеримые по Борелю реализации $u[t_0[\cdot]T) = \{u[t] \in \mathbb{U}, t_0 \leq t < T\}$ и $v[t_0[\cdot]T) = \{v[t] \in \mathbb{V}, t_0 \leq t < T\}$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- (У1) Отображение $f : \mathbb{R} \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно.
 (У2) Существует константа $c > 0$ такая, что для любых $t \in [t_0, T]$, $x[\cdot] \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$

$$\|f(t, x[\cdot], u, v)\| \leq c \left(1 + \max_{\vartheta \in [-h, 0]} \|x[\vartheta]\| \right).$$

- (У3) Для любого компакта $D \subset C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ существует $\lambda(D) > 0$ такая, что для любых $x'[\cdot], x''[\cdot] \in D$, $t \in [t_0, T]$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$

$$\|f(t, x'[\cdot], u, v) - f(t, x''[\cdot], u, v)\| \leq \lambda(D) \max_{\vartheta \in [-h, 0]} \|x'[\vartheta] - x''[\vartheta]\|.$$

(У4) Для любых $t \in [t_0, T]$, $x[\cdot] \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ и $s \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, x[\cdot], u, v), s \rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, x[\cdot], u, v), s \rangle.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов.

Тогда, в частности, при любых допустимых реализациях $u[t_0[\cdot]T]$ и $v[t_0[\cdot]T]$ для любой начальной функции $z[\cdot] \in Z$ существует единственное решение $x[t_0[\cdot]T]$ задачи (1) в смысле Каратеодори.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим следующую задачу, аппроксимирующую задачу (1):

$$\begin{cases} \dot{y}^0[t] = f(t, S(Y[t])[\cdot], \bar{u}[t], \bar{v}[t]), y^0[t_0] = z[0], \\ \dot{y}^i[t] = \frac{y^{i-1}[t] - y^i[t]}{\Delta h}, y^i[t_0] = z[-i\Delta h], i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

Здесь $y^i[t] \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $Y[t] = (y^0[t], y^1[t], \dots, y^m[t])$, $\Delta h = h/m$, $S(Y[t])[\cdot]$ – линейный сплайн с узлами $-i\Delta h$ на $[-h, 0]$ и со значениями в узлах $S(Y[t])[-i\Delta h] = y^i[t]$, $\bar{u} \in \mathbb{U}$, $\bar{v} \in \mathbb{V}$. Для удобства доопределяем $y_{t_0}^0[\cdot] = z[\cdot]$.

Проверяется, что решение $Y[t_0[\cdot]T]$ задачи (2) существует, единственно и для него справедливы следующие аппроксимационные результаты.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $m > M(\varepsilon)$, любой начальной функции $z[\cdot] \in Z$ и любых допустимых реализаций $\bar{u}[t_0[\cdot]T]$, $\bar{v}[t_0[\cdot]T]$ для решения $Y[t_0[\cdot]T]$ задачи (2) имеют место оценки*

$$\|y^i[t] - y^0[t - i\Delta h]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 0, 1, \dots, m;$$

$$\max_{\vartheta \in [-h, 0]} \|y_t^0[\vartheta] - S(Y[t])[\vartheta]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, T].$$

Далее опишем процедуру взаимного прицеливания между системами (1) и (2). Реализации $u[t_0[\cdot]T]$ и $\bar{v}[t_0[\cdot]T]$ будем формировать по принципу обратной связи по шагам разбиения

$$\Delta_\delta = \{t_i : 0 < t_{i+1} - t_i < \delta, i = 0, 1, \dots, k-1, t_k = T\}$$

как кусочно-постоянные функции, полагая

$$u[t] = u_i^*, \quad \bar{v}[t] = \bar{v}_i^*, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad (3)$$

где

$$u_i^* \in \arg \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle f(t_i, x_{t_i}[\cdot], u, v), x[t_i] - y^0[t_i] \rangle,$$

$$\bar{v}_i^* \in \arg \max_{\bar{v} \in \bar{V}} \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \langle f(t_i, S(Y[t_i])[\cdot], \bar{u}, \bar{v}), x[t_i] - y^0[t_i] \rangle.$$

Теорема 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $M(\varepsilon) > 0$ и $\delta'(\varepsilon) > 0$, что, каковы бы ни были $m > M(\varepsilon)$ и $\delta < \delta'(\varepsilon)$, для любой начальной функции $z \in Z$ и любых допустимых реализаций $\bar{u}[t_0[\cdot]T)$, $v[t_0[\cdot]T)$, при реализациях $u[t_0[\cdot]T)$, $\bar{v}[t_0[\cdot]T)$, формируемых по правилу (3) по шагам разбиения Δ_δ , для решения $x[t_0[\cdot]T]$ задачи (1) и решения $Y[t_0[\cdot]T]$ задачи (2) будет справедлива оценка

$$\|x[t] - y^0[t]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0 - h, T].$$

Литература

- [1] Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. 1964. Т. 28, Вып. 4. С. 716–724.
- [2] Репин М.Ю. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // ПММ. 1965. Т. 29, Вып. 2. С. 226–235.
- [3] Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1967. Т. 3. С. 2094–2107.
- [4] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [5] Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.

ПРЯМОЙ МЕТОД В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Тамасян Г.Ш.¹

В работе рассматривается простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами. С помощью аппарата точных штрафных функций [1] и негладкого анализа [2] для данной задачи получены новые необходимые условия экстремума. Классические условия трансверсальности [3, 4] естественным образом выводятся из них. Указанные условия лежат в основе численных алгоритмов (прямых методов) исследуемой проблемы [5, 6].

Пусть $T > 0$. Рассмотрим функционал

$$I(x, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t) dt \quad (1)$$

на кривых $x(t) \in P^1[0, T]$, граничные точки которых $A(t_0, x_0)$ и $B(t_1, x_1)$, в свою очередь, лежат на заданных в неявной форме кривых

$$h_1(x(t), t) = 0, \quad h_2(x(t), t) = 0, \quad (2)$$

так что $h_1(x(t_0), t_0) = 0$, $h_2(x(t_1), t_1) = 0$, где $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Здесь $P^1[0, T]$ — класс непрерывных на $[0, T]$ функций с кусочно-непрерывной и ограниченной на $[0, T]$ производной. Функции $F(x, z, t)$, $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$ будем считать непрерывно-дифференцируемыми по всем своим аргументам.

Заметим, что абсциссы $t_0 \in (0, T)$ и $t_1 \in (0, T)$ точек A и B заранее не фиксированы и подлежат, как и функция $x(t)$, определению.

Задача. Среди функций класса $P^1[0, T]$, соединяющих две заданные кривые (2), нужно найти такую функцию $x(t)$, которая дает экстремум функционалу (1).

Представим искомую функцию $x(t)$ в следующем виде:

$$x(t, x_0, t_0) = x_0 + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau.$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00360.

Положим

$$Z = \left\{ \tilde{z} = [z, x_0, t_0, t_1] \mid z \in P[0, T], t_0, t_1 \in (0, T), \right. \\ \left. h_1(x_0, t_0) = 0, \quad h_2 \left(x_0 + \int_{t_0}^{t_1} z(t) dt, t_1 \right) = 0 \right\}.$$

Введем функционал

$$f(z, x_0, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F \left(x_0 + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau, z, t \right) dt.$$

Несложно показать, что поставленная проблема эквивалентна задаче

$$f(\tilde{z}) \longrightarrow \min_{\tilde{z} \in Z}.$$

Множество Z можно представить в виде

$$Z = \{ [z, x_0, t_0, t_1] \mid \varphi(z, x_0, t_0, t_1) = 0 \},$$

где $\varphi(z, x_0, t_0, t_1) = |h_1(x(t_0), t_0)| + |h_2(x(t_1), t_1)|$.

Пусть $\lambda \geq 0$ фиксировано. Введем функцию $\Phi_\lambda(\tilde{z}) = f(\tilde{z}) + \lambda\varphi(\tilde{z})$. Функция $\Phi_\lambda(\tilde{z})$ называется *штрафной функцией*, а число λ — *штрафным параметром*. В [1] представлен ряд теорем, при выполнении которых функция $\Phi_\lambda(z)$ является функцией точного штрафа.

Пусть $z \in P[0, T]$ и $x_0, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ фиксированы. Выберем произвольные $v \in P[0, T]$ и $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$. Положим

$$z_\varepsilon(t) = z(t) + \varepsilon v(t), \quad x_{0\varepsilon} = x_0 + \varepsilon\delta, \\ t_{0\varepsilon} = t_0 + \varepsilon\eta, \quad t_{1\varepsilon} = t_1 + \varepsilon\mu.$$

С их помощью находится вариация функционала $\Phi_\lambda(\tilde{z})$, и получаем следующее необходимое условие экстремума.

Теорема. Для того чтобы функция $z^*(t)$ доставляла экстремум функционалу (1) среди всех кривых $z \in P[0, T]$, соединяющих точки двух заданных линий $h_1(x, t) = 0, h_2(x, t) = 0$, необходимо, чтобы нашлись $x_0, t_0, t_1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\frac{\partial F(x^*, z^*, t)}{\partial z} + \int_t^{t_1} \frac{\partial F(x^*, z^*, \tau)}{\partial x} d\tau + \lambda_2 \frac{\partial h_2(x^*, t)}{\partial x} \Big|_{t=t_1} = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, z^*, \tau)}{\partial x} d\tau + \lambda_1 \frac{\partial h_1(x^*, t)}{\partial x} \Big|_{t=t_0} + \lambda_2 \frac{\partial h_2(x^*, t)}{\partial x} \Big|_{t=t_1} = 0,$$

$$\left(F(x^*(t), z^*(t), t) + \lambda_2 z^*(t) \frac{\partial h_2(x^*, t)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial h_2(x^*, t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_1} = 0,$$

$$F(x^*(t_0), z^*(t_0), t_0) + z^*(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(x^*, z^*, \tau)}{\partial x} d\tau +$$

$$+ \lambda_2 z^*(t_0) \frac{\partial h_2(x^*, t)}{\partial x} \Big|_{t=t_1} - \lambda_1 \frac{\partial h_1(x^*, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0.$$

Заметим, что выражения, стоящие в левой части, образуют градиент Гато функционала Φ_λ , который, в свою очередь, может быть применен в прямых (численных) методах [5, 6].

Литература

- [1] Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005.
- [2] Демьянов В.Ф. Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
- [3] Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941.
- [4] Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. Л.: ЛГУ, 1933.
- [5] Demyanov V.F. and Tamasyan G.Sh. Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. Vol. 60. Iss. 1. 2011. Pp. 153-177.
- [6] Демьянов В.Ф., Тамасян Г.Ш. О прямых методах решения вариационных задач // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 36-47.

О СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Хлопин Д.В.¹

Определим $\mathbf{T} \triangleq \{t \in \mathbf{R} \mid t \geq 0\}$, $\mathbf{X} \triangleq \mathbf{R}^m$, $\mathbf{U} \triangleq \mathbf{R}^r$. Пусть \mathfrak{U} — семейство всех измеримых селекторов многозначного отображения $U : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}$. Поставим задачу

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = 0, \quad t \in \mathbf{T}, \quad x \in \mathbf{X}, \quad u \in U(t), \quad (1a)$$

$$J_T(u) \triangleq \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt \stackrel{T \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \max. \quad (1b)$$

Далее будем считать, что: U компактнозначно, локально интегрально ограничено с измеримым графиком; f, g и их производные по x — локально липшицевые по x отображения Каратеодори, интегрально ограниченные на компактах; f имеет подлинейный рост.

Для каждой последовательности $\tau \triangleq (\tau_n)_{n \in \mathbf{N}} \uparrow \infty$ моментов времени будем говорить, что управление $u^0 \in \mathfrak{U}$ τ -оптимально, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0} \exists N \in \mathbf{N} \forall u \in \mathfrak{U} \forall n \in \overline{N, \infty} J_{\tau_n}(u) \leq J_{\tau_n}(u^0) + \varepsilon.$$

В частности всякое uniformly weakly overtaking optimal управление τ -оптимально для некоторой, а всякое uniformly overtaking optimal управление τ -оптимально для любой последовательности τ .

Пусть для какой-то последовательности $\tau \uparrow \infty$ имеется τ -оптимальная пара (x^0, u^0) . Для всякого $\xi \in \mathbf{X}$ введём x_ξ — решение (1a) при условии $x_\xi(0) = \xi$, A_ξ — решение матричной задачи Коши

$$\frac{dA_\xi(t)}{dt} = \frac{\partial f(t, x_\xi(t), u^0(t))}{\partial x} A_\xi(t), \quad A_\xi(0) = \mathbf{1}_L,$$

и для всех $T \in \mathbf{T}$ вектор $I_\xi(T) \triangleq \int_0^T \frac{\partial g(t, x_\xi(t), u^0(t))}{\partial x} A_\xi(t) dt$.

Воспользовавшись полунепрерывностью соотношений принципа максимума Понтрягина (ПМП), а также соображениями типа устойчивости, можно показать, что среди решений ПМП найдётся такое

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-90432 укр-ф-а.

(далее $A_0(\tau)$ -нулевое) решение, что для всякой открытой содержащей его трубки решений ПМП её график пересекается с плоскостью $\psi(\tau_n)A_0(\tau_n) = 0_{\mathbf{X}}$ при неограниченно больших $n \in \mathbf{N}$. Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнено одно из двух условий:

$$\exists I_* \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 0} I_\xi(\tau_n) \in \mathbf{X}; \quad (2a)$$

$$\exists \varpi \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 0} \frac{I_\xi(\tau_n)}{\|I_\xi(\tau_n)\|_{\mathbf{X}}} \in \mathbf{X}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 0} \|I_\xi(\tau_n)\|_{\mathbf{X}} = \infty. \quad (2b)$$

Тогда существует **единственная** (с точностью до положительного множителя) пара (λ^0, ψ^0) , для которой $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ — $A_0(\tau)$ -нулевое решение ПМП; при этом, соответственно, $\forall T \in \mathbf{T}$

$$\lambda^0 = 1, \quad \psi^0(T) \triangleq \left(I_* - \int_0^T \frac{\partial g(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} A_0(t) dt \right) A_0^{-1}(T); \quad (3a)$$

$$\lambda^0 = 0, \quad \psi^0(T) \triangleq \varpi A_0^{-1}(T). \quad (3b)$$

Отметим, что формула (3a) ранее получена А.В. Кряжимским, С.М. Асеевым при легко проверяемых предположениях на рост функций f, g и их производных (см. автономный случай [2, теорема 12.1], неавтономный — в [3, Theorem 1]). Из их предположений выполнено и (2a), однако отметим, что [3, Theorem 1] использует более слабое понятие оптимальности (locally weakly overtaking optimal).

В отличие от (a), случай (b) выражает сопряженную переменную уже для вырожденной задачи; другие подобные результаты автору неизвестны. В совокупности эти два случая позволяют свести задачу (1) к "полной" краевой задаче в системе ПМП. Это, в свою очередь, может быть полезно в задачах максимизации временного среднего, см., например, [1, 4, 5].

Условия (3) можно, переходом к подпоследовательности, свести к проверке равномерной на \mathbf{T} близости I_ξ или $I_\xi/\|I_\xi\|$, поэтому следует, в дальнейшем, ослаблять именно это требование теоремы 1. Применим теорему 1 в линейной по x задаче, где это требование выполнено автоматически найдем все τ -оптимальные решения задачи

$$\dot{x} = ux, \quad x(0) = 1, \quad \int_0^T (1-u)x dt \overset{T \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \max, \quad u \in [\alpha, \beta] \quad (\alpha \leq \beta).$$

Здесь: $A_\xi(T) = x^0(T)$, $I_\xi(T) = J_T[u^0]$. Перейдя при необходимости от τ к её подпоследовательности, имеем один из трех случаев:

А. $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\tau_n}(u^0) = +\infty$. Из (2b) имеем (3b), то есть $\varpi = 1$, $\lambda = 0$, $H[T] = u$, $u^0 \equiv \beta$; выражая $J_T(u^0)$, из А. получаем $0 \leq \beta < 1$.

Б. $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\tau_n}(u^0) = -\infty$, аналогично имеем $u^0 \equiv \alpha > 1$.

В. Здесь из (2a) следует (3a). Теперь для $R(t) \triangleq I_* - J_t(u^0) - x^0(t)$ имеем $H[t] = R(t)u + x^0(t)$, и $u^0(t)$ определяется знаком $R(t)$. Поскольку функция R убывает, то переключений не более одного.

Заметим, что если $u^0(t) = \gamma$ при $t > T$ для некоторых $T \in \mathbf{T}$, $\gamma \in \mathbf{R}$, то из ограниченности $I_* - J_t(u^0)$ имеем $\gamma < 0$ (тогда $R(t) > 0$) или $\gamma = 1$ (тогда $R(t) < 0$). Отсюда, если всегда $R(t) > 0$, то $u^0 \equiv \beta < 0$; если всегда $R(t) < 0$, то $u^0 \equiv \alpha = 1$; если в некоторый момент $T > 0$ было бы переключение, то $R(T) = 0$ и при $t > T$ $R(t) < 0$, откуда $u^0(t) = \beta = 1$, $I_* = J_T(u^0)$ и $x(T) = -R(T) = 0$, что невозможно.

Проверяя, видим, что $u^0 \equiv \alpha$ при $\alpha \geq 1$, $u^0 \equiv \beta$ при $\beta < 1$ действительно являются τ -оптимальными решениями. Как следствие, задача не имеет никаких τ -оптимальных решений при $\alpha < 1 \leq \beta$.

Литература

- [1] Арнольд В.И. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его прил., 2002. Т. 36, № 2, с. 1–11.
- [2] Асеев С.М., Кряжисимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИ РАН. 2007. Т. 257, с. 1–271.
- [3] Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum Principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (in appear).
- [4] Davydov A.A., Mena-Matos H. Singularity theory approach to time averaged optimization // Singularities in geometry and topology. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2007. Pp. 598–628.
- [5] Finlay L., Gaitsgory V., Lebedev I. Duality in linear programming problems related to deterministic long run average problems of optimal control, SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, pp. 1667–1700.

КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

Акимова А.А.¹

Теория узлов в утолщенном торе $T \times I$ является естественным продолжением теории узлов в S^3 . Узлы в $T \times I$ можно задавать диаграммами, аналогичными сферическим диаграммам классических узлов. В настоящее время табулированы все узлы в S^3 , минимальные диаграммы которых имеют не более 16 двойных точек [1]. Мы решаем задачу табулирования узлов в $T \times I$, минимальные диаграммы которых имеют не более трех двойных точек. Узлы строятся с помощью трёхступенчатого перебора (сначала – регулярных графов степени 4, затем – отвечающих им проекций, затем – диаграмм). Различность полученных узлов доказывается с помощью аналога (для узлов в $T \times I$) полинома Кауффмана [2].

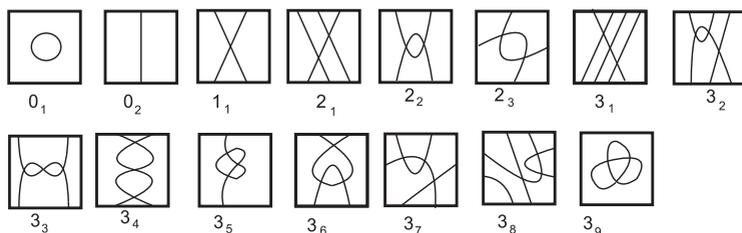
Определение 1. Узлом в $T \times I$, где $T = S^1 \times S^1$ – двумерный тор и I – отрезок, называется произвольная простая замкнутая кривая $K \subset T \times I$. При этом два узла $K \subset T \times I$, $K' \subset T' \times I$ эквивалентны, если пара $(T \times I, K)$ гомеоморфна паре $(T' \times I, K')$.

Проекции и диаграммы узлов в $T \times I$ определяются так же, как и в классическом случае. Различие состоит в том, что в первом случае они лежат на торе T , во втором – на сфере S^2 . Отметим, что минимальная проекция не может иметь тривиальной (то есть ограничивающей диск) петли. Если бы такая петля была, то её можно было бы убрать с помощью первого преобразования Райдемайстера (разворачивания петли), которое не меняет узла.

Теорема 1. *Существуют ровно 8 регулярных графов степени 4, имеющих не более трёх вершин (в число регулярных графов мы включаем окружность, на которой нет вершин). (См. рис. 1.)*

Теорема 2. *Существуют ровно 15 различных (т. е. не переводимых друг в друга гомеоморфизмами тора) минимальных проекций узлов в $T \times I$, которые имеют ≤ 3 двойных точек. (См. рис. 2.)*

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00605.

Рис. 1: регулярные графы степени 4 с ≤ 3 вершинамиРис. 2: минимальные проекции узлов с ≤ 3 двойными точками на торе T , который представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Граф (a), то есть окружность, задает две проекции, 0_1 и 0_2 , в зависимости от того, является ли эта окружность на торе тривиальной. Нетрудно показать, что графы (f) и (g) не задают ни одной минимальной проекции. Графы (b), (c), (e) имеют только разбивающие вершины. После разрезания соответствующих им проекций по двойным точкам получают 2, 3 или 4 непересекающиеся окружности на торе, причем две окружности, которые отвечают петлям, обязаны быть нетривиальными. Несложный перебор всех возможных способов их обратного соединения дает проекции $1_1, 2_1, 2_2$ и $3_i, i=1, 3$. Перебор проекций, отвечающих оставшимся графам (d) и (h), выполняется с помощью подсчета эйлеровой характеристики тора, которая равна 0 и выражается через число двойных точек проекции и число и типы ее граней (дополнительных областей). Этот подсчет показывает, что в рассматриваемом случае хотя бы одна двуугольная грань всегда есть. Устранение этой грани с помощью аналога второго преобразования Райдемайстера дает либо одну из проекций $0_1, 0_2$, либо не обязательно минимальную проекцию графического типа (b). Перебор всех возможных способов восстановления двуугольника дает оставшиеся проекции проекции 2_3 и $3_i, i=4, 9$.

Теорема 3. Существует ровно 21 различных узел в $T \times I$, минимальные диаграммы которых имеют не более 3 двойных точек. (См. рис. 3.)

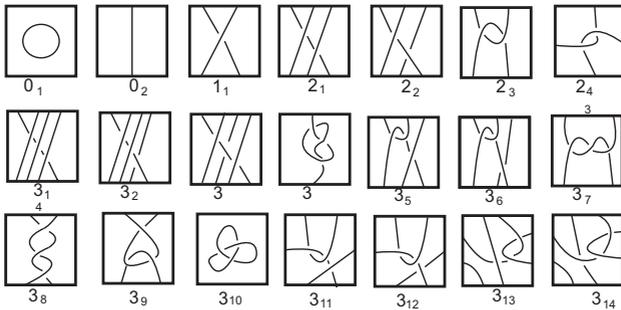


Рис. 3: узлы в $T \times I$, минимальные диаграммы которых имеют не более 3 двойных точек

Диаграммы отличаются от проекций тем, что в двойных точках они размечены, то есть указано, какой участок узла проходит сверху. При этом разметку одной двойной точки можно выбрать произвольным образом (за счет симметрии утолщенного тора, индуцированной нетривиальной симметрией отрезка). Более того, из четырех возможных разметок вершин двуугольника достаточно рассмотреть только две, когда двуугольник нельзя устранить вторым преобразованием Райдемайстера. Эти соображения позволили удержать перебор всех разметок в разумных пределах. Вычисления показали, что полиномы Кауффмана всех полученных узлов различны. Поэтому сами узлы тоже различны.

Автор благодарит профессора С.В. Матвеева за постановку задачи и помощь в ее решении.

Литература

- [1] Hoste J., Thistlethwaite M. The first 1,701,935 knots // Math. Intelligencer (Springer). 1998. Т. 4, № 20. С. 33–48.
- [2] Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. — М.: МЦНМО, 1997.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ПШИТЫЦКОГО О ПАРНЫХ ДИАГРАММАХ

Дужин С.В., Школьников М.С.

Плоская диаграмма узла называется парной, если ее перекрестки можно разбить на пары простейшего вида (рис. 1). В 1987 году



Рис. 1: пары перекрестков

известный специалист по теории узлов Йозеф Пшитыцкий поставил вопрос, можно ли любой узел изобразить парной диаграммой ([3]). Он предполагал, что ответ отрицательный, но контрпример ему придумать не удалось. По сообщению Пшитыцкого, в 1991 году Джон Конвей сказал ему, что знает контрпример, но предъявить его не смог. Вскоре этот вопрос попал в известный сборник открытых проблем в топологии, который поддерживает Роб Кирби ([2]). Мы даем решение этой проблемы, а именно, доказываем, что крендельный узел $P(3, 3, -3)$, среди некоторых прочих, не представим парной диаграммой.

Определение. Узел называется двудольным, если среди его плоских диаграмм существует парная.

Примером двудольного узла служит любой рациональный узел (см. [4]). Наш подход заключается в том, что мы предъявляем некоторый алгебраический инвариант узлов, который обладает специфическим свойством на двудольных узлах. Таким инвариантом оказывается второй идеал Александра. Опишем кратко его построение.

Поверхностью Зейферта данного узла называется компактная ориентированная поверхность, имеющая своей границей данный узел. Выбирая базис в первой группе гомологий этой поверхности, можно построить матрицу билинейной формы $lk \circ (id, \alpha)$, определенной на ней, где lk – коэффициент зацепления, а α – гомоморфизм,

индуцированный сдвигом в положительном направлении вдоль нормали к S . Такая матрица называется матрицей Зейферта.

Предложение 1. *Любой двудольный узел обладает такой поверхностью Зейферта, что ее матрица Зейферта с точностью до транспонирования представляется в виде $\begin{pmatrix} E & 0 \\ I & F \end{pmatrix}$, где $I, 0, E, F$ – матрицы одного размера, I – единичная матрица, 0 – нулевая матрица, а E и F – симметричные.*

Основным достоинством матрицы Зейферта оказывается то, что по ней легко можно построить матрицу представления модуля Александера. Модулем Александера данного узла называется первая группа гомологий бесконечного циклического накрытия дополнения узла, снабженная естественной модульной структурой над кольцом Лорановских полиномов с целыми коэффициентами от переменной t , где t отождествляется с образующей в группе автоморфизмов этого накрытия.

Рассмотрим идеал, порожденный всеми минорами матрицы представления модуля Александера размера $n - m + 1$, где n – количество строк в матрице представления. Такой идеал называют m -м идеалом Александера и обозначают I_m . Хорошо известно, что идеалы Александера не зависят от выбора матрицы представления, а потому являются инвариантами узлов.

Введем обозначение $z = t^{-1/2} - t^{1/2}$. Наше опорное утверждение состоит в следующем.

Предложение 2. *Если K – двудольный узел, то существует матрица B такая, что $I + z^2 B$ – матрица представления модуля Александера.*

Используя это предложение и некоторые технические леммы, можно получить следующий результат.

Теорема. *Пусть K – двудольный узел. Тогда, если $I_m(K)$ нетривиален, то $1 + t \notin I_m(K)$.*

Применяя эту теорему, имеем

Следствие 1. *Узлы $9_{35}, 9_{37}, 9_{41}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{48}, 9_{49}, 10_{74}, 10_{75}, 10_{103}, 10_{155}, 10_{157}$ – не двудольные.*

Следствие 2. Пусть p – нечетное число, отличное от ± 1 . Тогда узел $T(p, p, -p)$ – не двудольный.

В работе [4] было показано, что рациональные узлы являются двудольными, но все узлы до семи перекрестков включительно являются рациональными. В процессе исследования нам удалось показать, что узлы с восемью перекрестками (кроме 8_{18}) тоже обладают парными диаграммами. Для последнего узла наши методы неприменимы, потому на данный момент вопрос для него остается открытым.

Гипотеза. Узел 8_{18} не является двудольным.

Литература

- [1] *Duzhin S.V., Shkolnikov M.S.* Bipartite knots // arxiv.org/abs/1105.1264
- [2] *Kirby R.C.* Open problems in low-dimensional topology // math.berkeley.edu/~kirby/problems.ps.gz.
- [3] *Przytycka T.M., Przytycki J.H.* Signed dichromatic graphs of oriented link diagrams and matched diagrams // Preprint. University of British Columbia, 1987.
- [4] *Duzhin S.V., Shkolnikov M.S.* A formula for the HOMFLY polynomial of rational links // [arXiv.org/abs/1009.1800](http://arxiv.org/abs/1009.1800)
- [5] *Przytycki J.H.* The t_3, \bar{t}_4 moves conjecture for oriented links with matched diagrams // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1990, № 108. Pp. 55-61.
- [6] *Rolfsen D.P.* Knots and links – Berkeley: Publish or Perish, 1976.
- [7] *Lickorish W.B.R.* An introduction to knot theory – New York: Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1997.
- [8] *Ansee R.P., Przytycki J.H., Rolfsen D.P.* Knot polynomials and generalized mutation // Topology Appl., 1987, № 32. Pp. 237–249.

ЛОКАЛЬНЫЕ МАКСИМУМЫ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПЛОЩАДИ ЗАМКНУТЫХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Жукова А.М.

Определение 1. Полигональным шарнирным механизмом называется набор из n положительных вещественных чисел l_1, l_2, \dots, l_n , реализуемых в виде сторон многоугольника.

Определение 2. Конфигурацией шарнирного механизма называется набор из n точек на плоскости $p_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, таких, что $|p_i, p_{i+1}| = l_i$ (нумерация считается циклической). При этом первые две точки зафиксированы: $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (l_1, 0)$.

Совокупность конфигураций с зафиксированными вершинами p_1 и p_2 есть пространство модулей шарнирного механизма. В общем случае пространство модулей является гладким многообразием, размерность которого равна $n - 3$.

Мы изучаем пространства модулей шарнирных механизмов с помощью теории Морса, задавая на пространстве модулей функцию ориентированной площади:

$$A(P) = (x_1y_2 - x_2y_1) + \dots + (x_ny_1 - x_1y_n).$$

Известно (см. [1]), что вписанные конфигурации шарнирного механизма являются критическими точками этой функции. Для вписанной конфигурации мы вводим следующие обозначения:

α_i – половина центрального угла, опирающегося на сторону p_i, p_{i+1} .

ε_i – ориентация вектора (p_i, p_{i+1}) относительно центра описанной окружности.

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tan \alpha_i.$$

Была найдена простая формула для вычисления индекса Морса вписанной конфигурации шарнирного механизма (см. [2]). Используя ее, мы доказываем следующую теорему:

Теорема 1. Пусть P — вписанная конфигурация типичного шарнирного механизма.

Мы считаем, что для конфигурации P верно $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leq i \leq e(P)$. Тогда P является точкой локального максимума функции ориентированной площади A тогда и только тогда, когда она является конфигурацией одного из следующих четырех типов:

1. P — выпуклая конфигурация (рис. 1.1).
2. P состоит только из отрицательно ориентированных ребер и при этом каждые два ребра пересекаются (рис. 1.2).
3. Одновременно выполнены три условия (рис. 1.3):
 - каждые два отрицательно ориентированных ребра пересекаются;
 - положительно ориентированные ребра не пересекают друг друга;
 - ни одно положительно ориентированное ребро не пересекает отрицательно ориентированное ребро.
4. Одновременно выполнены четыре условия (рис. 1.4):
 - $\delta(P) > 0$;
 - любые два отрицательно ориентированных ребра пересекают друг друга;
 - положительно ориентированные ребра не пересекают друг друга;
 - ровно одно положительно ориентированное ребро пересекает отрицательно ориентированные ребра, а среди всех остальных положительно ориентированных ребер ни одно не пересекает отрицательно ориентированные.

Далее, мы рассматриваем пространства модулей пятизвенных шарнирных механизмов и доказываем следующую теорему:

Теорема 2. Возможные наборы критических точек на пространстве модулей типичного пятизвенного шарнирного механизма полностью исчерпываются следующим списком:

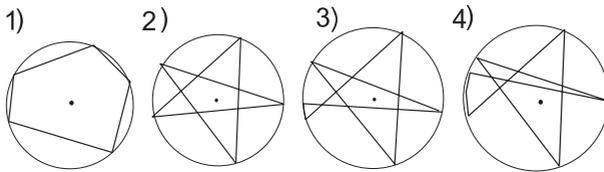


Рис. 1: четыре типа локальных максимумов

- 2 критические точки на сфере;
- 4 критические точки на торе;
- 6 критических точек на поверхности рода два;
- 10 критических точек на поверхности рода два;
- 8 критических точек на паре торов;
- 8 критических точек на поверхности рода три;
- 12 критических точек на поверхности рода три;
- 10 критических точек на поверхности рода четыре;
- 14 критических точек на поверхности рода четыре.

Литература

- [1] *Khimshiashvili G., Panina G.* Cyclic polygons are critical points of area. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 2008, 360, № 8, pp. 238–245.
- [2] *Khimshiashvili G., Panina G., Siersma D., Zhukova A.* Extremal Configurations of Polygonal Linkages, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach gGmbH Oberwolfach Preprints (OWP)*, 2011, № 24.
- [3] *Panina G., Zhukova A.* Morse index of a cyclic polygon, *Cent. Eur. J. Math.*, Vol. 9, 2011, № 2, pp. 364–377.

ТЕНЗОРЫ ВЕЙЛЯ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Можей Н.П.

Множество всех тензоров Вейля линейной связности на n -мерном комплексно-аналитическом многообразии аффинной связности образует неприводимое представление относительно естественного действия группы $GL(n, C)$. В отличие от тензора кривизны (псевдо-)римановой метрики, к исследованию пространства орбит этого действия, начиная с $n \geq 3$, не применимы классические методы геометрической теории инвариантов (см. [1]). В данной работе проводится детальный анализ случая $n = 3$ и описываются все орбиты действия $GL(3, C)$ на пространстве тензоров Вейля, имеющие недискретный стабилизатор. Данная классификация может рассматриваться как аналог классификации Петрова тензора кривизны четырехмерных лоренцевых метрик.

Описание неприводимых компонент в пространстве всех тензоров кривизны аффинных связностей без кручения было проведено Э. Картаном в [2]. Нетрудно показать, что для $n = 3$ пространство тензоров Вейля аффинных и проективных связностей Картана образует 15-мерное неприводимое представление группы $SL(3, C)$ со старшим весом $2\pi_1 + \pi_2$, где π_1 и π_2 — фундаментальные веса алгебры Ли типа A_2 . Оно может быть описано как пространство всех тензоров в $S^2(V) \otimes V^*$ с нулевым следом.

Идея описания всех орбит с недискретным стабилизатором основана на рассмотрении возможных стабилизаторов, которые являются алгебраическими подгруппами в $GL(3, C)$ ненулевой размерности. Каждая такая подгруппа представима в виде произведения редуктивной (в $GL(3, C)$) подгруппы и нормальной унипотентной подгруппы. За исключением нулевой орбиты и орбиты старшего вектора, все остальные тензоры Вейля имеют стабилизатор размерности 4 и менее, что позволяет эффективно описать все возможные стабилизаторы с точностью до сопряженности.

Далее, для каждого возможного стабилизатора H мы строим подпространство всех тензоров Вейля, устойчивых относительно действия H , и проводим их детальную классификацию с точностью до

нормализатора $N(H)$, выделяя те из них, стабилизатор которых совпадает с H . Таким образом мы получаем 27 типов тензоров Вейля, имеющих недискретный стабилизатор. Наконец, в работе также рассмотрено строение замыканий каждой из найденных орбит.

Литература

- [1] Винберг Э.Б. Эффективная теория инвариантов // Сборник работ «Алгебра», МГУ. 1982, с. 27–33.
- [2] Картан Э. Пространства аффинной, конформной и проективной связности. М.: Изд. МГУ, 1954.

О ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОСНАЩЕНИЯХ G -ТРАНСЛЯТОРОВ

Нгуен Л.Л.

Эллиптическая теория для псевдодифференциальных операторов на гладких многообразиях в настоящее время хорошо известна и является классической. Основные теоремы этой теории состоят в установлении фредгольмовости в пространствах Соболева, а также предъявлении формулы индекса в топологических терминах.

В ситуации, когда многообразие имеет особенности, например, является пересечением некоторого числа гладких многообразий по гладкому подмногообразию, основным объектом рассмотрения является некоторый новый класс операторов, которые называются *трансляторами*. Оказывается, что для фредгольмовости, кроме естественного требования эллиптичности, необходимо еще оснастить транслятор, т.е. добавить некоторые операторы на пересечении многообразий. Соответствующая эллиптическая теория была равита в работах Б.Ю. Стернина [1, 2].

Доклад посвящен оснащению G -трансляторов на компактных многообразиях с многомерными особенностями, т.е. оснащению трансляторов, инвариантных относительно действия конечной циклической группы G . Интерес к такому классу операторов возникает, в частности, в связи с изучением некоторых нелокальных эллиптических операторов. Нами вводится условие эллиптичности для G -трансляторов и доказывается теорема конечности (фредгольмовости). Затем мы сравниваем условие G -эллиптичности с обычной эллиптичностью.

Пусть M – гладкое замкнутое многообразие, $Y^p, p = 1, 2$ – два его замкнутых подмногообразия, которые трансверсально пересекаются по подмногообразию $X = Y^1 \cap Y^2$. Пусть на M действует группа $G = \mathbb{Z}_2$ и $GY = Y$, где $Y = Y^1 \sqcup Y^2$.

Для произвольной точки m подмногообразия X существуют такие координаты $(x, y) = (x, y_1, y_2)$, что многообразие Y^p определяется уравнениями $y_q = 0$, где $p, q = 1, 2, (p \neq q)$, а X – уравнениями $y_1 = y_2 = 0$.

Пусть $u_p(x, y_p)$ – функция на Y^p , $u_3(x)$ – функция на X . При этом

действия группы G на пространствах Соболева $H^{s_p}(Y^p)$ и $H^{s_X}(X)$ ($s_p, s_X \in \mathbb{R}$) в локальных координатах записываются в виде

$$g_p^* u_p(x, y_p) = u_p(g_p(x, y_p)), \quad g_3^* u_3(x) = u_3(g_3 x),$$

где $g_p = g|_{Y^p}$, $g_3 = g|_X$.

Имеются два типа действий группы G на M .

Случай 1: подмногообразия Y^p инвариантны при действии G .

$$g_p : Y^p \rightarrow Y^p, \quad g_p g_p = 1_{Y^p}, \quad \text{где } p = 1, 2.$$

Соответствующие операторы сдвига в пространствах функций на Y^1, Y^2, X обозначим через $g^* = \text{diag}(g_1^*, g_2^*, g_3^*)$.

Случай 2: подмногообразия Y^p переходят друг в друга при действии G .

$$g_p : Y^p \rightarrow Y^q, \quad g_p g_q = 1_{Y^q}, \quad \text{где } p, q = 1, 2 \quad (p \neq q).$$

Соответствующие операторы сдвига в пространствах функций на Y^1, Y^2, X обозначим через $g^* = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & g_2^* \\ g_1^* & 0 \end{pmatrix}, g_3^* \right)$.

Далее будем называть пространством G -инвариантных функций $u = (u_1, u_2, u_3)$ следующее пространство:

$$(\oplus_p H^{s_p}(Y^p) \oplus H^{s_X}(X))^G = \{u \in \oplus_p H^{s_p}(Y^p) \oplus H^{s_X}(X) \mid \forall g \in G, g^* u = u\}.$$

Рассмотрим оператор оснащения (см. [3])

$$\mathcal{D}_X = \begin{pmatrix} 1 & T_{12} & C_{1X} \\ T_{21} & 1 & C_{2X} \\ B_{X1} & B_{X2} & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} \oplus_p H^{s_p}(Y^p) \\ \oplus \\ H^{s_X}(X) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \oplus_p H^{s_p}(Y^p) \\ \oplus \\ H^{t_X}(X). \end{matrix}$$

Определение 1. Оснащение \mathcal{D}_X называется G -инвариантным, если $\forall g \in G$ выполнено равенство $g^* \mathcal{D}_X g^{*-1} = \mathcal{D}_X$.

Сужая G -инвариантный оператор \mathcal{D}_X на подпространство G -инвариантных функций, получим оператор \mathcal{D}_X^G , такой оператор \mathcal{D}_X^G будем называть G -оснащением.

Пусть $\sigma(\mathcal{D}_X)$ – символ оснащения \mathcal{D}_X (см. [3])

$$\sigma(\mathcal{D}_X) : \pi^*(\oplus_p H^{s_p}(N^p) \oplus \mathbb{C}) \rightarrow \pi^*(\oplus_p H^{s_p}(N^p) \oplus \mathbb{C}), \quad (2)$$

где $\pi : T^*X \rightarrow X$ — проекция, а $H^{sp}(N^p)$ — расслоение на X , слоем которого в точке $t \in X$ является пространство Соболева функций на слое N_t^p нормального расслоения подмногообразия $X \subset Y^p$.

Определение 2. Символ $\sigma(\mathcal{D}_X^G)$ G -оснащения \mathcal{D}_X^G определяется следующим образом:

1) если g действует тождественно на X , то $\sigma(\mathcal{D}_X^G)$ есть сужение символа на векторное подрасслоение $\pi^*(\oplus_p H^{sp}(N^p) \oplus \mathbb{C})^G$,

$$\sigma(\mathcal{D}_X^G) : \pi^*(\oplus_p H^{sp}(N^p) \oplus \mathbb{C})^G \rightarrow \pi^*(\oplus_p H^{sp}(N^p) \oplus \mathbb{C})^G;$$

2) если g действует не тождественно на X , то положим

$$\sigma(\mathcal{D}_X^G) \stackrel{def}{=} \sigma(\mathcal{D}_X).$$

Определение 3. G -оснащение \mathcal{D}_X^G называется *эллиптическим*, если его символ является изоморфизмом на $T_0^*X = T^*X \setminus 0$.

Теорема 1. Если G -оснащение эллиплично, то оно является фредгольмовым.

Теорема 2. Если оснащение \mathcal{D}_X эллиплично, то G -оснащение \mathcal{D}_X^G также эллиплично. Обратное утверждение имеет место, если выполнено одно из следующих условий:

1) отображение $g|_X$ не является тождественным,

2) $g|_X = Id$, многообразия Y^p G -инвариантны и $g|_{Y^p} = Id$ для хотя бы одного $p = 1, 2$.

В остальных случаях из эллипичности G -оснащения \mathcal{D}_X^G , вообще говоря, не следует эллипичность оснащения \mathcal{D}_X .

Литература

- [1] Стернин Б.Ю. Эллиптические морфизмы на многообразиях с особенностями (оснащение эллиптического оператора). // ДАН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 45–48.
- [2] Стернин Б.Ю. Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями. М.: МИЭМ, 1974.
- [3] Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. Об индексе эллиптических трансляторов // ДАН. 2011. Т. 436, № 4. С. 443–447.

CARDINAL FUNCTIONS OF THE LINEAR SPACE $C(X)$ Osipov A.V.¹

The set $C(X)$ of all continuous real-valued functions on a Tychonoff space X has a number of natural topologies. This work is a survey of the part of the theory of linear topological spaces that studies spaces of continuous functions $C(X)$ with weak set-open topologies.

A set $A \subseteq X$ is said to be *bounded* if $f(A)$ is a bounded subset of \mathbb{R} for each $f \in C(X)$.

In 1970, in [3] Buchwalter introduced natural topology on $C(X)$, the topology of uniform convergence on bounded subsets of X .

In 1976 the study of this new topology was referred to in a monograph by Schmets in [5].

In 1995, in [4] Kundu and Raha studied Buchwalter's bounded-open topology on the set of all continuous real-valued functions. In particular, they proved that if λ is a family of bounded subsets closed with respect to its subsets, then the weak set-open topology coincides with a topology of uniform convergence on λ .

The weak set-open topology on a family λ of nonempty subsets of the set X is a generalization of the topology of uniform convergence on bounded subsets of X . All sets of the form $\{f \in C(X) : \overline{f(F)} \subseteq U\}$, where $F \in \lambda$ and U is an open subset of \mathbb{R} , form a subbase of the weak set-open topology. Note that the weak set-open topology coincides with a topology of uniform convergence on λ , when λ consists of all finite (compact, countable compact, pseudocompact, sequentially compact, C -compact) subsets of X . Therefore $C(X)$ with the topology of pointwise convergence (compact-open, countable compact-open, sequentially compact-open, pseudocompact-open, C -compact-open topology) is a locally convex topological vector space.

Fairly complete study of the cardinal functions of the linear space $C(X)$ was obtained by Velichko in [6]. We will continue to study the problem of describing cardinal-valued functions in the class of spaces $C_{\lambda^*}(X)$. This problem is well studied in C_p -theory (i.e., for spaces

¹The research has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 09-01-00139-a) and by the Division of Mathematical Sciences of the Russian Academy of Sciences (project no. 09-T-1-1004).

$C(X)$ with the topology of pointwise convergence). Thus, for topology of pointwise convergence, the following formula is valid [1]: $nw(C_p(X)) = nw(X)$.

Теорема 1. *For a space X , the following statements are equivalent.*

1. X is an \aleph_0 -space.
2. $C_c(X)$ is an \aleph_0 -space.
3. $C_c(X)$ is cosmic.
4. $C_{ps}(X)$ is cosmic.
5. $C_b(X)$ is cosmic.

The next theorem gives a characterization of the character of $C_{\lambda^*}(X)$. Since for any topological group, the character and the π -character are the same, then this theorem also characterizes the π -character of $C_{\lambda^*}(X)$.

Теорема 2. *Let λ be a saturation family on space X .*

Then $\chi(C_{\lambda^}(X)) = \pi_\chi(C_{\lambda^*}(X)) = \lambda a(X)$.*

The λ -weight of a space X is $w_\lambda(X) = \sup\{w(A) : A \in \lambda\}$. If vX is the Hewitt realcompactification of a space X , then we set $w_{v\lambda}(X) = \sup\{w(\overline{A}^{vX}) : A \in \lambda\}$.

Теорема 3. ([6]). *Let λ be a bounded bornology on space X .*

Then $w(C_{\lambda^}(X)) = w_{v\lambda}(X) \times \lambda a(X)$.*

Question (Question 1 in [6]). Does there exist an intrinsic (not involving vX) working criterion for the weight of $C_{\lambda^*}(X)$?

Let us introduce the number $f\lambda w(X) = \min\{|\delta| : \delta \subseteq \lambda \text{ is an } f\lambda\text{-network on } X\}$.

Теорема 4. *Let λ be a saturation family on space X .*

Then $f\lambda w(X) = f\lambda nw(X) \times \lambda a(X)$.

The next theorem gives a characterization of the weight of $C_{\lambda^*}(X)$.

Теорема 5. *Let λ be a saturation family on space X .*

Then $w(C_{\lambda^}(X)) = \pi w(C_{\lambda^*}(X)) = f\lambda w(X)$.*

Obviously, if $\lambda = F(X)$ then $f\lambda w(X) = \omega$ if and only if X is countable. On the other hand, if a λ is a bounded bornology of X then $f\lambda w(X) = \omega$ if and only if X is a hemicompact \aleph_0 -space.

Let us make several remarks on the Lindelöf number. In C_p -theory, there is the formula (Asanov, [2]) $l(C_p(X)) \geq t^*(X)$, where $t^*(X) = \sup\{t(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ is the supertightness of X .

Let λ be a bounded bornology of X . There exists a natural one-to-one mapping of the space $C_{\lambda^*}(X)$ onto the space $C_p(X)$. The Lindelöf number does not increase under continuous mappings; thus, we obtain the formula $l(C_{\lambda^*}(X)) \geq l(C_p(X)) \geq t^*(X)$.

Question(Question 4 in [6]). Are the elements of λ compact sets in the case under consideration?

Теорема 6. *Let λ be C -compact bornology of X and $C_{\lambda^*}(X)$ is Lindelöf. Then λ consists of metrizable compact subsets of X .*

Теорема 7. *Let λ be a bounded bornology of X and $C_{\lambda^*}(X)$ has countable character. Then $C_{\lambda^*}(X)$ is Lindelöf iff X is a hemicompact \aleph_0 -space.*

Литература

- [1] *Arkhangel'skii A.V.* Topological Function Spaces — Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [2] *Asanov M.O.* On cardinal functions of spaces of continuous functions // Modern Topology and Set Theory. Vol. 2, 1979, pp. 8–12.
- [3] *Buchwalter H.* Parties barnees dun espace topologique complement regulier — Sem. Choquet, 9e annee, №14, 15 pp., 1970.
- [4] *Kundu S., Raha A.B.* The bounded-open topology and its relatives // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. Vol. 27. 1995. Pp. 61–77.
- [5] *Schemets J.* Espase de fonctions continues — Lecture Notes in Mathematics 519, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- [6] *Velichko N.V.* λ -Topologies on Function Spaces // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 131, №4, 2005. Pp. 5701–5737.

АНАЛОГИ ТЕОРЕМ МАЙЗЕЛЯ И ПЛИССА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОТСЛЕЖИВАНИЯ

Тодоров Д.И.¹

Задача об отслеживании приближенных траекторий (псевдотраекторий) динамических систем точными траекториями – одна из интенсивно изучаемых задач современной глобальной теории дискретных динамических систем (см., например, монографии [1, 2]). В частности, интересны связи свойств отслеживания и структурной устойчивости.

Хорошо известно, что структурно устойчивая система обладает свойствами отслеживания, и при этом эти свойства лишщицеы (см. [1]). Совсем недавно было показано, что из наличия свойства лишщицеа отслеживания следует структурная устойчивость системы (см. [3]).

Важным шагом в доказательстве этого результата является применение теоремы Плисса (см. [4]), которая тесно связана с теоремой Майзеля. Бесконечномерные аналоги теорем Майзеля и Плисса используются также в задачах, связанных с уравнениями в частных производных.

Пусть I – некоторое подмножество целых чисел. Мы будем рассматривать два случая: либо I состоит из целых чисел, больших или равных 0, либо $I = \mathbb{Z}$. Пусть $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k \in I}$ – последовательность линейных изоморфизмов $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, занумерованных числами из I . Рассмотрим однородное и неоднородное уравнения с этой последовательностью.

$$x_{k+1} = A_k x_k, \quad k \in I \quad (1)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + f_{k+1}, \quad k \in I. \quad (2)$$

Обозначим через $\Phi_{m,I}$ фундаментальную матрицу системы. Будем работать с линейными подпространствами пространства последовательностей векторов \mathbb{R}^d , занумерованных числами из I . Для ве-

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00000 и Программой фундаментальных исследований «Процессы управления».

вещественного числа ω будем обозначать через $\mathcal{N}_\omega(I)$ банахово пространство последовательностей, ограниченных по норме $\|x\|_\omega = \sup_{k \in I} |x_k| (|k| + 1)^\omega$.

Определение 1. Пусть α, β – вещественные числа. Будем говорить, что последовательность \mathcal{A} обладает свойством Перрона $B_{\alpha, \beta}(I)$, если для любой последовательности $f \in \mathcal{N}_\alpha(I)$ существует решение неоднородного уравнения с неоднородностью f , лежащее в $\mathcal{N}_\beta(I)$. При $\alpha = \beta$ будем присать просто $B_\alpha(I)$.

Замечание 1. При $\varepsilon, \delta \geq 0$ выполнено, что если последовательность \mathcal{A} обладает свойством $B_{\alpha-\varepsilon, \beta+\delta}$, то она обладает и свойством $B_{\alpha, \beta}$.

Пусть ω – вещественное число. Мы будем использовать понятие гиперболической последовательности линейных изоморфизмов, определённое, например, в [5]. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1 (дискретный аналог теоремы Майзеля). Пусть $I = [0, +\infty)$ и нормы всех матриц A_k и A_k^{-1} ограничены числом $N > 0$. Последовательность \mathcal{A} обладает свойством $B_\omega(I)$ тогда и только тогда, когда последовательность \mathcal{A} гиперболична на луче $[0, +\infty)$.

Теорема 2 (дискретный аналог теоремы Плисса). Пусть $I = \mathbb{Z}$ и нормы всех матриц A_k и A_k^{-1} ограничены числом $N > 0$. Последовательность \mathcal{A} обладает свойством $B_\omega(I)$ тогда и только тогда, когда последовательность \mathcal{A} гиперболична на лучах $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$ и пространства $B^+(\mathcal{A})$ и $B^-(\mathcal{A})$ трансверсальны, где

$$\begin{aligned} B^+(\mathcal{A}) &= \{v \in \mathbb{R}^d \mid |\Phi_{k,0}v| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty\}, \\ B^-(\mathcal{A}) &= \{v \in \mathbb{R}^d \mid |\Phi_{k,0}v| \rightarrow 0, k \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

Пусть f – диффеоморфизм замкнутого риманова многообразия M и γ, σ – неотрицательные числа.

Определение 2. Будем называть γ -убывающей d -псевдотраекторией динамической системы, порожденной f , последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ точек M , для которой выполнены неравенства

$$\text{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d(|k| + 1)^{-\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 3. Будем говорить, что f обладает убывающим свойством отслеживания с показателями (γ, σ) , если существуют такие положительные константы d_0, L , что для любой γ -убывающей d -псевдотраектории $\{x_k\}$ при $d \leq d_0$ найдётся такая точка $p \in M$, что выполнены неравенства

$$\text{dist}(x_k, f^k(p)) \leq Ld(|k| + 1)^{-\sigma}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Будем писать, соответственно, $f \in LDSP(\gamma, \sigma)$.

Замечание 2. При $\varepsilon, \delta \geq 0$ выполнено, что если $f \in LDSP(\gamma - \varepsilon, \sigma + \delta)$, то $f \in LDSP(\gamma, \sigma)$.

Доказана следующая теорема

Теорема 3. Если $\omega \geq 0$ и f – диффеоморфизм замкнутого риманова многообразия M , то f структурно устойчив тогда и только тогда, когда $f \in LDSP(\omega, \omega)$.

Замечание 3. Эта теорема обобщает известные результаты для липшицева свойства отслеживания из [1] и [3], так как условие $f \in LDSP(\omega, \omega)$ при $\omega = 0$ означает то, что f обладает липшицевым свойством отслеживания.

Литература

- [1] S. Yu. Pilyugin, Shadowing in Dynamical Systems, Lect. Notes in Math., vol. 1706, Springer, Berlin, 1999.
- [2] K. Palmer, Shadowing in Dynamical Systems, Theory and Applications. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [3] S. Yu. Pilyugin, S. B. Tikhomirov, Lipschitz shadowing implies structural stability, Nonlinearity, vol. 23, pp. 2509-2515, 2010.
- [4] В. А. Плисс, Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений, Проблемы асимпт. теории нелин. колеб., Киев, 1977, с. 168-173.
- [5] S. Yu. Pilyugin, Generalizations of the notion of hyperbolicity // J. Diff. Eqns Appl., vol. 12, pp. 271-282, 2006.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП К ИССЛЕДОВАНИЮ УПРУГИХ СВОЙСТВ КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

Христинич Д.В.¹

Многие деформируемые твёрдые тела имеют кристаллическую решётку, в узлах которой находятся атомы, ионы и молекулы. В идеальной кристаллической решётке может быть введена элементарная ячейка [1], определяющая расположение всех частиц в решётке. Вся кристаллическая решётка может быть получена посредством бесконечного числа трансляций (поступательных перемещений) элементарной ячейки в трёх направлениях, характерной для каждого кристалла. Каждая трансляция всей кристаллической решётки в одном из трёх направлений на расстояние, равное размеру элементарной ячейки в этом направлении, совмещает всю решётку саму с собой. Такое свойство кристаллов называется трансляционной симметрией [2].

Наряду с трансляционной симметрией кристаллы обладают поворотной симметрией — свойством совмещаться с самим собой при повороте на некоторый определённый угол вокруг оси симметрии. Каждая ось симметрии характеризуется порядком оси n . Ось n -го порядка — это ось поворота на угол, кратный $2\pi/n$. Однако трансляционная симметрия кристаллов накладывает ограничения на значения порядков осей симметрии. Известно [1], что в кристаллах возможно наличие поворотных осей только 1, 2, 3, 4 и 6-го порядков.

Существуют материалы, которые не имеют периодической кристаллической структуры, но обладают дальним порядком аперидического типа. Такие материалы называются квазикристаллами. Квазикристаллы не обладают трансляционной симметрией, поэтому могут иметь поворотные оси симметрии 5, 7, 8, 10-го и более высоких порядков [3], недопустимые для периодически упорядоченных кристаллов.

Если анизотропный материал обладает симметрией свойств, то для него можно указать группу ортогональных преобразований G_A , для всех элементов Q которой справедливо равенство

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-97501-р_центр_а.

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} = \mathfrak{S}_\varepsilon \left[\mathbf{Q}^T \cdot \varepsilon(\vec{s}_\varepsilon) \cdot \mathbf{Q}, T \right] \Big|_0^{s_\varepsilon} \quad \forall \mathbf{Q} \in g_A, \quad (1)$$

где \mathbf{T} — энергетический тензор напряжений (тензор Пиола II рода), ε — тензор деформаций Коши–Грина, T — температура.

Группа преобразований g_A , которая в общем случае является подгруппой полной ортогональной группы $g_A \subset g$, называется группой симметрии данного физического свойства материала.

Если некоторое физическое свойство материала имеет тензорную природу и характеризуется тензором \mathbf{N} , то группа ортогональных преобразований g_A является группой симметрии этого тензора.

Для квазикристаллов с одной поворотной осью симметрии исследуем структуру тензора начальной упругости \mathbf{N} четвёртого ранга, который определяет связь между напряжениями и деформациями в законе Гука: $\mathbf{T} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$. Рассмотрим квазикристалл, имеющий поворотную ось симметрии порядка n ($n > 4$, $n \neq 6$) и плоскость изотропии, перпендикулярную этой оси.

Порождающим элементом группы симметрии g_A такого квазикристалла является ортогональный тензор поворота

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_3^{\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} (\vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_2) + \sin \frac{2\pi}{n} (\vec{e}_1 \vec{e}_2 - \vec{e}_2 \vec{e}_1) + \vec{e}_3 \vec{e}_3. \quad (2)$$

Построена матрица $m_{\alpha\beta}$ ортогонального трёхпараметрического преобразования \mathbf{Q}_6 шестимерного пространства А.А. Ильюшина E_6 , соответствующего тензору \mathbf{Q} .

Базисный вектор \vec{i}_α пространства E_6 называется инвариантным относительно группы симметрии материала $(g_A)_6$, если выполняется условие

$$\vec{i}'_\alpha = \vec{i}_\alpha \cdot \mathbf{Q}_6 = \vec{i}_\alpha \quad \forall \mathbf{Q}_6 \in (g_A)_6. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что для материалов, обладающих симметрией пятого порядка и выше, инвариантными базисными векторами шестимерного пространства являются векторы \vec{i}_0 и \vec{i}_1 .

В шестимерном пространстве E_6 образом тензора \mathbf{N} является тензор второго ранга, который может быть представлен своим разложением по диадам $\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{i}_\alpha \vec{i}_\beta + \vec{i}_\beta \vec{i}_\alpha)$.

Для рассматриваемых материалов инвариантными относительно ортогонального преобразования (3) являются базисные тензоры \mathbf{i}_{00} , \mathbf{i}_{01} , \mathbf{i}_{11} и линейные комбинации базисных тензоров $\mathbf{i}_{22} + \mathbf{i}_{33}$, $\mathbf{i}_{44} + \mathbf{i}_{55}$.

Таким образом, тензор начальной упругости \mathbf{n} второго ранга в пространстве E_6 имеет вид

$$\mathbf{n} = n_{00}\mathbf{i}_{00} + n_{01}\mathbf{i}_{01} + n_{11}\mathbf{i}_{11} + n_{22}(\mathbf{i}_{22} + \mathbf{i}_{33}) + n_{44}(\mathbf{i}_{44} + \mathbf{i}_{55}). \quad (4)$$

Каждому базисному вектору \vec{i}_α пространства E_6 в пространстве E_3 соответствует базисный тензор второго ранга \mathbf{I}^α , а каждому тензору $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$ – тензор четвёртого ранга $\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha)$.

Инвариантными для рассматриваемого материала являются базисные тензоры \mathbf{I}^{00} , \mathbf{I}^{01} , \mathbf{I}^{11} и линейные комбинации $\mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33}$, $\mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}$. Тензор упругости четвёртого ранга \mathbf{N} в пространстве E_3 раскладывается по базису инвариантных тензоров аналогично представлению (4):

$$\mathbf{N} = n_{00}\mathbf{I}^{00} + n_{01}\mathbf{I}^{01} + n_{11}\mathbf{I}^{11} + n_{22}(\mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33}) + n_{44}(\mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}). \quad (5)$$

Таким образом, для квазикристаллов, имеющих поворотную ось симметрии порядка $n > 4$, тензоры четвёртого ранга имеют одинаковый вид, совпадающий с представлением тензора четвёртого ранга для трансверсально-изотропного материала. Механические эксперименты по исследованию начальных упругих свойств и определению структуры тензора упругости не позволяют отделить квазикристаллы от кристаллов гексагональной сингонии и трансверсально-изотропного материала.

Литература

- [1] Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1998.
- [2] Белянин В. Квазикристаллы и золотая пропорция // Наука и жизнь. 2005. № 10. С. 68–76.
- [3] Векилов Ю.Х., Черников М.А. Квазикристаллы // Успехи физических наук. 2010. Т. 180. № 6. С. 561–586.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Астапов Ю.В.

При разработке моделей поведения деформируемых твердых тел возникает необходимость обработки экспериментальных данных с целью получения материальных функций или констант. В научных публикациях экспериментальные данные чаще всего представлены графиками, что затрудняет их использование другими исследователями.

С целью оптимизации процесса получения конкретных значений величин разработано приложение, реализованное в среде Borland Delphi 7, позволяющее исследователю на основе графика зависимости получить некоторый набор численных данных, который может быть впоследствии использован в расчетной задаче.

Объектом анализа является файл с расширением JPEG или BMP, который может быть получен исследователем сканированием изображения. Также возможна работа с обычной цифровой фотографией отрывка публикации, однако при применении неспециализированной фотографической техники возникают различные оптические эффекты, искажающие изображение и влияющие на корректность получаемых данных. Рассматриваемое приложение предусматривает работу с изображениями низкого качества, которые посредством коррекции в графических пакетах приводятся к оптимальному для работы виду, подразумевающему удобное пользователю соотношение цветового баланса, яркости, контрастности и других характеристик.

Далее приведен обзор возможностей данного приложения. Интерфейс программы представляет собой рабочую область, в которой отображается обрабатываемый файл (рисунок). Пользователем производится масштабирование осей путем указания на графике нулевой точки и пределов изменения значений по координатам, а также максимальных значений в единицах измерения конкретной задачи. Пользователь может, используя курсор мыши, выяснить координаты точки графика с учетом предварительного масштабирования. Точки отмечаются на графике маркером. Для отмеченных точек форми-

руется массив координат, который отображается в текстовом редакторе, расположенном рядом с рабочей областью. Как правило, сканированное изображение графика формируется таким образом, что каждому пикселю аргумента функции соответствует несколько пикселей ее значений. Поэтому в приложении предусмотрен контроль за возможными отклонениями. Для каждой точки вычисляется погрешность, по величине которой можно судить о корректности полученных данных. Программа дает возможность анализировать поочередно несколько графиков, расположенных в одном файле. Информация о файле, графике, погрешности также динамически отображается в текстовом редакторе.

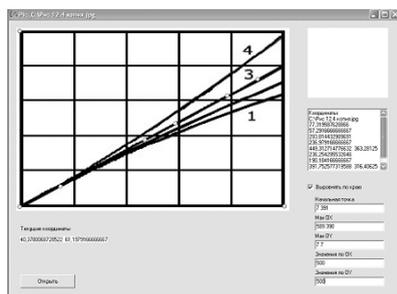


Рис. 1: вид интерфейса приложения

С целью уменьшения влияния человеческого фактора на результаты обработки в приложении реализованы такие вспомогательные модули, как увеличение участка изображения и возможность отмены последнего изменения.

Итоговым результатом работы программы является текстовый файл, формирующийся из данных, отображенных в текстовом редакторе. Этот файл может быть использован в различных приложениях, осуществляющих математические вычисления и построения графиков.

Дальнейшая работа над приложением предполагает разработку модуля, позволяющего аппроксимировать данную функцию по выбранным точкам.

СРАВНЕНИЕ ТРЕХ МЕР СЕМАНТИЧЕСКОЙ БЛИЗОСТИ ВОПРОСОВ В СОЦИАЛЬНЫХ ВОПРОСНО-ОТВЕТНЫХ СЕРВИСАХ

Белобородов А.В.

В настоящее время активно развиваются вопросно-ответные сервисы — системы, позволяющие рядовому пользователю задать вопрос в сети Интернет или ответить на вопрос, заданный другим пользователем. Базы таких сервисов постоянно пополняются, и вполне вероятно, что вопрос, интересующий пользователя, уже был задан ранее. В связи с этим возникает задача поиска и выдачи пользователю страниц, удовлетворяющих его информационной потребности. Под страницей понимается текст отдельного вопроса и ответов на него. Трудность заключается в том, что вопросы, близкие по смыслу, часто выражаются разными наборами слов. Данная проблема уже поднималась в статье [1]. Авторы использовали модель автоматического перевода между словами вопроса и ответов, чтобы расширить словарь «семантически связанных» терминов.

Для исследования были взяты данные социального сервиса Ответы@Mail.Ru (<http://otvet.mail.ru>). Корпус данных насчитывает порядка 17 000 страниц. Каждый вопрос принадлежит одной из 29 категорий. Для проведения экспериментов данные были предварительно обработаны: слова приведены к словарным формам, удалены знаки препинания. Для тестирования были выбраны случайно 20 вопросов из корпуса. Для каждого из них тестируемый метод должен был вернуть множество страниц корпуса, упорядоченных по убыванию значения функции близости к искомому вопросу.

Изначально использовался примитивный подход: поиск одинаковых слов в искомом вопросе и вопросах из корпуса. Функция близости определялась как коэффициент Жаккара:

$$\text{sim}_j(S_1, S_2) = \frac{|S_1 \cap S_2|}{|S_1 \cup S_2|}, \quad (1)$$

где S_1, S_2 — множества слов соответствующих вопросов, приведенных к словарной форме.

В следующем методе для каждого вопроса вычислялся вектор значений tf-idf в пространстве всех различных слов корпуса. За

функцию близости принимался косинус угла между двумя векторами. Пусть вопросам соответствуют векторы $v_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $v_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, где x_i, y_i — значения tf-idf соответствующих слов, n — количество различных слов во всем корпусе. Тогда функция близости определяется как

$$\text{sim}_{\text{tfidf}}(v_1, v_2) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}}. \quad (2)$$

Метод был модифицирован, исходя из следующих предположений:

Гипотеза 1. Если вопросы принадлежат одной категории, то они являются близкими по смыслу.

Гипотеза 2. Если на два вопроса пользователи дают похожие ответы, то они являются близкими по смыслу.

Для экспериментальной проверки гипотез в методе «tf-idf» были учтены категории, которым принадлежат вопросы, и близость ответов на них. В функцию близости метода «tf-idf» с определенным весом было включено d_{cat} — расстояние между категориями, которым принадлежат вопросы. Расстояние между двумя категориями определялось по степени активности одних и тех же пользователей в этих категориях. Для ответов также вычислялось соответствующее расстояние d_{ans} методом «tf-idf». В итоге, общая формула близости определялась как

$$\text{sim}_{\text{mod}}(v_1, v_2) = \frac{10\text{sim}_{\text{tfidf}} + 3d_{\text{ans}} + d_{\text{cat}}}{14} \quad (3)$$

Для сравнения качества применяемых методов использовался коэффициент DCG — Discounted Cumulative Gain [2]. Десять лучших вопросов в выдаче оценивались вручную по шкале от 0 (совсем не похож) до 4 (очень похож). Например, для вопроса «Чем лечить простуду?» считался очень похожим вопрос «Как вы лечите насморк?» и совсем непохожим «Что делать при отравлении?». Затем для каждого из 20 искомых вопросов вычислялся коэффициент

$$\text{DCG}_p = \text{rel}_1 + \sum_{i=2}^p \frac{\text{rel}_i}{\log_2 i}, \quad (4)$$

где $p = 10$ — количество оцениваемых вопросов в выдаче, rel_i — оценка близости i -го вопроса в выдаче, заданная вручную. Оценкой метода являлось среднее арифметическое значений DCG_{10} по 20 искомым вопросам.

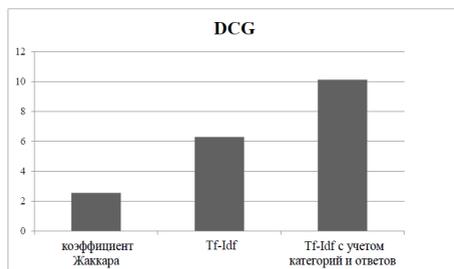


Рис. 1: сравнение качества трех методов

Наивный подход с коэффициентом Жаккара показал наихудшую оценку среди трех оцениваемых методов (см. рис. 1). Сравнение метода «tf-idf» и его модификации показало, что учет категории вопроса и ответов на него значительно улучшает конечный результат.

В дальнейшем планируется сравнение метода, описанного в [1], с модифицированным «tf-idf». Также необходимо учесть степень важности отдельных слов и словосочетаний для конкретного вопроса.

Литература

- [1] *Jiwoon Jeon, Joon Ho Lee*. Finding similar questions in large question and answer archives // International Conference on Information and Knowledge Management – CIKM. 2005.
- [2] *Jarvelin K., Kekalainen J*. Cumulated gain-based evaluation of IR techniques // ACM Transactions on Information Systems. 2002. № 20(4). Pp. 422–446.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ РЕШАТЕЛЬ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Борченинов Я.В., Окуловский Ю.С.¹

Генетические алгоритмы [1] уже долгое время успешно применяются в решении сложных вычислительных задач [2–4]. Несмотря на очень широкую известность и распространенность, зачастую реализации генетических алгоритмов представлены в виде библиотек кода, причем порой с очень бедной документацией. Прикладным же исследователям хочется иметь некий готовый инструмент, который будет им доступен вне зависимости от знаний в области эволюционных вычислений. Отметим далее некоторые основные качества такого инструмента.

Возможность интеграции на уровне приложений. Данный пункт представляется нам наиболее важным, поскольку упрощает точку входа для прикладных исследователей без специальной подготовки. Основной идеей здесь является разделение генетического алгоритма на два независимых приложения: сам алгоритм – *решатель* – и целевая функция. Все процессы, происходящие внутри алгоритма, определяют разработчики, обладающие знаниями в области эволюционных вычислений, а конкретную целевую функцию описывает, исходя из своей задачи, исследователь. Таким образом, прикладной исследователь освобождается от знания особенностей функционирования и реализации генетических алгоритмов. Для успешной работы ему требуется всего лишь поддерживать формат обмена данными между приложениями.

Высокая интерактивность. Закрывая от пользователя доступ к нашей реализации генетических алгоритмов, мы тем самым лишаем его возможности управлять процессом выполнения. Здесь важным шагом является вынесение наиболее важных параметров в настройки решателя, а также отображение некоторых из них на графический пользовательский интерфейс. Примером таких настроек может быть степень мутации гена или вес какой-либо метрики, которая входит в результирующую оценку. Важным также является визуа-

¹Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-844.2011.1.

лизация процесса вычислений. Для численных прикладных расчетов одним из наиболее удобных инструментов являются графики.

Простота формата описания прикладной задачи. Этим пунктом мы пытаемся максимально упростить работу прикладного исследователя. Представлением задачи является набор параметров, которые необходимо оптимизировать. Каждый из параметров состоит из стартового значения и диапазона, в котором он может изменяться. К этому абсолютно естественному представлению добавляется набор параметров-весов, который отображается на графический интерфейс пользователя в виде изменяемых элементов. Смысл этого набора в том, что зачастую целевая функция имеет довольно сложный вид и состоит из неких блоков-выражений. Поэтому представляется удобным добавить к каждому такому блоку вес для того, чтобы было возможно варьировать вклад каждого блока в конечный результат и таким образом влиять на сходимость алгоритма и получаемые результаты. Описание задачи представляет собой обыкновенный INI-файл [5]. Обмен данными между процессами алгоритма и целевой функции также осуществляется с помощью этого формата. Если обобщить все вышесказанное, то мы должны рассматривать программу сторонних разработчиков как некий «черный ящик».

Реализация. Все описанные моменты были реализованы в нашем продукте [6]. В текущем состоянии решатель показал свою полную состоятельность как инструмент, доступный сторонним исследователям [7]. При этом хочется отметить важнейшую точку роста. Во многих случаях для вычисления целевой функции приходится решать очень сложную и ресурсоемкую задачу. Именно поэтому было предложено начать разрабатывать функционал для распараллеливания вычислений. Под распараллеливанием здесь понимается запуск процесса целевой функции на разных узлах с разными входными параметрами. Такая возможность абсолютно естественным образом следует из наших начальных требований. На каждой итерации предполагается раздавать задания наиболее свободным узлам кластера, а после собирать результаты с их последующим кешированием и обработкой. В данный момент ведется активная работа над реализацией этой части проекта.

Литература

- [1] Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы. — М.: Горячая линия-Телеком, 2006.
- [2] Schmidt M., Lipson H. Distilling free-form natural laws from experimental data // Science. 2009. Т. 324, № 5923. С. 81–85.
- [3] Samak S. Robot kinematic calibration accuracy using genetic algorithm. // Proceedings of SPIE the International Society for Optical Engineering. 2001. Т. 2. С. 1506–1510.
- [4] Robertson A.P., Dumont C. Design of robot calibration models using genetic programming // Proceedings of the Third International Symposium on Robotics and Automation. 2002. Т. 3. С. 449–454.
- [5] Деев Д.В., Окуловский Ю.С., Попов В.Ю., Часовских В.П. Система кодогенерации Thornado и ее использование для создания бизнес-приложений // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2008. № 57, С. 80–87.
- [6] <http://airlab.math.usu.ru/wiki/Decider>
- [7] Okulovskii Y.S., Skripov P.V., Smotritskiy A.A., Starostin A.A. Identification of heat-exchange parameters under intensive pulse heating of a wire in a fluid // Journal of Engineering Thermophysics. 2010. Т. 19, № 3. С. 144–153.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКА ФРАЗ И НАБОРОВ СЛОВ В ПОЛНОТЕКСТОВОМ ИНДЕКСЕ

Веретенников А.Б.

Для поиска в Интернете и текстовых электронных библиотеках используются инвертированные файлы [1, 2]. Инвертированный файл представляет собой набор записей вида (ID, P), ID – идентификатор документа, P – позиция, например порядковый номер, слова в документе. Все записи, соответствующие одному слову, хранятся последовательно для их быстрого чтения при поиске. Слова в документах встречаются с различной частотой. Информация о часто используемых словах, например предлогах и союзах (стоп словах), как правило, вообще не включается в индекс, так как они считаются малоинформативными и их слишком много.

Но есть много слов, которые встречаются достаточно часто и которые включаются в индекс. При индексации коллекций текстов суммарного размера 100-200 ГБ подобное слово может встретиться несколько десятков миллионов раз.

Даже если вся информация сохранена в оперативной памяти, на анализ такого количества записей при поиске требуется значительное время. Вместе с тем поиск должен быть осуществлен быстро, типичные требуемые времена поиска – меньше секунды. В результате на одном компьютере может осуществляться поиск по индексу весьма ограниченного размера.

В [3] рассмотрен метод ускорения поиска фраз, содержащих стоп слова. Он позволяет осуществлять точный поиск фраз, включающих такие слова, без хранения информации о всех вхождениях для них.

При поиске набора слов, как правило, требуется осуществлять поиск с учетом расстояния, т. е. находятся те документы, в которых данные слова находятся рядом. Частным случаем поиска с учетом расстояния является точный поиск – требуется найти документы, содержащие заданную фразу (т. е. между искомыми словами не должно быть других слов).

Предполагается, что если пользователь ввел несколько слов, то эти слова для него по смыслу связаны, и пользователь, скорее всего, ищет документ, где они располагаются рядом.

При этом, скорее всего, если расстояние между искомыми словами в конкретном документе достаточно большое, то связи между ними нет. Т. е. чем ближе друг к другу искомые слова в документе, тем более релевантным является этот документ по отношению к данному запросу. Современные поисковые системы выводят для каждого найденного вхождения заданных слов фрагмент текста, включающий данные слова. Длина данного фрагмента обычно не превосходит 20-30 слов (2-3 строки).

Т. е. можно свести задачу поиска по расстоянию к 1) поиску документов, в которых искомые слова располагаются близко друг к другу (в пределах 20-30 слов), и 2) поиску документов, включающих искомые слова (данный вид поиска требует сохранения в индексе только первого вхождения каждого слова в документе, он также называется поиском без учета расстояния).

Выберем число *ProcessingDistance* (например, 32 или 64 слова), которое будет соответствовать тому максимальному расстоянию между словами в тексте, для которого между этими словами мы будем предполагать наличие смысловой связи.

Выберем число *MaxWords* (например, 100). Выберем число *MaxFrequency* (например, 200). Пусть *TotalWords* – суммарное число слов в текстах. $MargIn = TotalWords / MaxFrequency$.

Пусть все слова упорядочены по количеству вхождения их в текстах. Т. е. есть список пар $(w_1, c_1), (w_2, c_2) \dots$, где w_i – слово, c_i – число его вхождений, $c_i \geq c_{i+1} \forall i$.

Первые (например, 100-200) из них соответствуют стоп словам. Рассмотрим следующие *MaxWords* из этого списка.

Разделим их на группы G_1, \dots, G_q , в каждой группе минимум 1 элемент и суммарное количество записей (ID, P), соответствующих словам группы, меньше *MargIn* (в худшем случае имеем *MaxWords* групп). Для каждой группы создадим расширенный индекс.

Определение 1. Расширенный индекс (Advanced Index) для набора G из k слов $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ представляет собой индекс, в котором для каждого вхождения (ID, P) каждого слова индексированных текстов, с условием что существует вхождение (ID, P2) некоторого w_{i_y} из G в текстах, $|P - P2| \leq ProcessingDistance$, сохранена запись (ID, P2, y).

Пусть дано слово w из группы G_i , для него создан расширенный

индекс, и дано произвольное слово x . Для слова x в расширенном индексе сохранен набор записей (ID, P, y) , которые соответствуют тем вхождениям в текстах слова w , когда близко к нему было слово x , где y – порядковый номер w в его группе слов.

Т. е. из расширенного индекса мы можем получить информацию о тех вхождениях слова w , когда вблизи слова w было слово x . Эти записи располагаются в файле последовательно.

Пусть мы ищем набор слов (x_1, \dots, x_n) . Пусть x_i – слово, для которого существует расширенный индекс I . Вместо анализа списка всех вхождений x_i в текстах мы можем использовать:

1) для каждого слова x_j , $j \neq i$, извлекаем список записей (ID, P, y) из расширенного индекса I , соответствующих x_j , где y равен номеру x_i в группе слов расширенного индекса;

2) список первых вхождений слова x_i в каждом документе.

Суммарная длина данных списков, скорее всего, существенно меньше чем список всех вхождений x_i .

Недостаток метода заключается в том, что ориентировочный размер индекса примерно в 25 раз больше обычного полнотекстового индекса при приведенных значениях параметров.

Однако, современные диски обладают как большим размером, так и большой скоростью чтения/записи (HDD – до 3 ТБ, 100 МБ/с, SSD – до 500 ГБ, 1 ГБ/с). Таким образом, метод может быть полезен, несмотря на кажущиеся большими затраты дискового пространства.

В настоящее время данный метод частично реализован автором и производятся различные эксперименты с ним.

Литература

- [1] *Prywes N.S., Gray H.J.* The organization of a Multilist-type associative memory. IEEE Trans. on Communication and Electronics, 68, 1963. Pp. 488–492.
- [2] *Zobel J., Alistair M.* Inverted files for text search engines. ACM Computing Surveys, 38(2), 2006. Art. 6.
- [3] *Веретенников А.Б.* Программный комплекс и эффективные методы организации и индексации больших массивов текстов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург, 2009.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Глушкова Д.Н.

В последние десятилетия наблюдается рост интереса к новому направлению в обработке информации — интеллектуальному анализу данных (Data Mining). В предлагаемой работе рассматривается частная задача интеллектуального анализа данных — задача кластеризации текстовых документов, известная также как задача автоматической группировки объектов или классификации без учителя. Кластерный анализ широко используется при решении задач классификации данных, для улучшения точности и полноты в системах информационного поиска, для обнаружения закономерностей в данных.

Задача кластеризации состоит в разбиении набора текстовых документов на непересекающиеся группы (кластеры) с целью обеспечения максимальной близости (подобия) между документами одной группы, соответствующими определенной смысловой тематике, и максимального различия между группами.

В любом методе кластеризации данных можно выделить следующие этапы, первые три из которых являются общими для всех алгоритмов кластеризации текстовых данных.

1. Предварительная обработка данных

- Удаление «стоп-слов». Под «стоп-словами» понимаем слова, не оказывающие влияния на тематику документа, например, союзы, предлоги и др.
- Стемминг. Данная процедура заключается в выделении значимой части слова с помощью отсечения суффиксов и окончаний.

2. Выбор модели представления данных. В качестве модели представления данных была выбрана модель TF*IDF (Term Frequency*Inverse Document Frequency). Согласно данной модели, каждый документ D_i представляется в виде взвешенного вектора $D_i = (w_{ij}, \dots, w_{im})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, где n — число документов, m — число слов в наборе документов $D = (D_1, \dots, D_n)$.

Здесь w_{ij} — вес слова j в документе D_i , который определяется по формуле:

$$w_{ij} = f_{ij} \log_2 \left(\frac{n}{n_j} \right),$$

где n_j — число документов, в которых появляется слово j ; f_{ij} — функция частоты появления слова i в документе D_i , определенная формулой $f_{ij} = m_{ij}/m$; m_{ij} — число появлений слова j в документе D_i .

3. Выбор меры подобия. Мету подобия между документами можно определить, используя любую метрику.

4. Алгоритм кластеризации. В качестве алгоритма кластеризации данных был взят модифицированный классический генетический алгоритм. Были введены новые операторы скрещивания и мутации.

Классический генетический алгоритм состоит из таких шагов:

1. Кодирование решений в виде хромосом. В качестве способа кодирования хромосом было выбрано кодирование по номеру кластера. Данное кодирование представляет вариант кластеризации n объектов в виде строки из n чисел, в которой i -е число обозначает номер группы i -го объекта.
2. Инициализация, или выбор исходной популяции хромосом. Генерация начальной популяции осуществлялась 2 способами:
 - случайным образом
 - методом k -средних.

При генерации начальной популяции случайным образом требуется выполнение большего числа итераций генетического алгоритма, кроме того, необходимо проверять хромосомы на корректность и нечувствительность к контексту.

3. Оценка приспособленности хромосом в популяции.
4. Проверка условия останова алгоритма. Число итераций, необходимых для выполнения генетическим алгоритмом, было найдено экспериментально.

5. Селекция хромосом. В качестве алгоритма селекции был выбран турнирный метод. Исследования подтверждают, что данный метод является наиболее эффективным и не требует производить масштабирование функции приспособленности [1, 2].
6. Применение генетических операторов (скрещивание, мутация). Были разработаны новые операторы скрещивания и мутации, направленные на увеличение значений функций приспособленности хромосом новой популяции.
7. Формирование новой популяции.
8. Выбор наилучшей хромосомы.

Шаги 3-7 повторяются, пока не выполнится условие остановки алгоритма.

Тестирование практической реализации данного метода производилось на базе документов «Reuters 21578» [3] и показало эффективность использования модификации генетического алгоритма для решения задач кластеризации текстовых документов.

Литература

- [1] *Гладков Л.А., В.В. Курейчик, В.М. Курейчик.* Генетические алгоритмы. М.: Физматлит, 2010.
- [2] *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия-Телеком, 2008.
- [3] <http://www.daviddlewis.com/resources/testcollections/reuters21578/>

КРИПТОГРАФИЧЕСКИЙ ПРОТОКОЛ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Гневашева Ю.О.

В работе изучались криптосистемы для передачи сообщений, построенные на эллиптических кривых, а также схемы цифровой подписи, которые возможно применить для данных систем.

Преимущество криптосистем на эллиптических кривых заключается в том, что неизвестны субэкспоненциальные алгоритмы вскрытия этих систем, если в них не используются суперсингулярные кривые, а также кривые, порядки которых делятся на большое простое число.

Основной задачей являлось усиление свойств криптографической стойкости систем передачи сообщений на эллиптических кривых, в связи с чем было принято решение применить для передачи сообщений цифровую подпись, основанную на сложности задачи дискретного логарифмирования в простом конечном поле.

Построен криптографический протокол цифровой подписи, сочетающий в себе аналог асимметричной системы шифрования для эллиптических кривых (система передачи сообщений Эль-Гамала [3]) и цифровую подпись Шнорра [1].

Протокол реализован на языке программирования C++. Программа производит шифрование сообщения в соответствии с протоколом, записанного в файл input.txt, его расшифровку получателем (формируется файл output.txt) и проверку цифровой подписи. Пример работы программы приведен на рис. 1.



```
C:\Users\Desktop\Debug\name2.exe
x_1= 4937164161883076422965041850354637210730087193317983047703
x_2= 4937164161883076422965041850354637210730087193317983047703
signature is valid
```

Рис. 1: пример работы протокола. Файлы input.txt и output.txt совпадают. Переменная x_1 – цифровая подпись, зафиксированная получателем при приеме сообщения, переменная x_2 – вычисленная получателем подпись для проверки. Цифровая подпись верна

Для анализа стойкости криптографического протокола использовался пакет AVISPA, доступный на [2]. Известных атак на протокол не найдено. Злоумышленник может получить доступ к информации, только решив задачу дискретного логарифмирования на эллиптической кривой. Знания злоумышленника после сеанса протокола показаны на рис. 2.

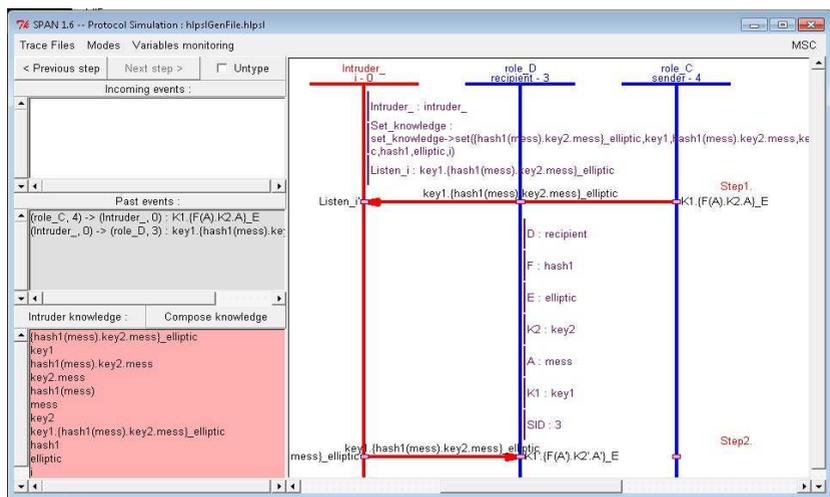


Рис. 2

Стойкость протокола, по предварительной оценке, составляет 2^{330} операций до взлома, что эквивалентно 2^{285} годам вычислений на современной ЭВМ.

Литература

- [1] Чермушкин А.В. Криптографические протоколы. Основные свойства и уязвимости. – М.: Академия, 2009.
- [2] AVISPA v.1.1. User Manual. www.avispa-project.org. 2006.
- [3] Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии. – М.: Научное изд-во ТВП, 2001.

БРИТВА ОККАМА И САМОСОЗНАНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РОБОТА

Горбенко А.А., Попов В.Ю.

Человеку свойственно мыслить на основании некоторых естественных гипотез. При этом, как правило, в повседневной жизни человек, принимая решение, не задумывается о верификации этих гипотез. Например, когда человек регулярно ходит в магазин, он знает время его работы. Когда он собирается в магазин, он не анализирует возможность того, что магазин может внезапно закрыться, переехать или сменить режим работы. Таких примеров можно привести достаточно много. Кроме этого, можно разделить гипотезы по типам. В частности, выделить гипотезы, меняющиеся во времени. В средние века были распространены так называемые звероловные ямы: ловушки, замаскированные сверху листьями и дерном, на дно которых могли помещаться колья. Если жертва случайно попадает в нее, колья наносят ей смертельную рану. В современном мире в государствах, где нет внутренних конфликтов и войн, люди не ожидают встретить подобные препятствия. Современный человек при езде на автомобиле не задумывается о том, как аккуратно он может преодолеть намеченный путь, чтобы не попасть в возможные ловушки. Гипотезы можно разделить и в зависимости от обстановки в стране, мире и обществе. Так, например, звероловные ямы также были использованы во время войны во Вьетнаме местными партизанами против американских войск. Со временем гипотезы имеют тенденцию к изменению. Некоторые из них могут устаревать. Могут появляться и совершенно новые. Например, современный человек знает, что погода изменяется сравнительно медленно: температура не может за сутки упасть или возрасти на большое количество градусов. Обо всех серьезных изменениях погоды на текущий день он может узнать в утренних новостях. Если ничего объявлено не было, то люди, как правило, одеваются примерно так же, как и в предыдущий день. Это позволяет человеку не смотреть на термометр каждый день перед выходом на улицу. Отсюда возникает вывод, что естественный интеллект имеет существенное преимущество перед искусственным. Человек автоматически использует имеющийся у него свод гипотез,

который возникает в результате воспитания человека семьей и социумом. Еще один пример — это ходьба по тротуару. Человек просто делает шаг и не задумается, что сможет шагнуть мимо или провалиться сквозь него. Роботу же необходимо произвести несколько измерений: ширины дорожного покрытия, устойчивости конструкции, давления на поверхность и т.д. Соответственно, для успешного использования искусственного интеллекта необходимо внедрять некоторый искусственно созданный комплекс гипотез. Более того, этот комплекс должен автоматически развиваться и совершенствоваться.

Впервые анализ использования гипотез как научного метода возник еще в патристике. Тогда в качестве основной гипотезы рассматривалась гипотеза существования Бога. Выдающейся фигурой того времени был Тертуллиан, главный принцип которого звучал: «Верую, ибо абсурдно». Это означает, что всё, что не может быть научно доказано, является истиной. Наука же может подтверждать или отвергать какие-то факты.

Во времена схоластики взгляды изменились в диаметрально противоположную сторону. В большинстве своем наука стояла на позициях доказательности. То, что не могло быть научно доказано, не являлось истинным знанием. Такой подход для решения рассматриваемой проблемы не применим. Однако в истории был момент, когда ученые пытались строить научное знание, исходя из других предпосылок. Это философское течение было связано с именем английского философа Уильяма Оккама, и получило название оккамизм. Оккаму принадлежит методологический принцип, называемый бритвой Оккама, который гласит: «... множественность никогда не следует полагать без необходимости ... но всё, что может быть объяснено из различия материй по ряду оснований, — это же может быть объяснено одинаково хорошо или даже лучше с помощью одного основания». В более общем случае бритва Оккама позволяет осуществлять выбор между различными гипотезами и выбирать наиболее подходящие.

Отметим, что оккамизм находит применение и в современной науке (см., например, [1]). В частности, его можно использовать при построении интеллектуальных систем управления роботов. В работе [2] рассмотрена модель автоматического порождения распознавателей. При решении тех или иных задач робот может также руководствоваться различными гипотезами правильного выбора стратегии действий. В первую очередь, он должен анализировать цель своей

работы и на основе этого выбирать способ решения промежуточных задач для достижения поставленной цели. Например, если роботу необходимо пересечь некоторую местность, он может рассмотреть гипотезы о различных вариантах сокращения пути. Это может быть движение прямо к цели, если на пути нет препятствий. Второй возможный вариант — выезд на более ровную поверхность, где робот сможет значительно увеличить скорость. Необходимо отметить, что возможны и опасные гипотезы. Например, робот может построить гипотезу о том, что на его пути нет ям. Если данная гипотеза окажется ложной, робот может упасть в яму, из которой не сможет выбраться. Если же мы рассматриваем маловероятную гипотезу «есть препятствие», то ее можно считать неопасной.

Для того чтобы робот имел возможность выбирать правильные стратегии действия и анализировать вероятность каких-либо явлений, роботы, как и люди, должны порождать собственные гипотезы. При этом важно, чтобы роботы могли самостоятельно порождать и собственные бритвы Оккама, т.е. правила для создания гипотез.

Предложена система построения гипотез и правил для их создания на основе механизма самосознания, разработанного в [3], [4].

Литература

- [1] *Zahálka J., Železný F.* An experimental test of Occam's razor in classification. 1996. V. 82, № 3. Pp. 475–481.
- [2] *Горбенко А.А., Попов В.Ю.* Генератор модулей распознавания для системы робототехнического зрения // Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах. Материалы Девятой международной конференции-семинара. 2009 г. С. 106–110.
- [3] *Gorbenko A., Popov V., Sheka A.* Robot Self-Awareness: Temporal Relation Based Data Mining // Engineering Letters. 2011. V. 19, № 3. Pp. 169–178.
- [4] *Gorbenko A., Popov V., Sheka A.* Robot Self-Awareness: Exploration of Internal States // Applied Mathematical Sciences. 2012. V. 6, № 14. Pp. 675–688.

АВТОНОМНОЕ ПОДКЛЮЧЕНИЕ К ИСТОЧНИКАМ ПИТАНИЯ ДЛЯ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ

Горбенко А.А., Попов В.Ю., Шека А.С.

Поскольку мобильные роботы используют автономные источники питания, ключевым моментом, определяющим их эффективность как промышленных устройств, является возможность подзарядки. Как правило, современные мобильные устройства в состоянии функционировать в автономном режиме 2 – 4 часа. Соответственно, без подзарядки эти устройства могут представлять интерес лишь для лабораторных исследований.

Заметим, что возможности подзарядки источников питания в современной робототехнике уделяется очень большое внимание. В большинстве случаев для самостоятельной подзарядки роботы используют специализированные док-станции. Это существенно удорожает применение технологии подзарядки. Кроме того, док-станциями можно пользоваться только на специально оборудованной территории, что значительно ограничивает мобильность робота. Пожалуй, первой сравнительно успешной попыткой использования бытовых розеток была разработка компании Willow Garage — робот Personal Robot 2 (PR2) [1]. PR2 использует алгоритм случайного поиска. Относительная успешность этого метода возможна только для специально окрашенных штепсельных розеток особой формы. Следующий шаг в этом направлении сделала компания Intel [2]. Робот Marvin подключается к бытовой розетке при помощи специальных сенсоров. Хотя эффективность подключения у него выше, чем у PR2, специальные сенсоры удорожают конструкцию и ограничивают выбор типов розеток. Наибольший интерес для развития технологии подключения к бытовой розетке представляют на сегодняшний день исследования в области копирования человеческих движений роботами (см., например, [3] и [4]). Безусловным лидером в области копирования движений является японский робот ASIMO [5]. Однако, подход, основанный на копировании человека, пока весьма слабо проработан. Поэтому даже ASIMO подзарядается от док-станции [6]. Это означает, что удовлетворительного решения в этой области по-

ка не найдено. Таким образом, попытки рассмотреть новые подходы к решению проблемы подзарядки от бытовых розеток представляют существенный интерес.

Нами рассмотрена задача о создании автономного мобильного робота, который был бы в состоянии функционировать сколь угодно долго без участия человека в процессе подзарядки на необорудованной территории. Соответственно, этот робот должен самостоятельно обнаруживать обычные бытовые розетки и самостоятельно к ним подключаться. Данную задачу естественным образом можно разделить на три составляющие. В первую очередь, это конструирование робота, мехатроника которого позволяет подключение к произвольной бытовой розетке. Следующий этап — это задача обнаружения розеток. Наконец, последняя задача — это непосредственно подключение к обнаруженной розетке.

В рамках проводимых нами исследований была разработана особая конструкция робота (рис. 1) и решалась задача непосредственного подключения.



Рис. 1: робот Kuzma-II.2

Задача обнаружения розетки в заданном помещении нами не рассматривалась. Поэтому в процессе экспериментов была использована розетка со специально размеченным контуром (рис. 2).

Поставленная задача была успешно решена. С помощью алгоритма распознавания возможно выделение контура розетки и гнезд

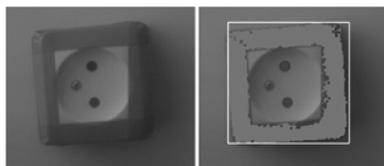


Рис. 2: розетка со специально размеченным контуром

для подключения вилки, а также построение направляющего вектора движения (рис. 3). Нами также разработан алгоритм навигации робота по указанному направлению.



Рис. 3: построение направляющего вектора движения

В дальнейшем при использовании дополнительных алгоритмов распознавания розеток других типов полученные результаты могут быть применены к штепсельным розеткам любого типа.

Литература

- [1] <http://www.membrana.ru/particle/3328>
- [2] <http://www.mobiledevice.ru/marvin-intel-robot-rozetka-sensori.aspx>
- [3] <http://www.topwords.ua/hardware/page-23/>
- [4] <http://www.prorobot.ru/06/robot-trubach.php>
- [5] <http://www.dailytechinfo.org/robots/2914-robot-a-asimo-nauchili-povtoryat-tancevalnye-dvizheniya.html>
- [6] <http://world.honda.com/news/2007/c071211Enabling-Multiple-ASIMO-to-Work/photo/pages/09.html>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ К-РАЗБИЕНИЯ ГРАФА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА REGION-GROWING

Закалюкина С.Ю., Самсонов А.Е.

Задача разбиения графа на подграфы является одной из центральных комбинаторных проблем. В связи с тем, что эта задача возникает в различных областях знаний и деятельности человека, возникает потребность в ее решении. Однако, в связи с тем, что эта задача относится к классу NP-трудных задач, а на практике размерности, как правило, велики, то поиск точного решения не представляется возможным. Следовательно, возникает необходимость поиска *допустимого* решения за обозримое время взамен *оптимального*.

Для решения задачи применяются различные методы поиска решения, связанные со спецификой рассматриваемого класса, например *быстрые* алгоритмы или *эвристики*. Представителем *быстрого* алгоритма в этой работе является алгоритм Region-Growing [1]. Он позволяет в кратчайшее время получить начальное решение, которое впоследствии возможно оптимизировать. В целях повышения качества работы основного алгоритма используются некоторые *эвристики*.

Для задачи разбиения исходным объектом служит неориентированный граф. Пространством решений является множество всевозможных разбиений графа на непересекающиеся подграфы. Основным критерием задачи декомпозиции является минимизация внешних связей между подграфами. При этом оптимальным считается такое разбиение, при котором мощности подграфов распределены наиболее равномерно.

Алгоритм Region-Growing [4] основан на последовательном формировании подграфов разбиения. Процесс формирования подграфа заключается в выборе начальной вершины подграфа, слабо связанной с «разбитой» частью графа, и последующем итерационном добавлении в подграф вершин по принципу наибольшей связности. Таким образом, в результате работы алгоритма будут сформированы «плотные» компоненты.

В данной работе рассматривается модификация алгоритма

Region-Growing. Во-первых, в модифицированном алгоритме на этапе добавления вершины в подграф учитывается дополнительный параметр – *расстояние* от начальной вершины. При одинаковой связности со сформированной компонентой в подграф добавляется вершина с кратчайшим расстоянием от начальной. Если существует несколько вершин с равным расстоянием от начальной, вершина выбирается случайным образом. Во-вторых, в данном алгоритме существует возможность варьировать размер формируемых подграфов. Для этого вводится величина, задаваемая как параметр алгоритма, – *допущ.* Этот параметр указывает возможное отклонение размера графа от среднего значения. В процессе формирования подграфа с момента, когда его размер достигает минимально допустимого, запоминается величина сечения для возможных вариантов подграфа различного размера. По достижению максимально возможного размера подграфа процесс формирования прекращается и происходит оценка сечения. Из вариантов различного размера текущего подграфа выбирается подграф с минимальным сечением. Если таковых несколько, то наилучшим считается такое, при котором размер подграфа будет наиболее близок к оптимальному размеру.

В качестве алгоритма локальной оптимизации в работе используется алгоритм Kernigan-Lin. Данный алгоритм позволяет улучшить уже существующее разбиение путем обмена вершинами между подграфами разбиения.

В работе была рассмотрена задача разбиения графа на непересекающиеся подграфы. Описанный метод решения задачи разбиения графа на подграфы был программно реализован. В результате работы алгоритма граф разбивается на нефиксированное количество подграфов с минимизированным числом связей между ними. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что предложенный подход можно с успехом применять для решения класса задач типа *Регулярная сетка* больших размерностей. Оценка работоспособности алгоритма проводилась также на графах с заведомо известным оптимальным решением. Ослабление требования на размерность подграфов разбиения позволяет значительно снизить количество внешних связей.

Литература

- [1] *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. — М.: Мир, 1988.
- [2] *Джордж А., Джордж Лю.* Численное решение больших разреженных матриц. — М.: Мир, 1984.
- [3] *Гери М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
- [4] *Alpert C.J., Kahng A.B.* Multi-way partitioning via space-filling curves and dynamic programming. In Proc. of the Design Automation Conference, pp. 652–657, 1994.

ИНСТРУМЕНТЫ РАЗРАБОТКИ СЕРВИС-ОРИЕНТИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТАМИ

Кандоба В.И., Черепанов И.В., Полоцкий И.Л.

Введение. Сервис-ориентированная архитектура [1] — один из наиболее современных и перспективных подходов к декомпозиции программного обеспечения. Его ключевая идея заключается в том, чтобы создавать программные системы распределёнными, таким образом, чтобы отдельные компоненты представляли собой независимые приложения, взаимодействующие друг с другом посредством какого-либо механизма передачи данных.

Такая архитектура позволяет реализовывать различные модули при помощи разных, наиболее подходящих в каждом случае технологий, повторно использовать одни и те же приложения в нескольких программных решениях, выносить наиболее требовательные к ресурсам подсистемы на отдельные высокопроизводительные узлы. Все это особенно актуально, когда речь идет об устройствах робототехники, чаще всего основанных на нестандартных, разнородных аппаратных платформах, имеющих ограниченные вычислительные возможности.

Одной из технологий, реализующих концепцию СОА применительно к нуждам робототехники, является протокол RoboCoP (Robot Communication Protocol) [2], на котором в данный момент уже основаны несколько систем управления реальными роботами [3, 4].

Однако, практика показала, что для создания сервисов, ориентированных на RoboCoP, часто оказывается недостаточно только спецификации протокола и поддерживающих его программных библиотек. В реальности, разработчикам дополнительно необходимы инструменты, дающие возможность легко объединять сервисы в работающие управляющие системы, а также запускать и отлаживать такие системы.

Реализация. Общая архитектура решений, основанных на RoboCoP, такова, что она позволяет отслеживать процесс обмена

данными, просто подключая к существующим в системе источникам данных дополнительный сервис, внешне не отличимый от остальных её компонентов. Информацию о сигналах можно получать через передающие их микроядро системы.

Точно так же, незаметно для сервисов, можно отлаживать их, запуская изолировано от остальной системы и через внешние интерфейсы, повторяя необходимые сценарии взаимодействия. Этот же механизм позволяет обучать модули, основанные на интеллектуальных алгоритмах, используя для этого данные, полученные при работе систем управления в реальных условиях [5].

Важно то, что реализация описанной логики не подразумевает изменения протокола, то есть взаимодействие уже разработанных сервисов также можно будет отслеживать. Однако, небольшая доработка программных библиотек, поддерживающих протокол, даст возможность получать дополнительную информацию о некоторых событиях, в том числе инициализации приложений и ошибках, возникающих на транспортном уровне. Тем не менее, подобные модификации не должны повлиять на обратную совместимость сервисов, использующих новые версии протокола.

В целях тестирования и отладки управляющие системы запускаются, как правило, на единственной платформе, для чего могут, например, использоваться сценарии на языке интерпретатора команд операционной системы. Возможность автоматической генерации таких сценариев не повлияет на кроссплатформенность сервисов, но упростит процесс разработки. Приложение, реализующие эту возможность, также должно, вероятно, содержать и обновлять информацию о доступных сервисах, выполняя, таким образом, роль того, что в абстрактной концепции сервис-ориентированной архитектуры носит название шины сервисов [1]. Репозиторий программного кода в таком случае будет выступать в качестве хранилища сервисов. Интеграция с ним, а также с компиляторами наиболее часто используемых для создания сервисов языков, сделают инструмент еще более удобным для прикладной разработки.

Заключение. Приложения, соответствующие приведенному описанию, были реализованы в рамках развития самой технологии RoboCoP и уже используются в повседневной практике разработчиками систем управления. Помимо этого, в дальнейшем эти инструменты позволят проводить исследования в области автоматического

тестирования робототехнических сервисов и, возможно, порождающего программирования.

Литература

- [1] *Krafzig D., Banke K., Slama D.* Enterprise SOA: Service-Oriented Architecture Best Practices. — Prentice Hall, 2005.
- [2] *Кандоба В.И., Конончук Д.О., Окуловский Ю.С.* Коммуникационный протокол для робототехнических приложений / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 41-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 454–461. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010.
- [3] *Жигалов С.А., Абдураманов П.Ю., Медведев И.С., Окуловский Ю.С.* Концепция построения систем управления роботами и ее реализация. / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 41-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 447–454. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010.
- [4] *Kononchuk D.O., Kandoba V.I., Zhigalov S.A., Abduramanov P.Y., Okulovsky Y.S.* RoboCoP: a Protocol for Service-Oriented Robot Control System / «Research and Education in Robotics – Eurobot 2011», Proceedings of international conference. С. 157–171. — Prague: Springer, 2011.
- [5] *Окуловский Ю.С.* Алгоритм активного автоматического исследования: использование двух взаимосвязанных эволюционных алгоритмов для автономной калибровки робота // Системы управления и информационные технологии. 2010. Т. 1, № 39. С. 96–99.

НЕИСПОЛНЯЕМЫЙ СТЕК В ОПЕРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЕМЕЙСТВА WINDOWS NT

Маткин И.А.

Запрет исполнения данных, в том числе данных в стеке, является одним из важнейших механизмов защиты. Он препятствует успешной реализации атаки на приложение при наличии в нём уязвимости типа «переполнение буфера». Эта уязвимость характеризуется тем, что программа размещает в некотором буфере данные, размер которых превышает размер выделенной памяти. Классический вариант [1] эксплуатации такой уязвимости предполагает размещение специально подготовленного кода (шеллкода) в локальном буфере (т.е. в стеке) и последующую передачу управления этому коду (например, с помощью модификации адреса возврата).

Самым естественным способом запрета исполнения данных представляется выставление соответствующих атрибутов доступа к страницам виртуальной памяти в таблице страниц. Но данный вариант применим только при наличии соответствующей аппаратной поддержки. Необходимый атрибут страницы в записи таблицы страниц (бит исполнения NX) появился относительно недавно в процессорах архитектуры x86 (и присутствует изначально в процессорах архитектуры x64). До этого в архитектуре IA-32 не было атрибута страницы «исполнение» и любая страница, доступная для чтения, интерпретировалась как доступная для исполнения. Поэтому реализация механизма запрета исполнения данных в системах, не имеющих соответствующей аппаратной поддержки, является актуальной задачей.

В данной работе рассмотрен один из вариантов реализации неисполняемого стека на процессорах архитектуры IA-32 [2], работающих под управлением операционной системы семейства Windows NT [3]. В основе лежит простая идея разделения данных и кода по непересекающимся областям памяти. Конечно же, физическое разделение невозможно в силу особенностей аппаратной архитектуры, но с помощью механизма сегментации можно логически отделить стек от кода. При этом область памяти вне сегмента кода будет недоступна для исполнения. Подобный механизм разделения сегментов используется на старых моделях процессоров в защитных механизмах под Linux.

В операционных системах семейства Windows NT ситуация осложняется отсутствием исходных кодов и, как следствие, возможности модификации кода ядра. Остаётся единственный вариант: модификация бинарного образа ядра непосредственно во время исполнения. В таком случае следует учесть ряд технических моментов.

1. Расположение сегментов в виртуальном адресном пространстве можно осуществить несколькими способами. Наиболее простым для реализации представляется ограничение сегмента кода 3 кольца нижними двумя гигабайтами адресного пространства (т.е. пространством пользователя) и расположение сегмента стека 3 кольца в пространстве ядра, выделив для него память в системном пуле (см. рис. 1). Сегменты кода и стека 0 кольца и сегмент данных остаются без изменений.

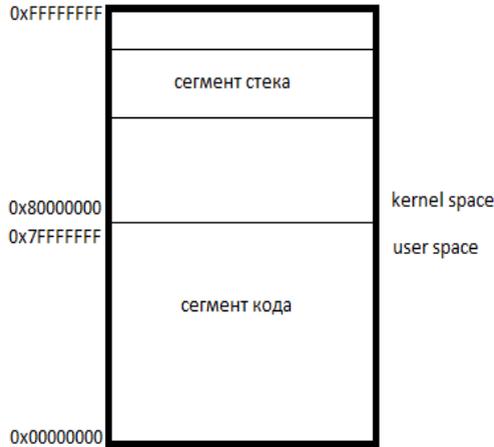


Рис. 1: разделение сегментов кода и стека

2. При порождении нового потока необходимо создавать новый сегмент стека. До того как поток будет запущен на исполнение, необходимо заменить стандартные значения стековых регистров `ss` и `esp`.

3. Архитектура операционной системы предполагает использование одной пары сегментов стека (для режима пользователя и ядра) и одной пары сегментов кода для всех процессов и потоков в системе. Как следствие, возникают трудности при использовании разных сегментов для различных потоков. Можно предложить два пути решения: при каждом переключении контекста потока либо изменять селекторы в сегментных регистрах, либо использовать стандартные селекторы, но изменять расположение сегментов. В первом случае придётся контролировать процесс перехода из 0 кольца в 3 для всех прерываний, так как в некоторых случаях используется инструкция `sysexit`, предполагающая использование одного селектора сегмента стека. Во втором – только при переключении контекста потока.

Рассмотренный метод призван продемонстрировать возможность реализации неисполняемого стека в операционных системах семейства Windows NT на аппаратных платформах без поддержки технологии NX. К настоящему моменту выполнена предварительная теоретическая подготовка, уточнены технические детали. В ближайшее время планируется создать рабочий программный модуль, реализующий предложенные идеи.

Литература

- [1] *Alph One*. Smashing The Stack For Fun And Profit// Phrack. № 49-0x14.
- [2] *Intel Corporation*. IA-32 Intel Architecture Software Developer's Manual. — 2004.
- [3] *Русинович М., Соломон Д.* Внутреннее устройство Microsoft Windows: Windows Server 2003, Windows XP и Windows 2000. Мастер-класс. / Пер. с англ. — 4-е изд. — М.: Издательско-торговый дом «Русская редакция»; СПб.: Питер, 2005.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ЧЕРЕЗ WEB-ИНТЕРФЕЙС

Патрушев С.И., Свалова Д.Ю., Солодушкин С.И.¹

Функционально-дифференциальные уравнения в частных производных (ФДУЧП) широко применяются для математического моделирования различных процессов и систем с запаздыванием [1]. В настоящее время теоретические аспекты ФДУЧП разработаны почти с той же полнотой, что и соответствующие классические разделы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Однако, в отличие от ДУЧП, для ФДУЧП не существует общих методов нахождения решения в явном виде для сколько-нибудь широкого класса уравнений. Поэтому важными задачами являются разработка численных методов для ФДУЧП и их программная реализация.

Цель данной работы — презентация информационно-вычислительного сервера, позволяющего получать численное решение ФДУЧП и интерактивный график этого решения. Данный сервер является результатом работы кафедры вычислительной математики УрФУ.

Класс решаемых на сервере уравнений составляют уравнения теплопроводности с сосредоточенным запаздыванием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1)$$

где $x \in [0, X]$ — пространственная и $t \in [t_0; \theta]$ — временная независимые переменные; $u(x, t)$ — искомая функция; $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t ; τ — величина запаздывания; a — коэффициент теплопроводности.

Вместе с уравнением (1) заданы начальные условия

$$u(t, x) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0 - \tau; t_0]$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00337 «Математические модели и численные методы функционально-дифференциальных уравнений в частных производных».

и граничные условия

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(X, t) = g_1(t), \quad t \in [t_0; \theta],$$

причем выполнены условия согласования

$$g_0(t_0) = \varphi(0, t_0), \quad g_1(t_0) = \varphi(X, t_0).$$

Вопросы существования и единственности решения поставленной краевой задачи рассматривались в [1].

Численный алгоритм решения (1) описан в [2, 3] и в 2011 был реализован как `pfde.m` файл для MATLAB. Таким образом, для его использования необходимо установить MATLAB, кроме того, пользователь должен обладать достаточной квалификацией (по крайней мере писать собственные `.m` файлы).

Для устранения этих сложностей была разработана система, фронтэндом которой является веб-сервер IIS7, бэкэндом — MATLAB Run Time Server. Пользователю достаточно иметь современный веб-браузер; устанавливать какие-либо плагины не требуется. Система имеет простой и понятный интерфейс. Работа является продолжением [4].

На этапе разработки файл `pfde.m` был скомпилирован в библиотеку `pfde.dll` с использованием `deploytool` — встроенного инструмента MATLAB. Фронтэнд создан на ASP.NET4/C#.

На главной странице пользователь заполняет форму, где вводит параметры уравнения и характеристики сетки. Посланные данные передаются C#-обработчику, который вызывает `pfde.dll`. Поскольку `pfde.dll` обращается с вызовами к MATLAB Run Time Server, C#-обработчик должен обеспечить конвертацию пользовательских данных из внутреннего представления среды .NET во внутреннее представление MATLAB, для этого используется библиотека `MWArray.dll`, которая входит в стандартную поставку MATLAB.

Генерируемое в результате работы `pfde.dll` изображение возвращается C#-обработчику, который монтирует его в элемент управления типа `WebFigureService`, расположенный на веб-странице. Данный элемент управления реализован как библиотека динамической линковки и поставляется вместе с MATLAB'ом. Возвращаемый пользователю график является интерактивным, то есть допускает

вращение мышью с целью лучшего обзора. Обработка этих пользовательских манипуляций проводится на стороне сервера; для организации клиент-серверного взаимодействия без перезагрузки страницы используется AJAX.

Литература

- [1] *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — Springer-Verlag, New York 1996.
- [2] *Лекомцев А.В., Пименов В.Г.* Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ. Т. 16, № 1, 2010. С. 102–118.
- [3] *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностная схема численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Труды ИММ. Т. 17, № 1, 2011. С. 178–189.
- [4] *Solodushkin S.I.* Access to the Solver of Functional Differential Equations Through the Web Interface / in «Computational Engineering in System Applications» Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Applied Informatics and Communications.

НОВЫЙ ПОДХОД СТЕГАНОГРАФИИ В АУДИОСИГНАЛАХ

Ручай А.Н.

Под цифровой стеганографией в аудиосигналах будем понимать сокрытие информации в дискретизированных музыкальных сигналах $f(t)$, имеющих непрерывную аналоговую природу. Рассмотрим кратко существующие методы стеганографии в аудиосигналах, которые хорошо изучены и широко распространены [1, 2].

1. Методы, основанные на представлении звуковой волны как простейших периодических колебаний, которые описываются с помощью уравнения $y(t) = A \sin(2\pi\omega t + \varphi)$, где $y(t)$ — периодическое колебание; A — амплитуда колебания; ω — частота колебаний; φ — фаза колебаний. Каждая переменная ω , A , φ из этого уравнения может содержать значение скрываемой информации, поэтому выделяют следующие методы сокрытия информации:

- метод изменения частоты сигнала;
- метод изменения амплитуды;
- метод изменения фазы;
- методы изменения времени задержки эхо-сигнала, то есть изменение начальной амплитуды, времени спада и сдвига между сигналом и эхом.

2. Методы, основанные на избыточности представления дискретизированного сигнала, которые представляют разного рода модификации метода наименьших значащих битов.

3. Методы, основанные на психоакустических принципах слуховосприятия: частотное и временное маскирование. Данные принципы заключаются в том, что человеческий слух не воспринимает акустический сигнал, при наличии близко расположенного по частоте или времени сигнала большей мощности.

Автором был предложен и успешно реализован новый принцип сокрытия информации в аудиосигнале, который основан на представлении аналогового сигнала как некоторой функции, и рассмотрены ее особенности.

В качестве индикаторов наличия скрываемого бита были использованы нули функции, но, в связи с дискретным представлением сигнала, индикаторами служили отсчеты, в которых происходит изменения знака функции.

Пусть дискретизированный аудиосигнал представляется как последовательность отсчетов $f(t) \in [-1, 1]$, $t = 1, \dots, m$, где m — число отсчетов. Один бит b информации может быть сокрыт в i -м отсчете последовательности $f(t)$, если будут выполнены следующие условия:

$$b = \begin{cases} 1, & \text{если } f(i+1) > 0, f(i-1) < 0; \\ 0, & \text{если } f(i+1) < 0, f(i-1) > 0, \end{cases} \quad (1)$$

При этом индикатором наличия скрываемого бита b будет условие $f(i) = 0$.

Рассмотрим алгоритм стегакодера:

1. Предварительное удаление индикаторов наличия бита: изменение значения $f(i) = 0$ на 0.001;
2. Шифрование и кодирование последовательности скрываемых битов $\{b\}$;
3. Вставка последовательности скрываемых битов $\{b\}$ в $f(i)$ при выполнении (1), то есть последовательная вставка индикаторов наличия битов $f(i) = 0$ с условием (1).

Рассмотрим алгоритм стегадекодера:

1. Извлечение последовательности скрываемых битов $\{b\}$ с индикатором $f(i) = 0$ при выполнении условий (1);
2. Декодирование и расшифрование последовательности скрываемых битов $\{b\}$;

Отметим достоинства и недостатки нового предложенного подхода. Достоинства:

- Средний объем скрываемой информации составляет 5-10% от общего числа отсчетов m аудиосигнала.
- Этот подход малоизвестен, и поэтому стегаанализ на данный метод пока не реализован.

- Изменения сигнала на слух полностью не заметны.
- Быстрые алгоритмы стегакодера и стегадекодера.

Недостатки:

- Применим только к аудиосигналам, которые хранятся в несжатом виде.
- Является хрупким к различного рода преобразованиям.
- Слабая стойкость к стегаанализу, так как легко подсчитать число отсчетов с $f(i) = 0$. Были проведены статистические эксперименты, из которых следует, что число отсчетов с $f(i) = 0$ не должно в среднем превосходить 0,3% от m . Данный недостаток устраняется, если в качестве индикатора положить случайное значение из $[-0.01, 0.01]$.

Практическая реализация показала эффективность предложенного нового подхода стеганографии в аудиосигналах. Однако вопрос статистического стегаанализа остается открытым, а также продолжается поиск других особенностей функции, которые можно успешно использовать для стеганографии в аудиосигналах.

Литература

- [1] *Конахович Г.Ф., Пузыренко А.Ю.* Компьютерная стеганография. Теория и практика. — Киев: МК-Пресс, 2006.
- [2] *Аграновский А.В., Девянин П.Н., Хади Р.А., Черемушкин А.В.* Основы компьютерной стеганографии. — М.: Радио и связь, 2003.

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЙ ЭМУЛЯТОР EUROSIM

Рябых А.В., Кропотов М.С., Окуловский Ю.С.

Введение. Робототехнические соревнования, например Eurobot, ежегодно привлекают большое количество команд из разных стран, способствуют развитию робототехники, ее популяризации, а также разработке новых алгоритмов.

Участие в таких соревнованиях, как и разработка любого мобильного робота, является трудоемким процессом, включающим в себя: работу с аппаратным обеспечением, разработку алгоритмов для управления движением и навигации вокруг препятствий, обработку данных с сенсоров, техническое зрение и т.д. Использование в процессе разработки эмулятора дает возможность команде разработчиков параллельно заниматься этими задачами, а также сокращает время, необходимое для тестирования алгоритмов [1].

На сегодняшний день существует большое количество программных продуктов, предназначенных для эмуляции роботов. Примерами являются Stage / Gazebo [2], Webots, USARSim (единственный из перечисленных используется для проведения соревнований — RoboCup Rescue) [3]. Данные аналоги в значительной мере нацелены на моделирование конкретных роботов с их специфическими сенсорами и актуаторами. Наша разработка предполагает некоторый уровень абстракции от реальных физических устройств, что позволит сделать ее более привлекательной для программистов. Реализация в эмуляторе правил соревнований Eurobot создаст площадку для проведения он-лайн соревнований, для разработки и тестирования новых алгоритмов. Проведение виртуальных соревнований позволило бы привлечь к робототехнике людей, имеющих интерес к программированию, но не имеющих опыта работы с электроникой.

Архитектура эмулятора. Основой эмулятора является логическая структура тел. Тело — это некоторая сущность, имеющая координаты в пространстве, графическое отображение, физические свойства. Существует несколько базовых примитивных тел, а также коллекции тел. От них наследуются тела с расширенной логикой: роботы, актуаторы и прочее. Все тела находятся в общем мире, который сам является коллекцией тел. Таким образом, сцена эмулятора —

это иерархия тел, представляющая собой дерево: корень — мир всех тел; промежуточные уровни — различные коллекции тел; листья — различные примитивные тела. Иерархическая структура определяет окружение робота, позволяет гибко управлять телами и легко создавать сложные конструкции: например, робот — это несколько тел (актуаторов, сенсоров, декоративных примитивов и прочего), соединенных друг с другом.

Физические взаимодействия в эмуляторе моделируются при помощи внешнего физического движка. Поскольку в основном в правилах соревнований все тела движутся на плоском столе, используется двухмерный *Farseer Physics Engine*. Его объекты связаны с телами эмулятора через реализацию интерфейса. Это позволит при необходимости заменить один физический движок на другой, не внося изменений в основную архитектуру эмулятора.

Эмулятор снабжен движком для 3D-отрисовки. Разработана архитектура графического модуля, которая делает его легко заменяемым и независимым от остальной архитектуры; отделение графической части от логической упрощает дальнейшую разработку. Реализованы две версии графического модуля: *DirectX* — для создания максимально реалистичного изображения (с тенями, бликами и т.д.) и *WPF (Silverlight)* — версия с упрощенной графикой для использования в он-лайн эмуляторе. Она требует меньших аппаратных ресурсов, предоставляет схематичное изображение и не требует установки дополнительного ПО, что повышает ее доступность.

Взаимодействие с другими сервисами. Робот в эмуляторе снабжен различными сенсорами (реализованы камера, навигатор, сонар, оптический датчик цвета) и актуаторами. Управление роботом и взаимодействие с сенсорами возможно одним из двух способов. Внутри эмулятора робот собирает информацию со всех имеющихся сенсоров, AI робота генерирует команду, которую робот выполняет. Таким образом реализованы боты, представляющие собой основные стратегии поведения роботов на соревнованиях. Боты предоставляют возможность пользователям эмулятора оценить уровень собственной разработки. Все сенсоры представляют собой сервисы, работающие через протокол *RoboCoP* [4]. Любой правильно сконфигурированный сторонний сервис может получать информацию с сенсоров или управлять движением робота. Так, сервис распознавания изображения может работать с камерой, а управление движением

ем можно реализовать, например, в виде сервиса для управления с клавиатуры или планировщика движений для робота с дифференциальным приводом двух двигателей.

Интеграция с RoboCoP позволяет без значительных изменений использовать эмулятор в разных ролях: для тестирования в лаборатории и для проведения онлайн соревнований. Важно также, что сервисы эмулятора и сервисы для работы с реальными устройствами используют не только один протокол, но и одинаковые форматы данных. Это сводит к минимуму время, необходимое для миграции программного обеспечения от эмулятора к реальному роботу.

Заключение. В работе представлен проект эмулятора роботов, который планируется использовать для проведения он-лайн соревнований по робототехнике. В рамках дальнейшего развития проекта предполагается: разработать веб-интерфейс, заменить движок, используемый для моделирования физических взаимодействий, на трехмерный, реализовать новые типы сенсоров, улучшить качество 3D-графики. Версия Eurosim для использования он-лайн будет впервые протестирована в рамках одного из заданий на RuCTF 2011 [5].

Литература

- [1] *Siegwart R., Nourbakhsh I.R.* Introduction to Autonomous Mobile Robots. MIT Press, 2004.
- [2] *Koenig N., Howard A.* Design and Use Paradigms for Gazebo, An Open-Source Multi-Robot Simulator. Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Pp. 2149–2154. 2004.
- [3] *Carpin S. et al.* USARSim: a robot simulator for research and education. Proceedings of the 2007 IEEE Conference on Robotics and Automation. Pp. 1400–1405.
- [4] *Kononchuk D.O., Kandoba V.I., Zhigalov S.A., Abduramanov P.Y., Okulovsky Y.S.* RoboCoP: a Protocol for Service-Oriented Robot Control System. Proceedings of international conference on Research and Education in Robotics — Eurobot 2011. Pp. 157–171. Prague: Springer, 2011.
- [5] <http://www.ructf.org/e/2011/>

АРХИТЕКТУРА МОДУЛЕЙ И ПРОШИВОК В СИМУЛЯТОРЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ NSIMULATOR

Самунь В.С., Бурдова И.Ю.

Введение

В работе [1] была предложена общая архитектура симулятора компьютерной сети. Отметим некоторые задачи, которые необходимо решить при реализации прошивок устройств и модулей:

- Какой функционал должен реализовывать модуль?
- Пакет пришел на некоторый интерфейс устройства. Какой модуль первым будет обрабатывать пакет?
- Пакет был обработан модулем. Какой модуль должен обработать полученный результат и нужно ли это?
- Какой интерфейс настройки у модуля?

Кроме этого, одними из целей, которые мы ставили перед разрабатываемым симулятором, являются: возможность верификации протоколов и возможность создания различных пользовательских интерфейсов настройки оборудования. Чтобы реализовать возможность верификации протоколов, было решено использовать фреймворк NModel [2]. Цель работы — предложить архитектуру прошивок и модулей, которая позволяет ответить на поставленные вопросы и использовать NModel в качестве верификатора.

Архитектура модулей

Модуль представляет собой сущность, изменяющую поведение устройства в определенных сценариях при обработке пакета. Наиболее естественным выглядит подход, в котором модуль — это реализация коммуникационного протокола (или стека протоколов). Но данный подход не позволит выразить некоторые особенности: например, чтобы реализовать два коммутатора, один с port security [3], а второй без неё, придется реализовать два модуля. В итоге добавление каждой новой особенности модуля приведет к «комбинаторному

взрыву». Чтобы его избежать, можно реализовать эти особенности как отдельные модули и при необходимости их включать.

Модулю также может потребоваться дополнительный функционал. Рассмотрим пример устройства — простой хаб (спайка проводов). Он не может иметь на интерфейсах MAC-адресов, значит, MAC-адрес не является свойством интерфейса. MAC-адрес является настройкой некоторого модуля. Настройкой прошивки он быть не может, так как под прошивкой мы понимаем сущность, управляющую межмодульным взаимодействием.

Для настройки модулей они должны предоставлять некоторый интерфейс. Отметим еще раз, что мы ставили задачу возможности реализации различных пользовательских интерфейсов. Для обеспечения этой возможности предлагается двухуровневый интерфейс настройки. Имеются «внутренний» и «внешний» интерфейсы. «Внутренний» интерфейс содержит строго унифицированные команды, он известен только разработчикам симулятора. Пользователь выполняет настройку модулей через «внешний» интерфейс. Этот интерфейс транслирует реальные команды настройки в унифицированные команды внутреннего интерфейса.

Для возможности верификации модуля с использованием фреймворка NModel нужно уметь извлекать модель протокола. Множеством состояний модели является множество всевозможных состояний модуля. В силу того, что это множество может быть очень большим, модуль содержит *абстрактор* — сущность, позволяющую «склеивать» некоторые состояния модуля в одно состояние модели. Полученная модель и проверяемые свойства подаются на вход NModel.

Архитектура прошивок

Прошивка управляет межмодульным взаимодействием и имеет интерфейс для настройки устройства. Каким образом это взаимодействие осуществить? Во-первых, при получении пакета интерфейсом нужно определить модуль, который этот пакет обработает первым. Для решения этого вопроса все модули можно разделить на два типа. Одни модули будут заниматься разбором пакетов, пришедших на определенные интерфейсы, другие модули будут заниматься обработкой полученных результатов. Сопоставив каждому интерфейсу один конкретный модуль, можно решить поставленную задачу.

Остается вопрос определения модуля, который будет обрабаты-

вать результаты работы других модулей. Для этого мы ввели понятия *уровни работы* и *зависимости*. *Уровень работы* — это число, приписанное модулю. Модули, обрабатывающие пакеты, пришедшие непосредственно с интерфейсов, имеют нулевой уровень. Модуль, находящийся на уровне $(i + 1)$ может обрабатывать результаты работы модулей, находящихся на уровне не выше i . *Зависимости* позволяют решить, в каком порядке модули, расположенные на одном уровне, обрабатывают данные. Циклы не допускаются — это отслеживает прошивка. Таким образом, будет построен ациклический граф модулей. Пакеты при обработке «проходят» по этому графу.

Реализация

В настоящий момент реализованы простые примеры модулей (реализующие протокол и особенность), разработан «внутренний» интерфейс настройки устройств. Также реализована простая прошивка, поддерживающая описанное управление модулями, и обеспечена возможность верификации модулей с помощью NModel.

Литература

- [1] Самунь В.С. Симулятор компьютерной сети / в сб. «Современные проблемы математики», Труды 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 314–316. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.
- [2] <http://nmodel.codeplex.com>
- [3] <http://www.telecombook.ru/index.php/5-ciscodirectory/26-cisco-portsecurity>

РАЗРАБОТКА РАСШИРЕНИЯ ФРЕЙМВОРКА NMODEL ДЛЯ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОВЕРКИ ТЕМПОРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

Самунь В.С., Бурдова И.Ю.

Введение

В настоящее время активно развивается направление, называемое «тестирование на основе моделей» («model-based testing»). Суть метода заключается в том, что мы используем модель, описывающую ожидаемое поведение системы и далее по этой модели генерируем модульные тесты на программное обеспечение или проверяем модель на выполнение каких-то требований, которым должно программное обеспечение удовлетворять.

NModel [1] — фреймворк с открытым исходным кодом, разработанный Microsoft Research, позволяющий выполнять тестирование на основе моделей. Он позволяет проводить анализ выполнимости свойств живости (отсутствие взаимных блокировок и «удушения»), безопасности, также позволяет генерировать модульные тесты, производить проверку соответствия модели программы и реализации. Данный фреймворк было решено использовать в качестве средства верификации в симуляторе компьютерной сети NSimulator [2].

Одним из направлений работы по сетевому симулятору NSimulator является проверка спецификаций, заданных формулами темпоральных логик, на модели. Целью работы является исследование вопроса возможности задания и верификации темпоральных свойств средствами NModel и, если это невозможно, реализация расширения NModel, позволяющая задавать и верифицировать эти свойства.

Анализ работы NModel

NModel строит модель программы следующим образом. Модель представляется некоторым классом. Состояния модели — это множество всевозможных значений переменных этого класса. Заметим, что это множество может быть очень большим, для этого имеется возможность ограничить область значений переменных. Переходы в модели совершаются при помощи вызова методов, помеченных специальным атрибутом. Имеется возможность задать ограничения, при

которых переход выполняться не будет. NModel создает экземпляр класса, множество значений переменных дает начальное состояние. Затем для всех состояний выполняются разрешенные переходы и генерируются новые состояния. Этот процесс можно прервать, либо указав ограничение на количество итераций, либо если применение переходов не даст новых состояний.

Проверяемые спецификации могут задаваться двумя способами. Первый способ задания спецификации: мы описываем конечный автомат, алфавит которого — методы-переходы модели. Второй способ: мы описываем некоторую цепочку методов-переходов модели. Указанный автомат или цепочка описывает последовательность действий, возможность свершения которых мы хотим проверить.

Предположим, что спецификацию мы задали при помощи автомата. Если задана цепочка, то ее нетрудно преобразовать в автомат. Алгоритм проверки, реализованный в NModel, строит композицию модели и автомата, затем автомат проецируется на построенную композицию. Если в результате сохранились все состояния автомата, то спецификация выполняется, в противном случае спецификация не выполняется.

Задание спецификаций в виде последовательности действий и такой алгоритм проверки не позволит выразить и проверить, например, формулу логики LTL, указывающую, что любой запрос будет подтвержден: $\mathbb{A}(\mathbb{G}(r \Rightarrow \mathbb{F}q))$.

Реализация расширения фреймворка

Итак, средствами NModel выразить необходимые темпоральные свойства не получится. Для решения задачи предлагается использовать следующий подход. NModel предоставляет возможность извлечь модуль программы, причем есть возможность ее строить постепенно. Темпоральные свойства будем проверять непосредственно на модели. Существуют различные алгоритмы для этого, например, алгоритм Лихтенштейна–Пнуэли для верификации LTL [3, с. 72–79]. Некоторые алгоритмы работают с полностью построенной моделью, некоторые имеют возможность проводить верификацию «на лету», например, используя алгоритм Герта–Пеледа–Варди–Уолпера [3, с. 186–193]. Он, кстати, применялся в системе верификации SPIN [4].

Мы реализовали парсер языка формул различных темпоральных логик (CTL, LTL), полностью изучили исходный код NModel и реализовали простые алгоритмы верификации. В ближайших планах

реализовать алгоритмы верификации, которые позволят выполнять верификацию «на лету».

Литература

[1] <http://nmodel.codeplex.com>

[2] <https://redmine.hackerdom.ru/projects/netsim>

[3] *Кларк Э.М., Грамберг О., Пелед Д.* Верификация моделей программ: Model Checking. — М.: МЦНМО, 2002.

[4] <http://spinroot.com>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БЕСПЛАТНОГО ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ В СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОМ ЦЕНТРЕ ИММ УРО РАН

Черноскутов М.А

В настоящее время для проведения квалифицированных научных исследований не обойтись без современного программного обеспечения: большие массивы теоретических и экспериментальных данных уже не могут быть обработаны вручную за приемлемое время. Специализированные суперкомпьютерные технологии для обработки таких объемов данных набирают популярность, но профессиональное программное обеспечение, как правило, очень дорогое. Свободные продукты, напротив, бесплатны, но имеют проблемы с поддержкой и развитием.

Открытое программное обеспечение обладает рядом преимуществ перед коммерческими продуктами. Во-первых, заметно снижается стоимость суперкомпьютерного центра за счет возможности бесплатного использования и копирования таких программных продуктов. По оценкам НПО «Сатурн», инвестиции в приобретение программного обеспечения могут превысить инвестиции в оборудование в 5 раз [1]. Для сравнения, стоимость использования пакета Ansys CFD на 128 ядрах составляет около 100 000 евро. Стоимость распараллеливания на 128 ядер для пакета FlowVision (российский аналог Ansys) с академической лицензией составляет 795 000 руб [2]. Во-вторых, в исходный код открытого программного обеспечения можно вносить собственные изменения, с целью приспособления под решаемые задачи, что позволяет повысить результативность исследований. У коммерческих разработок исходные тексты закрыты и реализацию новых возможностей от системы можно ожидать только с выпуском последних обновлений. По данным [1], коммерческое программное обеспечение общего назначения не учитывает всех условий прикладных задач и отстает от реальных потребностей производства и науки на 5-10 лет. Крупные компании, такие как Boeing и General Electric, ведут создание собственных программных комплексов, учитывающих все особенности и текущие потребности их производства. Но такие разработки чаще всего оказываются закрытыми и на рынок

не выходят. Таким образом, бесплатное и модифицируемое открытое программное обеспечение является более гибким инструментом для решения текущих научных и технологических задач. Его возможности по достоинству оценили такие крупные производители, как Audi, SEAT, Volkswagen [3], а также множество отечественных и зарубежных научных организаций — все они используют OpenFoam (распространяемый по свободной лицензии) для решения задач механики сплошных сред.

ИММ УрО РАН имеет в своем составе суперкомпьютерный центр, предназначенный для решения задач физического и математического моделирования. Однако его эффективному использованию мешает ряд обстоятельств. Написание параллельных программ, реализующих численные модели, может явиться серьезным препятствием для предметников, не обладающих требуемым уровнем квалификации в программировании. К тому же затруднено выделение ресурсов на постоянной основе для работы территориально распределенных коллективов. Все это отрицательно сказывается на использовании суперкомпьютерных ресурсов ИММ УрО РАН и препятствует их эффективной загрузке.

Вариантом выхода из положения является использование web-лабораторий. Они объединяют в себе программное обеспечение, необходимое пользователям, а также подходящее для комфортной работы аппаратное обеспечение и сетевые ресурсы. Лаборатории такого типа, как правило, созданы предметниками и имеют множество преимуществ, необходимых для комфортной работы исследователей: единая точка входа, представление через web-браузер интерактивных инструментов моделирования, возможности для объединения в группы. Одним из примеров такой лаборатории является web-лаборатория UniCFD, разработанная в рамках проекта «Университетский кластер» на технологической платформе для облачных вычислений Unihub и использующая набор свободного программного обеспечения для решения задач механики сплошных сред: OpenFoam, Salome, ParaView, а также набор учебных курсов и примеров для получения навыков работы с данными программными комплексами.

Для добавления внешних вычислительных ресурсов в состав UniCFD предусмотрен специальный интерфейс. Подключение суперкомпьютерного центра ИММ УрО РАН осуществляется через

VPN-соединение. Управление территориально-распределенными вычислительными центрами ведется с использованием технологий для организации grid-систем. Для этого необходимо установить на головном узле кластера специальное промежуточное программное обеспечение (Globus Toolkit) и настроить его взаимодействие с планировщиком задач на кластере (в ИММ УрО РАН для этих целей используется SLURM) и метапланировщиком (GridWay) на центральных управляющих серверах.

ИММ УрО РАН заинтересован в подключении к различным web-лабораториям, так как они позволяют существенно упростить использование и повысить популярность свободного программного обеспечения, а также позволяют эффективнее загружать вычислительные системы. Опыт использования UniCFD может пригодиться при организации собственной web-лаборатории, оснащенной математическим программным обеспечением для нужд ИММ УрО РАН.

Литература

- [1] *Зеленков Ю.А.* Использование суперкомпьютеров в машиностроении. Опыт НПО «Сатурн» / в сб. «Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности». С. 15–20. М.: Издательство Московского университета, 2009.
- [2] *Kraposhin M., Strijhak S., Samovarov O.* UniCFDc1. Введение [Электронный ресурс]. URL: <http://unihub.ru/resources/78>
- [3] *Islam M., Decker F., Villiers E., Jackson A., Gines J., Grahs T., Gitt-Gehrke A., Comas J.* Application of Detached-Eddy Simulation for Automotive Aerodynamics Development // SAE World Congress, USA, 20–23 April 2009.

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ЛОМАНЫМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УГОЛ МЕЖДУ ЗВЕНЬЯМИ

Барабошкин Н.Д.¹

Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывной функции кусочно-линейными непрерывными функциями с фиксированными узлами и ограничением на угол между соседними звеньями.

Такая аппроксимация может применяться, например, при построении оптимальной траектории в задаче навигации (см., например, [1]), т.к. описываемый класс приближающих функций удобен для применения в системах автоматического управления движением, а ограничение на угол между соседними звеньями соответствует ограничению на минимальный радиус поворота летательного аппарата.

Близкой задачей приближения непрерывной функции функциями с абсолютно непрерывной производной порядка $n-1$ и ограниченной производной порядка n занимался А. В. Мироненко. В его работе [2] приведен критерий альтернансного типа для элемента наилучшего приближения.

Зафиксируем набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i \in [a; b]$, $x_i < x_j$, $i < j$, $x_0 = a$, $x_n = b$ и рассмотрим кусочно-линейные непрерывные функции l с узлами x_i и пусть

$$l(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$$

где $y_i \in \mathbb{R}$.

Такие функции l будем называть *ломаными* с узлами $\{z_i\}_{i=0}^n$, $z_i = (x_i, y_i)$. *Звеном* u_i ломаной будем называть отрезок, соединяющий точки z_i и z_{i+1} , $i \in [0, n-1]$.

Угол α_i между соседними звеньями u_{i-1} и u_i есть угол между векторами $r_{i-1} = z_i - z_{i-1}$, $r_i = z_{i+1} - z_i$, соответственно. Причем, будем считать угол положительным, если поворот от r_i к r_{i-1} по

¹Работа выполнялась в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления», проект 09-П-1-1013.

кратчайшему углу происходит по часовой стрелке, иначе будем считать угол отрицательным. Кроме того, положим α_0 равным углу, образуемому звеном u_0 с осью абсцисс.

Зададимся числом $\alpha^* \in (0, \pi)$ и введем класс \mathcal{L} ломаных l с ограниченными углами между соседними звеньями:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha^*; x_0, \dots, x_n) = \left\{ l = l(x) \mid |\alpha_i| \leq \alpha^*, i \in \overline{0, n-1} \right\}.$$

Пусть $f \in C[a, b]$. Рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении

$$\min_{l \in \mathcal{L}} \|f - l\|. \tag{1}$$

Элементом наилучшего приближения в задаче (1) назовем такую ломаную $l^* \in \mathcal{L}$, что для любой $l \in \mathcal{L}$, $l \neq l^*$ $\|f - l\| \geq \|f - l^*\|$.

Пусть $l \in \mathcal{L}$, $\|f - l\|_{C[a,b]} = \delta$.

Определение. Жестким участком ломаной l для функции $f(x)$ называется отрезок $[x_{i_0}, x_{i_m}] \subset [a, b]$, который представим в виде объединения отрезков вида $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ ($k \in (0, m)$, $m \leq n$, $i_k \in [0, n]$, $i_k < i_{k+1}$), на каждом из которых l поочередно либо выпукла, либо вогнута, имеет место одно из свойств 1–2:

1. $\alpha_{i_k} = (-1)^{k+1} \gamma \alpha^*$, если $i_k + 2 < i_{k+1}$, то $\forall i \in [i_k + 2, i_{k+1})$: $\alpha_i = (-1)^k \gamma \alpha^*$, где $\gamma = \pm 1$ — фиксировано и обозначает характер выпуклости l на промежутке $[x_{i_0}, x_{i_1}]$: $\gamma = 1$ в случае выпуклости, $\gamma = -1$ в случае вогнутости,
2. $|\alpha_{i_k}| < \alpha^*$, а если $i_k + 1 < i_{k+1}$, то $\forall i \in [i_k + 1, i_{k+1})$: $\alpha_i = (-1)^k \gamma \alpha^*$.

Кроме того:

3. на каждом отрезке $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ существует точка t_{k+1} такая, что: $f(t_{k+1}) - l(t_{k+1}) = -\delta \cdot \text{sign } \alpha_{i_{k+1}} = (-1)^{k+1} \gamma \delta$,
4. дополнительно, существуют точки $t_0 \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$, $t_{m+1} \in [x_{i_{m-1}}, x_{i_m}]$: $f(t_0) - l(t_0) = \delta \cdot \text{sign } \alpha_{i_0+1} = \gamma \delta$, $f(t_{m+1}) - l(t_{m+1}) = \delta \cdot \text{sign } \alpha_{i_{m-1}+1} = (-1)^{m+1} \gamma \delta$.

Итак, жесткий участок — это отрезок $[x_{i_0}, x_{i_m}] \subset [a, b]$, который допускает разбиение на m промежутков выпуклости/вогнутости ломаной l , на каждом из которых имеется не менее одной точки максимального уклонения требуемого знака, плюс по одной точке на крайних промежутках ($[x_{i_0}, x_{i_1}]$ и $[x_{i_{m-1}}, x_{i_m}]$). Отметим, что такое разбиение можно произвести не единственным образом.

Совокупность точек t_i , $i \in [0, n + 1]$ аналогична понятию чебышевского альтернанса (см., например, [3]).

Сформулируем критерий элемента наилучшего приближения для функции f .

Теорема. Пусть $f \in C[a; b]$, $l^* \in \mathcal{L}$, $\|f - l^*\|_C = \delta$.

Ломаная l^ — элемент наилучшего приближения для функции f в том и только в том случае, когда l^* содержит жесткий участок.*

Литература

- [1] В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 270 с.
- [2] А. В. Мироненко. Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной, Матем. заметки. 2003. Т. 74, No 5. С. 696–712.
- [3] И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. М., Л.: Гос. изд-во техн.-теор. литер. — 1949. — С. 51.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЦЕНТРАЛЬНОГО КОЛЬЦА

Дубосарский Г.А.¹

Задача Дирихле для кольца на плоскости и более сложных областей изучалась в работах [1]–[3]. В [4] были построены всплески для решения задачи Дирихле в центральном и нецентральном кольцах. В данной работе выведена более простая формула для решения задачи Дирихле в нецентральном кольце.

Обозначим через K кольцо с нецентральным отверстием:

$$K = \{z : |z| < 1, |z - z_0| < r_0\}, z_0 \geq 0, r_0 > 0, z_0 + r_0 < 1.$$

Известна [2] следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $u(z)$ гармонична в кольце K . Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде

$$u(z) = u_+(z) + u_-(z) + C \ln |z - z_0|, \quad (1)$$

где функция $u_+(z)$ гармонична в круге $B(0, 1)$, функция $u_-(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus B_{r_0}(z_0)$, $u_-(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} u_-(z) = 0$, C — действительная константа.

В теореме 1 функции $u_+(z)$, $u_-(z)$ и константа C находятся неявно. Особый интерес представляет нахождение их явного вида, поскольку это позволило бы выписать формулы для коэффициентов a_k и b_k асимптотического разложения

$$u(z) \sim C \ln |z - z_0| + \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \cos kx + b_k r^k \sin kx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \rho^{-k} \cos k\varphi + b_{-k} \rho^{-k} \sin k\varphi, z = re^{ix} = z_0 + \rho e^{i\varphi}.$$

В данной работе доказана следующая теорема об явном представлении через граничные значения функции $u(z)$.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00004 и Интеграционным проектом, выполняемым учеными УрО РАН совместно с СО РАН.

Теорема 2. Пусть гармоническая функция $u(z)$ является решением задачи Дирихле с непрерывными граничными условиями:

$$\begin{cases} u(e^{ix}) = \varphi(x), \\ u(z_0 + r_0 e^{ix}) = \psi(x). \end{cases}$$

Тогда функции $u_+(z)$, $u_-(z)$ и константа C из разложения (1) вычисляются внутри кольца K по формулам

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi \ln \delta} \left(- \int_0^{2\pi} \varphi(x) P(x, -z_1) dx + \int_0^{2\pi} \psi(x) P(x, -z_2) dx \right), \\ u_+(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) P(x, -z_1) dx - C \ln |1 + z z_1| + \\ &\quad + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) (P(x, z) - P(x, -z_1)) dx \right\} + \\ &\quad + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) (\tilde{P}(x, z) - \tilde{P}(x, -z_1)) dx \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) K_1(x, z_1) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) K_2(x, z_1) dx + \\ &\quad + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) K_1 \left(x, \frac{z + z_1}{1 + z_1 z} \right) dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) K_2 \left(x, \frac{z + z_1}{1 + z_1 z} \right) dx \right\} + \\ &\quad + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \tilde{K}_1 \left(x, \frac{z + z_1}{1 + z_1 z} \right) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \tilde{K}_2 \left(x, \frac{z + z_1}{1 + z_1 z} \right) dx \right\}, \\ u_-(z) &= C \ln \left| \frac{z + z_1}{z - z_0} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) K_1(x, z_1) dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) K_2(x, z_1) dx - \\ &\quad - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) K_1 \left(x, \frac{1 + z_1 z}{z + z_1} \right) dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) K_2 \left(x, \frac{1 + z_1 z}{z + z_1} \right) dx \right\} + \\ &\quad + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \tilde{K}_1 \left(x, \frac{1 + z_1 z}{z + z_1} \right) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \tilde{K}_2 \left(x, \frac{1 + z_1 z}{z + z_1} \right) dx \right\}, \end{aligned}$$

где $z_1 (-1 < z_1 \leq 0)$ — наибольший из корней уравнения

$$z_0 z^2 + (1 + z_0^2 - r_0^2) z + z_0 = 0,$$

число $\delta(0 < \delta < 1)$ определяется равенством

$$\delta = \frac{z_0 + r_0 + z_1}{1 + (z_0 + r_0)z_1},$$

$P(x, z)$ — ядро Пуассона, а $\tilde{P}(x, z)$ — сопряженное ядро:

$$P(x, z) = \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos x + z^2},$$

$$\tilde{P}(x, z) = \frac{z \sin x}{1 - 2z \cos x + z^2},$$

ядра $\overset{(\sim)}{K}_1(x, z)$ и $\overset{(\sim)}{K}_2(x, z)$ задаются следующим образом:

$$\overset{(\sim)}{K}_1(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \overset{(\sim)}{P} \left(x, \frac{\delta^{2k} z - z_1}{1 - \delta^{2k} z_1 z} \right) - \overset{(\sim)}{P}(x, -z_1) \right\}, \quad (2)$$

$$\overset{(\sim)}{K}_2(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \overset{(\sim)}{P} \left(x, \frac{\frac{\delta^{2k} z - z_1}{1 - \delta^{2k} z_1 z} - z_0}{r_0} \right) - \overset{(\sim)}{P}(x, -z_2) \right\}. \quad (3)$$

Заметим, что члены рядов в формулах (2) и (3) имеют порядок убывания $O(\delta^{2k}), k \rightarrow \infty$ на множестве $x \in [0, 2\pi), |z| \leq 1$.

Литература

- [1] *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1976.
- [2] *Голузин Г.М.* Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
- [3] *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гильберовских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук, 1971. Т. XXVI, вып. 1. С. 113–179.
- [4] *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральной дыркой / в сб. Труды Международной летней математической Школы С. Б. Стечкина по теории функций. С. 128–144. — Алексин, 2007.

ВАРИАНТ ЗАДАЧИ СТЕЧКИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кошелев А.А. ¹

Пусть $C = C(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (вещественнозначных) функций, непрерывных и ограниченных на \mathbb{R}^m , с равномерной нормой, $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ – пространство измеримых, существенно ограниченных функций на \mathbb{R}^m . На дважды дифференцируемых функциях f оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}.$$

На классы менее гладких функций оператор Лапласа и его вторая степень распространяются по схеме Соболева (см., например, [1]).

Обозначим через $W^4 = W^4(\mathbb{R}^m)$ пространство таких функций $f \in C(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^2 f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$.

Сформулируем три родственные задачи теории приближения функций, рассматриваемые в работе.

1. В пространстве W^4 выделим класс функций $Q^4 = \{f \in W^4 : \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)} \leq 1\}$. Пусть \mathcal{L} есть множество линейных ограниченных операторов из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$, а $\mathcal{L}(N)$ – множество операторов из \mathcal{L} , нормы которых не превосходят числа $N > 0$. При $N > 0$ положим

$$E(N) = \inf\{U(T) : \|T\|_{\mathcal{L}(N)} \leq N\}, \quad (1)$$

$$U(T) = \sup\{\|\Delta f - Tf\|_{C(\mathbb{R}^m)} : f \in Q^4\}, \quad T \in \mathcal{L}(N).$$

Величину (1) (а точнее, функцию переменного N) называют величиной наилучшего приближения оператора Лапласа Δ линейными ограниченными операторами на классе элементов Q^4 . Эта задача является частным случаем задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [2].

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00462.

2. Для неотрицательного числа δ положим

$$\omega(\delta) = \sup\{\|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^m)} : f \in Q^4, \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \leq \delta\}; \quad (2)$$

эту функцию переменного $\delta > 0$ называют модулем непрерывности оператора Лапласа на классе Q^4 . Известно (см., например, [3]), что для модуля непрерывности (2) справедливо равенство

$$\omega(\delta) = \mathcal{K} \delta^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где $\mathcal{K} = \omega(1)$ есть точная (наименьшая возможная) константа в неравенстве Колмогорова

$$\|\Delta^k f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \leq \mathcal{K} \cdot \sqrt{\|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \cdot \|\Delta^n f\|_{C(\mathbb{R}^m)}}, \quad f \in W^4(\mathbb{R}^m). \quad (4)$$

3. Для оператора $T \in \mathcal{L}$ и числа $\delta > 0$ положим

$$U_\delta(T) = \sup\{\|\Delta f - T\eta\|_{C(\mathbb{R}^m)} : f \in Q^4, \eta \in C(\mathbb{R}^m), \|f - \eta\|_{C(\mathbb{R}^m)} \leq \delta\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) = \inf\{U_\delta(T) : T \in \mathcal{L}\} \quad (5)$$

есть величина ошибки оптимального восстановления оператора Лапласа с помощью множества линейных методов восстановления на элементах класса Q^4 , заданных с известной погрешностью δ .

В работе [4] О. Кунчев изучал неравенство (2) и получил для точной константы оценку сверху $\mathcal{K} \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}$.

Следующая теорема является частным случаем общих результатов С.Б. Стечкина и показывает тесную связь рассматриваемых задач (см., например, [3]).

Теорема А. При $m \geq 2$ для величин (1), (2), (5) справедливы следующие соотношения:

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \leq \inf\{E(N) + N\delta : N \geq 0\}, \quad \delta > 0; \quad (6)$$

$$E(N) \geq \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \delta \geq 0\}, \quad N > 0. \quad (7)$$

Если в теореме А с помощью соотношения (3) от модуля непрерывности $\omega(\delta)$ перейти к наилучшей константе \mathcal{K} в неравенстве Колмогорова (4), то неравенства (6) и (7) примут следующий вид:

$$\mathcal{K} \delta^{\frac{1}{2}} \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \leq \inf\{E(N) + N\delta : N > 0\}, \quad \delta > 0, \quad (8)$$

$$E(N) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{K}^2 N^{-\frac{1}{2}}, \quad N > 0. \quad (9)$$

Следующая теорема дает близкие двусторонние оценки величин (1), (3) и константы \mathcal{K} . Полученная в ней оценка сверху для константы \mathcal{K} улучшена в сравнении с приведенной выше оценкой Кунчева.

Теорема 1. При $m = 2, 3$ справедливы следующие двусторонние оценки: в случае $m = 2$

$$\frac{0.45}{N} \leq E(N) \leq \frac{0.4955}{N}, \quad N > 0,$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}} \delta^{1/2} \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}) \leq 2\sqrt{0.4955} \delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}} \leq \mathcal{K} \leq 2\sqrt{0.4955};$$

в случае $m = 3$

$$\frac{0.54}{N} \leq E(N) \leq \frac{0.5995}{N}, \quad N > 0,$$

$$2\sqrt{0.54} \delta^{1/2} \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}) \leq 2\sqrt{0.5995} \delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$2\sqrt{0.54} \leq \mathcal{K} \leq 2\sqrt{0.5995}.$$

Литература

- [1] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
- [2] Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.
- [3] Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
- [4] Kounchev O. Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality // «Multivariate Approximation», W. Haussmann et al. (eds.), Akademie Verlag, 1997. Pp. 123–132.

ЗАДАЧА ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ ОЦЕНКИ СВЕРХУ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ ПРОСТРАНСТВ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Куклин Н.А.¹

Следующая задача бесконечномерного линейного программирования возникает из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа евклидова пространства \mathbb{R}^m , $m \geq 2$ (см. [1]):

$$\begin{cases} u_m = \min f(1) = 1 + \min \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \\ f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k P_k^{(m)}(t) \leq 0, \quad t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], \\ f_k \geq 0, \quad k \geq 1; \end{cases} \quad (1)$$

здесь $\{P_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ — система ультрасферических многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\phi(t) = (1 - t^2)^{\frac{m-3}{2}}$ и нормированных условием $P_k^{(m)}(1) = 1$, $k \geq 0$.

В работе [2] было доказано, что при всех $m \geq 2$ величина u_m достигается на некоторой функции f^* с указанными в (1) свойствами, а также найдена экстремальная функция при $m = 4$. В работе [3] была найдена функция f^* при $5 \leq m \leq 146$, $148 \leq m \leq 156$, $m = 161$ (кроме случаев $m = 8$, $m = 24$, которые были известны ранее). Во всех перечисленных в этих работах случаях экстремальная функция оказалась алгебраическим многочленом.

На данный момент остается недоказанным тот факт, что среди экстремальных функций задачи (1) при всех $m \geq 2$ найдется многочлен. Этот факт удастся доказать для новых значений размерностей m в дополнение к результатам работ [2, 3].

Теорема 1. *При $2 \leq m \leq 165$ среди экстремальных функций задачи (1) есть многочлен.*

Отметим отдельные новые результаты для некоторых m . Случай $m = 3$ был рассмотрен автором в работах [4–6]. В работе [4] доказано,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00462.

что экстремальная функция не может быть многочленом степени ниже, чем 16. В работе [5] доказано, что экстремальная функция является многочленом степени больше, чем 26. Следующий более общий факт был доказан автором в работе [6].

Теорема 2. *При $m = 3$ каждая экстремальная функция f^* задачи (1) есть многочлен. Справедливы неравенства $27 \leq \deg f^* < 1450$.*

Данный результат показывает, что в задаче Дельсарта (1) размерность $m = 3$ является особым случаем, так как при $4 \leq m \leq 30$ экстремальный многочлен имеет степень не выше, чем 15.

Выпишем случаи, которые ранее не были рассмотрены в работе [3] и были получены при помощи алгоритма F_4 нахождения базиса Гребнера системы алгебраических уравнений (см. [7]).

Теорема 3. *Справедливы результаты, приведенные в следующей таблице.*

m	u_m	$\{k < \deg f^* \mid f_k^* = 0\}$	$\deg f^*$
147	$4.75 \dots \cdot 10^{22}$	$\{34, 35, 36\} \cup \{39, 40, 41\}$	42
157	$1.01 \dots \cdot 10^{24}$	$\{35, 36, 37\} \cup \{40, 41, 42, 43\}$	44
158	$1.40 \dots \cdot 10^{24}$	$\{36, 37, 38\} \cup \{41, 42, 43\}$	44
159	$1.87 \dots \cdot 10^{24}$	$\{36, 37, 38\} \cup \{41, 42, 43\}$	44
160	$2.50 \dots \cdot 10^{24}$	$\{36, 37, 38\} \cup \{41, 42, 43\}$	44
162	$4.47 \dots \cdot 10^{24}$	$\{36, 37, 38, 39\} \cup \{41, 42, 43, 44\}$	45
163	$5.98 \dots \cdot 10^{24}$	$\{36, 37, 38, 39\} \cup \{41, 42, 43, 44\}$	45
164	$8.08 \dots \cdot 10^{24}$	$\{36, 37, 38, 39\} \cup \{41, 42, 43, 44\}$	45
165	$1.10 \dots \cdot 10^{25}$	$\{36, 37, 38, 39\} \cup \{41, 42, 43, 44\}$	45
167	$2.12 \dots \cdot 10^{25}$	$\{37, 38, 39\}$	41
173	$1.30 \dots \cdot 10^{26}$	$\{38, 39, 40, 41\} \cup \{43, 44, 45, 46\}$	47

Как видно, во всех размерностях m , приведенных в теореме, кроме размерности $m = 167$, множество $\{k < \deg f^* \mid f_k^* = 0\}$ состоит из двух «отрезков». Например, в случае $m = 147$ справедливо представление $\{k < \deg f^* \mid f_k^* = 0\} = \{k \mid 34 \leq k \leq 36\} \cup \{k \mid 39 \leq k \leq 41\}$. В то же время, во всех размерностях, рассмотренных ранее в работах [2, 3], такое множество состоит из одного «отрезка». В следующей таблице для сравнения приведены результаты из работы [3] для размерностей $m = 146 \dots 148$.

m	u_m	$\{k < \deg f^* \mid f_k^* = 0\}$	$\deg f^*$
146	$3.51 \dots \cdot 10^{22}$	$\{34, 35\}$	37
147	$4.75 \dots \cdot 10^{22}$	$\{34, 35, 36\} \cup \{39, 40, 41\}$	42
148	$6.35 \dots \cdot 10^{22}$	$\{34, 35, 36\}$	38

Таким образом, $m = 147$ — это самый простой случай, когда множество $\{k < \deg f^* \mid f_k^* = 0\}$ состоит из двух «отрезков».

Литература

- [1] *Delsarte Ph.* Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. Vol. 27. Pp. 272–289.
- [2] *Арестов В. В., Бабенко А. Г.* О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
- [3] *Штром Д. В.* Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. ИММ УрО РАН. 2002. Т. 8, № 2. С. 162–189.
- [4] *Куклин Н. А.* Аналитический метод в задаче о контактном числе трехмерного пространства // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 159–164.
- [5] *Куклин Н. А.* Метод Дельсарта в задаче о контактном числе трехмерного пространства // Современные проблемы математики: Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 137–138.
- [6] *Куклин Н. А.* Вид экстремальной функции в задаче Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного пространства // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 225–232.
- [7] *Faugere J.-C.* A new efficient algorithm for computing Groebner bases (F_4). J. Pure and Appl. Alg. 1999. V. 139, № 1–3. Pp. 61–88.

КОНСТАНТЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ 2-РАЗДЕЛЬНОГО КМА

Плещева Е.А.

В данной работе рассматриваются ортонормированные системы вида $\{2^j \psi^1(2^{2j}x - k), 2^{(2j+1)/2} \psi^2(2^{2j+1}x - k) : k, j \in \mathbb{Z}\}$, введенные нами ранее в [1], образующие ОНБ пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Для построения таких функций используется понятие 2-раздельного кратномасштабного анализа

Определение. Рассмотрим две последовательности замкнутых подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \dots &\subset V_{-1}^2 \subset V_0^1 \subset V_1^2 \subset V_2^1 \subset \dots, \\ \dots &\subset V_{-1}^1 \subset V_0^2 \subset V_1^1 \subset V_2^2 \subset \dots \end{aligned}$$

Назовем такую конструкцию 2-раздельным кратномасштабным анализом (2-КМА) пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- а) $\bigcup_j V_{2j}^1 = \bigcup_j V_{2j}^2 = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;
- б) $\bigcap_j V_{2j}^1 = \bigcap_j V_{2j}^2 = \{0\}$;
- в) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + 2^{-j}l) \in V_j^s \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}, s = 1, 2$;
- г) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \quad \forall j \in \mathbb{Z}, s = 1, 2$;
- д) в каждом пространстве V_0^s ($s = 1, 2$), существует ортонормированный базис вида $\{\varphi^s(x + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Обозначим $p_s = \begin{cases} 1, & s = 2, \\ 2, & s = 1. \end{cases}$

Условия вложения подпространств 2-КМА друг в друга записываются в виде масштабирующих соотношений:

$$\varphi^s(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{s, p_s} \varphi^{p_s}(2x - k), \quad s = 1, 2.$$

Пространства всплесков W_j^s , ортогональные пространствам V_j^s и дополняющие их до $V_{j+1}^{p_s}$, порождаются, соответственно, функциями

$$\psi^s(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_{\psi^s, k}^{s, p_s} \varphi^{p_s}(2x - k), \quad s = 1, 2.$$

В этой работе рассматриваются всплески с компактным носителем, полученные в результате "перекрестного" умножения масок Добеши, поэтому в масштабирующих соотношениях и выражениях для всплесков суммы становятся конечными: для $s = 1, 2$

$$\varphi^s(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_s} m_k^{s,p_s} \varphi^{p_s}(2x - k), \quad \psi^s(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_s} m_{\psi^s,k}^{s,p_s} \varphi^{p_s}(2x - k).$$

При обработке сложных сигналов часто требуется, чтобы всплеск хорошо приближал сигнал как по частоте, так и во времени. Для выполнения анализа такого сигнала требуются базисные функции, способные выявлять в анализируемом сигнале как частотные, так и временные характеристики. Другими словами, сами базисные функции должны обладать определенными свойствами, названными частотно-временной локализацией. Частотно-временная локализация характеризуется понятиями центра и радиуса масштабирующей функции и ее преобразования Фурье. Центр и радиус масштабирующей функции f с нормой в $L^2(\mathbb{R})$, равной единице, определяются формулами

$$x_f^* = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx, \quad \Delta_f = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x^* - x)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Аналогично для преобразования Фурье масштабирующей функции центр и радиус определены, соответственно, формулами

$$\omega_f^* = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad \Delta_{\hat{f}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega^* - \omega)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Определение. Константами неопределенности нормированных функций $f \in L^2(\mathbb{R})$ называются величины $\mathfrak{K} := \Delta_f \Delta_{\hat{f}}$.

Введем следующие величины:

$$\alpha_i[f](y) = \int_{\mathbb{R}} x^i f(x) f(x - y) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ясно, что $x_f^* = \alpha_1[f](0)$, $\Delta_f = \sqrt{\alpha_2[f](0) - (\alpha_1[f](0))^2}$.

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в работе [2], получим, что эти величины для рассматриваемых масштабирующих функций 2-раздельного КМА связаны системой соотношений ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_s$):

$$\alpha_i[\varphi^s](r) = \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{l=-N_s}^{N_s} \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha_{i-j}[\varphi^{p_s}](2r-l) \sum_{k=0}^n k^j m_k^{s,p_s} \overline{m_{k-l}^{s,p_s}} \right],$$

$$\alpha_i[\psi^s](r) = \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{l=-N_s}^{N_s} \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha_{i-j}[\varphi^{p_s}](2r-l) \sum_{k=0}^n k^j m_{\psi_s,k}^{s,p_s} \overline{m_{\psi_s,k-l}^{s,p_s}} \right].$$

Аналогично, вводя величины $\beta_j[f](y) = \int_{\mathbb{R}} \omega^j |\widehat{f}(\omega)|^2 e^{2\pi i \omega y} d\omega$; видим, что для вычисления $\Delta_{\widehat{f}}$ нужно значение величины $\beta_2[f](0)$, которое находится из следующей найденной нами переопределенной системы $2(N_1 + N_2 + 2)$ линейных уравнений с $2(N_1 + N_2 + 1)$ неизвестными (при $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N_s - 1)$):

$$\sum_{n=-N_s}^{N_s} n^k \beta_2[\varphi^s](n) = 0, \quad k = 0, 1; \quad \sum_{n=-N_s}^{N_s} n^2 \beta_2[\varphi^s](n) = -\frac{1}{2\pi^2};$$

$$\sum_{l=-N_s}^{N_s} \left(\sum_{k=0}^{N_s} m_k^{s,p_s} \overline{m_{k-l}^{s,p_s}} \right) \beta_2[\varphi^{p_s}](2r-l) = \frac{\beta_2[\varphi^s](r)}{8}.$$

Если полученные системы совместны, то по найденным $\beta_2(0), \alpha_1(0), \alpha_2(0)$ находятся радиусы, а значит, и константы неопределенности масштабирующих функций и всплесков.

Литература

- [1] Плещева Е.А. КМА-подобные последовательности подпространств $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ в случае двух масштабирующих функций. // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции 26-30 января 2009 г., Екатеринбург, 2009, с. 88-92.
- [2] Gimbutas Z., Bastys A. Daubechies compactly supported wavelets with minimal Heisenberg boxes // Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 35, № 4, 1995.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЫХ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ

Рябцов И.С.

В работе [4] вводятся понятия простого и составного фрейма Парсевалья.

Определение 1. Фрейм Парсевалья $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ будем называть *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ также является фреймом Парсевалья, при этом хотя бы одна константа α_i равна нулю.

Определение 2. Фрейм Парсевалья $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ будем называть *простым*, если он не является составным.

Будем называть нормированный фрейм $G = \{g_i\}_{i=1}^M$ в пространстве ℓ_2^N *равноугольным* [1, 3], если существует константа $c \in [0, 1)$ такая, что выполняется следующее равенство:

$$|\langle g_i, g_j \rangle| = \begin{cases} 1, & i = j \\ c, & i \neq j \end{cases}$$

Пусть $G = \{g_i\}_{i=1}^M$ — произвольный равноугольный жёсткий фрейм в ℓ_2^N , тогда фрейм Парсевалья $F = \left\{ \sqrt{\frac{N}{M}} g_i \right\}_{i=1}^M$, полученный перенормировкой, будем называть *равноугольным фреймом Парсевалья*.

Утверждение. Все равноугольные фреймы Парсевалья являются простыми.

Теорема 1. Если $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсевалья в ℓ_2^N , то имеет место ограничение сверху на число векторов этого фрейма:

$$M \leq \frac{N(N+1)}{2}. \tag{1}$$

Ограничение (1) имеет место для равноугольных фреймов над вещественным полем [1, 2].

Простота произвольного фрейма Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ тесно связана со свойствами следующей матрицы:

$$V(F) = \begin{pmatrix} |\langle f_1, f_1 \rangle|^2 & \dots & |\langle f_1, f_M \rangle|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ |\langle f_M, f_1 \rangle|^2 & \dots & |\langle f_M, f_M \rangle|^2 \end{pmatrix}$$

Теорема 2. Следующие два утверждения эквивалентны:

- $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля в ℓ_2^N .
- Матрица $V(F)$ — невырожденная.

Следствие. Для того чтобы произвольный фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ был простым, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{|\langle f_i, f_j \rangle|}{\|f_i\| \|f_j\|} < \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \forall i \neq j$$

Литература

- [1] Casazza P.G., Redmond D., Treiman J.C. Real Equiangular Frames. CISS Meeting Information Sciences and Systems, Princeton, NJ, 2008.
- [2] Lemmens P.W.H., Seidel J.J. Equiangular lines. J. Algebra, № 24, pp. 494–512, 1973.
- [3] Sustik M., Tropp J.A., Dhillon I., Heath Jr.R.W. On the existence of equiangular tight frames. Linear Algebra Appl. Vol. 426, № 2–3, pp. 619–635, 2007.
- [4] Рябцов И.С. О представлении фреймов Парсеваля. Труды Второй Международной конференции «Математическая физика и её приложения». Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки, 2011.

**ТОЧНАЯ КОНСТАНТА
В НЕРАВЕНСТВЕ МАРКОВА–НИКОЛЬСКОГО
ДЛЯ ПАРЫ ПРОСТРАНСТВ L_∞ И L_1 НА ОТРЕЗКЕ**

Симонов И.Е.

В различных разделах математики возникает задача о соотношении между нормами производной многочлена и самого многочлена на отрезке. В докладе будет рассмотрена задача о точной константе в неравенстве

$$\|P^{(\ell)}\|_\infty \leq C(n, \ell)\|P\|_1, \quad 1 \leq \ell \leq n, \quad (1)$$

для алгебраических многочленов степени точно n .

В общем случае задача формулируется так. Рассматривается множество \mathcal{P}_n алгебраических многочленов степени n с вещественными коэффициентами. Требуется найти наименьшую константу в неравенстве

$$\|P^{(\ell)}\|_p \leq C_{p,q}(n, \ell)\|P\|_q, \quad P \in \mathcal{P}_n. \quad (2)$$

Здесь

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|; \quad \|f\|_0 = \exp \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |f(t)| dt \right).$$

Многочлен $P_* \in \mathcal{P}_n$, на котором неравенство (2) обращается в равенство, называется экстремальным.

Неравенству (2) посвящено большое количество работ, но точные значения величины $C_{p,q}(n, \ell)$ известны лишь в некоторых случаях. В работах [2], [3] доказано, что

$$\|P^{(\ell)}\|_\infty \leq \|T_n^{(\ell)}\|_\infty \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad \ell = 1, \dots, n-1,$$

где T_n есть многочлен Чебышева первого рода, определенный формулой

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1].$$

В работе [4] доказано, что

$$\|P'\|_p \leq \|T'_n\|_p \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Два последних неравенства точные, и экстремальным является многочлен T_n . Случай $p = q = 2$ исследован в работах Е. Шмидта, Е. Хилле, Г. Сеге, Ю.Д. Тамаркина, Г. Миловановича и А. Кроо [1]. Г. Лабель [1] нашел точную константу неравенстве (2) при $p = \infty$, $q = 2$, $1 \leq \ell \leq n - 1$. В работе [5] П.Ю. Глазыриной найдена точная константа в неравенстве (2) при $q = 0$, $0 \leq p \leq \infty$. Более полный обзор результатов, относящихся к неравенству (2), см. в [1].

Отметим, что точная константа в неравенстве (2) при $q = 1$ известна только для случая $\ell = n$. Это есть следствие результата А.Н. Коркина и Е.И. Золотарёва [6] о том, что многочленом, наименее уклоняющимся от нуля в метрике L_1 , является многочлен Чебышева 2-го рода

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1, 1].$$

В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема. Пусть

$$\frac{n-1}{3} \leq \ell \leq n.$$

Обозначим

$$b_k = U_k^{(\ell)}(1), \quad k = \ell, \dots, n,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_\ell \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_\ell & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

δ – наибольшее характеристическое число матрицы B ,

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-\ell})$ – собственный вектор, соответствующий δ .

Тогда точная константа в неравенстве (1) равна $C(n, \ell) = \delta$. Неравенство обращается в равенство только на многочленах $P(x) = aG(\arccos x)/\sqrt{1-x^2}$, $a \in \mathbb{R}$, где

$$G(\theta) = \sum_{j=0}^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n-\ell} \alpha_j \alpha_k \sin((n+1-j-k)\theta).$$

Литература

- [1] *Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M.* Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. Singapore: World Scientific Publ., 1994.
- [2] *Марков А.А.* Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Зап. Импер. Акад. наук. 1889. № 62. С. 1–24.
- [3] *Марков В.А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб, 1892.
- [4] *Vojanov B.D.* An extension of Markov inequality // J. Approx. Theory. 1982. № 35. Pp. 181–190.
- [5] *Глазырина П.Ю.* Точное неравенство Маркова–Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q, L_0 на отрезке // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 3–22.
- [6] *Korkine A., Zolotareff G.* Sur un certain minimum // Nouv. Ann. Math. Sér. 2. 1873. 12. Pp. 337–356.

КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Стрелкова Е.В.¹, Шевалдина Н.В.

В последние годы появился ряд работ (см., например, [1]–[3]), посвященных точному вычислению или асимптотическим оценкам констант Лебега интерполяционных полиномиальных и экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами. Эта известная тематика берет начало с работ Ф. Ричардса [4] и А.А. Женсыкбаева [5].

В данной работе мы рассматриваем подобную задачу для неинтерполяционных локальных экспоненциальных сплайнов третьего порядка с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору с постоянными коэффициентами вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2) \quad (1)$$

(D — символ дифференцирования, $\beta > 0$). Такие сплайны с дополнительным требованием точности на ядре оператора \mathcal{L}_3 (т. е. на решениях $1, e^{\beta x}, e^{-\beta x}$ линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_3(D)f = 0$) были построены Е.В. Стрелковой (Шевалдиной) [6] в 2010 году.

Дадим необходимые определения и сформулируем основной результат работы.

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_j = f(jh)$ ($h > 0$, $j \in \mathbb{Z}$) и

$$I_j = c_{-1}y_{j-1} + c_0y_j + c_1y_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

— последовательность линейных функционалов,

$$c_{-1} = c_1 = -\frac{\beta^2 e^{2\beta h} (e^{\beta h/2} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4 (1 + e^{\beta h})},$$

$$c_0 = \frac{\beta^2 e^{\beta h} (e^{\beta h/2} - 1)^2 (e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{1}{2}\beta h} + 1)}{(e^{\beta h} - 1)^4 (1 + e^{\beta h})}.$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00445.

Пусть $\varphi(x) = \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch} \beta x - 1)$ — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_3(D)\varphi = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi(0) = \varphi'(0)$, $\varphi''(0) = 1$ и $B(x)$ — экспоненциальный B - \mathcal{L} -сплайн с носителем $\operatorname{supp} B = \left[-\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\right]$, соответствующий оператору \mathcal{L}_3 вида (1). Он может быть записан в следующем виде:

$$B(x) = \frac{1}{\beta^2} \begin{cases} \operatorname{ch} \beta \left(x + \frac{3h}{2}\right) - 1, & x \in \left[-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right], \\ 2 \operatorname{ch} \beta h - \frac{(1 + e^{-\beta h})e^{\beta(x+h/2)}}{2} - \frac{(1 + e^{\beta h})e^{-\beta(x+h/2)}}{2}, & x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \\ \operatorname{ch} \beta \left(x - \frac{3h}{2}\right) - 1, & x \in \left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right]. \end{cases}$$

Е.В. Стрелкова (Шевалдина) [6] построила на всей числовой оси \mathbb{R} локальные экспоненциальные сплайны, соответствующие оператору \mathcal{L}_3 , вида

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B(x - jh), \tag{3}$$

выбирая функционалы I_j в форме (2). Построенные сплайны не были интерполяционными, поскольку $S(jh) \neq y_j$ ($j \in \mathbb{Z}$), но сохраняли ядро оператора \mathcal{L}_3 и достаточно хорошо (с порядком аппроксимации h^2) приближали функции f из соответствующих соболевских классов дважды дифференцируемых функций.

В настоящей работе нас интересует следующий вопрос. Пусть все числа $y_j = f(jh)$ лежат в полосе $|y_j| \leq 1$. Насколько большой может быть равномерная норма $\|S\|_{C(\mathbb{R})}$ сплайна $S(x)$ вида (3)? А именно, чему равняется величина

$$L = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{S(x) : |y_j| \leq 1 \quad (j \in \mathbb{Z})\}?$$

Число L является нормой линейного оператора S , действующего из пространства непрерывных функций $C(\mathbb{R})$ в пространство $C(\mathbb{R})$, и называется константой Лебега метода локальной экспоненциальной аппроксимации сплайнами третьего порядка, точной на ядре оператора \mathcal{L}_3 . Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\beta > 0$. Тогда

$$L = \frac{e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{1}{2}\beta h} + 1}{(e^{\frac{1}{2}\beta h} + 1)^2(e^{\beta h} + 1)}.$$

Следствие. При $\beta \rightarrow 0$ локальные экспоненциальные сплайны $S(x)$ вида (3) переходят в локальные параболические сплайны, точные на алгебраических многочленах второй степени. Такие сплайны были ранее построены Н.П. Корнейчуком. Точнее, им были указаны коэффициенты $c_{-1} = c_1 = -\frac{1}{8h^2}$, $c_0 = \frac{5}{4h^2}$ в функционале (2). При этом из сформулированной теоремы при $\beta \rightarrow 0$ получаем, что константа Лебега L локальной параболической аппроксимации сплайнами с равномерными узлами, точной на алгебраических многочленах второй степени, оказывается равной $L = 1.25$.

Литература

- [1] Субботин Ю.Н., Теляковский С.А. Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равномерными узлами // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
- [2] Shaohui G., Yongping L. Asymptotic estimate for the Lebesgue constant of cardinal \mathcal{L} -spline interpolation operator // East J. of Approx. 2007. Vol. 13, № 3. Pp. 331–355.
- [3] Ким В.А. Точные константы Лебега для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
- [4] Richards F.B. The Lebesgue constants for the cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14. Pp. 83–92.
- [5] Женьсжбаев А.А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r -го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
- [6] Шевалдина Е.В. Локальные \mathcal{L} -сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.

**СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ
МНОГОЧЛЕНА С НУЛЕВЫМ СРЕДНЕВЗВЕШЕННЫМ
ЗНАЧЕНИЕМ НА ОТРЕЗКЕ НАИМЕНЬШЕЙ МЕРЫ**

Тихановцева К.С.

Пусть функции φ и ψ неотрицательны, суммируемы на отрезке $[-1, 1]$ и отличны от 0 на множестве положительной меры из $[-1, 1]$. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\varphi)$ есть множество многочленов p с действительными коэффициентами, степени точно $n \geq 1$, для которых выполняется условие

$$\int_{-1}^1 p(t)\varphi(t) dt = 0. \tag{1}$$

Для многочлена $p \in \mathcal{P}_n$ введем множество

$$\mathcal{X}(p) = \{t \in [-1, 1] : p(t) \geq 0\}$$

точек отрезка $[-1, 1]$, в которых многочлен неотрицателен. Величина

$$\mu(p) = \int_{\mathcal{X}(p)} \psi(t) dt$$

является ψ -мерой множества $\mathcal{X}(P)$. Интерес представляет наименьшее значение этой меры, то есть величина

$$\mu_n = \inf\{\mu(p) : p \in \mathcal{P}_n\} = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \int_{\mathcal{X}(p)} \psi(t) dt. \tag{2}$$

В 1987 г. А.Г. Бабенко [1] для единичных весов $\psi = \varphi \equiv 1$ нашел порядок поведения μ_n по n при $n \rightarrow \infty$. Десять лет спустя В.В. Арестов и В.Ю. Раевская [2] исследовали задачу (2) для $\psi \equiv 1$ и произвольного веса φ . Они доказали, что если вес φ положителен, непрерывен на $(-1, 1)$ и удовлетворяет некоторому условию, то множество положительности экстремального многочлена есть промежуток. Также они получили точное значение величины μ_n и указали экстремальные многочлены в этом случае.

В данной работе задача изучается для случая

$$\psi(t) = \varphi(t) = (1 - t^2)^\alpha \text{ при } \alpha > 0. \quad (3)$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *В случае (3) экстремальный многочлен задачи (2) имеет не более трех промежутков неотрицательности.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть φ и ψ — неотрицательные и суммируемые на $(-1, 1)$ функции, причем:*

- 1) φ может обращаться в ноль лишь на множестве меры ноль,
- 2) функция $\frac{1}{\psi}$ дважды дифференцируема и её вторая производная возрастает на некотором интервале $I \subseteq (-1, 1)$.

Тогда экстремальный многочлен задачи (2) имеет на I не более одной перемены знака с «+» на «-».

Следующее предложение является следствием предложения 1 для случая четных весов.

Предложение 2. *Пусть φ и ψ — четные неотрицательные и суммируемые на $(-1, 1)$ функции, причем:*

- 1) φ может обращаться в ноль лишь на множестве меры ноль,
- 2) функция $\frac{1}{\psi}$ дважды дифференцируема и её вторая производная возрастает на интервале $(0, 1)$.

Тогда экстремальный многочлен задачи (2) имеет не более четырех промежутков неотрицательности на всем интервале $(-1, 1)$.

Действительно, из предложения 1 вытекает, что экстремальный многочлен задачи (2) имеет на $(0, 1)$ не более одной перемены знака с «+» на «-». Отсюда следует, что на $(0, 1)$ существует не более двух промежутков неотрицательности экстремального многочлена. Тогда, в силу четности веса, экстремальный многочлен задачи (2) имеет не более четырех промежутков неотрицательности на всем $(-1, 1)$.

Варьируя те корни многочлена, в которых он меняет знак, получаем, что четыре промежутка неотрицательности у экстремального многочлена быть не может.

В работе [4] доказано, что на множестве многочленов третьей степени экстремальный многочлен задачи (2) в случае (3) имеет один промежуток неотрицательности и совпадает с экстремальным многочленом, полученным в работе [2], с поправкой на вес.

В работе [3] доказано, что на множестве многочленов второй степени экстремальный многочлен задачи (2) в случае (3) имеет ровно два промежутка неотрицательности.

Экспериментальные вычисления показывают, что экстремальный многочлен задачи (2) в случае (3) имеет два промежутка неотрицательности для многочленов четной степени и один промежуток неотрицательности для многочленов нечетной степени.

Литература

- [1] *Бабенко А.Г.* Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987.
- [2] *Арестов В.В., Раевская В.Ю.* Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // *Мат. заметки.* 1997. Т. 62, вып. 3. С. 332–344.
- [3] *Тихановцева К.С.* О наименьшей мере множества неотрицательности алгебраического многочлена с нулевым взвешенным средним значением на отрезке // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2010. Т. 16, № 4. С. 300–311.
- [4] *Тихановцева К.С.* О наименьшей мере множества неотрицательности алгебраических многочленов малых степеней с нулевым средним значением на отрезке / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. С. 198–204. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010.

РЕКУРРЕНТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ARX МОДЕЛЕЙ С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ В ВЫХОДНОМ СИГНАЛЕ

Иванов Д.В., Усков О.А.

Билинейные модели являются простейшим обобщением линейных динамических систем. Моделирование физических процессов с помощью билинейных систем находит применение во многих областях науки, таких как ядерная физика, электрические сети, химическая кинетика, гидродинамика и т.д. [1].

По виду параметризации шума модели можно выделить две группы моделей: модель ошибки в уравнении и модель выходной ошибки [2]. Идентификация моделей ошибки уравнения может быть решена методом наименьших квадратов. В моделях ошибки в уравнении считается, что помеха проходит через часть динамической системы, что не всегда удобно для приложений. Свободной от этого недостатка является модель выходной ошибки, однако идентификация данной модели существенно сложнее. В настоящее время активно развиваются методы идентификации билинейных динамических систем с помехой в выходном сигнале, такие как инструментальные переменные [3], компенсирующий смещение метод наименьших квадратов [4], метод максимального правдоподобия и методы на основе высших статистик. Обзор рекуррентных методов идентификации билинейных систем дан [5]. В данной статье рассматривается рекуррентный алгоритм идентификации билинейных систем, при параметризации помехи, обобщающей модели ошибки в уравнении и модели выходной ошибки, доказано, полученные что полученные оценки будут сильно состоятельны.

Билинейная динамическая система описывается стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \dots - 1, 0, 1 \dots$

$$z_i - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{r_1} a_0^{(m)} x_{i-m} + \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3(m)} c_0^{(mk)} x_{i-m} z_{i-k} + \xi_1(i),$$

$$y_i = z_i + \xi_2(i),$$

(1)

где z_i, y_i -ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные; x_i -наблюдаемая входная переменная; $\xi_1(i)$ - помеха в уравнении; $\xi_2(i)$ - помеха в выходном сигнале;

Пусть выполняются следующие предположения:

1⁰. Множество \tilde{B} , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой билинейной системы, является компактным.

2⁰. $\{\xi_1(i)\}, \{\xi_2(i)\}$ - стационарные в узком смысле последовательности независимых случайных векторов с $E\{\xi_1(i)\} = 0, E\{\xi_2(i)\} = 0, E\{(\xi_1(i))^2\} = \sigma_1^2 > 0, E\{(\xi_2(i))^2\} = \sigma_2^2 > 0$ и для некоторых постоянных π_{ξ_1} и π_{ξ_2} : $|\xi_1(i)| < \pi_{\xi_1}, |\xi_2(i)| < \pi_{\xi_1}$, п.н., где E - оператор математического ожидания.

3⁰. $\{\xi_1(i)\}, \{\xi_2(i)\}$ статистически не зависят от $\{z_i\}, \{x_i\}$.

4⁰. Последовательности $\{x_i\}$ -стационарные в узком смысле с дробно-рациональной плотностью случайные сигналы с $E\{(x_i)^2\} = \sigma_x^2 > 0$. Для некоторых $\pi_x > 0$: $|x_i| < \pi_x$ п.н.

5⁰. Выполняется условие несократимости полиномов $B(q^{-1})$ и $A(q^{-1})$, где $B(q^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} q^{-m}, A(q^{-1}) = \sum_{m=0}^{r_1} a_0^{(m)} q^{-m}$, q^{-1} - оператор сдвига назад, $q^{-1} \cdot x_i = x_{i-1}$.

6⁰. Априорно известно отношение дисперсий помех $\gamma = \sigma_1^2/\sigma_2^2$.

Уравнение (1) может быть представлено в форме линейной регрессии:

$$y_i = \varphi_i^T \theta + \varepsilon_i, \tag{2}$$

где $\varphi_i = (\phi_y^T(i) \mid \phi_x^T(i) \mid \phi_{xy}^T(i))^T$,

$\phi_y(i) = (y_{i-1}, \dots, y_{i-r})^T, \phi_x(i) = (x_i, \dots, x_{i-r_1})^T$,

$\phi_{xy}(i) = (x_i y_{i-1}, \dots, x_i y_{i-r_3(0)} \mid x_{i-1} y_{i-1}, \dots, x_{i-1} y_{i-r_3(2)} \mid \dots$

$\dots \mid x_{i-r_2} y_{i-1}, \dots, x_{i-r_2} y_{i-r_3(r_2)})^T$,

$\theta_0 = (b_0^T \mid a_0^T \mid c_0^T)^T, b_0 = (b_0^{(1)} \dots b_0^{(r)})^T, a_0 = (a_0^{(1)} \dots a_0^{(r_1)})^T$,

$c_0 = (c_0^{(11)} \dots c_0^{(1r_3(1))} \mid c_0^{(21)} \dots c_0^{(2r_3(2))} \mid \dots \mid c_0^{(r_2 1)} \dots c_0^{(r_2 r_3(r_2))})^T$

$$\varepsilon_i = \xi_1(i) + \xi_2(i) - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \xi_2(i-m) - \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3(m)} c_0^{(mk)} x_{i-m} \xi_2(i-k).$$

Из предположения 2⁰ следует, что обобщенная ошибка имеет нулевое среднее значение и ее дисперсия с вероятностью 1 будет равна:

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left((\varepsilon_i(b_0, c_0, i))^2 \right) = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \gamma + b_0^T b_0 + \sigma_x^2 c_0^T c_0) = \sigma_\xi^2 \omega(b_0, c_0)\end{aligned}$$

Оценки неизвестного вектора θ можно получить с помощью стохастически градиентного алгоритма

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) - \alpha_i \nabla_\theta \left[\frac{\left(y_{i+1} - \varphi_{i+1}^T \hat{\theta}(i) \right)^2}{\left(1 + \gamma + b^T(i) b(i) + \sigma_x^2 c^T(i) c(i) \right)} \right], \quad (3)$$

где α_i последовательность, удовлетворяющая условиям:
7⁰. $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$, $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ и $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^l < \infty$ at $l > 1$.

Теорема. Пусть динамическая система описывается уравнениями (1) и выполняются предположения I^0 - I^0 , тогда оценки, определяемые алгоритмом (3), либо $\hat{\theta}(i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \theta_0$ п.н., либо $\hat{\theta}(i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$.

Литература

- [1] Mohler R.R. Bilinear Control Processes: With Applications to Engineering, Ecology, and Medicine. — New York: Academic Press, 1973.
- [2] Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
- [3] Ahmed M.S. Parameter estimation in bilinear systems by instrumental variable methods // International Journal of Control. 1986. № 44(4). Pp. 1177–1183.
- [4] Ekman M. Modeling and control of bilinear systems: application to the activated sludge process. PhD thesis. — Stockholm: Elander Gotab, 2005.
- [5] Fnaiech F., Ljung L. Parameter estimation in bilinear systems by instrumental variable methods // International Journal of Control. 1987. № 45(2). Pp. 1177–1183.

О ВОЗМОЖНОСТЯХ РАЗДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ПОМОЩЬЮ КОЛЛЕКТИВНЫХ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Кобылкин К.С., Хачай М.Ю.¹

Традиционная постановка задачи обучения распознаванию образов в классе комитетных решающих правил [1] для заданных выборов A и B в \mathbb{R}^n из двух классов состоит в том, чтобы найти такое натуральное k , векторы $d_i \in \mathbb{R}^n$, коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и весовой вектор $w = [w_i]_{i=1}^k \in \mathbb{R}_+^k$, что для решающего правила

$$f(\cdot) = H \left(\sum_{i=1}^k w_i H((d_i, \cdot) - \alpha_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k w_i \right) \quad (1)$$

при любом $a \in A$ (соответственно, для всякого $b \in B$) выполнено условие $f(a) = 1$ (соответственно, $f(b) = 0$), где

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

— функция Хевисайда, а (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Решающее правило (1) называется в этом случае *корректным* на множествах A и B .

С корректными решающими правилами (1) тесно связано понятие разделяющего комитета гиперплоскостей (аффинных функций).

Определение 1. *Комитетом* аффинных функций, разделяющим множества A и B в \mathbb{R}^n , называется множество пар $K = \{(l_i, w_i)\}_{i=1}^k$ с условием, что:

$$\sum_{i: l_i(a) > 0} w_i > q/2, \quad a \in A,$$

$$\sum_{i: l_i(b) < 0} w_i > q/2, \quad b \in B,$$

¹Работа поддержана УРО РАН (проекты 09-П-1-1001, 09-С-1-1010 и 10-1-НП-367) и РФФИ (проекты № 10-01-00273 и 10-07-00134).

где $l_i(\cdot) = (d_i, \cdot) - \alpha_i$, $d_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $w_i \in Z_+$, $i = 1, \dots, k$, а также $q = \sum_{i=1}^k w_i$, Z_+ — множество неотрицательных целых чисел. При этом q называется *весом* комитета K .

Теорема 1. ([1]) *Для того чтобы существовал комитет аффинных функций, разделяющий два конечных множества A и B в \mathbb{R}^n , необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B = \emptyset$.*

Следствие 1. ([2]) *VC-размерность класса правил (1) является бесконечной.*

В работе исследуется следующая

Задача. Каким условиям должны удовлетворять в общем случае бесконечные множества A и B в \mathbb{R}^n для того чтобы существовал разделяющий их комитет ?

Теорема 2. ([3]) *Для того чтобы существовал комитет, разделяющий замкнутые множества A и B на прямой, необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B = \emptyset$ и эти множества не являлись одновременно неограниченными сверху (снизу).*

Пусть A и B — подмножества в \mathbb{R}^n , $s, t \in Z_+$, $s > t$.

Определение 2. Назовем (s, t, q) -комитетом аффинных функций, разделяющим два множества A и B , множество пар $K = \{(l_i, w_i)\}_{i=1}^k$, где $l_i(\cdot) = (d_i, \cdot) - \alpha_i$, $d_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $w_i \in Z_+$, $i = 1, \dots, k$, а также $q = \sum_{i=1}^k w_i$, с условием, что:

$$\sum_{i: l_i(a) > 0} w_i \geq s, a \in A,$$

$$\sum_{i: l_i(b) \geq 0} w_i \leq t, b \in B,$$

Заметим, что (s, t, q) -комитет определяет некоторую кусочно-линейную поверхность, разделяющую множества A и B , и ему отвечает корректное на множествах A и B решающее правило.

Утверждение 1. *Всякий (s, t, q) -комитет $K = \{(l_i, w_i)\}_{i=1}^k$ для A и B может быть преобразован в комитет для этих двух множеств добавлением с некоторым весом $w \in Z_+$ одной из двух функций $l_T(x) = (0, x) + 1$ или $l_F(x) = (0, x) - 1$, где 0 — нулевой вектор в \mathbb{R}^n .*

Благодаря конструкции (s, t, q) -комитета удастся дать простое доказательство следующего результата.

Теорема 3. *Если A и B — замкнутые непересекающиеся множества в \mathbb{R}^n , одно из которых ограничено и имеет конечное число предельных точек, то существует разделяющий их комитет.*

Условие ограниченности одного из множеств является существенным.

Пример. Не существует комитета, который разделяет множества $A = \{2k - 1\}_{k=1}^{\infty}$ и $B = \{2k\}_{k=1}^{\infty}$.

Также справедлива

Теорема 4. *Если A и B — замкнутые непересекающиеся множества в \mathbb{R}^n , A — выпуклый телесный компакт, то существует разделяющий их комитет.*

Литература

- [1] Мазуров Вл.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. — М.: Наука, 1990.
- [2] Хачай М.Ю. О длине обучающей выборки для комитетного решающего правила // Искусственный интеллект. 2000. № 2. С. 219–223.
- [3] Кривоногов А.И. Некоторые вопросы обоснования комитетных алгоритмов / в сб. «Классификация и оптимизации в задачах управления». С. 39–51. — Свердловск: Издательство УНЦ АН СССР, 1981.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ТРАНСПОРТИРОВОК ОДНОРОДНОГО ПРОДУКТА ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДОВ ДВУХЭТАПНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Колосницын А.В.

Аннотация. Для поиска оптимального плана транспортировки некоторого однородного продукта от поставщиков к потребителям, связанными сетью транспортных потоков, рассматривается экономико-математическая модель, учитывающая случайный спрос потребителей. Математическая модель представляется в виде двухэтапной задачи стохастического программирования.

Ключевые слова: стохастическое программирование, двухэтапная задача, случайный спрос потребителей.

Постановка задачи

Рассматривается модель, объединяющая поставщиков и потребителей однородного продукта с учетом сетевых ограничений и состоящая из m узлов и n транспортных потоков.

Введем следующие множества: I_p – множество номеров производителей, I_c – множество номеров потребителей, I_0 – множество номеров, соответствующих узлам ветвления.

Узлы, в которых находятся потребители, характеризуются спросом, который в данной модели является случайной величиной.

Узлы, в которых находятся производители, характеризуются производством однородного продукта, которое регулируется двусторонними ограничениями:

$$0 \leq b_i \leq \bar{b}_i, \quad i \in I_p, \quad (1.1)$$

где \bar{b}_i , $i \in I_p$ – максимальный объем производства продукта в соответствующем узле.

Информация о связях между узлами задана с помощью матрицы инциденций с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } j\text{-ая дуга входит в } i\text{-ый узел,} \\ 0, & \text{если } j\text{-ая дуга не связана с } i\text{-ым узлом,} \\ 1, & \text{если } j\text{-ая дуга выходит из } i\text{-ого узла.} \end{cases}$$

Связь между узлами характеризуется переменной x_{ij} (объем транспортируемого продукта) и константой d_{ij} (максимальная пропускная способность) и определяется соотношением

$$-d_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Главным соотношением в модели является первый закон Кирхгофа, который имеет следующий вид:

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ji}, \quad i \in I_p, \quad (1.3)$$

$$-b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ji}, \quad i \in I_c, \quad (1.4)$$

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ji}, \quad i \in I_0. \quad (1.5)$$

Транспортировка продукта сопряжена с определенными издержками, которые в данной модели заданы константами

$$c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, имеем следующую задачу математического программирования:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1.6)$$

при условиях (1.1) – (1.5).

Двухэтапная задача поиска оптимального плана транспортировок однородного продукта

Рассматривается случай, когда спрос в узлах потребления b_i , $i \in I_c$ распределен дискретно. Пусть распределение спроса в i -ом узле представлено следующим образом:

	1	2	...	M_i
b_i	b_{i1}	b_{i2}	...	b_{iM_i}
p_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{iM_i}

$\sum_{k=1}^{M_i} p_{ik} = 1, i \in I_c$. Задача двухэтапного линейного стохастического программирования будет иметь следующий вид [2]:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I_c} \sum_{k=1}^{M_i} p_{ik} (\nu_{ik}^+ + \nu_{ik}^-) \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$0 \leq b_i \leq \bar{b}_i, \quad i \in I_p, \quad (2.2)$$

$$-d_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (2.3)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ji}, \quad i \in I_p, \quad (2.4)$$

$$\nu_{ik}^+ - \nu_{ik}^- = -b_{ik} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ji}, \quad i \in I_c, \quad k = \overline{1, M_i}, \quad (2.5)$$

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ji}, \quad i \in I_0, \quad (2.6)$$

$$\nu_i^+ \geq 0, \quad \nu_i^- \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.7)$$

где ν_i^+, ν_i^- – вспомогательные переменные. Данная задача есть задача линейного программирования очень большой размерности. В докладе предлагается ее редукция к задаче выпуклой недифференцируемой аппроксимации, для решения которой используются методы центрированных сечений [1]. Приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

- [1] Булатов В.П. Метод ортогональных симплексов и его приложения в выпуклом программировании // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 4. С. 610–622.
- [2] Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974.

АРХИТЕКТУРА ПОИСКА ПО КОЛЛЕКЦИЯМ ДАННЫХ ВОПРОСНО-ОТВЕТНЫХ СЕРВИСОВ

Костин А.И., Скробов Д.Л.

Авторами ведется разработка системы поиска по большим коллекциям данных вопросно-ответных сервисов. Данные сервисы, например, <http://otvety.mail.ru>, <http://answers.yahoo.com>, позволяют пользователям, задав произвольный вопрос, получить на него ответ от других пользователей.

Объем данных, сгенерированных подобными сервисами, уже сравним по объему с традиционным вебом, но растет гораздо быстрее. Несмотря на низкое качество самих данных, в абсолютных значениях вопросно-ответные сервисы содержат не меньше полезной и уникальной информации. Учитывая бурный рост — поиск по данным сервисам является крайне перспективной задачей[1]. При этом традиционный веб-поиск не учитывает специфики вопросно-ответных сервисов.

Вопросно-ответные сервисы — социальные сервисы. Кроме непосредственно текстов, они содержат метаинформацию о вопросах и ответах: категория вопроса, рейтинг вопроса, рейтинг ответа, рейтинг спрашивающего, рейтинг отвечающего, является ли ответ лучшим и т.д., — а также такие вопросы, ответы на которые не находятся обычными поисковыми системами, либо по которым еще нет информации в остальном интернете (например, какая-либо ошибка только что вышедшей новой версии операционной системы мобильного устройства). Принимая во внимание данные аспекты, появляется возможность существенно улучшить результаты традиционного поиска по данным сервисам [2].

Поскольку сервисы являются социальными, доля данных низкого качества существенно высока. В связи с этим остро встает вопрос определения информативности вопросов и ответов, их качества. Информативными вопросами мы считаем те, которые содержат какую-либо полезную информацию, например, «Как решать уравнение $x^2 + x + 1 = 0$?». Пример неинформативного вопроса: «Я красивая?».

Авторы приступили к построению системы, учитывающей вышеперечисленные особенности вопросно-ответных сервисов. Тестовая коллекция из 50 тысяч вопросов была взята с Ответы@mail.ru (<http://otvety.mail.ru>, была взята русскоязычная база для более точного определения корректности поиска и оценки информативности вопросов и ответов на начальном этапе), разбита на пары вопрос-ответ. Данная коллекция будет расширена до 1 миллиона вопросов из двух категорий: «Здоровье и красота» и «Юридическая консультация». Далее мы приступили к выделению факторов — параметров, полученных из исходных данных, которые позволят взглянуть на данные с новой стороны. Полученные данные индексируются средствами поискового механизма Sphinx. При этом процесс выделения факторов, индексация, определение правил ранжирования является многоитерационным. На каждом шаге необходимо оценить ценность фактора — на сколько благодаря ему улучшены результаты поиска, насколько он коррелирует с другими факторами.

На начальном этапе, пока факторов немного, формула релевантности строится на основе экспертной оценки авторов. В дальнейшем это станет невозможным, поэтому предстоит использовать методы машинного обучения для построения формулы.

Описанная архитектура позволит нам построить поисковую систему по сервисам вопросов-ответов, постепенно наращивая качество поиска.

Литература

- [1] *Horowitz D., Kamvar S.D.* The Anatomy of a Large-Scale Social Search Engine. // WWW 2010. Raleigh, North Carolina, USA. Pp. 431–440.
- [2] *Si X., Chang E.Y., Gyöngyi Z., Sun M.* Confucius and Its Intelligent Disciples: Integrating Social with Search // The 36th International Conference on Very Large Data Bases, 2010, Singapore. Pp. 1505–1516.

ЗАДАЧА ВЫДЕЛЕНИЯ ТЕМПА ИСПОЛНЕНИЯ МУЗЫКАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Нурмухаметов О.Р.

В работе исследуется задача динамического прогнозирования темпа (Beat Tracking Problem) [1]. Задача распознавания в реальном времени является особо сложной, в отличие от оффлайн постановки, так как накладывает ряд критичных ограничений на алгоритм.

В качестве входных данных берется в общем случае многоканальный дискретизированный во времени с некоторой частотой звуковой сигнал, который требуется усреднить по всем каналам [2].

Предлагаемый в работе алгоритм опирается на результаты [3]. Данный алгоритм Beat Tracking разработан на основе эффективной стратегии примененной в BeatRoot [1]. В данной системе заложен принцип конкурирующих агентов, которые последовательно обрабатывают входящие данные и рассматривают параллельные гипотезы относительно темпа (разновидность многоагентной системы).

В других работах [4, 5] рассматривается другой подход к задаче - как повторяющийся индукционный процесс, в котором темп вычисляется на последовательных окнах сигнала с перекрытием. Проблема в этом подходе - потенциальная вычислительная переработка.

Для обработки входного сигнала используется функция Spectral Flux. Данная функция показывает хорошие результаты [2].

Данный метод использует частотно-временное представление сигнала на основе оконного преобразование Фурье с использованием окна Хэмминга.

$$X(n, k) = \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1} x(hn + m)w(m)e^{-\frac{2\pi i m k}{N}}$$

SF - мера на сколько быстро меняется спектр мощности сигнала.

$$SF(n) = \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1} H(|X(n, k)| - |X(n-1, k)|), H(x) = \frac{x + |x|}{2}$$

Предобработка. На этом этапе идет инициализация системы. В конце этого шага предобработки формируются гипотезы по отношению к тройке: период, фаза и оценка (P_i, φ_i, S_i) .

Индексирование гипотез для периода. Вычисление непрерывной периодической функции, базирующаяся на автокорреляции SF, со сдвигом τ : $A(\tau) = \sum_{n=0}^m SF(n)SF(n + \tau)$

$$\begin{cases} P_i = \operatorname{argmax}(A(\tau)) \\ A(\tau) > \delta * \frac{\operatorname{rms}(A(\tau))}{M} \end{cases} \quad \delta\text{--пороговый параметр, } M\text{--диапазон ритма}$$

Выбор гипотез для фаз. Для каждой из P_i строится тренировочный шаблон с постоянным периодом для каждой возможной фазы φ_i^j , выбираем тренировочный шаблон, который наилучшим образом схож с обнаруженными онсетами и фазой.

Инициализация агентов. Оценка S_i^{raw} дается для каждой гипотезы (P_i, φ_i) , соответствует сумме временных отклонений между элементами, которые выбраны тренировочным шаблоном, и локальным \max в спектре потока. Оценка S_i^{raw} благоприятствует кандидатам, периоды которых находятся в целом метрическом отношении:

$$S_i^{rel} = 10 * S_i^{raw} + \sum_{j=0, j \neq i}^N S_j^{raw} * r(n_{i,j}), r(n) = \begin{cases} 6 - n & , 1 \leq n \leq 4 \\ 1 & , 5 \leq n \leq 8 \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

Оценка для каждого агента S_i : $S_i = S_i^{rel} * \max(S_I^{raw})$.

Используя (P_i, φ_i, S_i) , инициализируем агентов.

Работа многоагентной системы. Инициализация гипотез (P_i, φ_i, S_i) для N агентов запускает работу прогнозирования по входящим данным. Каждое предсказание оценивается по отношению к его отклонению от локального \max в наблюдаемых данных, в интервале. Этот интервал состоит из $T_{in} \in [T_{in}^l, T_{out}^r]$, для обработки короткого периода и фазы отклонения, и $T_{out} \in [T_{in}^r, T_{out}^r] \cup (T_{in}^r, T_{out}^r]$

Возникают две стратегии. Первая стратегия соответствует поиску локальных максимумов в T_{in} . Применяется следующая компенсация ошибки для периода и фазы:

$$\begin{cases} P_i = P_i + 0.25 * error \\ \varphi_i = \varphi_i + P_i + 0.25 * error \end{cases}$$

Для второго случая, рассматривается отклонение с локальным max из T_{out} . Агент сохраняет свои значения (P_i, φ_i) , но чтобы справиться с внезапным отклонением темпа, порождает троих детей.

Во время исполнения алгоритма агент может быть убит, например, если его оценка пропорционально ниже максимальной оценке в системе, или на протяжении определенного числа периодов он постоянно предсказывает вне внутреннего интервала.

Агент Рефери (управляющий агент). Определяет лучшего агента на каждом фрейме поступающих данных, управляет оценками всех агентов. Оценочная функция Δs применяется к каждому предсказанию b_p , вычисляет расстояние между прогнозом и локальным максимумом m :

$$\begin{cases} \Delta s = (1 - \frac{|error|}{T_{in}}) * (\frac{P_i}{P_m}) * SF(m) & , \exists m \in T_{in} \\ \Delta s = -(\frac{|error|}{T_{out}}) * (\frac{P_i}{P_m}) * SF(m) & , \exists m \in T_{out} \end{cases}$$

Проблемы алгоритма. В данном алгоритме, содержится достаточно много различных параметров. Выбор значений для того или иного параметра, чаще всего обуславливается эмпирически [1, 3]. Возможно, стоит исследовать вопрос научного обоснования выбора значений для параметров, рассмотреть взаимосвязь между тем или иным параметров, и их влиянием на работу алгоритма в целом.

Литература

- [1] *Dixon S.* Automatic extraction of tempo and beat from expressive performances. *Journal of New Music Research*, 30(1):39–58, 2001.
- [2] *Dixon S.* Onset detection revisited. In in *Proceedings of the 9th International Conference on Digital Audio Effects*. Montreal, Canada, 2006. Pp. 133–13.
- [3] *Oliveira J.L., Gouyon F., Reis L.P.* 11th International Society for Music Information Retrieval Conference. Pp. 291-296.
- [4] *Ellis D.P.W.* Beat tracking by dynamic programming. *Journal of New Music Research*. Vol. 36, № 1. Pp. 51–60. 2007.
- [5] *Klapuri A.E., Astola J.* Analysis of the meter of acoustic musical signals. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*. Vol. 14, № 1. Pp. 342–355. 2006.

О КОМИТЕТНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Поберий М.И.¹

Исследуемая в работе задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC) индуцирована оптимальными процедурами обучения распознаванию образов в классе коллективных кусочно-линейных решающих правил комитетного типа. Традиционно для аппроксимации неполностью формализованной задачи обучения распознаванию образов

$$\min_{\alpha \in \Lambda} P(\alpha) = \min_{\alpha \in \Lambda} \int_{X \times \Omega} (f(x, \alpha) - \omega)^2 dP(x, \omega) \quad (1)$$

(где мера P неизвестна и задана с точностью до конечной выборки) рассматривается задача минимизации эмпирического риска:

$$\min_{\alpha \in \Lambda} \{\nu(\alpha) \equiv \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\omega_i - f(x_i, \alpha))^2\}. \quad (2)$$

Известно [1], что точность аппроксимации монотонно убывает с ростом емкости VCD класса решающих правил \mathcal{F} . В рамках известного алгебраического подхода к решению задач распознавания исследуются классы, содержащие корректные на выборке решающие правила. Для таких классов повышение качества обучения связано с минимизацией емкости класса, то есть с решением задачи

$$\min\{VCD(\mathcal{F}') : \min\{\nu : f \in \mathcal{F}'\} = 0, \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}\}. \quad (3)$$

Частным случаем задачи (3), в котором \mathcal{F} — класс комитетных кусочно-линейных решающих правил, является

Задача MASC: «Минимальный аффинный разделяющий комитет»

Заданы конечные множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_{m_2}\}$. Требуется указать аффинный комитет с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B .

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 10-07-00134 и президиума УрО РАН, проекты № 09-П-1-1001 и № 09-С-1-1010.

Пусть \mathcal{F}_q — класс аффинных комитетных решающих правил, состоящих из не более чем q функций. Справедлива следующая

Теорема 1. *Емкость класса \mathcal{F}_q комитетных решающих правил, состоящих из не более чем q аффинных функций, удовлетворяет соотношениям*

$$q \leq 2 \left\lceil \frac{\lfloor (VCD(\mathcal{F}_q) - n + 1)/2 \rfloor}{n} \right\rceil, \quad (4)$$

$$VCD(\mathcal{F}_q) \leq q(n + 1) \quad (5)$$

и, следовательно, $VCD(\mathcal{F}_q) = O(qn)$.

Таким образом, задача минимизации эмпирического риска в классе аффинных комитетных решающих правил, состоящих из не более чем q функций, оказывается эквивалентной задаче MASC.

Как известно, в общем случае задача MASC является труднорешаемой и трудноаппроксимируемой [2]. В одномерном пространстве она может быть решена за полиномиальное время, но остается труднорешаемой в пространствах фиксированной размерности, большей единицы [3]. Поскольку доказательство последнего факта существенно опиралось на вырожденность разделяемых множеств (множество $A \cup B$ не находилось в общем положении), то автором был исследован вопрос вычислительной сложности задачи MASC в пространствах фиксированной размерности $n > 1$ при условии общности положения разделяемых множеств (MASC-GP(n)).

Теорема 2. *Задача MASC-GP(n) NP-трудна (в сильном смысле).*

Традиционный подход к исследованию NP-трудных задач комбинаторной оптимизации предполагает, в частности, разработку полиномиальных приближенных алгоритмов решения задачи MASC-GP(n). Наилучший с точки зрения гарантированной оценки точности известный приближенный алгоритм для задачи MASC-GP(n) обладает вычислительной сложностью $O\left(\binom{m}{n}^3 + \Theta m\right)$ и точностью аппроксимации $O(m/n)$, а при справедливости некоторого естественного предположения — точностью $O(\log m)$ (m — мощность конечного множества, определяющего частную постановку задачи MASC-GP(n)) [4]. Ответ на вопрос о существовании полиномиальной аппроксимационной схемы для решения задачи MASC-GP(n) дает следующая теорема.

Теорема 3. Существует схема полиномиального сведения задачи $\text{MAX-3SAT}(t)$ к $\text{MASC-GP}(2)$, преобразующая булеву формулу φ к частной постановке задачи $\text{MASC-GP}(2)$ так, что

- если $\text{OPT}(\varphi) = m$, то $\text{OPT}(\text{MASC-GP}(2)) = 2nt + 1$,
- если $\text{OPT}(\varphi) = m' < (1 - \epsilon)m$, то $\text{OPT}(\text{MASC-GP}(2)) > 2nt + \lceil \epsilon n / 3 \rceil + 1$,

где $\varphi = E_1 \wedge \dots \wedge E_m$ — булева формула от n переменных, $\epsilon > 0$.

Поскольку задача $\text{MAX-3SAT}(t)$ является MAX-SNP -полной [5], то последняя теорема доказывает, что задача $\text{MASC-GP}(2)$, а следовательно, и задача $\text{MASC-GP}(n)$ при произвольном $n > 1$ являются MAX-SNP -трудными. Из этого можно сделать вывод о невозможности построения для задачи $\text{MASC-GP}(n)$ полиномиальной аппроксимационной схемы, при условии $P \neq NP$.

Литература

- [1] Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. — М.: Наука, 1974.
- [2] Хачай М.Ю. О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете // Таврический вестник информатики и математики. 2006. № 1. С. 34–43.
- [3] Khachai M.Yu. Computational and Approximational Complexity of Combinatorial Problems Related to the Committee Polyhedral Separability of Finite Sets // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, № 2. Pp. 237–242.
- [4] Khachay M., Poberii M. Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. 2009. Vol. 20, № 2. Pp. 217–234.
- [5] Papadimitriou C., Yannakakis M. Optimization, approximation, and complexity classes // J. Comput. System Sci. 1991. Vol. 43, № 3. Pp. 425–440.

ОБ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА НА УЗКИЕ МЕСТА

Салий Я.В.

Рассматривается задача коммивояжера на узкие места в ультраметрическом пространстве. Доказывается, что в ультраметрическом пространстве постановка задачи коммивояжера на узкие места теряет смысл.

Задача коммивояжера (ЗК) состоит в оптимальном обходе множества точек, традиционно называемых *городами*, причем каждый город нужно посетить один и только один раз. Перемещению между городами сопоставляется некоторая стоимость. В классическом случае требуется минимизировать суммарную стоимость обхода. В задаче на узкие места (ЗКУМ) требуется минимизировать максимальную стоимость перемещения. Постановки задач можно найти в [4]; свежий обзор методов решения различных вариантов этой задачи приводится в [3].

В работе [2] доказано, что жадный алгоритм дает оптимальное решение ЗК в случае, если расстояния между городами подчиняются ультраметрическому неравенству. Оказывается, задача на узкие места в этом случае теряет смысл.

Перед тем, как перейти к доказательству, напомним основные определения, связанные с ультраметриками.

Ультраметрическим пространством назовем метрическое пространство (X, d) , где метрика d удовлетворяет *ультраметрическому неравенству*¹ (см. [1, с. 46])

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad \forall x, y, z \in X.$$

Важным следствием этого неравенства является *принцип равнобедренного треугольника* (см. [1, с. 47]):

Предложение 1. *Для любых $x, y, z \in X$, если $d(x, y) \neq d(y, z)$, то $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.*

¹Так же известно как «усиленное неравенство треугольника» (strong triangle inequality).

Рассмотрим n точек ультраметрического пространства, обозначаемых числами от 1 до n . Ребрам между точками i и j будем называть пару (i, j) . Ребра вида (i, j) и (j, i) отождествим². Весом ребра (i, j) будем называть расстояние $d(i, j)$. Равными будем называть ребра, имеющие одинаковый вес. Обходом n точек будем называть любую перестановку p_i точек $1, \dots, n$; будем считать, что обходу принадлежат все ребра вида $(i, i + 1)$, где $i \in \overline{1, n - 1}$. Обозначим обходы кортежами $(p_i)_1^n$. Покажем, что самое тяжелое ребро из всех ребер между точками $1, \dots, n$ обязательно содержится в любом обходе этих точек.

Теорема. Пусть самое тяжелое ребро среди ребер между n точками приходится на некоторые точки a и b . Тогда произвольный обход $(p_i)_1^n$ этих точек содержит ребро, совпадающее по весу с ребром (a, b) .

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим что в данном обходе точка b расположена после точки a , т.е. $p_b \geq p_a$. Проведем индукцию по числу k точек, расположенных в обходе $(p_i)_1^n$ между точками a и b . Таким образом мы покажем, что как бы ни были расположены точки a и b в обходе, предположение теоремы все равно выполняется. Очевидно, $k \in \overline{0, n - 1}$; при $k = 0$ ребро (a, b) непосредственно содержится в обходе и предположение теоремы верно. Это утверждение вполне может послужить базой индукции, но мы докажем предположение теоремы для случая $k = 1$, чтобы лишний раз проиллюстрировать принцип равнобедренного треугольника (1).

Б.И. $k = 1$. Между точками a и b в обходе расположена одна промежуточная точка, то есть $p_a = i$, $p_b = i + 2$. Рассмотрим треугольник $\Delta(i, i + 1, i + 2)$. Самое тяжелое ребро в треугольнике — ребро $(i, i + 2)$. По Предложению 1, два наиболее тяжелых ребра треугольника совпадают. Следовательно, или $d(i, i + 1) = d(i, i + 2)$, или $d(i + 1, i + 2) = d(i, i + 2)$, т.е. ребро, равное самому тяжелому ребру содержится в обходе. База индукции доказана.

Ш.И. Пусть предположение индукции доказано для $k - 1$ промежуточных точек. Покажем, что в этом случае оно верно и для k .

²Симметричность метрики не оставляет нам иного выбора.

Итак, пусть $p_a = i$, тогда $p_b = i + k$. Рассмотрим обход, из которого исключена точка $i + k - 1$, т.е. точки $i + k - 2$ и $i + k$ соединены напрямую. В нем между точками a и b расположено $k - 1$ точек, следовательно, для этого обхода выполнено предположение индукции. Тогда возможны два случая. В первом случае, ребро, равное самому тяжелому ребру (a, b) , находится среди ребер $(i, i+1), \dots, (i+k-3, i+k-2)$. Тогда, очевидно, это ребро непосредственно входит в исходный обход и шаг индукции доказан. Во втором случае ребром, равным самому тяжелому, является ребро $(i + k - 2, i + k)$. Рассмотрим треугольник $\Delta (i + k - 2, i + k - 1, i + k)$. Аналогично базе индукции, в нем, по Предложению 1, совпадают самые тяжелые ребра; следовательно, или $d(i + k - 2, i + k - 1) = d(i + k - 2, i + k)$, или $d(i + k - 1, i + k) = d(i + k - 2, i + k)$. В обоих случаях ребро, равное самому тяжелому ребру, содержится в исходном обходе. Шаг индукции доказан, а с ним и теорема. □

Эту теорему можно охарактеризовать как свойство *неизбежности тяжелейшего ребра*. Следствием этого свойства является бессмысленность поиска решения задачи коммивояжера на узкие места в ультраметрическом пространстве, поскольку самое тяжелое ребро в любом случае будем содержаться в обходе.

Литература

- [1] *Schikhof W.H.* Ultrametric calculus: An introduction to p-adic analysis. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [2] *Мицсаров М.Д., Степанов Р.Г.* О задачах комбинаторной оптимизации в ультраметрических пространствах // ТМФ. 2003. Т. 136, № 1. С. 164–176.
- [3] The Traveling Salesman Problem and Its Variations (Combinatorial Optimization) / ed. by Gutin G.Z, Punnen A.P. V. 12. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [4] *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Сукач М.П.¹

В данной работе рассматривается задача нахождения оптимального значения функционала на решениях другой оптимизационной задачи. Предлагается решать эту задачу сведением к задаче безусловной минимизации некоторого функционала, который (даже в случае гладкости исходных функционалов) является существенно негладким. Указанное сведение проводится с помощью теории точных штрафных функций. Данный подход был предложен в работе [1].

Постановка задачи. Пусть $f, f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – заданные непрерывные функции, $G \subset \mathbb{R}^n$ – заданное множество. Положим

$$\Omega = \{x \in G \mid f_1(x) \leq f_1(y) \forall y \in G\},$$

т.е. $\Omega \subset G$ – множество точек минимума функции f_1 на множестве G . Предположим, что $\Omega \neq \emptyset$. Задача

$$f(x) \longrightarrow \inf_{x \in \Omega} \quad (1)$$

называется задачей двухуровневой оптимизации.

Штрафные функции в двухуровневой задаче. Для того чтобы применить теорию точных штрафных функций (более подробно с ней можно познакомиться в [2]), представим множество Ω в виде $\Omega = \{x \in G \mid \varphi(x) = 0\}$, где

$$\varphi(x) = \sup_{y \in G} (f_1(x) - f_1(y)) = f_1(x) - f_{1G}^*, \quad f_{1G}^* = \inf_{y \in G} f_1(y).$$

Рассмотрим случай, когда множество G представимо в виде

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) = 0\},$$

где $\varphi_1(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ фиксированы. Определим штрафную функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda_1[\varphi(x) + \lambda_2\varphi_1(x)]. \quad (2)$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00360.

Определение 1. Функция $F_\lambda(x)$ называется точной штрафной функцией для функции f на множестве Ω , если существует такой штрафной параметр λ_1^* , что для любых $\lambda_1 \geq \lambda_1^*$ множество точек минимума функции $F_\lambda(x)$ на всем пространстве R^n совпадает с множеством точек минимума функции f на множестве Ω .

Таким образом, если $F_\lambda(x)$ точная штрафная функция, то исходная задача (1) эквивалентна задаче безусловной минимизации штрафной функции (2). Для того чтобы воспользоваться методом точных штрафных функций на практике, необходимо знать значение точного штрафного параметра. Его оценку можно построить на основании Теоремы 3.4.1 из [2] по формулам

$$\lambda_1^* \geq \frac{2L}{a}, \quad \exists \delta > 0, a > 0: \varphi^\downarrow(x) + \lambda_2 \varphi_1^\downarrow(x) < -a < 0 \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega,$$

где L — константа Липшица для функции $f(x)$ на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$, $\varphi^\downarrow(x) = \liminf_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|}$ — скорость наискорейшего спуска, $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) < \delta\}$.

Если $F_\lambda(x)$ является точной штрафной функцией и кодифференцируема, тогда используя метод усечённого кодифференциального спуска [3] получаем решение. Приведены численные результаты решения задачи, полученные с помощью пакета MATLAB [4].

Литература

- [1] Демьянов В.Ф., Факкиней Ф. Задачи двухуровневой оптимизации и штрафные функции // Известия высших учебных заведений, 2003. № 12. С. 49–61.
- [2] Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005.
- [3] Demyanov V.F., Bagirov A.M., Rubinov A.M. A method of truncated codifferential with application to some problems of cluster analysis // Journal of Global Optimization. 2002. Vol. 23. № 1. Pp. 63–80.
- [4] Андрамонов М.Ю., Тамасян Г.Ш. Реализация аналитического кодифференцирования в пакете MATLAB // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. С. 1-5.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ КРЕДИТОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Фирсова Е.М.

Постановка задачи для базовой модели производственного предприятия. Обозначим через x_i - объем производства продукции вида i ($i = 1, 2, \dots, n$). Пусть c - вектор, определяющий прибыль от реализации производимой продукции, т.е. $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, где c_i - прибыль от реализации единицы продукции вида i (без учета условно-постоянных издержек производства). Для производства планируемого объема продукции на предприятии имеется K видов оборудования. Лимит полезного времени работы оборудования вида $j - \tau_j$. Обозначим k_j число единиц оборудования вида j . Введем величину t_{ij} , которая определяет время работы j -й единицы оборудования, требуемое для производства единицы продукции вида i . Объем имеющихся материально-сырьевых ресурсов задается вектором $L = (L_1, L_2, \dots, L_m)$ где L_j - запас материально-сырьевых ресурсов вида j , предназначенных для изготовления того перечня продукции, который планирует выпускать данное предприятие. Величина l_{ij} - объем материальных ресурсов вида j , необходимый для получения одной единицы продукции вида i . Известен также прогнозируемый спрос на выпускаемую продукцию D_i и объем заказа на продукцию P_i . Необходимо решить задачу выбора объемов производства по каждому виду продукции, обеспечивающих получение предприятием максимальной прибыли в условиях, когда объемы производства ограничены. В общем виде решение данной задачи можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max. \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ij} x_i \leq k_j \tau_j, j = \overline{1, K}. \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq L_j, j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

$$x_i \leq D_i, i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

$$x_i \leq P_i, i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

$$x_i \geq 0. \quad (6)$$

$$x_i \in I. \quad (7)$$

(1)

Решение задачи (1) - (7) задается вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$, который определяет оптимальные объемы выпускаемой продукции по выбранному критерию.

Модель оптимизации управления кредитными ресурсами [1] Для построения модели необходим переход к стоимостной оценке ресурсов предприятия, а также учет в ограничениях модели объемов его финансовых ресурсов. Модель расширения производства с учетом использования кредита. Данная модель описывает ситуацию, когда предприятие принимает решение о реализации инвестиционного проекта, предполагающего расширение номенклатуры выпускаемой предприятием продукции. Проект предполагает приобретение за счет кредита нового оборудования и дополнительных материально-сырьевых ресурсов для выпуска новых изделий. Использование этой модели позволяет рассчитать оптимальную схему реализации проекта расширения производства, оценить полученный эффект, определить необходимый объем кредитования и оптимальный способ использования кредита для реализации проекта. С целью построения данной модели, во взятую за основу базовую модель вводится стоимостная оценка материально-сырьевых ресурсов γ_j и условие приобретения дополнительных материально-сырьевых ресурсов и оборудования в пределах объема кредита. Постоянные затраты предприятия в модели не учитываются, потому что в данном случае постоянные затраты представляются в виде константы и не будут оказывать влияние на решение.

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max. \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij}x_i \leq L_j, j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ij}x_i \leq z_j, j = \overline{m+1, m_1}. \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ij}x_i \leq k_j\tau_j, j = \overline{1, K}. \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ij}x_i \leq k_j\tau_j, j = \overline{K+1, K_1}. \quad (12)$$

$$\sum_{j=K+1}^{K_1} y_j\beta_j + \sum_{j=m+1}^{m_1} z_j\gamma_j \leq V. \quad (13)$$

$$\sum_{i=K+1}^{K_1} S_i y_i \leq S. \quad (14)$$

$$x_i \leq D_i, i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

$$x_i \leq P_i, i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0, z_i \geq 0. \quad (17)$$

$$x_i \in I, y_i \in I. \quad (18)$$

Здесь τ_j - эффективное время использования единицы оборудования вида j на период планирования; $1, \dots, K$ - виды имеющегося оборудования; $1, \dots, m$ - виды используемых материально-сырьевых ресурсов; $1, \dots, n$ - виды выпускаемой продукции; c_i - разница между ценой реализации продукции вида i и переменными затратами на выпуск продукции вида i ; D_i - спрос на продукцию вида i ; k_j - число единиц оборудования вида j ; l_{ij} - объем сырья вида j для производства единицы продукции вида i ; L_j - объем имеющихся материально-сырьевых ресурсов вида j ; P_i - заказ на продукцию вида i ; t_{ij} - время

обработки единицы продукции вида i на оборудовании вида j ; x_i - объем выпуска продукции вида i . β_j - стоимость единицы дополнительных материально-сырьевых ресурсов вида j ; γ_j - стоимость единицы дополнительных материально-сырьевых ресурсов вида j ; S - свободная производственная площадь; S_j - площадь, необходимая для установки единицы дополнительного оборудования вида j ; V - объем кредита; y_j - число единиц дополнительного оборудования вида j ; z_j - объем дополнительных материально-сырьевых ресурсов вида j .

Литература

- [1] Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций // Под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. - М: Экзамен, 2003.

АППРОКСИМАЦИЯ В СРЕДНЕМ ТЕНЗОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

Хартов А.А.

Рассматривается последовательность тензорных случайных полей $X_d, d \in \mathbb{N}$ вида

$$X_d(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{l=1}^d \lambda(k_l) \xi_k \prod_{l=1}^d \varphi_{k_l}(t_l), \quad t \in [0, 1]^d, \quad (1)$$

где $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – ортонормированная система в $L_2[0, 1]$, $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^d}$ – некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $(\lambda(i))_{i \in \mathbb{N}}$ – невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию $\Lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)^2 < \infty$. Траектории X_d почти наверное принадлежат пространству $L_2([0, 1]^d)$ с нормой $\|\cdot\|_2$.

При каждом d поля (1) можно записать в виде:

$$X_d(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \bar{\lambda}_{d,m} \xi_{d,m} \bar{\varphi}_{d,m}(t), \quad t \in [0, 1]^d,$$

где $(\bar{\lambda}_{d,m})_{m \in \mathbb{N}}$ – невозрастающая последовательность.

Рассматривается задача аппроксимации X_d случайными полями конечного ранга

$$X_d^{(n)}(t) := \sum_{m=1}^n \bar{\lambda}_{d,m} \xi_{d,m} \bar{\varphi}_{d,m}(t), \quad t \in [0, 1]^d.$$

Будем исследовать точное асимптотическое поведение *сложности аппроксимации в среднем* (см. [2]):

$$n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{E} \|X_d(t) - X_d^{(n)}(t)\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \mathbf{E} \|X_d(t)\|_2^2\}, \quad (2)$$

при $d \rightarrow \infty$ и фиксированном пороге ε с использованием *критерия относительной ошибки*. Наиболее точные результаты получены в

работе [1], где был предложен новый способ изучения величины (2), и найдена её логарифмическая асимптотика.

Для удобной формулировки результатов введем вспомогательную последовательность $(U_l)_{l \in \mathbb{N}}$ независимых случайных величин с общим распределением

$$\forall i \in \mathbb{N} : \lambda(i) > 0 \quad \mathbf{P}(U_l = -\ln \lambda(i)) := \tau_1(\lambda(i)) \cdot \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda},$$

где $\tau_1(v) = \#\{i \in \mathbb{N} : v = \lambda(i)\}$.

Обозначим

$$M := \mathbf{E} U_l = \sum_{i \in \mathbb{N} : \lambda(i) > 0} (-\ln \lambda(i)) \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} < \infty, \quad (3)$$

$$\sigma^2 := \mathbf{D} U_l = \sum_{i \in \mathbb{N} : \lambda(i) > 0} (-\ln \lambda(i) - M)^2 \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} < \infty. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала вырожденный случай $\sigma^2 = 0$. Он имеет место, тогда и только тогда, когда

$$\exists N \in \mathbb{N} : \lambda(i) = e^{-M} \mathbf{1}_{[1, N]}(i). \quad (5)$$

При любом N распределение $(U_l)_{l \in \mathbb{N}}$ вырождено $\mathbf{P}(U_l = M) = 1$.

При $N = 1$ из (1) и (2) очевидно следует, что $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) = 1$. При $N > 1$ верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (5) при $N > 1$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$0 \leq n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) - (1 - \varepsilon^2) N^d < 1, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к невырожденному случаю $\sigma^2 > 0$. Для произвольного порога $\varepsilon \in (0, 1)$ определим квантиль $q = q(\varepsilon)$ из равенства

$$\Phi(q/\sigma) = 1 - \varepsilon^2, \quad (6)$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального закона. Введем коэффициент роста

$$\mathcal{E} := \Lambda e^{2M}. \quad (7)$$

В работе [1] установлено, что при $0 < \sigma^2 < \infty$ имеем $\mathcal{E} > 1$.

При дополнительных моментных предположениях для случайных величин $(U_l)_{l \in \mathbb{N}}$ вид точной асимптотики $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$ при $d \rightarrow \infty$ и фиксированном пороге ε зависит от природы распределения этих величин, а именно: имеют ли они *решетчатую* структуру или нет.

Теорема 2. Пусть $(U_l)_{l \in \mathbb{N}}$ имеют невырожденное нерешетчатое распределение и $\mathbf{E}|U_l|^3 < \infty$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{E}^d e^{2qd^{1/2}} \frac{C}{d^{1/2}} (1 + o(1)), \quad d \rightarrow \infty,$$

где $q = q(\varepsilon)$ выбирается из равенства (6), \mathcal{E} – из (7),

$$C = \frac{e^{2\tilde{q}}}{2\sigma} \Phi'(q/\sigma), \quad \tilde{q} = \left((q/\sigma)^2 - 1 \right) \frac{\alpha_3}{6\sigma^2}, \quad \alpha_3 := \mathbf{E}(U_l - M)^3. \quad (8)$$

Теорема 3. Пусть $(U_l)_{l \in \mathbb{N}}$ имеют невырожденное решетчатое распределение с максимальным шагом b и $\mathbf{E}|U_l|^3 < \infty$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{E}^d e^{2qd^{1/2}} \frac{C}{d^{1/2}} B_d (1 + o(1)), \quad d \rightarrow \infty,$$

где $q = q(\varepsilon)$ выбирается из равенства (6), \mathcal{E} – из (7),

$$B_d = 2b e^{2bs_d} \left(\frac{1}{1 - e^{-2b}} - (s_d + 1/2) \right), \quad s_d \in [-1/2, 1/2),$$

коэффициенты C и \tilde{q} определяются формулами из (8).

Замечание 1. Верно предельное соотношение $\lim_{b \rightarrow 0} B_d = 1$.

Литература

- [1] Lifshits M.A., Tulyakova E.V. Curse of dimensionality in approximation of random fields. // Probab. Math. Stat. 2006. Vol. 26, № 1. Pp. 97–112.
- [2] Novak E., Wóznickowski H. Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information. – EMS Tracts Math. 6, European Mathematical Society Publishing House, 2008.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ И РЕКУРРЕНТНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СЕМЕЙСТВА ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ CVAR-КРИТЕРИЯ

Чернобровов А.И.¹

В различных задачах из экономики и техникой сферы, связанных с оптимальным распределением ресурсов, присутствуют различные случайные факторы. При построении математических моделей, описывающих подобные задачи, в качестве меры риска часто используют квантильный критерий (VaR-критерий) [1] и критерий в виде интегральной квантили (CVaR-критерий) [2]. CVaR-критерий приобрел большую популярность, т.к. для него достаточно легко проверить выпуклость [3].

Пусть $\Phi(u, X) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная по совокупности аргументов действительная функция потерь (убытков), где X — случайный вектор с реализациями в \mathbb{R}^s и абсолютно непрерывной функцией распределения $F_X(x)$. Определим функцию вероятности, а также функции квантили (VaR) и интегральной квантили (CVaR) уровня α следующим образом

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{X : \Phi(u, X) \leq \varphi\}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$\psi_\alpha(u) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \varphi_\beta(u) d\beta, \quad \alpha \in (0, 1),$$

где $\mathcal{P}(\cdot)$ — вероятностная мера, определенная на борелевских множествах из \mathbb{R}^s .

Рассмотрим задач минимизации CVaR, дополнительно предполагая, что данная функция является выпуклой

$$u_\alpha^* = \arg \min_{u \in U} \psi_\alpha(u), \quad (1)$$

где $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00315-а

Для решение такой задачи при фиксированном α известен алгоритм, построенный на дискретизации меры случайной величины [3], однако он обладает рядом недостатков, в частности его сходимость доказана только для дискретного распределения случайных величин. В работе будет рассмотрен стохастический квазиградиентный алгоритм (SQA), базирующийся на порядковых статистиках [4], а также его параллельная модификация.

Опишем алгоритм. Пусть для любого $u \in U$ есть возможность получить выборку $\{\Phi(u, X_i)\}_{i=1}^{n_k}$ объёма n_k функции $\Phi(u, X)$. Обозначим через $\{\Phi_{(i)}(u)\}_{i=1}^{n_k}$ вариационный ряд выборки, т.е. расположенные в порядке возрастания порядковые статистики

$$\Phi_{(1)}(u) \leq \Phi_{(2)}(u) \leq \dots \leq \Phi_{(n_k)}(u).$$

На основе данного вариационного ряда сконструируем оценку выборочную оценку CVaR

$$\widehat{\psi}_\alpha(u) \triangleq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{l_k}{n_k} - \alpha \right) \Phi_{(l_k)}(u) + \frac{1}{n_k - l_k} \sum_{j=l_k+1}^{n_k} \Phi_{(j)}(u),$$

где

$$l_k \triangleq \begin{cases} \alpha n_k, & \alpha n_k \in \mathbb{N}, \\ [\alpha n_k] + 1, & \alpha n_k \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пусть $\delta_k > 0$ — некоторая числовая последовательность $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Назовем стохастическим квазиградиентом CVaR случайный вектор

$$\xi_k(u, \delta_k) \triangleq \frac{1}{2\delta_k} \sum_{i=1}^m [\widehat{\psi}_k(\tilde{u}_1, \dots, u_i + \delta_k, \dots, \tilde{u}_m) - \widehat{\psi}_k(\tilde{u}_1, \dots, u_i - \delta_k, \dots, \tilde{u}_m)] e_i,$$

где \tilde{u}_i имеют равномерные распределения на отрезках $[u_i - \delta_k, u_i + \delta_k]$, $i = \overline{1, m}$, и независимы.

Будем называть SQA минимизации CVaR, алгоритм, порождённый последовательностью u_k , $k = 1, 2, \dots$, вида

$$u_{k+1} = \begin{cases} \Pi_U [u_k - \rho_k \xi_k(u_k, \delta_k)], & \|\xi_k(u_k, \delta_k)\| \leq L, \\ \tilde{u}, & \|\xi_k(u_k, \delta_k)\| > L, \end{cases} \quad (2)$$

где L — некоторое достаточно большое число, \tilde{u} имеет равномерное распределение на множестве U , а $\Pi_U[\cdot]$ — оператор рандомизированного проецирования, т.е.

$$\Pi_U(u) \triangleq \begin{cases} u, u \in U, \\ \hat{u}, u \notin U, \end{cases}$$

где случайная величина \hat{u} имеет равномерное распределение на шаре

$$B_\varepsilon \triangleq \left\{ u_\varepsilon \in U_\varepsilon : \left\| u_\varepsilon - \arg \min_{v \in U} \|u - v\| \right\| \leq \varepsilon \right\}.$$

При выполнении некоторых условий $u_k \rightarrow u_\alpha^*$ при $k \rightarrow \infty$ с вероятностью единица [4].

На практике также часто возникает задача нахождения зависимости $u^*(\alpha)$ для $\alpha \in (\beta, 1)$. Такую задачу, на первый взгляд, можно эффективно решить дискретизацией задачи по α и сведением к большому количеству задач типа (1). За счет распараллеливания процессов можно добиться, чтобы время вычисления не превышало времени вычисления самой трудоемкой задачи (при условии, что количество процессоров превосходит сетку дискретизации). Однако, каждая из таких задач, как правило, имеет большую вычислительную сложность, а если сетка дискретизации существенно превосходит количество процессоров, то может оказаться эффективным использование параллельных процессов на каждом шаге алгоритма (2). Данные случаи будут рассмотрены в работе.

Литература

- [1] Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2009.
- [2] Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk // Journal of Risk, 2000, Vol. 2, № 3. Pp. 21—51.
- [3] Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distribution // J. Banking & Finance, 2002. № 26. Pp. 1443—1471.
- [4] Кибзун А.И., Чернобровов А.И. Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции интегральной квантили // АиТ, 2012 (в печати)

О ТЕКУЩИХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАЗРАБОТКИ СРЕДЫ НАУЧНОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Васёв П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю.

Под научной визуализацией традиционно понимают методику перевода абстрактных объектов в геометрические образы, что даёт возможность исследователю наблюдать результаты численного моделирования явлений и процессов. При визуализации той или иной сущности специфическими являются выбор конкретного двух- или трёхмерного геометрического представления абстрактного объекта и разработка алгоритма построения этого представления на основе данных, полученных от вычислительной программы. Инструментарий манипулирования полученными геометрическими объектами (перемещение, повороты, масштабирование, изменение видимости, цвета, прозрачности и т.п.), как правило, совпадает для различных задач, хотя, конечно же, у объектов могут быть и специфические свойства, требующие индивидуального подхода к интерактивной работе с ними.

Можно выделить три основных класса систем визуализации. Первый — универсальные системы, которые включают набор алгоритмов построения тех или иных типовых представлений. К этому классу относятся широко известные системы ParaView и AVS. Второй класс — специализированные системы специфических визуальных сущностей. Например, это такие пакеты, как IVS3D (геоинформация), VENUS (молекулярные структуры), VolVis (разреженные 3-мерные массивы). Наконец, к третьему классу относятся специализированные системы визуализации, созданные специально для данного исследовательского проекта или даже для конкретного пользователя.

Системы первых двух классов хороши тем, что позволяют в подходящих случаях быстро получить результат. Однако на практике часто оказывается, что имеющиеся алгоритмы построения геометрических объектов, заложенные в подобные пакеты, удовлетворяют требованиям пользователя лишь частично или не удовлетворяют вовсе, а добавление собственных модулей построения геометрических объектов невозможно.

Идеальный вариант для любого пользователя — система третьего типа, то есть созданная специально под его задачу с учётом всех его запросов и пожеланий. Но создание подобных систем каждый раз ведётся практически «с нуля», и для решения всех возникающих вопросов требуются высококвалифицированные специалисты, которые тратят значительную часть своего времени на реализацию именно типовой задачи — создание пользовательского интерфейса.

Авторы разработали систему визуализации [1], которая решает указанные проблемы. Она предоставляет весьма богатый пользовательский интерфейс, позволяющий удобно манипулировать имеющейся сценой, а также включает мощное ядро, дающее возможность хранить трёхмерную сцену и динамически работать с ней посредством программного интерфейса (API). Текущая версия программы написана на языке C# для среды исполнения Microsoft .Net 4.0. При разработке использовалась оконная библиотека WPF среды .Net и библиотека трёхмерной графики Media3D. В настоящее время предлагаемая программа умеет производить следующие действия:

- помещать в сцену объекты: поверхности (наборы треугольников), линии (наборы отрезков), наборы точек — и удалять их;
- группировать объекты статически при добавлении в сцену; возможно несколько иерархий объектов;
- группировать объекты динамически посредством поиска по тегам, которые им приписываются при создании;
- при добавлении объекта в сцену по умолчанию задавать набор стандартных атрибутов: цвет (для поверхности — цвет лицевой и изнаночной стороны), прозрачность, видимость;
- при добавлении объекта в сцену задавать дополнительные свойства объекта и описывать элементы интерфейса, с ними связанные;
- изменять атрибуты (как стандартные, так и дополнительные) объекта или группы объектов; при работе с группой объектов выводятся для изменения свойства, общие для всех объектов группы;
- вращать, перемещать, масштабировать сцену;
- добавлять, удалять источники света, изменять яркость и цвет источников;
- добавлять, удалять камеры, дающие возможность выбирать удобный ракурс;

- экспортировать текущий вид сцены в виде графического файла, трёхмерного файла в формате OBJ, а также автоматически размещать экспортируемые материалы в сети Интернет.

В рамках созданной системы пользователю для визуализации тех или иных объектов нужно разработать соответствующий *фильтр*, то есть модуль, представляемый в виде библиотеки DLL оговоренного формата. В настоящее время стандартный набор функций такого модуля включает в себя

- процедуру инициализации фильтра;
- процедуру оценки пригодности данного фильтра для загрузки предложенного файла (выдается оценка из диапазона от 0 до 1; для загрузки конкретного файла выбирается фильтр, выдавший наибольшую оценку);
- процедуру загрузки файла (добавляет объект или несколько объектов в сцену; приписывает ему/им дополнительные свойства; передаёт среде элементы интерфейса для работы с дополнительными свойствами).

Таким образом, разработка системы визуализации из сложного проекта, включающего в себя множество рутинных технических задач, превращается в процесс настройки, адаптации и расширения имеющегося «конструктора систем визуализации».

Литература

- [1] Васёв П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю. О создании среды разработки систем научной визуализации / в сб. «Тезисы XIII Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование»». С. 50–51. — Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.

СПОСОБЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ФОНА В ПРОТОТИПЕ СИСТЕМЫ СТЕРЕОНАБЛЮДЕНИЯ

Горшенин В.В.

Термин «стереонаблюдение», используемый в рамках данной работы, сформулирован по аналогии с «видеонаблюдением» и означает применение систем стереозрения в задачах наблюдения [1].

В рамках работы над задачей был реализован прототип программно-аппаратного комплекса системы стереонаблюдения [2]. При изучении работы прототипа были выявлены недостатки, которые заставили внести изменения в схему работы системы.

Основной идеей при модификации прототипа является переход от отслеживания характерных точек к отслеживанию контуров перемещающегося объекта. Для выделения контуров движущегося объекта последовательно были реализованы (с помощью библиотеки OpenCV [3]) и опробованы три способа:

1. разность двух последовательных кадров;
2. применение статистической модели;
3. алгоритм кодовой книги (codebook).

Изначально был реализован первый подход как наиболее простой, тем не менее результаты его работы оказались неприемлемыми. С целью улучшения была применена статистическая модель наблюдаемой сцены, которая улучшила общее качество работы, но не решила отдельные проблемы. В качестве итогового способа используется алгоритм кодовой книги, изначально разработанный для сжатия видеоданных и адаптированный к задаче определения движения.

Метод выделения движущегося объекта с помощью двух последовательных кадров заключается в следующем. Для двух последовательных кадров одного видеоряда вычисляется модуль разности значений яркости соответствующих пикселей. Далее выполняется фильтрация по порогу: области изображения, в которых модуль разности превосходит заданный порог, помечаются как области, в которых присутствует движение. Остальные области отмечаются как пустые.

Таким образом формируется двухцветное изображение, маска, выделенные области в которой соответствуют движущимся объектам. Данный метод прост в реализации и не требователен к ресурсам памяти и процессора ЭВМ. Тем не менее, метод имеет серьезный недостаток — выделяются только края движущегося объекта. Это обстоятельство ограничивает применение метода в серьезных задачах.

Следующий метод использует предварительно накопленную информацию о наблюдаемой сцене — статистическую модель. Для каждого пикселя изображения в течение предварительного периода времени накапливаются статистические данные: среднее значение, среднее отклонение. Таким образом, в статистической модели для каждого пикселя определяется допустимая окрестность точки среднего значения яркости пикселя, накопленная за период обучения. Далее, в рабочем режиме для текущего значения пикселя проверяется, попадает ли он в допустимую окрестность или нет. В случае, если значение яркости пикселя не попадает в допустимую окрестность, то считается, что пиксель относится к движущемуся объекту. Таким образом формируется двухцветная маска, помечающая движущиеся объекты. Статистическая модель является более совершенным способом по сравнению с покадровой разностью, так как учитывает особенности каждой конкретной сцены, позволяет непрерывно обновлять модель, учитывая плавные изменения наблюдаемой сцены, а также сглаживает искажения, вносимые зашумленным видеосигналом. Данный метод остается нетребовательным к ресурсам ЭВМ, как и метод покадровой разности. Использование статистической модели имеет один недостаток — нельзя корректно обработать те пиксели изображения, которые имеют более одного устойчивого состояния. В качестве примера можно рассмотреть объекты, совершающие периодические движения: ветви деревьев, качающиеся под действием ветра и т.п. Применение статистической модели для описания подобных объектов даст очевидно неверные результаты: в силу усреднения допустимая окрестность будет иметь слишком большой радиус и в нее будут попадать значения яркости пикселей, относящиеся к движущемуся объекту.

Устранить недостатки статистической модели позволяет метод кодовой книги [4]. В данном способе также создается модель наблюдаемой сцены. С каждым пикселем изображения соотносится набор

допустимых интервалов яркости — кодовая книга. Формирование кодовой книги для каждого пикселя выполняется в течение предварительного периода времени согласно следующему алгоритму. Если текущее значение яркости пикселя точно попадает в один из существующих интервалов, то продолжить далее. Если текущее значение яркости пикселя попадает на границу интервала с учетом определенного допуска, то интервал необходимо увеличить в сторону расширения данной границы интервала. Если предыдущие условия не выполнены, то необходимо сформировать новый интервал, «накрывающий» текущее значение яркости пикселя.

Помимо качественных изменений в прототип были внесены и чисто технические: переход от использования цветовой модели RGB к модели YCrCb, использующей в качестве основного канала значение яркости объекта, а не его цвет. Было замечено, что шумы, создаваемые фотодатчиком камеры, в основном искажают цвет пикселя, а не значение его яркости. Поэтому канал яркости в модели YCrCb является более стабильным.

Литература

- [1] Горшенин В.В. Модифицированный алгоритм Лукаса–Канады в задаче стереонаблюдения / в сб. «Казанская наука № 5». С. 4–7. — Казань: Казанский Издательский Дом, 2010.
- [2] Горшенин В.В. Прототип системы стереонаблюдения // Современные проблемы математики: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — С. 283–286.
- [3] Bradsy Gary, Kaehler Adrian. Learning OpenCV. — O’Reilly, 2008.
- [4] Kim K., Chalidabhongse T.H., Hardwood D., Davis L. Real-time foreground-background segmentation using codebook model // Real-time Imaging. — 2005. — Vol. 11, № 3. — Pp. 172–185.

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА СИНТЕЗИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРНОГО СИГНАЛА МНОГОКАНАЛЬНОГО ГБО С КОМПЕНСАЦИЕЙ ТРАЕКТОРНЫХ НЕСТАБИЛЬНОСТЕЙ

Игумнов Г.А.¹

Введение

Рассматривается задача синтеза апертуры антенны многоканального гидролокатора бокового обзора. Описывается алгоритм синтеза, который базируется на использовании закона изменения фазы отраженного сигнала при приближенно известном относительном движении фазового центра антенны и наблюдаемой сцены.

Задача обработки сигнала гидролокатора бокового обзора (ГБО) с синтезированной апертурой антенны имеет большую важность. Относительно недавно (см. [1]) в литературе появилось описание гидролокаторов и методики обработки эхолокационных данных, позволяющей даже для небольших и относительно дешевых гидролокаторов различать небольшие объекты на расстояниях в сотни метров, что, несомненно, является революцией в этой области. Здесь алгоритм синтеза апертуры антенны базируется на использовании закона изменения фазы отраженного сигнала при известном относительном движении наблюдаемой цели и фазового центра антенны (ФЦА) [2, 3].

Вопросы моделирования сигнала многоканального ГБО с траекторными неустойчивостями были рассмотрены в [4], поэтому перейдем сразу к вопросу синтеза изображения с компенсацией малых траекторных неустойчивостей.

Для каждой точки фокусировки (x_0, y_0) ($x_0 = k_0 \cdot dx, y_0 = i_0 \cdot dy$) выполняется следующее.

1. Определяем длину L интервала синтеза на дальности x_0 : $L = \alpha(x_0 - x_{\min}) \cdot \Theta$, где $x_{\min} = D/2 \cdot \operatorname{tg}(\pi/2 - \Theta/2)$, $\alpha = 0.6 \div 0.8$,

¹Работа поддержана программой фундаментальных исследований УрО РАН «Исследование новых задач математической физики и создание алгоритмов их решения» (проект, совместный с ИПМТ ДВО РАН) и грантом РФФИ № 12-01-00362.

$D = 8d$ — суммарная апертура приемной антенны, состоящая из восьми ячеек размером d , Θ — ширина диаграммы направленности одной приемной ячейки.

2. Примем за начало локальной системы координат центр интервала синтезирования, где расположен ФЦА суммарной приемной антенны в «нулевом» относительно точки фокусировки положении. В пределах интервала синтезирования рассмотрим положение ФЦА на расстоянии $\Delta i \cdot dy$ от начала координат. Для каждого такого положения для компенсации фазового сдвига относительно нулевого положения вычисляется поправка $\delta\varphi^*$ следующим способом.

Фазовая поправка $\delta\varphi^*$ ищется из условия минимизации функции $F(\delta\varphi)$:

$$F(\delta\varphi) = \left\| \sum_{m=1}^8 (e^{j\delta\varphi} \cdot a_{i_1 k_1 m} - a_{i_0 k_0 m}) \right\|^2, \quad (1)$$

где $\| \cdot \|$ — модуль комплексного числа,

$$a_{i_0 k_0 m} = S_{i_0 k_0 m} e^{j \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{(k_0 \cdot dx)^2 + (m-4)^2 d^2}}, \quad (2)$$

$$a_{i_1 k_1 m} = S_{i_1 k_1 m} e^{j \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{(\Delta i \cdot dx)^2 + (m-4)^2 d^2}}. \quad (3)$$

В результате минимизации $F(\delta\varphi)$ находим поправку $\delta\varphi^* = \arctan(-q/p)$, где

$$p = \left(\sum_{m=1}^8 X_m^0 \right) \left(\sum_{m=1}^8 X_m^1 \right) + \left(\sum_{m=1}^8 Y_m^0 \right) \left(\sum_{m=1}^8 Y_m^1 \right), \quad (4)$$

$$q = \left(\sum_{m=1}^8 X_m^0 \right) \left(\sum_{m=1}^8 Y_m^1 \right) + \left(\sum_{m=1}^8 Y_m^0 \right) \left(\sum_{m=1}^8 X_m^1 \right), \quad (5)$$

символами X и Y с индексами обозначены действительные и мнимые части комплексных чисел:

$$a_{i_0 k_0 m} = X_m^0 + jY_m^0, \quad a_{i_1 k_1 m} = X_m^1 + jY_m^1. \quad (6)$$

3. Вычисляем значение синтезированного изображения в точке (x_0, y_0) с учетом найденных поправок:

$$I(x_0, y_0) = \sum_l \sum_{m=1}^8 \left(s_{(i_0 + \Delta i_l, k(\Delta i_l))} e^{j \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{(k_0 \cdot dx)^2 + (\Delta i_l \cdot dy + (m-4)d)^2} + \delta\varphi_l^* \right)} \right), \quad (7)$$

где $k(\Delta i) = [\frac{1}{dx} \sqrt{(k_0 \cdot dx)^2 + (\Delta i \cdot dy)^2}]$ и внешнее суммирование проводится по всем строкам интервала синтезирования (l — индекс строки), Δi_l — смещение (задается в дискретах по оси y) l -й строки относительно центра, $\delta\varphi_l^*$ — фазовая поправка (см. выше), $[\cdot]$ — операция округления. Для «нулевой» строки полагаем $\Delta i_0 = 0$, $\delta\varphi_0^* = 0$.

4. Для повышения устойчивости синтезирования дополнительно суммируем близкие точки фокусировки, в которых уровень полезного сигнала значителен.

Алгоритм был успешно опробован на модельных данных и подтвердил свою работоспособность при наличии траекторных отклонений в пределах одной длины волны λ .

Благодарности

Автор выражает благодарность Костоусову Виктору Борисовичу и Агееву Александру Леонидовичу за помощь в разработке алгоритма.

Литература

- [1] *Callow H.J.* Signal Processing for Synthetic Aperture Sonar Image Enhancement: a thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy in Electrical and Electronic Engineering at the Univ. of Canterbury, Christchurch, New Zealand. 2003.
- [2] *Костоусов А.В., Костоусов В.Б.* Моделирование ГБО с синтезированной апертурой // Подводные исследования и робототехника. № 2(6). 2008. С. 16–29.
- [3] *Агафонов И.Б., Золотарев В.В., Мадисон Е.А.* Анализ применимости первичных гидролокационных данных для синтезирования апертуры антенн // Подводные исследования и робототехника. 2011. № 1(11). С. 32–40.
- [4] *Костоусов В.Б., Игумнов Г.А.* Влияние траекторных нестабильностей на сигнал многоканального гидролокатора бокового обзора // Современные проблемы математики. Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 294–297.

АЛГОРИТМ ПОИСКА СТРУКТУРНЫХ РАЗЛИЧИЙ НА ОСНОВЕ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Корнилов Ф.А.¹

Задача поиска различий между двумя изображениями актуальна во многих областях компьютерного зрения. Особый интерес представляет задача обнаружения не всех различий, а так называемых *структурных различий*, которые заключаются в существенном изменении наблюдаемой сцены типа появления, исчезновения или изменения формы объектов. При этом изменения освещенности и цвета объектов структурными различиями не считаются. В работе [1] был предложен метод, решающий прикладную задачу обнаружения структурных различий для двух одновременных космических снимков на основе локальных функций преобразования яркости. В настоящей работе приводится новый подход к решению задачи поиска структурных различий, основанный на глобальной минимизации с применением аппарата марковских случайных полей (МСП) [2], а также производится его сравнение с уже существующими методами.

В основе предлагаемого метода — алгоритм построения такого изображения $\Phi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, структура которого близка к структуре изображения \mathbf{A} , а яркости пикселей близки к \mathbf{B} . Этот алгоритм основан на минимизации следующей энергетической функции реализации марковского случайного поля f :

$$E(f; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i \in S} (f_i - \mathbf{B}_i)^2 + \lambda \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} G(f_i - f_j, i, j) \rightarrow \min_f,$$

$$G(v, i, j) = \begin{cases} \min(v^2, \alpha^2), & \text{если } |\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j| < \alpha, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где S — множество пикселей изображения, N_i — окрестность i -го пикселя, \mathbf{A}_i — i -й пиксел изображения \mathbf{A} .

¹Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН при поддержке УрО РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1013) и «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» (программа № 14, проект 09-П-1-1003), при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00523).

В этой функции первое слагаемое — оценка близости двух изображений по яркости. Второе слагаемое — функция штрафа за нарушение структуры: если на изображении \mathbf{A} яркости выбранной точки i и точки j из ее окрестности близки (меньше α), то тогда накладывается штраф, равный квадрату подобной разности в соответствующих точках f , но не больше квадрата α . В противном случае штраф не накладывается. Нахождение $\Phi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ осуществляется приближенно с помощью алгоритма Метрополиса [2].

Данный алгоритм применяется для построения разностного изображения

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max(|\Phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) - \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{B})|, |\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{A}) - \Phi(\mathbf{A}, \mathbf{A})|),$$

где $|\cdot|$ и \max — попиксельные операции. После чего производится пороговая обработка изображения \mathbf{C} , результат которой — искомые области структурных различий.

Было проведено сравнение качества работы данного алгоритма с алгоритмами на основе локальных функций преобразования яркости из [1] путем следующего численного эксперимента: по двум реальным умеренно зашумленным (стандартное отклонение 1.7) космоснимкам для результирующего изображения каждого алгоритма была построена ROC-кривая [3] для всех возможных значений порога. На рис. 1 (а) изображены эти ROC-кривые, соответствующие: (1) — алгоритму на основе морфологического проектора, (2) — алгоритму на основе построенной с помощью МНК линейной функции преобразования яркости, (3) — квадратичной функции преобразования яркости, (4) — предложенному алгоритму на основе МСП. Как можно видеть, в случае умеренного шума результаты оказались близки.

Таблица 1. Сравнение алгоритмов

Функция преобразования яркости	Умеренный шум	Сильный шум
Морфологический проектор	0.8274	0.6668
Линейная функция	0.8199	0.6730
Квадратичная функция	0.8195	0.6536
МСП	0.8125	0.7081

Затем на эти снимки был добавлен сильный шум со стандартным отклонением 14. ROC-кривые, построенные в этом случае, представлены на рис. 1 (б). Как можно видеть, линейная функция (2) превзошла морфологический проектор (1), а квадратичная функция (3) от

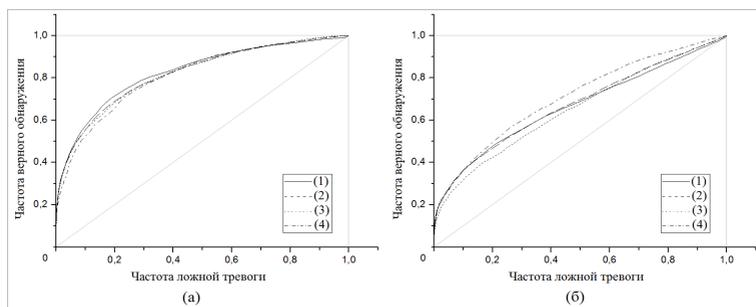


Рис. 1: ROC-кривые по порогу: (а) — случай умеренного шума, (б) — случай сильного шума. (1) — морфологический проектор, (2) — линейная функция, (3) — квадратичная функция, (4) — предложенный алгоритм на основе МСП

них отстала. Однако самую лучшую устойчивость к шуму показал предложенный алгоритм на основе МСП (4). Площади под ROC-кривыми представлены в табл. 1.

Полученные результаты позволяют предположить, что метод на основе морфологического анализа превосходит остальные в случае умеренного шума, а метод на основе марковских случайных полей — лучший в случае сильной зашумленности изображений.

Литература

- [1] Корнилов Ф.А., Перевалов Д.С. Задача обнаружения структурных различий изображений. //Сб. науч. трудов «Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений». Екатеринбург: УрО РАН. 2011. Вып. 11. С. 22–40.
- [2] Li S.Z. Markov Random Field Modeling in Image Analysis, 3rd ed. — Springer Berlin / Heidelberg, 2009.
- [3] Green D.M., Swets J.M. Signal detection theory and psychophysics. New York: John Wiley and Sons Inc., 1966.

СИСТЕМА ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Костоусов К.В., Первалов Д.С., Трофимов В.В.¹

В настоящее время увеличивается процент технологических установок, которые управляются дистанционно и не требуют постоянно присутствия персонала. Для новых проектов эти вопросы решаются на стадии проектирования. Но существует много установок, которые уже эксплуатируются в течение длительного времени. Итак, предположим, что имеется технологическая установка, на которой контроль протекания процессов осуществляются при помощи измерительной аппаратуры стрелочного типа. Требуется обеспечить дистанционный мониторинг системы.

Для решения этой задачи возможны два решения. Первый вариант заключается в монтаже дополнительных датчиков, имеющих интерфейс для отправки информации в компьютер. Второй вариант, предлагаемый нами, – использовать систему технического зрения (далее СТЗ) для наблюдения за уже имеющимися стрелочными датчиками.

Возможна следующая структура дистанционного мониторинга. Изображения показаний стрелочных датчиков считываются с помощью видеокамеры и распознаются с помощью устойчивого алгоритма распознавания. При этом используется недорогой одноплатный безвентиляторный компактный компьютер (рис. 1). Полученные числовые значения показаний датчиков с помощью GSM-модема передаются на удаленный диспетчерский пункт или мобильный телефон. Некоторые особенности предлагаемого нами решения описаны в [1].

Известно, что алгоритмы анализа изображений работают наиболее устойчиво в тех случаях, когда в них наиболее полно учитывается априорная информация о положении интересующего объекта и

¹Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН при поддержке УрО РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1013) и «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» (программа № 14, проект 09-П-1-1003), при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00523).

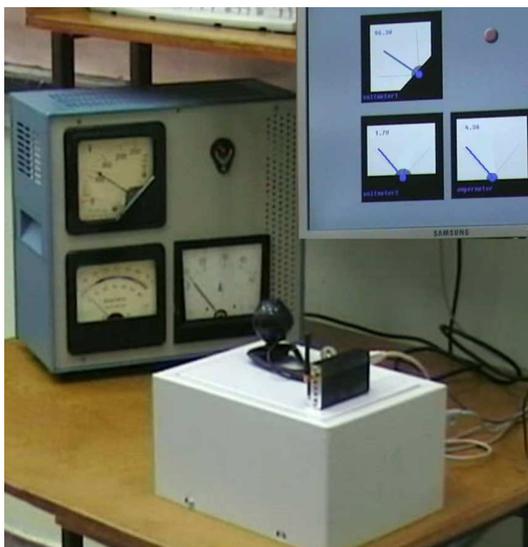


Рис. 1: внешний вид системы мониторинга. Слева – распознаваемые стрелочные датчики; внизу – СТЗ с камерой и модемом GSM; справа – монитор, имитирующий удаленный диспетчерский пункт, на котором визуализируются результаты распознавания

характеристиках его изображения. В данной задаче объектом интереса является стрелка прибора, один из концов которой закреплен неподвижно, и известно, что ее яркость меньше яркости циферблата. Используя эту информацию, был построен алгоритм для нахождения отрезка прямой методом голосования типа метода Хафа [2]. В алгоритме перебираются возможные положения стрелки и выбирается положение, в окрестности которого средняя яркость пикселей минимальна.

Отметим, что небольшие сдвиги камеры компенсируются с помощью анализа положения специального маркера, закрепленного рядом с датчиками. Успешность распознавания маркера служит признаком того, что перекалибровка СТЗ в данный момент не требуется.

К преимуществам предлагаемого подхода решения задачи мониторинга относятся, во-первых, то, что не требуется дорогостоящая

модернизация оборудования. Цена предлагаемой системы мониторинга составляет около 15 тыс. руб. Среди аналогов предлагаемой СТЗ, доступных на рынке, отметим NI Smart Camera стоимостью от 70 тыс. руб. [3]. Во-вторых, не требуется остановка технологических процессов, благодаря чему установка и тестирование системы могут быть произведены относительно быстро.

Среди недостатков нашего подхода можно отметить довольно низкую точность распознавания показаний стрелочных датчиков и необходимость перекалибровки системы при сдвиге датчиков или существенном сдвиге видеокамеры. Кроме того, сам факт установки СТЗ может рассматриваться как усложнение исходного технологического комплекса.

Литература

- [1] *Васильев А.М., Первалов Д.С., Трофимов В.В.* Мониторинг технологических установок на основе встраиваемых систем и модулей технического зрения / в сб. «Новые материалы и технологии НМТ-2010», Материалы Всероссийской научно-технической конференции. Т. 2. С. 86. – М.: ИЦ МАТИ, 2010.
- [2] *Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржсин А.В.* Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. Курс лекций и практических занятий. – М.: Физматкнига, 2010.
- [3] <http://www.ni.com/vision/smartcamera/>

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ СТРУКТУРЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Перевалов Д.С.¹

При рассмотрении задач и алгоритмов обработки изображений часто возникает вопрос о характеристике устойчивости и надежности работы алгоритма при различных зашумлениях входных данных [1]. Обычно такая характеристика производится в терминах теории вероятностей и математической статистики, когда получают оценки качества работы алгоритма (например, частот пропуска и ложной тревоги) в зависимости от уровня зашумления входного изображения (например, от величины среднеквадратичного отклонения пиксельного гауссова шума).

В то же время, имеются такие прикладные задачи, в которых получение ошибочного результата при анализе изображения недопустимо. А потому встает вопрос о построении не статистических, а гарантированных характеристик работы алгоритма [2].

Одной из таких многообещающих характеристик могла бы быть устойчивость работы алгоритма к малым возмущениям входных изображений. А именно, если выходом алгоритма является число, то его можно рассматривать как вещественную функцию на множестве изображений, и сформулировать следующее определение:

Определение. Пусть имеется некоторое множество изображений $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда функцию $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, принимающую дискретное множество значений, будем называть *устойчивой к малым возмущениям входных изображений*, если для каждого $\mathbf{A} \in \mathcal{I}$ имеется некоторая окрестность $O_{\mathbf{A}}$, для которой

$$f(O_{\mathbf{A}}) = f(\mathbf{A}).$$

¹Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН при поддержке УрО РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1013) и «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» (программа № 14, проект 09-П-1-1003), при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00523).

Но из следующего элементарного утверждения вытекает, что для связных множеств изображений не существует нетривиальных (то есть выдающих более одного значения) алгоритмов, устойчивых в указанном смысле.

Утверждение. Пусть \mathcal{J} — связное множество в \mathbb{R}^n относительно естественной топологии (в \mathbb{Z}^n относительно кубических окрестностей). Тогда для любой функции $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$, множество значений которой состоит из более чем одного элемента, найдется $\mathbf{A} \in \mathcal{J}$ такое, что для любой окрестности $O_{\mathbf{A}}$ (кубической окрестности $O_{\mathbf{A}}$ соответственно) множество $f(O_{\mathbf{A}} \cap \mathcal{J})$ содержит более одного элемента.

Следствие 1. Для произвольного непустого связного множества \mathcal{J} в \mathbb{R}^n или \mathbb{Z}^n любой нетривиальный логический предикат $f : \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$ является неустойчивым к малым возмущениям входных изображений, то есть найдется $\mathbf{A} \in \mathcal{J}$ такое, что в любой окрестности \mathbf{A} найдется $\mathbf{B} \in \mathcal{J}$, для которого $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$.

Следствие 2. На непрерывном и дискретном множествах изображений \mathbb{R}^n и \mathbb{Z}^n невозможно определить следующие понятия, которые были бы устойчивы к малым возмущениям входных изображений:

1. Понятие «структуры изображения», которое разбивает множество всех изображений на непересекающиеся классы изображений с «одинаковой структурой».
2. Функцию распознавания некоторого класса объектов $f : \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$, которая даёт значение 1 тогда и только тогда, когда в изображении содержится изображение некоторого интересующего объекта.
3. Функцию $f : \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$ принятия решений или управления на основе изображений.

Нужно заметить, что несмотря на полученные результаты, алгоритмы распознавания и принятия решений успешно используются на практике в качестве устойчивых алгоритмов, благодаря следующим изменениям в постановке определения устойчивости:

1. Используются алгоритмы f , принимающие не дискретное, а непрерывное множество значений, и для них применяется определение устойчивости, совпадающее с обычным понятием непрерывности. Надо отметить, что этот способ неприменим в случае, когда на основе изображения требуется принятие управленческого решения (которое, как правило, дискретно).
2. На множестве всех изображений выделяются области, для которых результат работы алгоритма считается некорректным и не используется. В этом случае множество изображений, которые фактически подаются на вход алгоритму, является не связным, а представляет собой набор из нескольких связных разделенных областей, на каждой из которых алгоритм принимает постоянное значение. В непрерывном случае множество точек разрыва f на множестве всех изображений обычно имеет нулевую меру, и поэтому можно выбрать эти области так, чтобы они имели сколь угодно малую суммарную меру.

Наблюдения, приведенные в работе, полезно иметь в виду при создании алгоритмов и проведении их оценок.

Литература

- [1] *Thacker N.A., Clark A.F., Barron J.L., Beveridge J.R., Courtney P., Crum W.R., Ramesh V., Clark C.* Performance characterization in computer vision: A guide to best practices. // *Computer Vision and Image Understanding*, 2008, 109 (3). Pp. 305–334.
- [2] *Костоусов В.Б., Перевалов Д.С.* О задачах обнаружения и локализации объектов на изображении. // Тез. докл. Межд. конф. «Алгоритмический анализ неустойчивых задач». Екатеринбург: УрО РАН, 2008. С. 136–137.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОЦЕНКИ ИНФОРМАТИВНОСТИ ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ К МОДИФИКАЦИЯМ НАВИГАЦИОННОГО АЛГОРИТМА

Тарханов А.Е.¹

Введение

Оценка информативности геофизического поля является одной из задач, которая возникает при исследовании проблемы навигации по геофизическим полям [1]. Задача навигации по геофизическому полю состоит в определении местоположения движущегося объекта путём сопоставления измеренного фрагмента с эталоном поля. Информативность геофизического поля позволяет предсказывать возможную ошибку решения задачи навигации.

Среди имеющихся способов оценивания информативности был сделан выбор в пользу статистического моделирования, дающего достаточно точный результат благодаря использованию большого количества информации о задаче. Но достоинства способа неизбежно связаны с его недостатками, основной из которых — его большая трудоёмкость: необходимо моделировать процесс решения задачи навигации конкретным навигационным алгоритмом достаточно большое число раз.

Ранее [2, 3] был получен эффективный, т.е. быстрый и точный, способ оценки информативности. Доклад будет посвящён исследованию вопросов применения данного способа оценки информативности к различным модификациям навигационного алгоритма. Также сравнивается ускорение, получаемое при использовании различных технологий гетерогенных вычислений: CUDA [4] и OpenCL [5].

Исследование влияния деталей алгоритма

Статистический способ оценивания информативности используется для построения оценок конкретный навигационный алгоритм. С

¹Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 при поддержке УрО РАН, проект 09-П-1-1003 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» при поддержке УрО РАН, проект 09-П-1-1013, а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00523)

помощью модели навигационного алгоритма задача решается множество раз и результаты статистически обрабатываются.

С одной стороны, естественно желание уметь строить оценку информативности, абстрагировавшись от конкретного навигационного алгоритма. С другой стороны, точность оценки достигается благодаря ориентации на конкретный навигационный алгоритм, благодаря учёту его специфики. Разрешение этого противоречия видится в формализации класса навигационных алгоритмов и конструировании способа оценки информативности, способного настраиваться на любого представителя класса с помощью параметров.

Исследуется влияние деталей алгоритма на результирующую оценку информативности. Результаты данного исследования должны позволить определить рамки изменчивости навигационного алгоритма, оставаясь в которых, способ оценки информативности можно использовать без перестройки.

В частности, исследуется вариация формы и размера фрагмента. Достигнутое ранее ускорение позволяет провести такие исследования на персональном компьютере за разумное время.

Сравнение технологий гетерогенных вычислений

Технологии гетерогенных вычислений, как CUDA, так и OpenCL, предоставляют инструментарий, позволяющий программировать задачи для арифметических ускорителей, коими являются современные графические ускорители (GPU). Они разделяют общий подход и оба используют модифицированный язык высокого уровня C. Отличием является то, что CUDA является закрытым стандартом и применима только для продукции компании nVidia, в то время как OpenCL является открытым стандартом и получает позволять ускорение на гораздо большем количестве устройств. Будучи тесно связанной с аппаратной частью, CUDA обладает более богатыми возможностями, в то время как OpenCL — открытый стандарт с более широкой областью применения.

Представляется интересным сравнить эти технологии на одной и той же задаче, используя один и тот же алгоритм её решения и производя испытания на одном и том же оборудовании.

Литература

- [1] *Бердышев В.И., Костоусов В.Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. — Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
- [2] *Тарханов А.Е.* Использование GPU для оперативной оценки информативности геофизического поля. / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Труды 41-й Всероссийской молодежной конференции. С. 553–559 — Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2010.
- [3] *Тарханов А.Е.* Параллельные алгоритмы оценки информативности геофизического поля. / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 42-й Всероссийской молодежной конференции. С. 300–302 — Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2011.
- [4] NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture: [сайт]. URL: www.nvidia.com.
- [5] Khronos OpenCL – The open standard for parallel programming of heterogeneous systems: [сайт]. URL: www.khronos.org/opencv.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ТЕЛЕГРАФНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Балтаева У.И.

Рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} - u_{yy} - \lambda u) - \mu \sum_{i=1}^n a_i(x) D_{0x}^{\alpha_i} u(x, 0) = 0, \quad (1)$$

где $D_{0x}^{\alpha_i}$ — оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка α_i при $\alpha_i < 0$ и дробного дифференцирования порядка α_i при $0 < \alpha_i < 1$, который задается формулой

$$D_{0x}^{\alpha_i} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_i)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1+\alpha_i}}, & \alpha_i < 0, \\ \frac{d}{dx} D_{0x}^{\alpha_i-1} f(x), & 0 < \alpha_i < 1. \end{cases}$$

Предположим, что $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1 = \alpha < 1$, коэффициенты $a_i(x) \in C^1[0, 1] \cap C^3(0, 1)$ и λ, μ — вещественные константы, $\lambda > 0$.

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [1], [2]. Нагруженным дифференциальным уравнениям, нагруженная часть которых содержит значение искомого решения в фиксированных точках области их задания, посвящена работа [3].

Пусть D — область, ограниченная характеристиками

$$AC : x + y = 0, \quad BC : x - y = 1$$

уравнения (1) и отрезком AB оси $y = 0$.

В области D рассмотрим следующий аналог задачи Коши–Гурса для нагруженного уравнения (1).

Задача (Коши–Гурса). Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в \bar{D} , обладающее непрерывными производными u_x, u_y вплоть до $AB \cup AC$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u_y(x, y)|_{AB} = \nu(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

где n – внутренняя нормаль, $\nu(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные функции, $2\nu(x) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \psi_1'(0)$,

$$\nu(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad (4)$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Теорема. Если выполнены условия (4), (5), то в области D существует единственное решение задачи Коши–Гурса.

Однозначная разрешимость поставленной задачи доказывается с помощью теории интегральных уравнений [3]. При этом важную роль играет следующая лемма.

Лемма. Любое регулярное решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = z(x, y) + w(x),$$

где $z(x, y)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_{xx} - z_{yy} - \lambda z) = 0,$$

а $w(x)$ – решение следующего обыкновенного интегро-дифференциального уравнения:

$$w'''(x) - \lambda w'(x) - \mu \sum_{i=1}^n a_i D_{0x}^{\alpha_i} w(x) = \mu \sum_{i=1}^n a_i D_{0x}^{\alpha_i} z(x, 0).$$

Литература

- [1] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // Дифф. уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103-108.
- [2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995.
- [3] Исламов Б., Балтаева У.И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка. // Уфимский мат. журнал. 2011. Т. 3, № 3, с. 15-25.

ВЫРОЖДЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ НЕКОММУТАТИВНУЮ АЛГЕБРУ СИММЕТРИИ

Гончаровский М.М.¹

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с N независимыми переменными

$$L(x, \partial_x)u(x) = 0, \quad x \in D \subset R^N, \quad u(x) \in C^\infty(D), \quad (1)$$

допускающее n -мерную алгебру симметрии $\mathcal{G} \simeq \{X_i\}$ линейных дифференциальных операторов первого порядка:

$$X_i = X_i^A(x)\partial_{x^A}, \quad [L, X_i] = 0, \quad [X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad \text{rank } X_i^A(x) = m$$

(суммирование по повторяющимся индексам). Группа Ли G , соответствующая алгебре Ли \mathcal{G} , действует на сопряжённом пространстве \mathcal{G}^* коприсоединённым представлением Ad^* . Орбиты этого действия размерности $n - r - 2s$, где $r = \text{ind} \mathcal{G}$ — индекс алгебры \mathcal{G} , являются поверхностями уровня функций Казимира K_μ^s , $\mu = 1, \dots, r_s$. Пусть особые инвариантные подмногообразия коприсоединённого действия размерности $n + r_s - r - 2s$ определяются уравнениями $F^s(f) = 0$. Введём инвариантные относительно действия группы G функциональные пространства

$$L_s(D) = \{\varphi \in C^\infty(D) \mid F^s(X)\varphi = 0\}, \quad L_{s+1}(D) \subset L_s(D),$$

где $F^s(X)$ — симметризованные операторнозначные функции. Для некоторого s_M выполняется равенство $L_{s_M}(D) = C^\infty(D)$ (см. [1]).

Известно (см., напр., [2]), что при выполнении условий

$$C_{ij}^k = 0, \quad n \geq N \quad (2)$$

уравнение (1) допускает разделение переменных. В [3] показано, что в общем случае (1) редуцируется к уравнению с

$$N' = N + i_M - s_M - \frac{n+r}{2}$$

¹Работа поддержана фондом некоммерческих программ «Династия».

независимыми переменными, где i_M — число функциональных связей между операторами X_i вида $\Gamma(X) = 0$. Если условия (2) не выполнены и $N' > 1$, то не существует конструктивного способа построения общего решения уравнения (1). Можно, однако, получить частные решения, принадлежащие подпространствам $L_s(D)$, накладывая на функцию u дополнительные условия $F^s(X)u = 0$.

Определение. Решение $u(x)$ уравнения (1) будем называть *решением типа s* , если $u \in L_s(D)$. Число $s - s_M$ назовём *рангом вырождения* решения.

Решения максимального ранга вырождения $(n - r)/2 - s_M$ представляют собой G -инвариантные решения: $X_i u = 0$.

Справедлива следующая

Теорема. Уравнение (1) при ограничении на инвариантное функциональное подпространство $L_s(D)$ редуцируется к ЛДУ с

$$\tilde{N} = N - \dim M + \max\left\{0, m + i_M - \frac{n + r}{2} - s\right\}$$

независимыми переменными.

Доказательство теоремы и соответствующие примеры приведены в работе [4].

Литература

- [1] Широков И.В. Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 126, № 3. С. 393–408.
- [2] Шаповалов В.Н. Разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 10. С. 1864–1874.
- [3] Шаповалов А.В., Широков И.В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 104, № 2. С. 195–213.
- [4] Гончаровский М.М., Широков И.В. Классификация вырожденных решений линейных дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Физика. 2011. Т. 54, № 5. С. 20–26.

НЕОДНОРОДНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Долгополик М.В.¹

В данной работе описывается неоднородная аппроксимация приращения негладкой функции, определённой на нормированном пространстве. С помощью данной аппроксимации получены конструктивные необходимые условия экстремума негладкой функции при различных ограничениях.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное нормированное пространство, $S \subset E$ — открытое множество, $x \in S$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$. Будем обозначать открытый шар с центром в точке x радиуса $r > 0$ через $U(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}$.

Определение 1. Полунепрерывную снизу собственную выпуклую функцию $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ будем называть сильной неоднородной верхней выпуклой аппроксимацией (далее неодн. в.в.а.) функции f в точке x , если 0 принадлежит внутренности эффективного множества функции φ , $\varphi(0) \geq 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 0$ такое, что $U(x, r) \subset E$ и выполняется неравенство

$$f(x + \Delta x) \leq f(x) + \varphi(\Delta x) + \varepsilon \|\Delta x\| \quad \forall \Delta x \in U(0, r).$$

Ясно, что отдельной сильной неодн. в.в.а. недостаточно, чтобы полноценно исследовать поведение функции в окрестности точки x , поэтому необходимо рассматривать семейства сильных неодн. в.в.а.

Определение 2. Семейство $\{\varphi_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ сильных неодн. в.в.а. функций $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x будем называть исчерпывающим, если

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \inf_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(\Delta x) + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)/\|\Delta x\| \rightarrow 0$ при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ и $\inf_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(0) = 0$.

Если исчерпывающее семейство сильных неодн. в.в.а. аппроксимаций состоит из одной функции, то эту функцию мы будем называть исчерпывающей сильной неодн. в.в.а.

Отметим несколько простых свойств сильных неодн. в.в.а.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00360

Предложение 1. Пусть функция $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема по Фреше в точке $x \in E$. Тогда градиент Фреше $f'(x)$ является сильной неодн. в.в.а. функции f в точке x .

Предложение 2. Для того чтобы существовала сильная неодн. в.в.а. функции f в точке x , необходимо и достаточно, чтобы существовали $L > 0$ и $r > 0$ такие, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) \leq L \|\Delta x\| \quad \forall \Delta x \in U(0, r).$$

С помощью сильных неодн. в.в.а. можно получать простые и наглядные условия экстремума.

Теорема 1. Пусть φ является сильной неодн. в.в.а. функции f в точке x^* и предположим, что x^* является точкой локального минимума функции f . Тогда 0 является точкой локального минимума функции φ или, что тоже самое, $0 \in \partial\varphi(0)$.

Теорема 2. Пусть семейство $\{\varphi_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, является исчерпывающим семейством сильных неоднородных в.в.а. функции f в точке x^* и предположим, что x^* является точкой экстремума функции f . Тогда

$$0 \in \text{clco} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \partial\varphi_\lambda(0).$$

Здесь замыкание берётся в слабой* топологии.

Рассмотрим теперь задачу минимизации функции f на замкнутом выпуклом множестве $A \subset E$.

Теорема 3. Пусть φ является сильной неодн. в.в.а. функции f в точке $x^* \in A$ и предположим, что x^* является точкой минимума функции f на множестве A . Тогда 0 является точкой минимума функции φ на множестве $A - x^* = \{z = y - x^* \mid y \in A\}$. Если же функция φ непрерывна на множестве A , то

$$\partial\varphi(0) \cap (-N(A - x^*, 0)) \neq \emptyset,$$

где $N(A - x^*, 0) = \{p \in E^* \mid p(a - x^*) \leq 0 \forall a \in A\}$ — нормальный конус ко множеству $A - x^*$ в точке 0 .

Пусть $f_0, f_1, \dots, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$. Определим множество $C = \{x \in E \mid f_i(x) \leq 0, i \in I = \{1, \dots, n\}\}$ и рассмотрим задачу минимизации функции f на множестве $A \cap C$, где $A \subset E$ — замкнутое выпуклое множество.

Теорема 4. Пусть функция φ_i является сильной неодн. в.в.а. функции f_i в точке $x^* \in A \cap C$, $\varphi_i(0) = 0$, $i \in I \cup \{0\}$ и предположим, что x^* является точкой минимума функции f_0 на множестве $A \cap C$. Тогда 0 является точкой минимума функции

$$g(\cdot) = \max\{\varphi_0(\cdot), \varphi_1(\cdot) + f_1(x^*), \dots, \varphi_n(\cdot) + f_n(x^*)\}$$

на множестве $A - x^*$. Если же функция g непрерывна на множестве $A - x^*$, то

$$\text{cl co} \left\{ \partial\varphi_0(0), \bigcup_{i \in R(x^*)} \partial\varphi_i(0) \right\} \cap (-N(A - x^*, 0)) \neq \emptyset, \quad (1)$$

где $R(x^*) = \{i \in I \mid f_i(x^*) = 0\}$. Здесь замыкание берётся в слабой* топологии.

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^2$, $A = \text{co}\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$, $x^* = (0, 1)$. Определим $f_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 1$, $f_2(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1$, а также

$$f_0(x_1, x_2) = \max\{\min\{-x_1 + x_2 - 1, -x_1 - x_2 + 1\}, \min\{x_1 - x_2 + 1, x_1 + x_2 - 1\}\}.$$

Положим $\varphi_0(x_1, x_2) = \max\{-x_1 + x_2, x_1 - x_2\}$, $\varphi_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$, $\varphi_2(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$. Ясно, что функции φ_0 , φ_1 и φ_2 являются сильными неодн. в.в.а. функций f_0 , f_1 и f_2 , соответственно.

В данном случае $N(A - x^*, 0) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$, $R(x^*) = \{1, 2\}$. Вычисляя соответствующие субдифференциалы, убеждаемся в том, что условие (1) выполнено. При этом нетрудно проверить, что x^* действительно является точкой минимума функции f_0 на множестве $A \cap C$.

Из приведённых утверждений видно, что неоднородные верхние выпуклые аппроксимации являются удобным инструментом исследования негладких задач. С их помощью были получены конструктивные условия экстремума, которые можно использовать для построения численных методов оптимизации негладких функций.

О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Муминов М.Э., Расулов Т.Х.¹

Рассматривается (решетчатый) матричный оператор H , действующий в трехчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства. Выделен каналный оператор. Местоположение существенного спектра оператора H описано через спектр каналного оператора. Подобные задачи для систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц в непрерывном пространстве рассмотрены в [1, 2].

Пусть $\mathbf{T}^\nu \equiv (-\pi; \pi]^\nu$ – ν -мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на \mathbf{T}^ν , $L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных функций, определенных на $(\mathbf{T}^\nu)^2$, \mathbf{C} – одномерное комплексное пространство.

Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^\nu)$ и $\mathcal{H}_2 = L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Гильбертово пространство \mathcal{H} называется трехчастичным обрезанным подпространством фоковского пространства.

Рассмотрим ограниченный самосопряженный матричный оператор H , действующий в \mathcal{H} :

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы $H_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$ определяются формулами

$$(H_{00}f_0)_0 = w_0 f_0, \quad (H_{01}f_1)_0 = \int_{\mathbf{T}^\nu} v_0(s) f_1(s) ds,$$

$$(H_{11}f_1)_1(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (H_{12}f_2)_1(p) = \int_{\mathbf{T}^\nu} v_1(s) f_2(p, s) ds,$$

¹Работа поддержана международным центром по теоретической физике имени Абдуса Салама (Италия, Триест).

$$H_{22} = H_{22}^0 - V_1 - V_2, \quad (H_{22}^0 f_2)_2(p, q) = w_2(p, q) f_2(p, q),$$

$$(V_1 f_2)_2(p, q) = \int_{\mathbf{T}^\nu} v_2(p, s) f_2(s, q) ds,$$

$$(V_2 f_2)_2(p, q) = \int_{\mathbf{T}^\nu} v_2(s, q) f_2(p, s) ds,$$

где $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$, w_0 – фиксированное вещественное число, $w_1(\cdot)$, $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$, – вещественнозначные непрерывные функции на \mathbf{T}^ν , $w_2(\cdot, \cdot)$, $v_2(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначные непрерывные симметричные функции на $(\mathbf{T}^\nu)^2$.

Положим $\mathcal{H}' = L_2(\mathbf{T}^\nu) \oplus L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$.

Для формулировки основного результата работы наряду с оператором H рассмотрим оператор H' , действующий в гильбертовом пространстве \mathcal{H}' :

$$H' = \begin{pmatrix} H_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}} H_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} H_{21}^{(1)} & H_{22}^0 - V_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$(H_{21}^{(1)} f_1)(p, q) = v_1(q) f_1(p), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

Очевидно, что оператор H' ограничен и самосопряжен в \mathcal{H}' и он выбран единственным образом из некомпактной части оператора H в силу свойства разлагаемости H в прямой операторный интеграл.

Пусть $\sigma(H')$ – спектр оператора H' .

Основной результат настоящей работы описывает существенный спектр оператора H .

Теорема. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H совпадает с спектром оператора H' , т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H')$.*

Согласно этой теореме, оператор H' обладает характеристическим свойством канального оператора. По этой причине будем называть его канальным оператором, соответствующим оператору H .

Заметим, что канальный оператор H' имеет более простую структуру, чем H , и поэтому наша теорема играет важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора H .

Литература

- [1] *Minlos R.A., Spohn H.* The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons // Topics in Statistical and Theoretical Physics, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 1996. V. 177, AMS, Providence, RI. Pp. 159–193.
- [2] *Жуков Ю.В., Минлос Р.А.* Спектр и рассеяние в модели «спин-бозон» с не более чем тремя фотонами // Теоретическая и математическая физика, 1995. Т. 103, № 1. С. 63–81.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Муратбекова М.А.¹

Пусть $\Omega = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ – единичный круг, $u(x)$ – гармоническая функция в Ω , $\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, \dots$, $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$.

Рассмотрим оператор

$$D_\mu^\alpha [u](r, \varphi) = \delta_\mu^m D_\mu^\gamma [u](r, \varphi) = \\ = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \mu \right)^m \left[\frac{\gamma}{(1-\gamma)} \int_0^1 \frac{u(r, \varphi) - u(sr, \varphi)}{s^{1-\mu} |\ln s|^{\gamma+1}} ds + \mu^\gamma u(r, \varphi) \right].$$

Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad (1)$$

$$D_\mu^\alpha [u](r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad (2)$$

где r, φ – полярные координаты и $f(\varphi)$ – непрерывная функция.

Решением задачи (1), (2) назовём гармоническую в области Ω функцию $u(r, \varphi) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $D_\mu^\alpha [u] \in C(\bar{\Omega})$ и выполняется условие (2).

Для $\alpha > 0$, $\mu \geq 0$ введем функцию

$$P_{\alpha, \mu}(r, \psi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} \frac{1 - s^2 r^2}{1 - 2sr \cos \psi + s^2 r^2} ds$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, \dots$, $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$. Тогда

¹Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. профессору Б.Х. Турметову за постановку задачи и внимание к работе.

1) если $\mu > 0$, то решение задачи (1), (2) существует, единственно и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha, \mu}(r, \theta - \varphi) f(\theta) d\theta;$$

2) если $\mu = 0$, то для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0.$$

Если решение задачи (1), (2) существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha, 0}(r, \theta - \varphi) f(\theta) d\theta + C,$$

где C – константа.

Отметим, что утверждение теоремы при $\gamma = 0$ и $m = 1, 2, \dots$ совпадает с результатом работы [1], а при $0 < \gamma < 1$ и $m = 0$ – с результатом работы [2].

Литература

- [1] Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения. // Дифференциальные уравнения, 1985. Т. 21, № 1. С. 9–15.
- [2] Турметов Б.Х., Ильясова М.Т. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона с граничным оператором дробного порядка в смысле Адамара-Маршо. // Вестник ЕНУ. Серия естественно-технических наук, 2009. № 4. С. 6–15.

О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Расулов Т.Х.¹

Исследование дискретных спектров операторов Шредингера и ассоциированных модельных операторов является наиболее интенсивно изучаемым объектом в теории операторов. В настоящей работе рассматривается модельный оператор H_μ , $\mu > 0$, ассоциированный с системой трех частиц на трехмерной решетке. Изучена зависимость конечности или бесконечности числа собственных значений оператора H_μ , в зависимости от точек, в которых параметр-функция w имеет невырожденный минимум.

Пусть $\mathbf{T}^3 = (-\pi; \pi]^3$ – трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на \mathbf{T}^3 , и $L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^2$.

Рассмотрим ограниченный самосопряженный модельный оператор H_μ , действующий в $L_2^s((\mathbf{T}^3)^2)$:

$$H_\mu = H_0 - \mu V_1 - \mu V_2,$$

где операторы H_0 , V_i , $i = 1, 2$, определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p, q) = w(p, q) f(p, q),$$

$$(V_1 f)(p, q) = \varphi(p) \int_{\mathbf{T}^3} \varphi(s) f(s, q) ds,$$

$$(V_2 f)(p, q) = \varphi(q) \int_{\mathbf{T}^3} \varphi(s) f(p, s) ds.$$

Здесь μ – положительное действительное число, $\varphi(\cdot)$ – вещественно-аналитическая, четная функция на \mathbf{T}^3 и функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет вид:

$$w(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q),$$

¹Работа поддержана международным центром по теоретической физике имени Абдуса Салама (Италия, Триест).

где

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^3 (1 - \cos mp^{(j)}), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3, \quad m > 1.$$

Для формулировки основного результата вводим оператор модели Фридрихса $h_\mu(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действующий в $L_2(\mathbf{T}^3)$:

$$h_\mu(p) = h_0(p) - \mu v,$$

где операторы $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$ и v определяются по правилам:

$$(h_0(p)f_1)(q) = w(p, q)f(q), \quad (vf)(q) = \varphi(q) \int_{\mathbf{T}^3} \varphi(s)f(s)ds.$$

Обозначим через $n \equiv n(m)$ число таких точек $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$, что $p_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, p_i^{(3)})$, $q_j = (q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, q_j^{(3)})$ и

$$p_i^{(k)}, q_j^{(k)} \in \left\{ 0, \pm \frac{2}{m}\pi; \pm \frac{4}{m}\pi; \dots; \pm \frac{m'}{m}\pi \right\} \cup \begin{cases} \pi, & \text{если } m \text{ четная} \\ \emptyset, & \text{если } m \text{ нечетная,} \end{cases}$$

причем $p_s \neq p_l$, $q_s \neq q_l$ для всех $s \neq l$, где

$$m' = \begin{cases} m - 2, & \text{если } m \text{ четная} \\ m - 1, & \text{если } m \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Легко можно проверить, что функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$ и $n = (m' + 1)^6$.

Положим

$$\mu_0 = 2 \left(\int_{\mathbf{T}^3} \frac{\varphi^2(s)ds}{\varepsilon(s)} \right)^{-1}.$$

Отметим, что $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu_0}) = [0, 27/2]$, см. [1].

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. (i) Если $\varphi(q_j) \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \{1, \dots, n\}$, то оператор H_{μ_0} имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся к нулю;

(ii) Если $\varphi(q_j) \neq 0$ при всех $j = 1, \dots, n$, то оператор H_{μ_0} имеет конечное число собственных значений.

Заметим, что утверждение (i) теоремы доказано в работе [1], а аналог этой теоремы для матричного оператора получен в работе [2].

Литература

- [1] *Расулов Т.Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теоретическая и математическая физика, 2010. Т. 163, № 1. С. 34–44.
- [2] *Расулов Т.Х.* О числе собственных значений одного матричного оператора // Сибирский математический журнал, 2011. Т. 52, № 2. С. 400–415.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА, КОГДА НОСИТЕЛИ ПЕРЕСЕКАЮТ ГРАНИЦУ

Торребек Б.Т.¹

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ – единичный шар, $\partial\Omega$ – его граница. Пусть, далее, $u(x)$ – функция, гармоническая в Ω , $r = |x|$, $\theta = x/|x|$, $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, m$ и $\gamma_{k,m} = \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\dots\Gamma(k+1-\alpha_m)}$. Рассмотрим следующие операторы

$$B^\alpha = r^{\alpha_1} D^{\alpha_1} \dots r^{\alpha_m} D^{\alpha_m}, \quad B_*^\alpha = r^{\alpha_1} D_*^{\alpha_1} \dots r^{\alpha_m} D_*^{\alpha_m},$$

$$B^{-\alpha}[u](x) = \int_0^1 \frac{ds_1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \dots \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha_m)} s^{-\alpha} u(sx) ds_m,$$

где $(1-s)^{\alpha-1} = \prod_{i=1}^m (1-s_i)^{\alpha_i-1}$, $s^{-\alpha} = s_1^{-\alpha_1} \dots s_m^{-\alpha_m}$, $s = s_1 \dots s_m$,

D^α – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, а D_*^α – в смысле Капуто. Эти операторы и их некоторые свойства рассматривались в работе [1]. Пусть заданы последовательности чисел a_j и δ_j , $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям: $0 < \delta_j < 1$, $\delta_j \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$ и $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$.

Рассмотрим в области Ω для уравнения

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

следующие краевые задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, гармоническую в шаре Ω , для которой функция $B^\alpha[u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет условиям

$$B^\alpha[u](x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B^\alpha[u](\delta_j x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

¹Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. профессору Б.Х. Турметову за полезные советы и внимание к работе.

где $f(x)$ – непрерывная функция.

Задача 2. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, гармоническую в шаре Ω , для которой функция $B_*^\alpha[u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет условиям

$$B_*^\alpha[u](x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_*^\alpha[u](\delta_j x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция.

Рассматриваемые задачи являются простейшими обобщениями задачи Бицадзе–Самарского [2] на граничные операторы нецелого порядка. Заметим, что аналогичные задачи в случае $\alpha = 0$ рассматривались в работе [3], а для операторов дробного порядка – в работе [1].

Пусть $v(x)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega \\ v(x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j v(\delta_j x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что задача (4) рассматривалась в работе [3] для общих эллиптических операторов.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{(1 - \delta_j)^{n-1}} < \infty. \quad (5)$$

Тогда:

1. Если выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \gamma_{0,m}, \quad (6)$$

то задача 1 однозначно разрешима.

2. Если выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \gamma_{0,m},$$

то для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} f(x) ds_x = 0, \quad (7)$$

причем решение задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого.

3. Если решение задачи существует, то оно представимо в виде

$$u(x) = B^{-\alpha}[v](x), \quad (8)$$

где $v(x)$ – решение задачи (4).

Теорема 2. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и выполняются условия (5) и (6). Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия (7).

Если решение задачи 2 существует, то

1) при выполнении условия $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \neq 0$ оно единственно;

2) при выполнении условия $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \equiv 0$ оно единственно с точностью до постоянного слагаемого;

3) решение задачи представимо в виде (8), где $v(x)$ – решение задачи (4) с дополнительным условием $v(0) = 0$.

3) решение задачи представимо в виде (8), где $v(x)$ – решение задачи (4) с дополнительным условием $v(0) = 0$.

Литература

- [1] Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торбек Б.Т. О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении. // Математические труды. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2011. Т. 14. № 1. С. 99–125.
- [2] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. // ДАН СССР. М., 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
- [3] Пулатов А.К. Об одной задаче Бицадзе–Самарского. // Дифференциальные уравнения. Минск, 1989. Т. 25. № 3. С. 537–540.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Шиналиев К.М.¹

Пусть $\alpha > 0$. Для функции $f(t)$ выражение

$$I^\alpha[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0$$

называется оператором дробного интегрирования порядка α .

Пусть, далее, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$. Рассмотрим оператор

$$D^{\alpha,\beta} f(t) = I^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(t).$$

Положим по определению $I^0 f(t) = f(t)$. Тогда при $\alpha = 1$ получим

$D^{1,\beta} f(t) = \frac{df}{dt}$. Если $\beta = 0$ и $0 < \alpha < 1$, то

$$D^{\alpha,0} f(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f(t) = D^\alpha f(t),$$

где оператор D^α – оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Римана – Лиувилля. Если $\beta = 1$ и $0 < \alpha < 1$, то

$$D^{\alpha,1} f(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f(t) = D_*^\alpha f(t),$$

где D_*^α – оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Капуто. Оператор $D^{\alpha,\beta}$ называется оператором дробного дифференцирования порядка α и типа β [1].

Пусть $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Рассмотрим уравнения вида

$$D_t^{\alpha,\beta} u(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega. \quad (1)$$

Здесь $D_t^{\alpha,\beta}$ означает, что оператор $D^{\alpha,\beta}$ действует по переменной t . Так как $D_t^{1,\beta} = \frac{d}{dt}$, то при $\alpha = 1$ уравнение (1) совпадает с уравнением теплопроводности $u(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$.

¹Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. профессору Б.Х. Турметову за полезные советы и внимание к работе.

Пусть $\delta = (1 - \beta)(1 - \alpha)$. Решением уравнения (1) в области Ω назовем такую функцию $u(x, t)$, которая:

- 1) непрерывна в замыкании $\bar{\Omega}$ всюду, за исключением, быть может, отрезка $t = 0$, $0 \leq x \leq 1$;
- 2) такова, что произведение $t^\delta \cdot u(x, t)$ непрерывно в $\bar{\Omega}$;
- 3) обладает производной $D^{\alpha, \beta} u$ из класса $C(\Omega)$;
- 4) имеет производную $u_{xx}(x, t)$ из класса $C(\Omega)$;
- 5) обращает уравнение (1) в равенство.

Рассмотрим в области следующую задачу. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\delta \cdot u(x, t) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ и функция $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ удовлетворяет условиям $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1)$. Тогда решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

Отметим, что аналогичная задача в случае $\alpha = 1$ изучена в работе [2], а в случае $\beta = 0$, $0 < \alpha \leq 1$ – в работе [3].

Литература

- [1] Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2009. V. 12, № 3. Pp. 299–318.
- [2] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с классическим краевым условием. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
- [3] Нахушева З.А. Видоизмененная задача Самарского для нелокального диффузионного уравнения. // Доклады Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук. 1997. Т. 2. № 2. С. 36–41.

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Асфандиярова Ю.С.

В приложениях (например, в теории динамических измерений [1]) возникают проблемы, приводящие к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями – многоточечные краевые задачи, задачи с распределенными данными и т.п.

Многие подобные задачи могут быть сформулированы как краевые задачи для линейного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} L[x] = x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + p_1x' + p_0x = f(t), \\ U_j(x) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_i(t)$, $f(t)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, α_j – числа, $U_j(x)$ – линейные, линейно-независимые функционалы, представимые в общем случае в виде

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}x(t_i) + \int_a^b g_j(t)x(t)dt = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

в которых c_{ij} – числа, $g_j(t)$ – кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции; $t_i \in [a, b]$ – заданные моменты времени.

Задачу нахождения правой части $f(t)$ по экспериментально измеренной функции $\tilde{x}(t)$ будем называть *обратной задачей*.

В настоящей работе описан метод решения обратной задачи обращением дифференциального оператора с помощью функции Грина, использующий хорошо известное соотношение для решения полудородной краевой задачи:

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (2)$$

где $G(t, \tau)$ – функция Грина этой задачи. Это соотношение, являющегося обращением дифференциального оператора (1), представляющего собой уравнение Фредгольма I-го рода относительно функции

$f(t)$, эффективные и устойчивые методы решения которого изложены, например, в [2, 3].

Был предложен способ построения функции Грина, не использующий фундаментальную систему решений исходного уравнения [4, 5]. Предлагаемый метод использует следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t), \\ U_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

функция Грина которой $\tilde{G}(t, \tau)$ может быть найдена непосредственно по определению.

Функция Грина основной задачи может быть найдена как решение интегрального уравнения Фредгольма II-го рода:

$$G(t, s) - \tilde{G}(t, s) = \int_a^b G(t, \tau) V(\tau, s) d\tau.$$

На основании описанной теории был разработан алгоритм решения обратной задачи теории динамических измерений и написана компьютерная программа с использованием пакета Mathematica 8.0.

Описанный метод позволяет независимо производить часть вычислений, поэтому была разработана параллельная версия указанного алгоритма [6]. Программа, реализующая параллельный алгоритм с использованием языке Си++ с использованием стандарта MPI-2 (Message Passing Interface) на высокопроизводительном вычислительном кластере «СКИФ Аврора» суперкомпьютерного центра ЮУрГУ (8832 вычислительных ядра, 117.64 триллиона операций в секунду), находится в стадии разработки.

Литература

- [1] Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. — Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1984.
- [2] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач. — М.: Наука, 1978.

-
- [3] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
- [4] *Zalyapin V.I., Kharitonova H.V., Ermakov S.V.* Inverse problems of the measurements theory // Inverse problems, Design and Optimization Symposium. Pp. 91–96. — Miami, Florida, U.S.A., 2007.
- [5] *Асфандиярова Ю. С.* Численный анализ одной обратной задачи для линейного дифференциального уравнения // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 40. С. 32–36. — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2010.
- [6] *Асфандиярова Ю.С.* Численный анализ обратной задачи теории измерений // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Часть VII. Управление и прикладная математика. Том 3. С. 6–7. — М.: МФТИ, 2010.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Батьков А.Н., Сысолятина А.А.

Многие природные месторождения нефти и газа имеют трещиноватую структуру [1]. Промысловые наблюдения свидетельствуют о нелинейном характере процессов фильтрации в таких коллекторах. Эффективные характеристики пласта при этом могут сильно меняться, что, в свою очередь, может повлечь за собой ошибки в оценке запасов сырья. Для определения этих характеристик скважина закрывается на несколько часов и на ней регистрируется кривая восстановления давления. Используя определенную модель пласта, можно по этой кривой определить его характеристики.

В практике широкое распространение получила линейная модель трещиноватой среды [2]. В данной работе задача восстановления давления анализируется в рамках нелинейного подхода [3], достаточно хорошо соответствующего реальным средам [4]. В качестве модели жидкости принята жидкость с предельным градиентом [5], отражающая поведение реальных нефтей — течение начинается при превышении перепада давления некоторого порогового значения. В такой постановке упруго-пластический режим задачи восстановления давления рассмотрен впервые. Для линейных сред упруго-пластический режим введен в [2].

В случае цилиндрической симметрии движение жидкости с предельным градиентом в упруго-пластической среде описывается следующими уравнениями в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \phi^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - H \right) \right] - \alpha \phi, \quad 0 < \omega < \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \phi^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - H \right) \right] - \alpha \phi, \quad \omega \geq \Omega, \quad (2)$$

где $\phi = \phi(\omega, r)$ — давление, ω — время, r — координата, H — предельный градиент. Уравнение (1) описывает падение давления в среде ($\frac{\partial \phi}{\partial \omega} < 0$), происходящее при работе скважины с постоянным дебитом

в интервале времени $0 < \omega < \Omega$. В момент времени $\omega = \Omega$ скважина останавливается, и давление в среде восстанавливается, $\frac{\partial \phi}{\partial \omega} > 0$ в соответствии с уравнением (2). Начальные и граничные условия для уравнений (1), (2) имеют следующий вид:

$$\phi(r, 0) = 1,$$

$$r\phi^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - H \right) = q, \quad r = r_0, \quad 0 < \omega < \Omega, \quad (3)$$

$$r\phi^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - H \right) = 0, \quad r = r_0, \quad \omega \geq \Omega, \quad (4)$$

где q и r_0 — дебит и радиус скважины.

В (1), (2) k_1, k_2 — коэффициенты пьезопроводности. Для упругой среды $k_1 = k_2$. В природных средах обычно разгрузка пласта является более жесткой, $k_1 > k_2$ (упруго-пластическая модель). Слагаемое $(-\alpha\phi)$ описывает сток жидкости в пористую матрицу.

Строятся приближенные аналитические решения уравнений (1), (2), удовлетворяющие начальным и граничным условиям и балансовым соотношениям. Для контроля точности проводится численный анализ задачи.

На основании проведенного анализа можно сделать следующие выводы, имеющие ясное физическое объяснение.

Скорость волны разгрузки, на которой $\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0$, снижается с ростом предельного градиента. Волна разгрузки в нелинейной среде двигается медленнее, чем в линейной. Однако восстановление давления в нелинейной среде происходит быстрее. При упруго-пластическом режиме скорость волны разгрузки выше, чем при упругом, и эта скорость растет с ростом отношения k_1/k_2 . Но давление восстанавливается быстрее при упруго-пластическом режиме. С ростом предельного градиента эти различия между режимами уменьшаются. Рост параметра α снижает скорость восстановления давления.

Литература

- [1] Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. — М.: Недра, 1986.

- [2] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Наука, 1972.
- [3] Бувевич Ю.А. Структурно-механические свойства и фильтрация в упругом трещиновато-пористом материале // ИФЖ. 1984. Т. 46, № 4. С. 593–600.
- [4] Buyevich U. A., Nustrov V. S., Plochoi S. A., Podoplelov V. V. Unsteady flow in nonlinear fractured reservoirs // Fluid Mechanics Research. 2000. Vol. 27, № 2–4. Pp. 248–269.
- [5] Скворцов Э. В. Подземная гидромеханика аномальных жидкостей. — Казань: Казан. ун-т, 1985.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ НАЧАЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ РЯДОВ

Белова Е.Д.¹

Рассматриваются стационарные изэнтропические течения идеального политропного газа при учете действия силы тяжести и силы Кориолиса, являющиеся решениями следующей системы уравнений газовой динамики [1, 2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u\Theta_r + \frac{v}{r}\Theta_\varphi + w\Theta_z + (\gamma - 1)\Theta \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ wu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{\Theta_r}{(\gamma - 1)} = av - bw \cos \varphi, \\ wv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + ww_z + \frac{\Theta_\varphi}{(\gamma - 1)r} = -au + bw \sin \varphi, \\ ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{\Theta_z}{(\gamma - 1)} = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе (1): r, φ, z – независимые переменные (цилиндрические координаты); искомыми функциями являются: Θ – квадрат скорости звука; u, v – радиальная и окружная проекции вектора скорости в плоскости xOy ; w – проекция вектора скорости на ось Oz ; $\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа; $a = 2\Omega \sin \psi, b = 2\Omega \cos \psi, \Omega$ – угловая скорость вращения Земли; ψ – широта точки O на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости xOy .

В системе (1) стандартным образом введены безразмерные переменные. Если в качестве масштабных значений скорости и расстояния взяты соответственно: $c_* = 333 \frac{\text{м}}{\text{с}}, r_* = 10^3 \text{ м}$, то безразмерные значения констант g и Ω такие: $g \approx 10^{-1}, \Omega \approx 2 \cdot 10^{-4}$. Поскольку малые параметры g и Ω входят в систему (1) регулярно, то далее строятся частные решения системы (1) в виде разложения в ряд по

¹Исследование поддержано РФФИ, проект № 11-01-00198

степеням g и Ω :

$$\mathbf{U}(r, \varphi, z, g, \Omega) = \mathbf{U}_{00}(r, \varphi, z) + \mathbf{U}_{10}(r, \varphi, z)g + \mathbf{U}_{01}(r, \varphi, z)\Omega + \dots, \quad (2)$$

где \mathbf{U} есть вектор искомых функций с компонентами Θ, u, v, w .

Далее строится конечный отрезок представления (2), который приближенно описывает стационарные течения газа, имеющие место в вертикальной части восходящего закрученного потока типа торнадо [2].

Если в системе (1) положить $g = \Omega = 0$, то получится [2] система для \mathbf{U}_{00} , решения которой можно взять в виде:

$$\Theta_{00} = \Theta_0(r); \quad u_{00} = 0; \quad v_{00} = v_0(r); \quad w_{00} = \text{const} > 0, \quad (3)$$

где вначале, исходя из газодинамического смысла задачи, выбирается функция $v_0(r)$, а затем из уравнения $\Theta'_0(r) = (\gamma - 1)v_0^2(r)/r$ определяется функция $\Theta_0(r)$. В работе в качестве $v_0(r)$ берутся четыре разных зависимости:

$$\begin{aligned} v_0(r) &= v_{00} = \text{const} > 0; & v_0(r) &= \omega r, \quad \omega = \text{const} > 0; \\ v_0(r) &= v_{00}/r; & v_0(r) &= v_{00}(1/r - r); \end{aligned}$$

и, следовательно, получаются четыре разных набора, составляющих вектор \mathbf{U}_{00} . Заметим, что в [2] рассмотрен частный случай представления (2): без слагаемого с \mathbf{U}_{01} и с $v_0(r) = \omega r$.

Система уравнений для \mathbf{U}_{10} получается после дифференцирования системы (1) по параметру g и подстановки значений $g = \Omega = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{00}$. Во всех четырех случаях решений (3) получаются линейные системы уравнений для компонент искомого вектора \mathbf{U}_{10} . Переменные коэффициенты этой системы зависят от \mathbf{U}_{00} и не имеют особенностей при $r > 0$ и при условии $\Theta_0 > w_{00}^2$. Последнее неравенство обеспечивается дозвуковым характером течения вдоль оси Oz . Во всех четырех рассматриваемых случаях удается, как и в [2], получить одно уравнение второго порядка для искомой функции $u_{10}(r, z)$. Это позволяет найти такое решение краевой задачи для этой функции, которое обеспечивает условие непротекания на двух заданных контактных поверхностях. Например: $u_{10}|_{r=r_1} = 0$, $u_{10}|_{r=r_2} = 0$, $0 < r_1 < r_2$.

Система уравнений для \mathbf{U}_{01} получается после дифференцирования системы (1) по параметру Ω и подстановки значений $g = \Omega = 0$,

$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{00}$. Так же, как и выше, во всех четырех случаях решений (3) получаются линейные системы уравнений для компонент искомого вектора \mathbf{U}_{01} . Переменные коэффициенты этой системы зависят от \mathbf{U}_{00} и не имеют особенностей при $r > 0$ и при условии $\Theta_0 > v_0^2$, что обеспечивается дозвуковым характером вращательного движения газа. В качестве искомой функции w_{01} можно взять такую: $w_{01} = 2 \cos \psi (1 + \cos \varphi) r$ – и тогда оставшиеся искомые $\mathbf{V}_{01} = (\Theta_{01}, u_{01}, v_{01})$ строятся в следующем виде:

$$\mathbf{V}_{01} = \mathbf{V}_{01,0}(r) + \mathbf{V}_{01,1}(r) \cos \varphi + \mathbf{V}_{01,2}(r) \sin \varphi.$$

В полученной системе девять уравнений и девять неизвестных функций. Задаются шесть из них, в частности можно положить: $u_{01,0}(r) = u_{01,1}(r) = \Theta_{01,2}(r) = \Theta_{01,0}(r) = v_{01,2}(r) = 0$ и $v_{01,0}(r) = -r(\sin \varphi)$. В этом случае для $u_{01,2}(r)$ также получается одно дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a_0(r)u^{12}(r) + a_1(r)u^{12'}(r) + a_2(r)u^{12''}(r) = b(r),$$

где $a_0(r)$, $a_1(r)$, $a_2(r)$ и $b(r)$ – дополнительные обозначения, введенные для упрощения записи. Ставим краевую задачу для этой функции, удовлетворяющую условиям непротекания на тех же контактных поверхностях: $u_{01,2}|_{r=r_1} = 0$, $u_{01,2}|_{r=r_2} = 0$. Представлены результаты расчетов.

Литература

- [1] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. – М.: Физматгиз, 1963.
- [2] *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука, 2008.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бурмашева Н.В., Стружанов В.В.¹

Пусть имеется система уравнений вида

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Эта система задает отображение $f : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_y^n$ одного евклидова пространства в другое. Если матрица Якоби J данного отображения невырождена в достаточно малой окрестности некоторой точки из пространства \mathbb{R}_x^n , то система (1) определяет взаимно-однозначное соответствие этой окрестности и множества точек в пространстве \mathbb{R}_y^n , образованных значениями функции f , принимаемыми в этой окрестности. Тогда решение системы (1) в этой окрестности может быть найдено с помощью матрицы J^{-1} , обратной к матрице Якоби.

Допустим, что в пространстве \mathbb{R}_x^n есть точки, в которых якобиан обращается в ноль. Тогда отображение f имеет особенности, связанные с неоднозначностью обратного отображения. На рис. 1 в качестве примеров для случая $n = 2$ представлены образы первой четверти пространства \mathbb{R}_x^n , полученные действием на нее такого рода отображений. Точки, где матрица Якоби вырождена, образуют в пространстве \mathbb{R}_x^n многообразия критических точек отображения f [1]. Их образы составляют в пространстве \mathbb{R}_y^n многообразия критических значений данного отображения. Для случая $n = 2$ упомянутые выше многообразия есть линии в пространствах \mathbb{R}_x^n и \mathbb{R}_y^n соответственно.

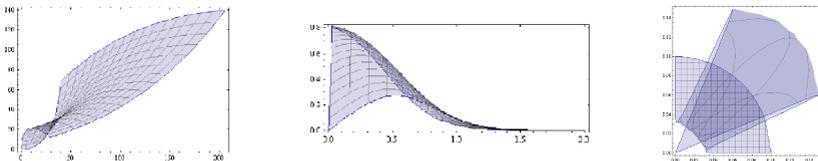


Рис. 1: примеры отображений

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-08-00135.

Многообразия критических точек отображения f разбивают пространство \mathbb{R}_x^n на непересекающиеся открытые области, составляющие множество Ψ . При отображении областей из Ψ в пространство \mathbb{R}_y^n получим множество Φ . Заметим, что некоторые из областей из Φ пересекаются, так как отображение f имеет особенности. Если теперь взять точку $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_y^n$, принадлежащую пересечению нескольких, скажем k , областей из множества Φ , то она имеет k прообразов в пространстве \mathbb{R}_x^n . А, значит, система (1) в этом случае имеет k решений.

Для нахождения всех решений системы (1) для заданного \mathbf{y} предлагается использовать метод Ньютона–Канторовича [2]:

$$\mathbf{x}_{s+1} = \mathbf{x}_s - [f'(\mathbf{x}_s)]^{-1} f(\mathbf{x}_s) + [f'(\mathbf{x}_s)]^{-1} \mathbf{y} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Однако, использование метода предполагает нахождение таких начальных приближений \mathbf{x}_0 , начиная с которых итерации сходятся.

В докладе предложен один алгоритм выбора начального приближения к методу Ньютона–Канторовича в зависимости от расположения заданной точки \mathbf{y} относительно многообразия критических значений произвольного нелинейного отображения f , обладающего указанными выше особенностями. В качестве иллюстрации в случае $n = 2$ для нескольких систем такого типа найдены многообразия критических точек и критических значений отображения, определены области Ψ и Φ . Кроме того, для одной конкретной системы реализован предложенный алгоритм выбора начальных приближений к методу Ньютона–Канторовича, найдены все решения рассматриваемой системы уравнений.

Литература

- [1] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. — М.: МЦНМО, 2009.
- [2] Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.

ПОСТРОЕНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

Бухаров Д.С.¹

В работе представлена математическая модель задачи о прокладке высокоскоростной железнодорожной магистрали (ВСМ) и задачи об оптимальном размещении нескольких логистических центров. Разработаны численные методы решения поставленных задач и выполнена их программная реализация.

1. Задача о прокладке ВСМ

Пусть в некоторой ограниченной области $D \subseteq R^2$ с кусочно-гладкой границей задана функция $v(x, y) > 0$, характеризующая в точке (x, y) скорость движения, и заданы точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Тогда минимальное время движения из одной точки в другую и доставляющий его маршрут Γ^* определяются как

$$T_{AB} = \min_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{v(x, y)} d\Gamma, \quad \Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{v(x, y)} d\Gamma. \quad (1)$$

В связи с технологическими особенностями прокладки ВСМ имеется ряд дополнительных ограничений, существенно усложняющих задачу. Пусть кривая Γ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$ и при всех t дважды непрерывно дифференцируема (требование о плавности поворотов), а также при всех t выполняется следующее неравенство:

$$R = \frac{\sqrt{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^3}}{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|} \geq C, \quad (2)$$

где R — радиус кривизны кривой Γ , C — минимальный разрешенный радиус кривизны (один из базовых параметров для ВСМ).

2. Метод решения задачи о прокладке ВСМ

Для решения задачи (1) используется метод, основанный на аналогии с геометрической оптикой [1], впервые предложенной И. Бернулли [2]. Подобный подход применялся, в частности, В.В. Башуровым для исследования задач безопасности [3]. Для решения задачи

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00245.

(1) с ограничением (2) разработан метод, являющийся обобщением метода, предложенного в [4], который позволяет учесть необходимый радиус кривизны и перепады высот. Предлагаемый метод опробован на ряде модельных задач, а также с его помощью решена прикладная задача о прокладке ВСМ Екатеринбург – Челябинск.

3. Определение оптимального расположения нескольких логистических центров (складов)

Пусть в некоторой ограниченной области $D \subseteq R^2$ с кусочно-гладкой границей заданы точки $B_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, $i = \overline{1, n}$, в которых располагаются потребители, и кусочно-непрерывная функция $v(M) > 0$, характеризующая в точке $M(x, y)$ мгновенную скорость движения грузов.

Также имеются $1 < m < n$ складов $A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, m}$, расположение которых заранее неизвестно.

Для любой точки $M(x, y) \in D$ минимальное время доставки из M в B_i вычисляется, как уже отмечалось, по формуле (1)

$$T_i(M) = \min_{\Gamma_i(M)} \int_{\Gamma_i(M)} \frac{1}{v(x, y)} d\Gamma_i.$$

Требуется найти оптимальные расположения складов (x_k^*, y_k^*) , $k = \overline{1, m}$, и разбиение множества потребителей на m подмножеств, определив номера $I_k = \{i_{k1}, \dots, i_{ks}\}$ потребителей, обслуживаемых складом $A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, m}$, таким образом, чтобы суммарное время доставки до всех потребителей было минимально возможным, т. е.

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} T_i(x_k, y_k) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Здесь, как уже отмечалось, параметрами минимизации являются координаты складов x_k, y_k и состав множеств I_k .

4. Метод решения задачи об оптимальном размещении нескольких складов

Для решения задачи (3) используется следующий алгоритм:

Шаг № 1: определяются начальные координаты складов $A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, m}$, методом случайной равномерной генерации положений.

Шаг № 2: из точек A_k выпускаются световые волны и производится сегментация области D на m зон [1]. Для каждого потребителя B_i , $i = \overline{1, n}$, устанавливается принадлежность к зоне D_k . Затем внутри k -й области определяется оптимальное расположение склада A_k [4]. Процесс переопределения координат (шаг 2) повторяется до тех пор, пока изменяются координаты складов A_k .

Шаг № 3: определяется суммарное время доставки груза со всех складов до «своих» потребителей. Запоминается конечное положение A_k , и процесс повторяется с шага № 1.

5. Программная система «Волна»

Разработанные методы решения задач о прокладке ВСМ (п. 2) и об определении оптимального расположения логистических центров (п. 4) реализованы автором в рамках программной системы «Волна», которая также позволяет решать ранее рассмотренные [1, 4, 5] задачи об оптимальном маршруте, об оптимальном размещении одного логистического центра, об идентификации и сегментации логистических зон.

Литература

- [1] Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. Об одном численном методе решения некоторых задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вестник ИрГТУ. 2011. № 6(53). С. 6–12.
- [2] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: Пер. с англ. М.: Мир. 1965.
- [3] Башуров В.В., Фильмоненкова Т.И. Математические модели безопасности. Новосибирск: Наука. 2009.
- [4] Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. О решении задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Современные проблемы математики: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург. ИММ УрО РАН, 2011. С. 31–33.
- [5] Казаков А.Л., Лемперт А.А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 50–57.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТНОЙ РЕАКЦИОННОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ УЧЕТЕ ОБРАТИМОСТИ ХИМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Зверев В.С., Иванов А.О.¹

В ходе разработки «концепции электрохимического подхода к реакциям синтеза сложных ионных соединений и межфазным транспортным процессам» [1] изучалось твердофазное распространение химически активного реагента (диффузанта) на поверхности твердого вещества – подложки, сопровождающееся диффузионным проникновением внутрь и последующей фронтальной химической реакцией. Данный комплекс явлений получил название поверхностной реакционной диффузии. При экспериментальном исследовании наблюдалось довольно неожиданное поведение для диффузионных процессов: с течением времени длина поверхностного слоя вступившего в реакцию вещества практически стабилизировалась, что и привлекло внимание к данной проблеме.

Ранее, при построении модели данного явления, подразумевалось безусловное взаимодействие веществ [2]. Однако большинство реакций идут обратимо, и возникает необходимость принимать во внимание константы равновесия. Данный доклад посвящен математической модели поверхностной реакционной диффузии при учете обратимости химической реакции, описанию численного решения и анализу его сходимости.

Будем использовать следующие обозначения: u – концентрация диффузанта на поверхности подложки, w – внутри подложки, S – глубина фронта реакции, u_c – концентрация динамического равновесия. Поверхностная реакционная диффузия при учете обратимости химической реакции может быть описана следующей моделью:

$$u'_t = u''_{\xi\xi} + P w'_\eta \Big|_{\eta=0}, \quad u(t, 0) = 1, \quad u(0, \eta) = 0, \quad t > 0, \quad \xi > 0, \quad (1)$$

¹Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» и частично поддержана грантом РФФИ № 10-01-96045-р_урал_a.

$$w'_t = F w''_{\eta\eta}, \quad 0 < \eta < S(t, \rho), \quad (2)$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad w|_{\eta=0} = u, \quad w'_\eta|_{\eta=S} = -H(w - u_c)(w - u_c)|_{\eta=S},$$

$$S'_t = H(w - u_c)(w - u_c)|_{\eta=S}, \quad S(0, \rho) = 0, \quad (3)$$

где P, F – параметры модели. Соотношения (1), (2) описывают процесс диффузии на поверхности подложки и внутри нее. Уравнение (3) задает движение фронта реакции. Продвижение фронта вглубь и на поверхности возможно лишь в случае, когда концентрация вещества больше, чем u_c . Данное допущение математически удобно записывать с помощью множителя $H(w - u_c)$, где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда. В качестве уравнения, определяющего длину прореагировавшего поверхностного слоя $l_s(t)$, естественно выбрать следующее: $u(t, l_s(t)) = u_c$. Отметим, что модель поверхностной реакционной диффузии (1)-(3) – система уравнений параболического типа с подвижной неизвестной границей, что делает задачу нелинейной.

Трудности, связанные с движущимся фронтом, можно обойти, ограничиваясь первым приближением в методе дифференциальных рядов для задач с подвижной границей (описание метода можно найти, например, в [3]). Тогда $w = (u - u_c)(1 - H(u - u_c)\eta/(1 + S)) + u_c$ и внутренняя задача (2) исключается из рассмотрения. Оставшаяся система из двух уравнений решается численно. Для этого сначала луч $\xi > 0$ переводится в отрезок $x \in [0, 1]$, и, используя известные формулы конечно-разностной аппроксимации, получаем нелинейные разностные уравнения, которые, в свою очередь, решаются итерационно по следующей схеме:

$$\frac{u_{k,i}^{(s)} - u_{k-1,i}^{(s)}}{\tau} = \frac{x_i^4}{h^2} \left(u_{k,i+1}^{(s)} - 2u_{k,i}^{(s)} + u_{k,i-1}^{(s)} \right) - \frac{PH \left(u_{k,i}^{(s-1)} - u_c \right) \left(u_{k,i}^{(s-1)} - u_c \right)}{1 + S_{k,i}^{(s-1)}},$$

$$\frac{S_{k,i}^{(s)} - S_{k-1,i}^{(s)}}{\tau} = \frac{H \left(u_{k,i}^{(s-1)} - u_c \right) \left(u_{k,i}^{(s-1)} - u_c \right)}{1 + S_{k,i}^{(s-1)}},$$

где s соответствует номеру итерации, $u_{k,i} = u(k\tau, ih)$, $S_{k,i} = S(k\tau, ih)$, а h и τ – шаги равномерной сетки по пространственной

и временной координатам соответственно. Теоретическое исследование построенной нелинейной разностной схемы позволяет получить условие, при котором итерации сеточной задачи сходятся к решению:

$$\tau < \frac{1}{2P}.$$

В заключение приведем результаты расчетов по построенному алгоритму (рис. 1). Было выявлено, что даже при малом значении

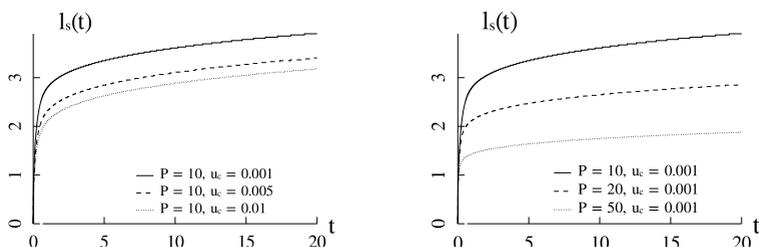


Рис. 1: длина поверхностного слоя $l_s(t)$

u_c , но достаточно большой величине параметра интенсивности оттока P , рост длины поверхностного слоя становится практически незаметным, а скорость роста падает в десятки раз по сравнению со скоростью в начальный момент. Все это позволяет говорить о возможности квазистабильзации видимого прореагировавшего слоя во время проведения экспериментов.

Литература

- [1] *Нейман А.Я.* Электроповерхностные явления в твердофазных системах // Журнал физической химии. 2001. Т. 75. № 12. С. 2119–2134.
- [2] *Зверев В.С.* Моделирование поверхностной реакционной диффузии и численное решение // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 7. С. 82–92.
- [3] *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высшая школа, 2001.

ПРИВЕДЕННАЯ ФУНКЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА СЛОИСТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

Зотина В.О.

При производстве редкоземельных материалов используются хлораторы. Хлоратор представляет собой печь, состоящую из кирпичной кладки и нескольких теплоизоляционных слоев (преимущественно насыпных).

Стоимость одной хлораторной печи составляет около 20 миллионов рублей, а срок эксплуатации всего 11 месяцев. При разборе печи после эксплуатации замечено, что ее стенки сильно повреждены. Химические реакции, происходящие внутри, разъедают внутреннюю сторону хлоратора, но, кроме этих повреждений, обнаруживаются трещины в стенках хлоратора.

Основной причиной преждевременного разрушения хлоратора является температурное поле в его стенках, порождающее неблагоприятное напряженное состояние. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в стенках хлоратора решается задача теплопроводности, а полученное температурное поле затем используется для определения НДС в задаче термоупругости [2]. В этом последнем шаге очень неудобными оказываются изоляционные слои. В настоящей работе предлагается метод исключения изоляционных слоев из расчетной схемы с компенсацией их воздействия на температурное поле в стенке печи посредством введения эффективной функции теплообмена с внешней средой.

Для иллюстрации метода рассматривается следующая задача стационарной теплопроводности. В качестве объекта исследования выбирается горизонтальное сечение в средней части печи. Ввиду того что сечение имеет две оси симметрии, будем рассматривать его четвертую часть, которая имеет изоляционную обшивку (рис. 1).

Необходимо решить задачу теплопроводности для установившегося режима (рабочая температура внутри печи 1000 °С, на внешней поверхности – теплообмен с внешней средой) [1].

Решаем стационарную температурную задачу (рис. 2).

Решим ту же задачу, но без теплоизоляционных слоев. Получаем два графика распределения температуры по границе печи с изоля-

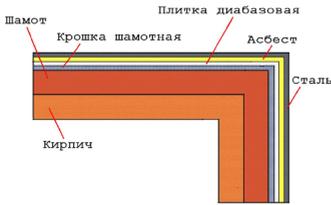


Рис. 1: четвертая часть горизонтального сечения хлоратора со слоистой обшивкой

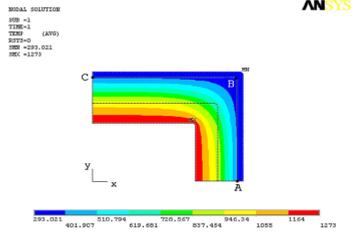


Рис. 2: распределение температуры в стенке печи с обшивкой

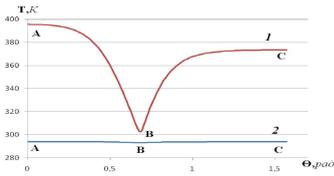


Рис. 3: распределение температуры по границе ABC: 1 – печь с изоляционными слоями, 2 – печь без изоляционных слоев

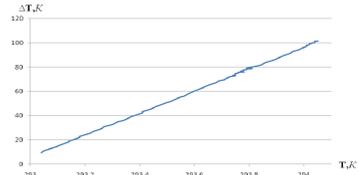


Рис. 4: зависимость расхождения двух решений по линии ABC от температуры

ционным слоем и без него (рис. 3).

В качестве коэффициента теплообмена выберем некую функцию, которая обеспечила бы температурную зависимость вида 1 (рис. 3) на внешней границе кирпичной кладки. Вид этой функции определим из графика зависимости расхождения двух решений в соответствующих точках границы ABC от температуры (рис. 4). Из графика видно, что разница в значениях растет при увеличении температуры, поэтому значение искомой функции должно уменьшаться с ростом температуры. Примем функцию теплообмена в следующем виде:

$$h = a + b/T, \tag{1}$$

где a, b – параметры, T – температура.

Необходимо найти такие параметры $\{a, b\}$, при которых функция приближает решение задачи к исходному решению.

Поставим задачу оптимизации, в которой $\{a, b\}$ – пространство поиска решения, целевая функция в соответствии с методом наименьших квадратов имеет вид:

$$\Phi(a, b) = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{T_i(\Theta) - \tilde{T}_i(\Theta)}{T_i(\Theta)} \right)^2}, \quad (2)$$

где $T_i(\Theta)$ – заданная температура на внешней поверхности кирпичной кладки печи с изоляционным слоем, $\tilde{T}_i(\Theta)$ – температура в тех же точках без изоляционного слоя.

Для определения параметров используем метод сеточного поиска. Невязку считаем по формуле (2). В результате найденная нами функция теплообмена со средой имеет вид (погрешность 0.05%):

$$h = 0.183 + 0.0105/T. \quad (3)$$

Выводы

1. Предложен алгоритм нахождения функции теплообмена со средой, заменяющей теплоизоляционный слой хлораторной печи, а также вид этой функции.
2. Для реализации алгоритма написана программа в ANSYS [3].
3. Для установившегося режима работы хлоратора найден вид функции теплообмена со средой (3). Погрешность 0.05%.
4. Результаты работы можно использовать для упрощения решения задачи о расчете НДС в стенках хлоратора.

Литература

- [1] Кикоин И.К. Справочник под редакцией академика Кикоина И.К. Таблицы физических величин. — М.: Атомиздат, 1976. С. 721–723.
- [2] Лыков А.А. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. С. 159–177.
- [3] Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. — М.: ДМК Пресс, 2005. С. 430–434.

О РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Казаков А.Л., Батагаева Т.А.¹

Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [1, 2] часто встречаются при численном решении краевых задач математической физики, построении интерполяционных сплайнов и т.д. [3, 4].

Для установления однозначной разрешимости таких систем обычно используют условие диагонального преобладания. Это условие является довольно жестким. Целью данного исследования было его ослабление. Поставленную цель удалось достичь в одном частном, но весьма распространенном случае, когда все поддиагональные, наддиагональные и диагональные элементы равны между собой (однако, вообще говоря, не равны друг другу). Авторами также получены явные формулы для представления решений таких систем.

Рассматриваются трехдиагональные матрицы, в которых, как отмечалось, диагональные, наддиагональные и поддиагональные элементы равны между собой:

$$A_n = \begin{pmatrix} b & c & \dots & 0 \\ a & b & c & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & c \\ 0 & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha = ac$, $\gamma = b$, а Δ_n – определитель матрицы A_n . Соотношения для его вычисления имеют вид:

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = \gamma; \quad \Delta_n = \gamma \cdot \Delta_{n-1} - \alpha \cdot \Delta_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1)$$

Будем в дальнейшем считать, что $\alpha \neq 0$.

Из формулы (1) видно, что каждый член последовательности одновременно зависит сразу от двух предыдущих членов. Рассмотрим

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00245

отношение двух соседних определителей

$$\kappa_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \gamma - \alpha \cdot \frac{1}{\kappa_{n-1}}.$$

Можно видеть, что каждый последующий член $\{\kappa_n\}$ зависит только от одного предыдущего. Далее приводятся некоторые свойства этой последовательности.

Если предположить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = \kappa_\infty$ существует, то, как легко убедиться, он удовлетворяет уравнению

$$\kappa_\infty = \gamma - \frac{\alpha}{\kappa_\infty},$$

корни которого вычисляются по формулам:

$$\kappa_\infty = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}}{2} = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha}.$$

В случае $D = \gamma^2 - 4\alpha > 0$ один из корней (меньший по модулю) является посторонним. Если же $D < 0$, то последовательность $\{\kappa_n\}$ заведомо является расходящейся.

Для трехдиагональных СЛАУ авторами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.

1. Если последовательность $\{\kappa_n\}$ является сходящейся, то $\Delta_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Если $D = \gamma^2 - 4\alpha \geq 0$, то последовательность $\{\kappa_n\}$ является сходящейся.

Теорема 2.

Решение СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{l} bx_1 + cx_2 = d_1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ ax_{k-1} + bx_k + cx_{k+1} = d_k \\ \dots\dots\dots \\ ax_{n-1} + bx_n = d_n \end{array} \right. \quad (2)$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_1^{(n)} &= \frac{1}{\Delta_n} \sum_{i=1}^n \Delta_{n-i} (-c)^{i-1} d_i^{(n)}, \\
 x_k^{(n)} &= \frac{1}{\Delta_n} \left(\Delta_{n-k} \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_{i-1} (-a)^{k-i} d_i^{(n)} + \Delta_{n-k} \Delta_{k-1} d_k^{(n)} + \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{k-1} \sum_{i=k+1}^n \Delta_{n-i} (-c)^{i-k} d_i^{(n)} \right), \\
 x_n^{(n)} &= \frac{1}{\Delta_n} \sum_{i=1}^n \Delta_{i-1} (-a)^{n-i} d_i^{(n)},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $k = 2, \dots, n-1$; n – порядок СЛАУ (2); Δ_i вычисляется по формулам (1).

Таким образом, в ходе исследования трехдиагональных СЛАУ авторами получено условие разрешимости таких систем. Это условие в случае $\alpha < 0$ не совпадает с условием диагонального преобладания. Кроме того, построено явное решение (3) рассмотренной СЛАУ, которое, в частности, можно применить для проведения численных расчетов. Такой подход имеет преимущество перед методом прогонки, например, при решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с помощью неявной разностной схемы или схемы Кранка–Николсона, когда матрица СЛАУ постоянна, а вектор свободных членов меняется на каждом шаге.

Литература

- [1] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [2] Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.
- [3] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука. 1978.
- [4] Баутин С.П., Казаков А.Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.¹

Рассмотрим в общем виде n -мерную динамическую модель, заданную системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

и соответствующую ей стохастическую систему уравнений Ито:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (2)$$

где x – n -мерный вектор, $f(x)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция, $\sigma(x)$ – $n \times m$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, $w(t)$ – m -мерный стандартный винеровский процесс, скалярный параметр ε характеризует степень интенсивности возмущений.

Пусть аттрактором детерминированной системы (1) является предельный цикл $\Gamma = \{\xi(t) \mid 0 \leq t < T\}$, задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$. При воздействии стохастических шумов вокруг цикла формируется стохастический аттрактор – стационарно распределенный пучок случайных траекторий системы (2). Ширина разброса случайных состояний в пучке стохастического цикла может быть очень неравномерна.

Траектории стохастического цикла лежат в некоторой инвариантной для системы окрестности U . Пусть Π_t – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t < T$), U_t – окрестность точки $\xi(t)$, лежащая в Π_t : $U_t = U \cap \Pi_t$. Обозначим при помощи вектор-функции X_t точки пересечения случайных траекторий нелинейной системы (2) с U_t . Случайная переменная X_t в окрестности U_t имеет некоторое стационарное распределение с плотностью $\rho_t(x, \varepsilon)$.

Для нахождения этой плотности распределения в системах с малыми случайными возмущениями, в работе А.Д. Вентцеля и М.И.

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантов Федерального агентства по образованию РФФИ 10-01-96022урал.

Фрейдлина [1] предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – *квазипотенциал*. С помощью квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи цикла можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику плотности распределения [1]

$$\rho_t(x, \varepsilon) = K \cdot \exp \left(- \frac{(x - \xi(t))^T W^+(t) (x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$. Здесь $+$ есть знак псевдообращения.

Это распределение, сосредоточенное в гиперплоскости Π_t , является сингулярным. Для невырожденных шумов $\text{rank } D(t, \varepsilon) = n - 1$.

Матрица $W(t)$, играющая роль *коэффициента стохастической чувствительности* цикла, является решением системы [1]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \quad (3)$$

$$W(t)r(t) = 0, \quad r(t) = f(\xi(t)), \quad W(t+T) = W(t).$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^T(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)),$$

$$P(t) = P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^T}{r^T r},$$

где P_r – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$. Эта система, благодаря экспоненциальной устойчивости предельного цикла, имеет единственное решение.

В силу вырожденности $W(t)$, минимальное из её собственных значений равно нулю. Для системы размерности $n = 3$ *функция стохастической чувствительности* цикла в каждый момент t может быть выражена двумя собственными числами $\eta_1(t) \geq \eta_2(t)$. Для невырожденных шумов функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ являются положительными и задают размер эллипса рассеивания случайных состояний системы в плоскости Π_t , а соответствующие ортонормированные собственные векторы $h_1(t)$ и $h_2(t)$ определяют направления осей этого эллипса.

Нахождение матрицы W из уравнения (3) имеет высокую вычислительную сложность и может потребовать значительных временных затрат для достижения необходимой точности. Вместо этого можно вывести формулы для вычисления искомых характеристик напрямую, используя сингулярное разложение.

Сингулярное разложение матрицы $W(t)$ при $n = 3$ имеет вид:

$$W(t) = \eta_1(t)h_1(t)h_1^\top(t) + \eta_2(t)h_2(t)h_2^\top(t).$$

Обозначим через $u_1(t)$, $u_2(t)$ некоторый ортонормальный базис плоскости Π_t . Собственные векторы $h_1(t)$ и $h_2(t)$ могут быть получены поворотом базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$.

Функции $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta}_1 = \eta_1 h_1^\top [F + F^\top] h_1 + h_1^\top S h_1,$$

$$\dot{\eta}_2 = \eta_2 h_2^\top [F + F^\top] h_2 + h_2^\top S h_2,$$

$$(\eta_1 - \eta_2)\dot{\varphi} = \eta_2 h_1^\top F h_2 + \eta_1 h_1^\top F^\top h_2 + h_1^\top S h_2 - (\eta_1 - \eta_2)\dot{u}_1^\top u_2,$$

и могут быть найдены численно методом последовательных приближений.

Литература

- [1] *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [2] *Баширицева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1998. Т. 6, № 5. С. 19-27.

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ В СИСТЕМЕ ЧЕНА

Кошелев Г.Н.¹

Рассматривается стохастически возмущенная система Чена [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot (x_2 - x_1) + \varepsilon \cdot \dot{\omega}_1, \\ \dot{x}_2 = (c - a) \cdot x_1 - x_1 \cdot x_3 + c \cdot x_2 + \varepsilon \cdot \dot{\omega}_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 \cdot x_2 - b \cdot x_3 + \varepsilon \cdot \dot{\omega}_3, \end{cases} \quad (1)$$

где ω_i — стандартные независимые винеровские процессы, а ε — интенсивность случайных возмущений. При $\varepsilon = 0$ система примет детерминированный вид, в которой при $a = 45$, $c = 28$ и $b \in [1.1, 2.37]$ наблюдаются устойчивые предельные циклы, а в области $[2.0, 2.37]$ изменения параметра b находится зона удвоения периода. На рис. 1, a изображен предельный 2-цикл, наблюдаемый в системе при $b = 2.3$. На рис. 1, b - $в$ изображены стохастические аттракторы при различных значениях ε .

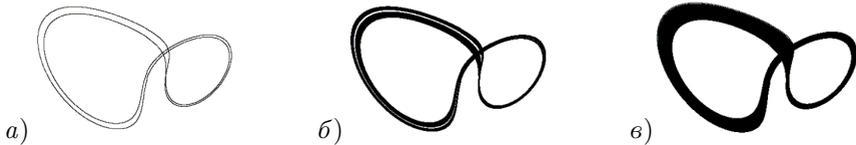


Рис. 1: детерминированный цикл (a) и стохастические циклы при $\varepsilon = 0.005$ (b) и $\varepsilon = 0.015$ ($в$)

Проанализируем предельный 2-цикл (рис. 1, a) и соответствующие ему стохастические аттракторы (рис. 1, b - $в$) при различных значениях интенсивности стохастического возмущения. С увеличением интенсивности случайных возмущений увеличивается разброс стохастических траекторий вокруг предельного цикла. Учитывая, что траектории 2-цикла располагаются близко друг к другу, при некотором критическом значении ε стохастические траектории сольются воедино и стохастический 2-цикл превратится в 1-цикл. Дан-

¹Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10-01-960022 урал

ное явление называется обратной стохастической бифуркацией. Вероятностный механизм обратной стохастической бифуркации удобно представить на гистограммах распределения вдоль заданной прямой проекций точек пересечения стохастического аттрактора с секущей плоскостью α . Плоскость α выбирается, исходя из условия перпендикулярности α и детерминированного цикла Γ в некоторой точке X . Прямая в плоскости α выбирается таким образом, чтобы проекции точек пересечения стохастического аттрактора адекватно отражали пространственное расположение точек друг относительно друга. Удобно выбрать прямую, проходящую через точку X и ближайшую к ней точку пересечения плоскости α и цикла Γ .

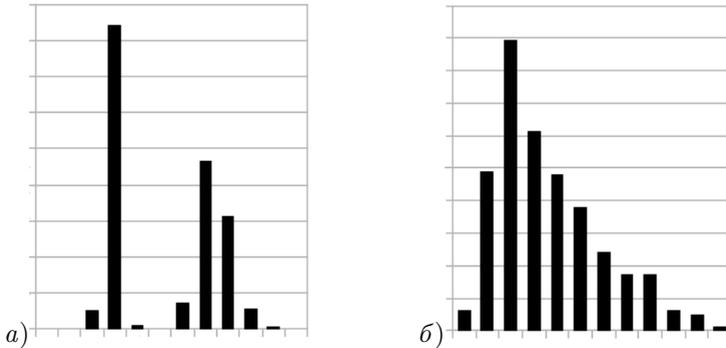


Рис. 2: гистограммы при интенсивности стохастических возмущений $\varepsilon = 0.005$ (а) и $\varepsilon = 0.015$ (б)

Проанализируем гистограммы, изображенные на рисунках 2, а-б. Здесь изображены гистограммы распределения проекций стохастических точек на прямую, проходящую через точки цикла $(1.97, 1.16, 13.36)$ и $(1.90, 1.02, 13.59)$. Как видим, при малой интенсивности стохастических возмущений $\varepsilon = 0.005$ гистограмма имеет бимодальную форму. С увеличением интенсивности два пика сливаются, и при $\varepsilon = 0.015$ происходит обратная стохастическая бифуркация — форма гистограммы становится унимодальной и кратность стохастического аттрактора уменьшается с двух до одного.

Получение данных гистограмм сопровождается трудоемкими вычислениями. Поэтому в работе предлагается метод, основанный на

функции стохастической чувствительности (ФСЧ), предложенной в работе [2], и доверительных эллипсах [3]. Доверительные эллипсы строятся по ФСЧ для заданного ε и доверительной вероятности $0 < p < 1$. На рисунке 3 изображены доверительные эллипсы, построенные с использованием метода функции стохастической чувствительности в точках $(1.97, 1.16, 13.36)$ и $(1.90, 1.02, 13.59)$ с доверительной вероятностью $p = 0.95$, и точки пересечения стохастического аттрактора с плоскостью α . Как видим, наиболее плотное рас-

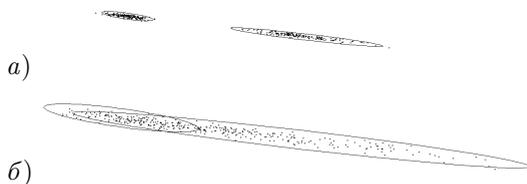


Рис. 3: доверительные эллипсы с $p = 0.95$ при $\varepsilon = 0.005$ (а) и $\varepsilon = 0.015$ (б)

положение точек находится в области, ограниченной пересечением двух эллипсов. Таким образом, пересечение эллипсов сигнализирует об обратной стохастической бифуркации. Следовательно, данный метод позволяет оценить критическое значение ε , при котором в системе происходит обратная стохастическая бифуркация.

Литература

- [1] *Chen G., Ueta T.* Yet another chaotic attractor, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 9, № 7, pp. 1465–1466, 1999.
- [2] *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 66, pp. 55–67, 2004.
- [3] Кошелев Г. Н., Башкирцева И. А. Метод доверительных эллипсов в анализе стохастических аттракторов // *Современные проблемы математики, тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции*, с. 87–89. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.

ЗАКРУТКА ГАЗА СИЛОЙ КОРИОЛИСА ПРИ ПЛАВНОМ СТОКЕ

Крутова И.Ю.¹

Система уравнений газовой динамики (СУГД) для изэнтропических нестационарных общих пространственных течений политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса имеет следующий вид [1,2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + wv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе (1): t – время; x, y, z – декартовы независимые переменные, в плоскости переменных x, y введена полярная система координат (r, φ) ; $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука в газе; $\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа в уравнении состояния $p = \rho^\gamma / \gamma$, где p и ρ – давление и плотность газа; u, v, w – соответственно радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа; $a = 2\Omega \sin \psi$; $b = 2\Omega \cos \psi$; $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$ – модуль угловой скорости вращения Земли; ψ – широта точки O на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости xOy , вращающейся вместе с Землей и касающейся поверхности Земли в точке O ; $g = \text{const} > 0$ – постоянное ускорение свободного падения. Если точка O – начало прямоугольной системы координат лежит в Северном полушарии, то $0 < \psi \leq \pi/2$. Если в Южном, то $-\pi/2 \leq \psi < 0$. На экваторе $\psi = 0$. В данной работе, как и в [1, 2], в системе (1) не учитывается центробежное ускорение: $-\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}))$, где \mathbf{R} – вектор, соединяющий точку центр Земли и точку O , \mathbf{r} – радиус-вектор текущей

¹Работа поддержана РФФИ, проект № 11-01-00198.

точки в системе координат x, y, z .

Пусть соотношения

$$r = r_0(t, z), \quad r_0(t, z)|_{t=0} = r_{00} = \text{const} > 0$$

с аналитической функцией $r_0(t, z)$ задают поверхность звуковой C^+ -характеристики, которая при $t \geq 0$ от цилиндра $r = r_{00}$ в сторону возрастания r распространяется по покоящемуся в поле тяжести газу, имеющему параметры:

$$\begin{aligned} c(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} &= c_0(z) \equiv \sqrt{c_{00} - (\gamma - 1)gz}; \quad c_{00} = \text{const} > 0, \\ u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} &= v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} = \\ &= w(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} \equiv 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть на поверхности цилиндра, т.е. при $r = r_{00}$, задана радиальная скорость газа

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{00}} = u_0(t), \quad u_0(0) = 0, \quad u'_0(0) < 0, \tag{3}$$

где функция $u_0(t)$ предполагается монотонной и аналитической в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Условие (3) описывает заданный на поверхности цилиндра $r = r_{00}$ плавный радиальный сток газа в направлении оси Oz .

Теорема. *Задача (1)–(3) при любом значении $\varphi = \varphi_0$ ($0 \leq \varphi_0 < 2\pi$) имеет в некоторой окрестности точки ($t = 0, r = r_{00}, \varphi = \varphi_0, z = 0$) единственное аналитическое решение, представимое сходящимся рядом*

$$U(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r, \varphi, z) \frac{(r - r_0(t, z))^k}{k!}; \quad U = \begin{pmatrix} c \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы проводится сведением задачи (1)–(3) к характеристической задаче Коши стандартного вида [3, 4], для которой справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской.

Первые коэффициенты ряда (4) строятся в явном виде при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Их анализ приводит к следующим значениям производных функции u , выводящих

с C^+ -характеристики:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{C^+} = 0; \quad \text{sign} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \Big|_{C^+} \right) = \text{sign} (\sin \psi),$$

т.е. в указанной окрестности знак производной $\partial^2 v / \partial r^2|_{C^+}$ совпадает со знаком $\sin \psi$ и, следовательно, указанная производная положительна в Северном и отрицательна в Южном полушариях.

Установленные знак неравенства для производной $\partial^2 v / \partial r^2|_{C^+}$ и равенство $\partial v / \partial r|_{C^+} = 0$ доказывают следующий факт: *при плавном стоке газа одновременно с радиальным движением газа при стоке сразу возникает окружное движение (закрутка газа) в положительном направлении для случая Северного полушария и в отрицательном – для Южного полушария.*

Приведенная в работе теорема обобщает теорему, ранее доказанную в случае двух независимых переменных t, r [5].

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору С.П. Баутину.

Литература

- [1] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. — М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. — Новосибирск: Наука, 2008.
- [3] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 1, № 11. С. 2052–2063.
- [4] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. — Новосибирск: Наука, 2009.
- [5] Крутова И.Ю. Задача о плавном стоке в переменных u, t как характеристическая задача Коши стандартного вида // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2011. № 1(9). Екатеринбург: УрГУПС, 2011.

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Куркина М.В.¹, Мохов А.С.

Одна из важных задач в теории исследования операций – задача распределения ресурсов. Как правило, данная задача решается численно с использованием методов динамического программирования. Качественное исследование задачи в общем случае затруднительно и не проводится.

В данной работе исследуется линейная задача распределения ресурсов с использованием интервального анализа.

Обобщенная линейная модель с интервальными коэффициентами. В классической задаче [1] распределения ресурсов планируется проект вложения ресурсов в деятельность m предприятий в течение n лет. Начальный ресурс равен ξ_0 . Ресурс X , вложенный в i -е предприятие, приносит к концу года доход $f_i(X)$ и возвращаются в размере $\varphi_i(X) < X$; $i = 1, 2, \dots, m$. По истечении года весь оставшийся ресурс заново перераспределяют между предприятиями, новых ресурсов не поступает и доход в производство не вкладывается. Требуется найти оптимальный способ распределения имеющегося ресурса. Процесс распределения ресурса рассматривается как n -шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года. Ресурс здесь понимается в обобщенном смысле слова, он может быть технологический, трудовой или финансовый.

Ранее данная задача исследовалась в предположении линейности функций $f_i(X)$ и $\varphi_i(X) < X$ [2, 3]. Путем введения интервальных коэффициентов в линейные функции, можно постановку задачи распределения ресурсов приблизить к реальной задаче.

Пусть функции $f_i(X)$ и $\varphi_i(X)$ (функции дохода и возврата средств соответственно) – линейные: $f_i(X) = \mathbf{h}_i X$, $\varphi_i(X) = \mathbf{r}_i X$, где $\mathbf{h}_i = [h_i^0, h_i^1]$, $\mathbf{r}_i = [r_i^0, r_i^1]$, $i = 1, 2, \dots, m$, – интервалы возможных

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

значений коэффициентов. Требуется определить возможные значения дохода и соответствующее оптимальное управление.

Обозначим через $Z^*(y, k)$ максимальное значение дохода для оптимального процесса управления на отрезке лет $[k, k + 1, \dots, n]$ с начальным ресурсом y (функции Р. Беллмана условного оптимального дохода).

Теорема 1. *Функции $Z^*(y, k)$ – линейные, т.е. $Z^*(y, k) = \mathbf{H}_k$. Здесь интервалы \mathbf{H}_k определяются формулой*

$$\mathbf{H}_k = [\lambda_0^{(n-k)}(0), \lambda_1^{(n-k)}(0)],$$

где $\lambda^{(j)}(x) = \lambda(\lambda^{(j-1)}(x))$, $j = 2, \dots, k$, – композиции, составленные из функций λ ; функции $\lambda_0(x) = \max_{1 \leq i \leq m} [h_i^0 + r_i^0 x]$, $\lambda_1(x) = \max_{1 \leq i \leq m} [h_i^1 + r_i^1 x]$ – верхние огибающие линейных функций (рис. 1).

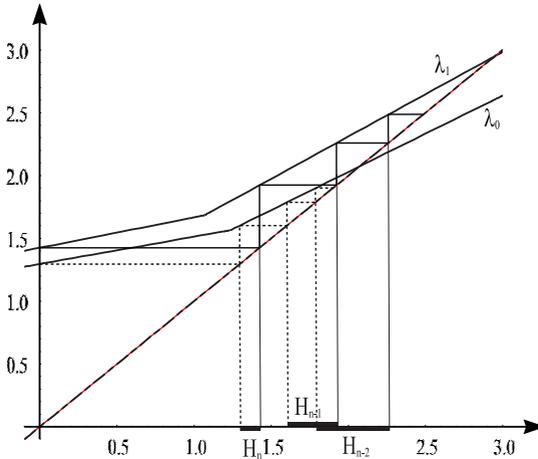


Рис. 1: построение интервалов H_k

Определение 1. Величины $P_i^0 = \frac{h_i^0}{1-r_i^0}$, $P_i^1 = \frac{h_i^1}{1-r_i^1}$ назовем соответственно нижним и верхним значением коэффициента эффективности i -го предприятия, очевидно $P_i^0 \leq P_i^1$. Интервал $[P_i^0, P_i^1]$ назовем интервалом эффективности i -го предприятия.

Теорема 2. Пусть $r_i = [r_i^0, r_i^1] \subset [0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Для обобщенной линейной модели распределения ресурсов с интервальными коэффициентами справедливы соотношения

$$\max_i h_i^0 \leq H_1 \leq \max_i P_i^1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_1 \in \left[\max_i P_i^0; \max_i P_i^1 \right],$$

где коэффициент $\lim_{n \rightarrow \infty} H_1$ соответствует бесконечношаговой модели распределения ресурсов.

Рассмотрим соответствующую стохастическую линейную задачу динамического распределения ресурсов. Пусть $h_i \in [h_i^0, h_i^1]$, $r_i \in [r_i^0, r_i^1]$, $i = 1, 2, \dots, m$, — равномерно и независимо распределенные случайные величины. Тогда их математические ожидания равны $M[h_i] = (h_i^0 + h_i^1)/2$, $M[r_i] = (r_i^0 + r_i^1)/2$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 3. Положим $\bar{\lambda}(x) = \max_{1 \leq i \leq m} (M[h_i] + M[r_i]x)$. Тогда математическое ожидание функций условного оптимального дохода $Z^*(y, k) = \bar{H}_k y$ будет линейно по y и будет верно неравенство

$$\bar{H}_k \geq \bar{\lambda}^{(n-k)}(0).$$

Заключение. Использование интервального анализа в динамической задаче распределения ресурсов позволяет приблизить постановку задачи к реальной, определить важные числовые характеристики и качественное поведение решения данной задачи.

Литература

- [1] *Вентцель Е.С.* Исследование операций. — М.: Наука, 1972.
- [2] *Куркина М.В.* Динамическая система, связанная с линейной задачей распределения ресурсов // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 401. № 3. С. 306–308.
- [3] *Куркина М.В., Мохов А.С.* Государственное управление в динамической линейной задаче распределения ресурсов / в сб. «Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс” 16–20 апреля 2011 г.», Новосибирск.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Меражова Ш.Б.

В прямоугольной области

$$D = \{(x, t) : 0 < x < l, -T < t < T\}$$

изучается краевая задача для модельного уравнения второго порядка

$$K(t) \cdot u_{tt} - h(x) \cdot u_{xx} + a(x, t) \cdot u_t + b(x, t) \cdot u_x + c(x, t) \cdot u = f(x, t), \quad (1)$$

где $K(t) \in C^2([-T, T])$, $t \cdot K(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $K(0) = 0$, $h(x) \in C^2([0, l])$, если $x \in (0, l)$, то $h(x) > 0$ и $h(0) = h(l) = 0$, $a(x, t)$, $b(x, t) \in C^1(\overline{D})$, $c(x, t) \in C(\overline{D})$.

Пусть $D^+ = D \cap \{t > 0\}$, $D^- = D \cap \{t < 0\}$, $\vec{n} = (n_x, n_t)$ – вектор внутренней нормали к границе области D ,

$$\beta(x) = a(x, 0) - K_t(0) > 0.$$

Заметим, что уравнение (1) в области D является уравнением смешанного типа.

Краевая задача: найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условию:

$$u(x, -T) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

В данной работе исследуется устойчивость разностной схемы для краевой задачи (1), (2), показывается эквивалентность (1) симметрической системе первого порядка.

Разностная схема. Схему будем строить отдельно в области D^+ и отдельно в области D^- . С этой целью в области D строим разностную сетку,

$$D^h = \{(t^k, x^i) : t^k = k \cdot \Delta, x^i = i \cdot \Delta_x, k = \overline{-m, m}, i = \overline{0, N}\}.$$

Здесь $m \cdot \Delta = T$, $N \cdot \Delta_x = l$, Δ – шаг по t , а Δ_x – шаг по x .

Введем следующие обозначения: $u = u(t^k, x_i) = u_i^k$, φ , ψ , φ^{-1} , ψ^{-1} – здесь операторы сдвига: $\varphi u_i^k = u_i^{k+1} = u^{k+1} = \hat{u}$, $\psi^{\pm 1} u_i^k = u_{i\pm 1}^k = u_{i\pm 1}$, $\varphi^{-1} u_i^k = u_i^{k-1} = u^{k-1} = \check{u}$, а также $\tau, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}$ – разностные операторы:

$$\tau = \varphi - 1, \quad \bar{\tau} = 1 - \varphi^{-1}, \quad \xi = \psi - 1, \quad \bar{\xi} = 1 - \psi^{-1}.$$

С помощью этих обозначений в области D^- предлагаем следующую разностную схему:

$$L^h u = \left[K^k \frac{\tau \bar{\tau}}{\Delta^2} - h_i \frac{\xi \bar{\xi}}{\Delta^2} + a_i^k \frac{\bar{\tau}}{\Delta} + b_i^k \frac{\bar{\xi}}{\Delta} + c_i^k \right] u = f_i^k,$$

$$k = \overline{-m+1, -1}; \quad i = \overline{0, N-1}; \tag{3}$$

$$u_i^{-m} = 0, \quad i = \overline{0, N}. \tag{4}$$

Разностная схема (3)-(4) является незамкнутой. Мы предлагаем следующие дополнительные начальные и граничные условия:

$$u_i^{-m+1} = u_i^{-m}, \quad i = \overline{0, N}; \tag{5}$$

$$u_1^k = u_0^k, \quad u_{N-1}^k = u_N^k, \quad k = \overline{-m, 0}. \tag{6}$$

Система линейных алгебраических уравнений (3)-(6) относительно неизвестных $\{u_i^k\}_{i=\overline{0, N}}^{k=\overline{-m, 0}}$ образует полную систему. После некоторых вычислений получаем следующую энергетическую оценку:

$$\Delta \cdot \Delta x \sum_{k=\overline{-m+1}}^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} (L^h u) \cdot (2u) \leq \Delta \cdot \Delta x \sum_{k=\overline{-m+1}}^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (2|K| - \Delta M_2) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\tau u}{\Delta}\right)^2 + (2h - \Delta x M_3) \left(\frac{\xi u}{\Delta x}\right)^2 + (2\delta_0 - \Delta M_1) u^2 \right\}, \tag{7}$$

где M_i , $i = \overline{1, 3}$, – положительные числа, ограниченные сверху в конечном итоге через $|a|$, $|b|$, $|K_t|$, $|h_x|$, $|a_{tt}|$, $|b_{xx}|$, $|K_{ttt}|$, $|h_{xxx}|$.

Шаги разностной сетки выбираем из условия:

$$\Delta < \min \left(\frac{r|K|}{M_2}, \frac{2\delta_0}{M_1} \right), \quad \Delta x < \frac{2h}{M_3}, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad k = \overline{-m+1, 0}. \tag{8}$$

Тогда если $f \equiv 0$, то $u_i^k \equiv 0$, при $k = \overline{-m, 0}$, $i = \overline{1, N}$.

Таким образом, энергетическая оценка (7) при условии (8) обеспечивает однозначную разрешимость и устойчивость разностной схемы (3)-(6) в области D^- .

А теперь переходим к построению и исследованию разностной схемы в области D^+ . Поскольку уравнение (1) в области D^+ является гиперболо-параболическим, применяем следующий подход. Заменим уравнение (1) в области D^+ эквивалентной ему симметрической системой первого порядка, получаем задачи для этой системы. Тогда легко можно получить априорную оценку для этой задачи:

$$I(t_2) + m \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 (V_1^2 + V_2^2 + h(x)V_3^2) dx dt \leq I(t_1) \forall t_1 < t_2 : t_1, t_2 \in [0, T],$$

где $I(t) = \int_0^1 (AV, V) dx$, $U = e^{-\lambda t} V$, m, λ – некоторые постоянные. В частности, при $t_2 = T$, $t_1 = 0$ имеем $I(t) \leq 0$ и

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 (V_1^2 + V_2^2 + h(x)V_3^2) dx dt \leq 0,$$

откуда следует $V(x, t) = 0$ и, следовательно, $U \equiv 0$, $u \equiv 0$ в области D^+ . Это дает нам возможность легко применить разностные схемы, предложенные в работе [1], для численного решения уравнения (1) в области D^+ и получить энергетические оценки типа (7).

Литература

- [1] Годунов С.К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
- [2] Рахмонов Х.О. О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа в пространстве. — Новосибирск, 1985. (Препринт / АН СССР, Сиб. отд. ИМ, № 12).
- [3] Алаев Р.Д. Метод диссипативных интегралов энергии для разностных схем. Новосибирск, Новосибирский ун-т, 1993.

МОДЕЛЬ КУРНО С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

Минарченко И.М.

Рассматривается модель Курно с n участниками, издержки которых заданы многочленами третьей степени, а обратная функция спроса является линейной:

$$F_i(x) = \left(d - a \sum_{j=1}^n x_j \right) x_i - c_i(x_i) \rightarrow \max_{x_i},$$

$$c_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i, \quad x_i \geq 0, \quad a > 0, \quad d > 0, \quad (1)$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \gamma_i > 0, \quad \delta_i \geq 0, \quad \beta_i^2 \leq 3\alpha_i \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Модель (1) изучается с позиции теории игр. Ставится вопрос, является ли данная игра потенциальной (см. [1]). В [2] доказано, что модель Курно является потенциальной тогда и только тогда, когда функция спроса в ней линейна, следовательно, в (1) существует потенциальная функция, которую можно восстановить по формуле [1]

$$U(x) = \int_0^1 \sum_{i \in I} \frac{\partial F_i(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i dt. \quad (2)$$

Таким образом, поиск равновесия в исходной модели сводится к максимизации потенциальной функции

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \left[-\alpha_i x_i^3 - (a + \beta_i) x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \right) x_i \right], \quad (3)$$

которая, как показано в работе, не является вогнутой.

В связи с отсутствием вогнутости исследуются следующие вопросы: во-первых, существуют ли стационарные точки функции (3), не являющиеся точками максимума (то есть точки минимума и седловые); во-вторых, сколько точек максимума может иметь функция. Также анализируется возможность применения численных методов для отыскания точек равновесия.

Следует отметить, что поиск равновесий производится в положительном ортанте; случаи, в которых равновесная точка попадает на границу допустимого множества, на данном этапе исследований подробно не рассматриваются.

Данная работа является продолжением исследований, представленных в [3], где изложен первоначальный анализ модели (1).

Литература

- [1] *Monderer D., Shapley L. S.* Potential Games // Games and Economic Behavior. 1996, № 14. Pp. 124–143.
- [2] *Slade M. E.* What Does an Oligopoly Maximize? // The Journal of Industrial Economics. 1994, Vol. 42, № 1. Pp. 45–61.
- [3] *Минарченко И. М.* Потенциальное и непотенциальное равновесие в модели Курно / в сб. «Системные исследования в энергетике», Труды 40-й конференции научной молодёжи ИСЭМ СО РАН. С. 316–328. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИОКАРДА ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА ЧЕЛОВЕКА: ВЕРИФИКАЦИЯ И РАСЧЁТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Правдин С.Ф., Панфилов А.В., Бердышев В.И., Кацнельсон Л.Б., Соловьёва О.Э., Мархасин В.С.¹

В работе обсуждаются вопросы создания и исследования моделей кардиомиоцитов, миокарда и сердца человека.

Из четырёх камер сердца функционально наиболее важной является левый желудочек (ЛЖ), который обеспечивает кровообращение по большому кругу. Чтобы создать интегративную модель ЛЖ, надо было объединить модели, описывающие клеточные процессы, с анатомической информацией о форме и архитектонике ЛЖ. В настоящее время существует несколько моделей клеток миокарда человека, но описание анатомии сердца остаётся не решённой до конца задачей. Чтобы «собрать» из этих моделей модель ЛЖ с учётом только мышечной ткани, даже абстрагировавшись от наличия в нём соединительной ткани и кровеносных сосудов, необходимо достаточно точно задать его форму и пространственную ориентацию мышечных волокон.

Один из подходов к этой проблеме описан в [1], где авторы смогли задать геометрию ЛЖ взрослого человека и поле направлений волокон в нём, используя однопараметрическое семейство поверхностей, единообразно заполненных кривыми. Однако данная модель не была верифицирована. Так как использованная модель формы ЛЖ практически полностью совпадает с данными анатомического исследования, приведёнными в [2], достаточно было соотнести направления волокон в нашей модели с экспериментальными данными из этой работы.

Сравниваются три угловые характеристики нашего поля направлений с данными эксперимента. Определение углов α , α_1 , α_2 и результаты их измерений также взяты из работы [2]. Сравнение было проведено в трёх участках ЛЖ: в верхней, средней и нижней его частях. Методика сравнения по каждому углу и в каждой части ЛЖ

¹Работа поддержана грантом 09-M-14-2001 Президиума УрО РАН и грантом 1F2B8M/JDW/2010-2011/10-BTL-RUS-01 Фламандского сообщества Бельгии.

была единообразна и заключалась в сравнении этих углов вдоль отрезка, ортогонального к эпикарду (такая методика принята в анатомических исследованиях).

Результаты верификации показали, что есть хорошее качественное согласие нашей модели с анатомическими данными, приведёнными в статье Стритера [2]: каждый раз угол α был близок к прямому на эпи- и эндокарде и уменьшался до 0° в середине стенки ЛЖ. Угол α_1 монотонно убывал от $+90^\circ$ до -90° и был равен 0° также в середине стенки ЛЖ. Угол α_2 убывал от эпикарда до середины стенки ЛЖ от 0° до -90° , при этом скорость убывания возрастала как в нашей модели, так и в данных Стритера. В середине стенки ЛЖ этот угол скачком менялся на $+90^\circ$ в силу его определения. После этого, во внутренней половине стенки ЛЖ, угол α_2 со всё уменьшающейся скоростью убывал до 0° .

Таким образом, предлагаемая модель адекватно воспроизводит направление волокон миокарда в ЛЖ.

На основе этой модели строения ЛЖ было смоделировано пространство и затухание волн электрического возбуждения в миокарде. Для описания распространения возбуждения была использована модель сердечных клеток Алиева–Панфилова [3] с добавлением в уравнения диффузионного слагаемого.

Для интегрирования уравнений использовалась сетка, связанная с некоторой специальной криволинейной системой координат (γ, ψ, ϕ) , в которой уравнения поверхностей ЛЖ записываются особенно просто. В силу того, что однородная сетка в криволинейной системе координат соответствует неоднородной сетке в декартовых координатах, нам пришлось провести разрежение сетки в области, где расстояния между соседними узлами были слишком малы.

Расчеты проводились также в специальной системе координат. Уравнения реакции-диффузии содержат лапласиан потенциала Δu , поэтому для их интегрирования пришлось записать его для независимых переменных (γ, ψ, ϕ) .

Для вычислений использовались два типа начальных условий. Первый тип предполагал повышенные значения потенциала в начальном состоянии в небольшой области ЛЖ. С его помощью можно описать нормальную работу сердца. Второй же тип начальных условий включал в себя повышенные значения потенциала и проводимости выходящего тока в областях, расположенных друг рядом

с другом. Условия такого рода возникают при моделировании деятельности патологически измененного миокарда (например, после инфаркта миокарда). В первом случае возникала, распространялась и затухала единичная волна, а во втором – появлялась устойчиво вращающаяся спиральная волна.

Для обоих типов начальных условий моделировались условия как изотропии, так и анизотропии. В последнем случае были заданы два различных коэффициента диффузии: один (d_1) – вдоль волокна, другой (d_2) – во всех ортогональных волокну направлениях. Элементы D_{ij} матрицы диффузии вычисляли так: $D_{ij} = \delta(i, j)d_2 + (d_1 - d_2)v_i v_j$, где (v_1, v_2, v_3) – вектор направления волокна длины 1. В условиях анизотропии наблюдался дрейф спиральной волны.

Разработанный нами подход может быть использован для моделирования нормальной и патологической электрофизиологии сердца. Мы также планируем использовать эту модель для вычисления механической активности миокарда ЛЖ.

Литература

- [1] *Правдин С.Ф. и др.* Статическая математическая модель архитектуры левого желудочка человека. Тезисы докладов 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». С. 311–314. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.
- [2] *D. D. Streeter, JR.* Gross morphology and fiber geometry of the heart / Handbook of physiology. Sec. 2. Vol. I. The Heart. Pp. 61–112. Bethesda, Maryland: Am. Physiol. Soc., 1979.
- [3] *Aliev R.R., Panfilov A.V.* A simple 2-variable model of cardiac excitation // Chaos, solitons & fractals. 1996. V. 7, iss. 3, p. 293–301.

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

Родионова Н.В.

1. Мы переносим метод построения разностных схем [1, 2] с уравнения теплопроводности на волновое уравнение: при фиксированных $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ изучается начально-граничная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \quad u(0, \xi) = \phi(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [0, 1];$$

$$u(t, 0) = \rho_0(t), \quad u(t, 1) = \rho_1(t), \quad t \in [0, 2\tau]. \quad (1)$$

Предполагаются выполненными естественные условия сопряжения $\rho_0(0) = \phi(0)$, $\rho_1(0) = \phi(1)$, $\rho'_0(0) = \psi(0)$, $\rho'_1(0) = \psi(1)$.

2. Через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0, 1]$. Пусть $h \doteq \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, $\theta \doteq \gamma^2 \frac{\tau^2}{h^2}$, $\nu \doteq \frac{h}{\tau^3}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0, 1, 2$, $h_j \doteq jh$, $j = 0, 1, \dots, 2N$.

Массив u_j^i , $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 2N$, называется *допустимым*, если $u_j^0 \doteq \phi(h_j)$, $j = 0, 1, \dots, 2N$; $u_0^i \doteq \rho_0(\tau_i)$, $u_{2N}^i \doteq \rho_1(\tau_i)$, $i = 0, 1, 2$. Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ и допустимый массив (u_j^i) порождают четыре серии ($\ell = 1, \dots, 4$, $k = 1, \dots, N$) треугольников Ω_k^ℓ (каждый треугольник содержит ровно шесть точек сетки, см. [2]) и четыре серии интерполяционных квадратичных полиномов $P_k^\ell : \Omega_k^\ell \rightarrow \mathbb{R}$, порождающих две непрерывные функции $u_L, u_R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (о построении этих квадратичных сплайнов см. формулы (3) и (4) работы [2]).

Зафиксируем $\lambda \in [0, 1]$, и пусть $\mu \doteq 1 - \lambda$, $\omega \doteq \lambda - \mu$. Очевидно, $\mu \in [0, 1]$, $\omega \in [-1, 1]$. Функции u_L и u_R порождают на множестве Ω квадратичный сплайн $u_\lambda \doteq \lambda u_L + \mu u_R$, который мы называем *аппроксимирующим сплайном*. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_j^i , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 2N - 1$. Это означает, что при фиксированном значении λ аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N - 2$. Обозначим его $\sigma_\lambda(\Omega) = \sigma_{\lambda, N}(\Omega)$. В качестве приближенного решения исходной задачи (1) принимаем сплайн, реализующий задачу

$$J \doteq J(u) \doteq \|u_{tt} - \gamma^2 u_{\xi\xi}\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \sigma_\lambda(\Omega). \quad (2)$$

3. Далее используются обозначения: $x \doteq -1 - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\mu^2} < -1$,

$$u_j \doteq u_j^2 - u_j^0, \quad y_j \doteq u_j^2 - 2u_j^1 + u_j^0, \quad j = 0, 1, \dots, 2N,$$

$$Z_k \doteq u_{2k-2}^0 - 2u_{2k-1}^0 + u_{2k}^0, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$W_k \doteq -\frac{1}{\lambda^2} \theta Z_k - \frac{1}{\mu^2} \theta Z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n \doteq N-1$$

(выражения для x и W_k имеют смысл при $\lambda\mu \neq 0$). Анализ функционала (2) и начального условия $u_t(0, \xi) = \psi(\xi)$ порождает итоговые уравнения разностной схемы (в которой $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n$):

$$x_{2j-1} - \lambda y_{2j-2} - y_{2j-1} - \mu y_{2j} = 2\tau \psi(h_{2j-1}), \quad (3)$$

$$\mu y_{2j-2} + \lambda y_{2j} - (1 - \lambda\mu) \theta (x_{2j-2} - 2x_{2j-1} + x_{2j}) - \theta Z_j = 0, \quad (4)$$

$$x_{2k} - 2y_{2k} = 2\tau \psi(h_{2k}), \quad (5)$$

$$\lambda^2 \mu^2 (y_{2k-2} + y_{2k+2}) - (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda^2 \mu^2) y_{2k} + \mu^2 \theta Z_k + \lambda^2 \theta Z_{k+1} = 0. \quad (6)$$

Для решения системы (6) применим метод прогонки. Мы, однако, приводим явные выражения для решения этой системы, — они необходимы при выводе формулы для минимума функционала (2).

4. Последовательность $\{U_n(x), x \in \mathbb{R}\}$, состоящую из многочленов Чебышева 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x) \doteq 0$, $U_0(x) \doteq 1$, $U_{n+1}(x) \doteq 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая матрица $B(x) \doteq (B_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, n$,

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{i-1}(x)U_{n-j}(x), & \text{если } i \leq j, \\ U_{j-1}(x)U_{n-i}(x), & \text{если } i \geq j. \end{cases}$$

Теорема 1. Система уравнений (3)–(6) имеет единственное решение. При этом, в зависимости от параметра $\lambda \in [0, 1]$, решения системы (6) допускают для величин y_{2k} явное представление:

$$\lambda = 0 \implies y_{2k} = \theta Z_k, \quad \lambda = 1 \implies y_{2k} = \theta Z_{k+1},$$

$$\lambda \in (0, 1) \implies y_{2k} = \frac{1}{U_n(x)} \left(-B_{k1}(x)y_0 - B_{kn}(x)y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{kj}(x)W_j \right).$$

Это позволяет последовательно вычислить значения x_{2k} , x_{2j-1} и y_{2j-1} из уравнений (5), (4) и (3) соответственно. Полученные значения позволяют, в конечном счете, вычислить все коэффициенты $u_j^1 = u_j^0 + (x_j - y_j)/2$ и $u_j^2 = u_j^0 + x_j$ оптимального сплайна.

Теорема 2. Минимум J^* функционала J достигается на решении системы (3)–(6). В зависимости от параметра $\lambda \in [0, 1]$ для него имеет место одна из следующих формул:

$$\lambda = 0 \implies \frac{1}{2\nu} J^* = (y_{2N} - \theta Z_N)^2, \quad \lambda = 1 \implies \frac{1}{2\nu} J^* = (y_0 - \theta Z_1)^2,$$

$$\begin{aligned} \lambda \in (0, 1) \implies & \frac{1 - \lambda\mu}{2\nu} J^* = \lambda^2 (1 + \mu^2) y_0^2 + \mu^2 (1 + \lambda^2) y_{2N}^2 - \\ & - 2\lambda^2 y_0 \theta Z_1 - 2\mu^2 y_{2N} \theta Z_N + (\lambda^2 + \mu^2) \sum_{k=1}^N \theta^2 Z_k^2 - \\ & - \lambda^2 \mu^2 \frac{1}{U_n(x)} y_0 \left(-B_{11}(x) y_0 - B_{1n}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{1j}(x) W_j \right) - \\ & - \lambda^2 \mu^2 \frac{1}{U_n(x)} \left(-B_{n1}(x) y_0 - B_{nn}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{nj}(x) W_j \right) y_{2N} + \\ & + \lambda^2 \mu^2 \frac{1}{U_n(x)} \sum_{k=1}^n \left(-B_{k1}(x) y_0 - B_{kn}(x) y_{2N} + \sum_{j=1}^n B_{kj}(x) W_j \right) W_k \end{aligned}$$

— положительно определенная квадратичная форма от исходных конечных разностей $Z_k = \phi(h_{2k-2}) - 2\phi(h_{2k-1}) + \phi(h_{2k})$, $k = 1, \dots, N$, $y_0 = \rho_0(2\tau) - 2\rho_0(\tau) + \rho_0(0)$, $y_{2N} = \rho_1(2\tau) - 2\rho_1(\tau) + \rho_1(0)$.

5. Формулы позволяют получить априори достаточное количество N узлов сетки для достижения нужной точности $\sqrt{J^*} < \varepsilon$.

Литература

- [1] Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. № 4. С. 154–171.
- [2] Родионов В.И., Родионова Н.В. О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Тезисы докладов 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. С. 142–144. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011.

О СДВИГЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ШУМАХ

Рязанова Т.В.¹, Ряшко Л.Б.¹

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dx = f(x)dt + \varepsilon\sigma(x)dw, \tag{1}$$

где w – винеровский процесс, $\sigma(x)$ – функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, ε – параметр интенсивности возмущений. Под действием шума в системе вокруг детерминированного равновесия \bar{x} образуется пучок случайных траекторий. Функция $\rho(x)$, задающая стационарную плотность распределения траекторий в этом пучке, может быть найдена явно из уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Обозначим через \tilde{x} точку, отвечающую максимальному значению плотности вероятности $\rho(x)$: $\tilde{x} = \arg \max \rho(x)$. Значение \tilde{x} играет важную роль в описании стохастического равновесия: величина \tilde{x} отмечает точки, в которых концентрация случайных состояний системы максимальна. В присутствии аддитивного шума точки с максимальной и минимальной концентрацией совпадают с точками покоя детерминированной системы ($\tilde{x}(\varepsilon) = \bar{x}$). При мультипликативных шумах точка максимальной концентрации не совпадает с равновесием детерминированной системы. В работе рассматривается величина сдвига $\delta(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) - \bar{x}$ в зависимости от параметров системы. Для сдвига $\delta(\varepsilon)$ получено следующее разложение.

Теорема. Пусть \bar{x} – устойчивое равновесие ($f'(\bar{x}) < 0$). Для функции $\delta(\varepsilon)$ при малых значениях шумов ε справедливо разложение

$$\delta(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) - \bar{x} = \frac{\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\varepsilon^2 + \frac{2f'(\bar{x})((\sigma'(\bar{x}))^2 + \sigma''(\bar{x})\sigma(\bar{x}))\sigma'(\bar{x})\sigma(\bar{x}) - f''(\bar{x})(\sigma'(\bar{x}))^2\sigma^2(\bar{x}))}{2(f'(\bar{x}))^3}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6).$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96022урал.

Первое приближение сдвига $\delta(\varepsilon) = \frac{\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\varepsilon^2$ определяется величиной интенсивности шума ε и значениями $\sigma(\bar{x})$, $\sigma'(\bar{x})$ и $f'(\bar{x})$. Величина $f'(\bar{x}) < 0$ является характеристическим показателем детерминированной системы в инвариантной окрестности, охватывающей равновесие \bar{x} , и характеризует степень устойчивости. Если производная $f'(\bar{x})$ близка к нулю, то равновесие \bar{x} слабо устойчиво и сдвиг $\delta(\varepsilon)$ достаточно велик. Увеличение степени устойчивости детерминированного равновесия ведет к уменьшению $\delta(\varepsilon)$.

Рассмотрим пример стохастической системы с кубической нелинейностью в форме Стратоновича:

$$dx = x(\mu - x^2)dt + \sigma_1 x \circ dw_1 + \sigma_2 \circ dw_2 \quad (2)$$

где w_1, w_2 – независимый стандартный винеровский процесс, $\sigma_1 > 0$ – интенсивность мультипликативного шума, $\sigma_2 > 0$ – интенсивность аддитивного шума.

В области значения параметра $\mu < 0$ функция плотности распределения $\rho(x)$ имеет единственный экстремум (максимум) в точке $\tilde{x}_1 = 0$. Аттрактором системы (2) является стохастическая точка покоя. При $\mu > 0$ функция плотности распределения $\rho(x)$ имеет экстремумы в точках $\tilde{x}_1 = 0$ (точка минимума), $\tilde{x}_2 = \sqrt{\mu}$ и $\tilde{x}_3 = -\sqrt{\mu}$ (точки максимума).

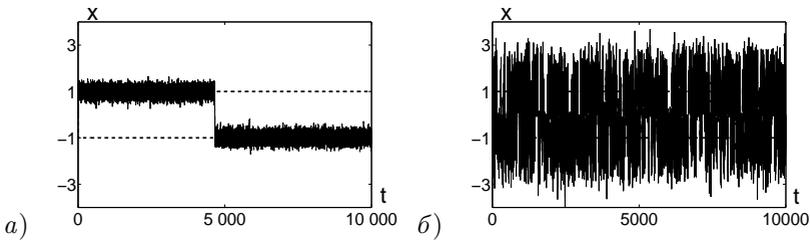


Рис. 1: случайные траектории системы при $\mu = 1$, $\sigma_2 = 0.2$

а) $\sigma_1 = 0.2$, б) $\sigma_1 = 1$

На рис. 1 представлены случайные траектории системы (2) при фиксированном значении параметров $\mu = 1$, $\sigma_2 = 0.2$ и различных интенсивностях мультипликативного шума: $\sigma_1 = 0.2$ (рис. 1, а),

$\sigma_1 = 1$ (рис. 1, б). На рис. 1 наблюдаются качественные изменения поведения случайных траекторий — переконцентрация от положительных детерминированных равновесий $\bar{x}_2 = \sqrt{\mu}$, $\bar{x}_3 = -\sqrt{\mu}$ к равновесию $\bar{x}_1 = 0$. Однако по поведению случайных траекторий довольно сложно судить о характере сдвига стохастического аттрактора. Более наглядно иллюстрируется данный эффект сдвигом максимумов функции плотности распределения (рис. 2, а). В зависимости от параметра $\varepsilon = \sigma_1$ для системы (2) проведен анализ оценки сдвига $\delta(\varepsilon)$. На рис. 2, б для системы (2) представлены графики: точной функции $\delta(\sigma_1)$, ее первого и второго приближений, найденных из разложения.

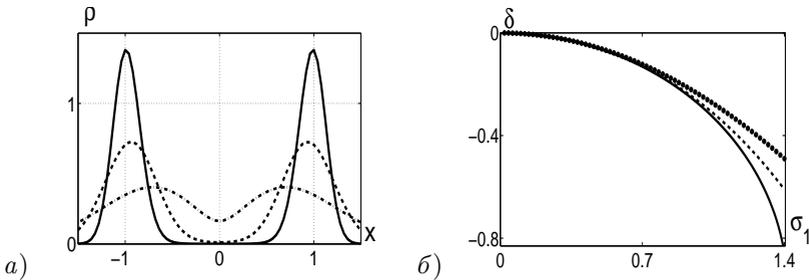


Рис. 2: а) функция плотности распределения при $\mu = 1$, $\sigma_2 = 0.2$ для $\sigma_2 = 0.2$ (сплошная), $\sigma_2 = 0.5$ (пунктир), $\sigma_2 = 1$ (точки); б) оценка сдвига стохастического аттрактора $\delta(\sigma_1)$: точная функция $\delta(\sigma_1)$ (сплошная), первое приближение (пунктир), второе приближение (точки)

Литература

- [1] Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Стохастические бифуркации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. № 6. С. 37-50.
- [2] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. — М.: Мир, 1987.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНО ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Таныгина А.Н.

Пусть X и Y — банаховы пространства, $D \subset X$ — выпуклое множество, $f : D \rightarrow Y$ — нелинейный оператор, дифференцируемый в каждой внутренней точке множества D . Одним из наиболее эффективных приближенных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

является метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где $x_0 \in D$ — начальное приближение.

Наиболее точные из известных оценок скорости сходимости процесса (2) к решению уравнения (1) были получены в работах [1, 2] при дополнительном предположении о гладкости оператора f , названном авторами регулярной гладкостью. В работе [3] была дана новая схема доказательства основной теоремы из [2], основанная на методе мажорант Л.В. Канторовича. В настоящем докладе приводится обобщение результатов работы [3] на уравнения с недифференцируемыми операторами вида

$$f(x) + g(x) = 0, \quad (3)$$

где f — регулярно гладкий оператор, g — определенный на множестве D и принимающий значения из Y нелинейный недифференцируемый оператор, удовлетворяющий модифицированному условию Липшица:

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D. \quad (4)$$

Здесь через $\psi(t)$ обозначена неубывающая функция неотрицательного аргумента, $B(x_0, t)$ — шар с центром в точке x_0 радиуса t .

Определение. Пусть $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Обозначим $h(f) = \inf_{x \in D} \|f'(x)\|$. Согласно [2], оператор f называется ω -регулярно гладким на D (или ω является модулем регулярной гладкости для оператора f на D), если существует число $h \in [0, h(f)]$ такое, что для любых $x', x'' \in D$ имеет место неравенство:

$$\omega^{-1}(h_f(x', x'') + \|f'(x'') - f'(x')\|) - \omega^{-1}(h_f(x', x'')) \leq \|x'' - x'\|, \quad (5)$$

где

$$h_f(x', x'') = \min\{\|f'(x')\|, \|f'(x'')\|\} - h.$$

Оператор f называется *регулярно гладким* на D , если он является ω -регулярно гладким на D для некоторого ω , обладающего указанными выше свойствами.

Условие (5) может быть переписано в виде:

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega(\omega^{-1}(h_f(x', x'')) + \|x'' - x'\|) - h_f(x', x''),$$

или в виде:

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega(\xi(x', x'')) + \|x'' - x'\| - \omega(\xi(x', x'')), \quad (6)$$

где $\xi(x', x'') = \omega^{-1}(h_f(x', x''))$.

Последовательные приближения по методу Ньютона–Канторовича для решения уравнения (3) имеют вид:

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (7)$$

где $x_0 \in D$ — заданное начальное приближение.

Пусть $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, $\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$, $\chi = \omega^{-1}(1-h)$, a — положительное число, удовлетворяющее неравенству $\|f(x_0) + g(x_0)\| \leq a$. Определим числовую последовательность $\{t_n\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n h + \Psi(t_n)}{h + \omega(\chi - t_n)}, \quad (8)$$

$n = 0, 1, \dots; t_0 = 0$. Если ввести в рассмотрение функции числового аргумента $t \in [0, \chi]$

$$\begin{aligned}\Phi_h(t) &= a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - th, \\ W(t) &= \Phi_h(t) + \Psi(t),\end{aligned}\tag{9}$$

то соотношение (8) можно переписать в виде

$$t_{n+1} = t_n - \frac{W(t_n)}{\Phi'_h(t_n)}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad t_0 = 0.$$

Теорема. Пусть оператор f является ω -регулярно гладким на D с некоторым h , оператор g удовлетворяет условию (4), функция (9) имеет единственный нуль t_* на отрезке $[0, \chi]$, замкнутый шар $\overline{B}(x_0, t_*)$ содержится во множестве D и выполнено условие $a < < \Omega(\chi) + h \cdot \chi - \Psi(\chi)$. Тогда:

- 1) уравнение (3) имеет единственное решение x_* в шаре $\overline{B}(x_0, t_*)$;
- 2) последовательные приближения (7) определены для всех $n = 0, 1, \dots$, принадлежат шару $\overline{B}(x_0, t_*)$ и сходятся к x_* ;
- 3) для всех $n = 0, 1, \dots$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &\leq t_{n+1} - t_n, \\ \|x_* - x_n\| &\leq t_* - t_n,\end{aligned}$$

где последовательность $\{t_n\}$ определена по правилу (8), монотонно возрастает и сходится к t_* .

Литература

- [1] Galperin A., Waksman Z. Newton's method under a weak smoothness assumption // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. Pp. 207–215.
- [2] Galperin A., Waksman Z. Regular smoothness and Newton's method // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, № 7, 8. Pp. 813–858.
- [3] Забрейко П.П., Таныгина А.Н. Условие регулярной гладкости и метод Ньютона–Канторовича // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 52–61.

МНОГОШАГОВЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Чистяков П.А.¹

Рассматривается обобщение итерационных методов решения линейных операторных уравнений вида

$$Ax = y, \quad (1)$$

изложенных в работах [1–3], на случай B -симметричного и B -положительного оператора A . Здесь $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Пространства X и Y – банаховы, X предполагается равномерно выпуклым и гладким. Для значений функционала $f \in Y^*$ на элементе $y \in Y$ будем использовать обозначение $\langle y, f \rangle$.

Определение 1. Оператор A называется B -симметричным, если при любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle$.

Определение 2. Оператор A называется B -положительным (не строго), если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$, причём $\langle Ax, Bx \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $Ax = 0$.

Определение 3. Отображение $J_p: X \rightarrow 2^{X^*}$, определяемое по формуле

$$J_p(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\},$$

называется дуальным отображением пространства X степени p

Через J_{*q} обозначаем дуальное отображение пространства X^* степени $q := p/(p-1)$.

Предлагается следующий итерационный метод нахождения \hat{x} – нормального решения (решения минимальной нормы) уравнения (1). Возьмем начальное приближение $x_0 := 0$. Пусть x_n уже вычислено. Выберем в пространстве $\mathcal{R}(B^*A)$ конечное число N_n направлений

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00106

поиска $\{B^*A\xi_{n,1}, \dots, B^*A\xi_{n,N_n}\}$ и определим следующее приближение по правилу:

$$x_{n+1} := J_{*q} \left[J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^* A \xi_{n,i} \right],$$

где вектор параметров шагов $\mu = (\mu_{n,1}, \dots, \mu_{n,N_n})$ минимизирует выпуклую непрерывно дифференцируемую функцию $h : \mathbb{R}^{N_n} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h(t_1, \dots, t_{N_n}) := \frac{1}{q} \left\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^* A \xi_{n,i} \right\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B \xi_{n,i}, y \rangle.$$

Теорема. Пусть при любом $n \in \mathbb{N}$ одно из направлений $B^*A\xi_{n,i}$ совпадает с $B^*(Ax_n - y) = B^*A(x_n - \hat{x})$. Тогда:

1) последовательность итераций $\{x_n\}$ ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями (1);

2) если в пространстве X дуальное отображение обладает свойством слабой непрерывности (например, такими будут пространства l_p при $1 < p < +\infty$), тогда вся последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к \hat{x} ;

3) если для некоторого фиксированного $n_0 \in \mathbb{N}$ и бесконечного числа индексов $n \geq n_0$ вектор $J_p(x_n) - J_p(x_{n_0})$ включается в пространство направлений поиска, тогда $\{x_n\}$ сходится к \hat{x} сильно по норме пространства X .

Литература

- [1] Schöpfer F., Schuster T. Fast regularizing sequential subspace optimization in Banach spaces // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 1. Pp. 1–22.
- [2] Schöpfer F., Schuster T., Louis A.K. Metric and Bregman projections onto affine subspaces and their computation via sequential subspace optimization methods // J. Inv. Ill-posed Problems. 2008. Vol. 16, № 5. Pp. 479–506.
- [3] Чистяков П.А. Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 303–318.

УТОЧНЕННАЯ ОЦЕНКА РАЗБРОСА СЛУЧАЙНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАВНОВЕСИЙ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цветков И.Н.¹

В работе рассматриваются дискретные системы, находящиеся под действием случайных возмущений. Для их стохастических равновесий исследуется разброс случайных состояний.

Рассмотрим дискретную стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon\sigma(x_t)\xi_t, \quad (1)$$

где ξ_t – случайный дискретный процесс такой, что $E\xi_t = 0$, $E\xi_t^2 = 1$, ε – интенсивность шумов.

Предполагается, что у детерминированной системы (1) ($\varepsilon = 0$) существует экспоненциально устойчивое положение равновесия \bar{x} : $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Под действием случайных возмущений решение x_t системы (1) покидает равновесие \bar{x} . Для отклонений $\Delta_t = x_t - \bar{x}$ справедлива система:

$$\Delta_{t+1} = a\Delta_t + \varepsilon(s + b\Delta_t)\xi_t + O(\Delta_t^2),$$

где

$$a = \frac{df}{dx}(\bar{x}), \quad b = \frac{d\sigma}{dx}(\bar{x}), \quad s = \sigma(\bar{x}).$$

Отбрасывая $O(\Delta_t^2)$, получаем систему первого приближения:

$$\Delta_{t+1} = a\Delta_t + \varepsilon(s + b\Delta_t)\xi_t. \quad (2)$$

Ранее в работах [1, 2] анализ чувствительности аттракторов проводился без учета слагаемого $\varepsilon b\Delta_t\xi_t$. Исследуем, как изменится оценка разброса случайных состояний в этом случае. Для системы (2) динамика первого $m_t = E(\Delta_t)$ и второго $M_t = E(\Delta_t^2)$ моментов записывается уравнениями:

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= am_t, \\ M_{t+1} &= (a^2 + \varepsilon^2 b^2)M_t + \varepsilon^2 s^2 + 2s\varepsilon^2 bm_t. \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 10-01-96022урал

В силу экспоненциальной устойчивости положения равновесия $|a| < 1$, $m_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В случае когда $a^2 + \varepsilon^2 b^2 < 1$, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = M$, где M вычисляется по формуле:

$$M = \frac{\varepsilon^2 s^2}{1 - (a^2 + \varepsilon^2 b^2)}. \quad (3)$$

При игнорировании слагаемого $\varepsilon b \Delta_t \xi_t$ в работе [2] была получена оценка

$$M^0 = \frac{\varepsilon^2 s^2}{1 - a^2}.$$

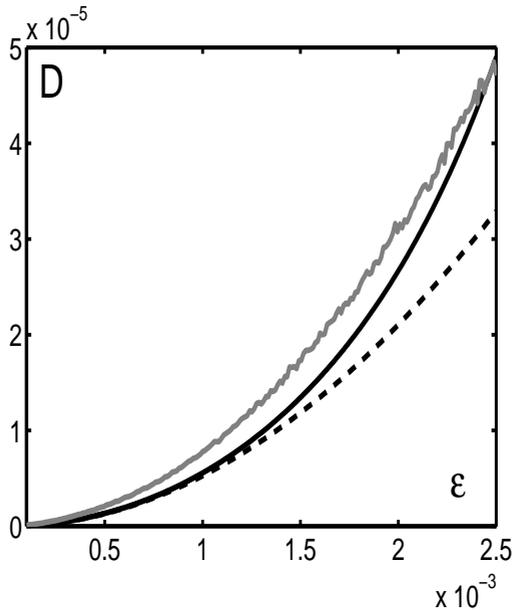


Рис. 1: дисперсия случайных состояний стохастической системы Ферхюльста при $\mu = 2.9$. Серый цвет – данные численного моделирования. Пунктирная линия черного цвета – график $M^0(\varepsilon)$. Сплошная линия черного цвета – график $M(\varepsilon)$

Для сравнения оценок $M^0(\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$ рассмотрим стохастическую систему Ферхюльста:

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + \varepsilon(1 + \sin(K(x - \bar{x})))\xi_t, \quad (4)$$

где $\mu = 2.9$, $K = 10000$. Положение равновесия детерминированной системы определяется следующим образом: $\bar{x} = 1 - 1/\mu$.

На рис. 1 приведено сравнение графиков $M^0(\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$ с данными численного моделирования. Из рисунка заметно улучшение аппроксимации новым методом.

Литература

- [1] *Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I.* Sensitivity analysis of the stochastic discrete systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. 2010. № 17. Pp. 501–515.
- [2] *Цветков И.Н.* Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. № 6. С. 74–85.

Содержание

1. Алгебра и дискретная математика	3
1. Августинovich С.В., Горкунов Е.В. Метрические инварианты для восстановления кодов	3
2. Белоусов И.Н. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{19,16,8;1,2,8\}$	6
3. Бестужев А.С. О строении конечных циклических полукольца	8
4. Бородина Е.В. Независимые слова в симметрических и знакопеременных группах	11
5. Валоженич А.А. Комбинаторная сложность перестановок, порождаемых неподвижными точками некоторых равноблочных бинарных морфизмов	12
6. Воробьёв К.В. О сильно регулярных системах троек .	15
7. Гаврилюк А.Л., Горяинов С.В., Могильных И.Ю. О неизоморфных совершенных 2-раскрасках графа Джонсона $J(10,3)$	17
8. Гаврилюк А.Л., Шалагинов Л.В. Графы Деза с 4-мя различными собственными значениями	20
9. Глушко Кр.Л., Титов С.С. Решение квадратных уравнений в конечных полях характеристики 2	23
10. Горяинов С.В., Шалагинов Л.В. О графах Деза, получаемых из циклических групп	26
11. Демина Е.Н. Длина однопорожденной кратно Ω -расслоенной формации T -групп	29
12. Дуж А.А., Шлепкин А.А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп	32
13. Елисова А.П. Локальные автоморфизмы левых алгебр нильтреугольных матриц малых размерностей .	33
14. Ефимов К.С., Махнев А.А. Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$	36

15.	Звездина М.А. О простых группах с графом простых чисел, как у знакопеременной группы	39
16.	Кабанов В.В., Шалагинов Л.В. О графах Деза, получаемых из диэдральных групп	40
17.	Ковалева В.А. Характеризации некоторых классов конечных групп в терминах слабо квазиперестановочных подгрупп	43
18.	Кондратьев А.С., Храмцов И.В. Распознаваемость конечных простых четырехпримарных групп по графу простых чисел	46
19.	Коньгин А.В. К вопросу П. Камерона о примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них	49
20.	Кривова А.С. Обратимые элементы в кольцах вычетов квадратичных полей	51
21.	Лубягина Е.Н. Замкнутые идеалы и замкнутые конгруэнции полуколец $C_p(X, \mathbf{I})$	52
22.	Лубягина И.В. О неидемпотентных циклических полукольцах с некоммутативным сложением	55
23.	Лыткин Д.В. Два наибольших порядка элементов простых симплектических групп в характеристике 2	58
24.	Марков Р.В. О пирсовских цепях полумодулей	61
25.	Маслова Н.В., Ревин Д.О. Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы	63
26.	Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально $GQ(4,6)$ -графах	66
27.	Махнев А.А., Циовкина Л.Ю. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$	69
28.	Митянина А.В. Точные графы Деза без 3-лап	72
29.	Могильных И.Ю. Полностью регулярные коды в графах Джонсона и блок-схемы	74

30.	Неганова Е.А., Трофимов В.И. Конечность числа $Aut_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d для простого q	77
31.	Поляков С.В. О структуре неразрешимых SM_2 -групп	79
32.	Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп	82
33.	Сеньчонок Т.А. О свойствах хроматического инварианта $pt(G, \chi + 1)$	84
34.	Сидоров В.В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с максимумом	87
35.	Старолетов А.М. О распознавании групп по графу простых чисел	90
36.	Табинова О.А. Паркетные грани выпуклых многогранников	92
37.	Тарасов Ю.С. Метод построения мономиальных базисов алгебр Ли	95
38.	Тимофеенко И.А. Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел	98
39.	Хохлова И.А. Арифметический критерий существования холловых подгрупп в линейных группах	101
40.	Шапрынский В.Ю. Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп	104
2.	Математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры	106
1.	Авербух Ю.В., Бакланов А.П. Решение по Штакельбергу дифференциальной игры в классе квазистратегий	106
2.	Бакланов А.П. Об одной игровой задаче на множестве чисто конечно-аддитивных мер	109

-
3. Банников А.С. К асимптотической оценке числа убегающих, достаточного для разрешимости глобальной задачи уклонения в играх со скалярной матрицей . . . 112
 4. Башкирцева И.А., Нурмухаметова Д.Р. Структура множеств достижимости стохастических управляемых систем 115
 5. Бедин Д.А. Точность оценивания систематической ошибки РЛС по азимуту 118
 6. Востриков И.В. Эллипсоидальные методы для линейных управляемых систем с запаздыванием 121
 7. Гомоюнов М.И. Об одной задаче управления системой с последствием 124
 8. Гребенникова И.В. К задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием 127
 9. Зимовец А.А. Об одной из реализаций сеточного метода построения множеств достижимости 130
 10. Кандоба И.Н., Костоусов В.Б., Ложников А.Б. Актуальные задачи управления ракетой-носителем при выводе космического аппарата на околоземную орбиту . 133
 11. Корнев Д.В. О численном решении дифференциальных игр с нетерминальной платой 136
 12. Коробицина Н.С. Асимптотические оценки решения сингулярной задачи оптимального управления с интегральным критерием качества 139
 13. Костюнин С.Ю., Шевкопляс Е.В. Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью 142
 14. Крупенников Е.А., Токманцев Т.Б., Субботина Н.Н. Численное решение задачи идентификации макроэкономической модели 145
 15. Кумков С.С. Максимальные стабильные мосты в модельной игре с двумя догоняющими и одним убегающим 148

16.	Лобов С.А., Самойлов А.Л., Токманцев Т.Б. Численный алгоритм решения трехмерных дифференциальных игр сближения-уклонения «к моменту»	151
17.	Малютина Е.В., Филиппова О.В. Управляемая система с фазовыми ограничениями по управлению, многозначными импульсными воздействиями и запаздыванием	154
18.	Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д., Ушаков А.В. О приближенном построении множеств достижимости дифференциальных включений и управляемых систем	157
19.	Морина М.С. Один эвристический алгоритм решения задачи маршрутизации с ограничениями	160
20.	Плаксин А.Р. Конечномерные поводыри в задачах управления системами с запаздыванием	163
21.	Тамасян Г.Ш. Прямой метод в вариационной задаче с подвижными границами	166
22.	Хлопин Д.В. О сопряженной переменной в задачах управления на бесконечном промежутке	169
3.	Топология и геометрия	172
1.	Акимова А.А. Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе	172
2.	Дужин С.В., Школьников М.С. Доказательство гипотезы Пшитыцкого о парных диаграммах	175
3.	Жукова А.М. Локальные максимумы ориентированной площади замкнутых шарнирных механизмов	178
4.	Можей Н.П. Тензоры Вейля на трехмерных многообразиях	181
5.	Нгуен Л.Л. О фредгольмовых оснащениях G -трансляторов	183
6.	Osipov A.V. Cardinal functions of the linear space $C(X)$	186
7.	Тодоров Д.И. Аналоги теорем Майзеля и Плисса и их применение в теории отслеживания	189

8.	Христич Д.В. Применение теории групп к исследованию упругих свойств квазикристаллов	192
4.	Компьютерные науки	195
1.	Астапов Ю.В. Программный комплекс для автоматизации обработки результатов механических испытаний	195
2.	Белобородов А.В. Сравнение трех мер семантической близости вопросов в социальных вопросно-ответных сервисах	197
3.	Борченинов Я.В., Окуловский Ю.С. Универсальный решатель для проведения прикладных численных экспериментов	200
4.	Веретенников А.Б. Об оптимизации поиска фраз и наборов слов в полнотекстовом индексе	203
5.	Глушкова Д.Н. Кластеризация текстовых данных с помощью модифицированного генетического алгоритма	206
6.	Гневашева Ю.О. Криптографический протокол цифровой подписи на основе эллиптических кривых . . .	209
7.	Горбенко А.А., Попов В.Ю. Бритва Оккама и самосознание интеллектуального робота	211
8.	Горбенко А.А., Попов В.Ю., Шека А.С. Автономное подключение к источникам питания для мобильных роботов	214
9.	Закалюкина С.Ю., Самсонов А.Е. Решение задачи разбиения графа с использованием модифицированного алгоритма Region-Growing	217
10.	Кандоба В.И., Черепанов И.В., Полоцкий И.Л. Инструменты разработки сервис-ориентированных систем управления роботами	220
11.	Маткин И.А. Неисполняемый стек в операционных системах семейства Windows NT	223

12.	Патрушев С.И., Свалова Д.Ю., Солодушкин С.И. Численное решение уравнения теплопроводности с запаздыванием через Web-интерфейс	226
13.	Ручай А.Н. Новый подход стеганографии в аудиосигналах	229
14.	Рябых А.В., Кропотов М.С., Окуловский Ю.С. Робототехнический эмулятор Eufosim	232
15.	Самунь В.С., Бурдова И.Ю. Архитектура модулей и прошивок в симуляторе компьютерной сети NSimulator	235
16.	Самунь В.С., Бурдова И.Ю. Разработка расширения фреймворка NModel для возможности проверки темпоральных свойств	238
17.	Черноскутов М.А. Использование бесплатного прикладного программного обеспечения в суперкомпьютерном центре ИММ УрО РАН	241
5.	Приближение функций	244
1.	Барабошкин Н.Д. О приближении непрерывных функций ломаными с ограничениями на угол между звеньями	244
2.	Дубосарский Г.А. Решение задачи Дирихле для нецентрального кольца	247
3.	Кошелев А.А. Вариант задачи Стечкина для оператора Лапласа в пространствах функций двух и трех переменных	250
4.	Куклин Н.А. Задача Дельсарта для оценки сверху контактных чисел пространств больших размерностей	253
5.	Плещева Е.А. Константы неопределенности для 2-раздельного КМА	256
6.	Рябцов И.С. Некоторые свойства простых фреймов Парсевала	259
7.	Симонов И.Е. Точная константа в неравенстве Маркова–Никольского для пары пространств L_∞ и L_1 на отрезке	261

8. Стрелкова Е.В., Шевалдина Н.В. Константы Лебега локальной экспоненциальной аппроксимации 264
9. Тихановцева К.С. Структура множества неотрицательности многочлена с нулевым средневзвешенным значением на отрезке наименьшей меры 267

6. Математическое программирование и машинное обучение **270**

1. Иванов Д.В., Усков О.А. Рекуррентная идентификация билинейных ARX моделей с помехой наблюдения в выходном сигнале 270
2. Кобылкин К.С., Хачай М.Ю. О возможностях разделения множеств точек с помощью коллективных решающих правил 273
3. Колосницын А.В. Поиск оптимального плана транспортировок однородного продукта при помощи методов двухэтапного стохастического программирования 276
4. Костин А.И., Скробов Д.Л. Архитектура поиска по коллекциям данных вопросно-ответных сервисов . . . 279
5. Нурмухаметов О.Р. Задача выделения темпа исполнения музыкального произведения в реальном времени 281
6. Поберий М.И. О комитетной кусочно-линейной отделимости конечных множеств 284
7. Салий Я.В. Об ультраметрической задаче коммивояжера на узкие места 287
8. Сукач М.П. Об одном методе решения задач двухуровневой оптимизации 290
9. Фирсова Е.М. Оптимизационная модель кредитования производственного предприятия 292
10. Хартов А.А. Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности 296
11. Чернобровов А.И. Параллельный и рекуррентный способ решения семейства задач минимизации CVaR-критерия 299

7. Параллельные вычисления и техническое зрение	302
1. Васёв П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю. О текущих результатах разработки среды научной визуализации	302
2. Горшенин В.В. Способы выделения фона в прототипе системы стереонаблюдения	305
3. Игумнов Г.А. Реализация алгоритма синтезирования траекторного сигнала многоканального ГБО с компенсацией траекторных нестабильностей	308
4. Корнилов Ф.А. Алгоритм поиска структурных различий на основе марковских случайных полей	311
5. Костоусов К.В., Перевалов Д.С., Трофимов В.В. Система технического зрения для мониторинга технологических установок	314
6. Перевалов Д.С. О неустойчивости дискретных определений структуры изображения к малым возмущениям	317
7. Тарханов А.Е. Анализ устойчивости оценки информативности геофизического поля к модификациям навигационного алгоритма	320
8. Прикладной функциональный анализ и уравнения в частных производных	323
1. Балтаева У.И. Краевая задача для нагруженного интегро-дифференциального уравнения с телеграфным оператором	323
2. Гончаровский М.М. Вырожденные решения линейных дифференциальных уравнений, допускающих некоммутативную алгебру симметрии	325
3. Долгополик М.В. Неоднородные выпуклые аппроксимации негладких функций	327
4. Муминов М.Э., Расулов Т.Х. О существенном спектре одного матричного оператора	330
5. Муратбекова М.А. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения Лапласа	333

6.	Расулов Т.Х. О числе собственных значений одного трехчастичного модельного оператора	335
7.	Торекбек Б.Т. О разрешимости некоторых нелокальных задач для уравнения Лапласа, когда носители пересекают границу	338
8.	Шиналиев К.М. О разрешимости одной начально-краевой задачи для обобщенного уравнения теплопроводности	341
9.	Численные методы и математическое моделирование	343
1.	Асфандиярова Ю.С. Об одной численной реализации алгоритма решения обратной задачи теории измерений	343
2.	Батьков А.Н., Сысолятина А.А. Моделирование процесса восстановления давления неьютоновской жидкости в нелинейной пористой среде	346
3.	Белова Е.Д. Представление некоторых вертикальных течений с помощью начальных отрезков рядов	349
4.	Бурмашева Н.В., Стружанов В.В. Об одном методе решения систем нелинейных уравнений	352
5.	Бухаров Д.С. Построение и численное исследование математических моделей некоторых задач транспортной логистики	354
6.	Зверев В.С., Иванов А.О Численное исследование модели поверхностной реакционной диффузии при учете обратимости химического взаимодействия	357
7.	Зотина В.О. Приведенная функция теплообмена слоистой конструкции с внешней средой	360
8.	Казаков А.Л., Батагаева Т.А. О разрешимости трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений	363
9.	Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Конструирование функции стохастической чувствительности на основе метода сингулярного разложения	366

-
10. Кошелев Г.Н. Анализ стохастических бифуркаций в системе Чена 369
 11. Крутова И.Ю. Закрутка газа силой Кориолиса при плавном стоке 372
 12. Куркина М.В., Мохов А.С. Интервальный анализ линейной динамической модели распределения ресурсов 375
 13. Меражова Ш.Б. Численное исследование краевой задачи для уравнения смешанного типа 378
 14. Минарченко И.М. Модель Курно с нелинейными издержками 381
 15. Правдин С.Ф., Панфилов А.В., Бердышев В.И., Кацнельсон Л.Б., Соловьёва О.Э., Мархасин В.С. Математическая модель миокарда левого желудочка человека: верификация и расчёт электрического возбуждения . 383
 16. Родионова Н.В. О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной простейшим волновым уравнением 386
 17. Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б. О сдвиге стохастического аттрактора при параметрических шумах 389
 18. Таныгина А.Н. Оценки скорости сходимости метода Ньютона–Канторовича для нелинейных уравнений с регулярно гладкими операторами 392
 19. Чистяков П.А. Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах 395
 20. Цветков И.Н. Уточненная оценка разброса случайных состояний для стохастических равновесий дискретных динамических систем 397

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной
школы-конференции

Рекомендовано к изданию
Ученым советом Института математики
и механики УрО РАН

Подписано в печать 15.01.2012.

Формат 60×84/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Тираж 120 экз.

Усл. печ. л. 25,75. Уч.-изд. л. 17,5.

Заказ № 3459

620990 Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16,
Институт математики и механики УрО РАН.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
ООО «Издательство Учебно-методический центр УПИ»
620002 Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226