

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ИМ. Н.Н. КРАСОВСКОГО

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б.Н. ЕЛЫЦИНА

---

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ  
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ**

Труды 45-й Международной молодёжной школы-конференции,  
посвящённой 75-летию В.И. Бердышева  
2 — 8 февраля 2014 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ  
2014

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ:** труды 45-й Международной молодёжной школы-конференции, посвящённой 75-летию В.И. Бердышева. Екатеринбург: Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН (ИММ УрО РАН), Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ), 2014.

Настоящее издание включает труды 45-й Международной молодёжной школы-конференции, посвящённой 75-летию В.И. Бердышева, прошедшей с 2 по 8 февраля 2014 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и дискретная математика, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, топология и геометрия, компьютерные науки и информационная безопасность, приближение функций, математическое программирование и анализ данных, техническое зрение, робототехника и параллельные вычисления, функциональный анализ и уравнения в частных производных, численные методы. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке Фонда Дмитрия Зимина «Династия» (грант 13008), УрО РАН (грант 14-1-МШ-8), РФФИ (грант 14-01-06800), УрФУ (Программа развития УрФУ. Мероприятие № 2.1.3.1. «Ежегодная организация молодёжных конференций и школ»).

Ответственный редактор  
чл.-корр. РАН А.А. Махнев.

Рецензенты:

чл.-корр. РАН А.А. Махнев, к.ф.-м.н. Ю.В. Авербух, д.ф.-м.н. А.Р. Данилин, д.ф.-м.н. А.С. Кондратьев, к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов, д.ф.-м.н. Н.Ю. Лукоянов, к.ф.-м.н. Н.В. Маслова, к.ф.-м.н. Ю.С. Окуловский, Д.С. Перевалов, д.ф.-м.н. В.Г. Пименов, к.ф.-м.н. М.Ф. Прохорова, к.ф.-м.н. С.И. Солодушкин, д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай, к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин.

Ответственные за выпуск:

Л.В. Камнева, Н.В. Маслова, М.С. Кошелева, С.Ф. Правдин.

ISBN 978-5-8295-0241-6.

© ИММ УрО РАН, УрФУ, 2014.

## О ГРАФЕ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И.<sup>1</sup>

**1. Смежность бинарных отношений.** Пусть  $B = \{0, 1\}$  – булево множество,  $X$  – произвольное множество, а  $X^2 \doteq X \times X$  – прямое произведение. Всякое подмножество  $R \subseteq X^2$ , называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве  $X$ , порождает характеристическую функцию

$$\chi_R : X^2 \rightarrow B, \quad \chi_R(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in R, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin R. \end{cases}$$

Далее функцию  $\chi_R(x, y)$  будем обозначать через  $R(x, y)$ . На множестве  $2^{X^2}$  всех бинарных отношений множества  $X$  введем бинарное рефлексивное отношение смежности.

**Определение 1.** Пусть  $X = Y \cup Z$  – дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что  $Y = \emptyset$  или  $Z = \emptyset$ ). Предположим, что отношение  $R \subseteq X^2$  таково, что  $R(x, y) = 0$  для всех  $(x, y) \in Y \times Z$ . Оно порождает отношение  $S \subseteq X^2$  такое, что

$$S(x, y) = 1 - R(y, x) \text{ для всех } (x, y) \in Y \times Z,$$

$$S(x, y) = 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z \times Y,$$

$$S(x, y) = R(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Отношение  $S$  называется *смежным* с отношением  $R$ .

**Замечание.** Из определения следует, что если отношение  $S$  смежно с отношением  $R$ , то  $R$  смежно с  $S$ , и этот факт мы записываем в виде

$$R \xleftrightarrow{Y \times Z} S.$$

**2. Смежность частичных порядков.** Через  $V(X)$  обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве  $X$ . Другими словами, отношение  $\sigma$  принадлежит множеству  $V(X)$ ,

---

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

если оно удовлетворяет следующим аксиомам: 1)  $(x, x) \in \sigma$  (рефлексивность); 2) если  $(x, y) \in \sigma$ ,  $(y, z) \in \sigma$ , то  $(x, z) \in \sigma$  (транзитивность); 3) если  $(x, y) \in \sigma$ ,  $(y, x) \in \sigma$ , то  $x = y$  (антисимметричность). В терминах характеристических функций справедливо легко проверяемое утверждение:  $\sigma \in V(X)$  тогда и только тогда, когда

$$\sigma(x, x) = 1 \text{ для всех } x \in X,$$

$$\sigma(x, y) \sigma(y, z) \leq \sigma(x, z) \text{ для всех } x, y, z \in X,$$

$$\sigma(x, y) \sigma(y, x) = \delta_{xy} \text{ для всех } x, y \in X \text{ (где } \delta_{xy} \text{ – символ Кронекера)}.$$

**Предложение.** Пусть  $\sigma$  и  $\tau$  – смежные отношения. Включение  $\sigma \in V(X)$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\tau \in V(X)$ .

Таким образом, множество  $X$  порождает пару  $\langle V(X), E(X) \rangle$ , где  $V(X)$  – это множество «вершин», состоящее из всех частичных порядков множества  $X$ , а  $E(X)$  – множество «ребер», состоящее из неупорядоченных пар различных смежных частичных порядков множества  $X$ . Пару  $G(X) \doteq \langle V(X), E(X) \rangle$  будем называть (неориентированным) «графом» частичных порядков множества  $X$ . Слова «вершина», «ребро», «граф» мы заключили в кавычки, так как в традиционном понимании графа мощности его множеств вершин и ребер конечны. Далее будем опускать кавычки в этих словах.

**Определение 2.** Будем говорить, что частичные порядки  $\sigma$  и  $\tau$  принадлежат одной компоненте связности графа  $G(X)$ , если существует такая конечная последовательность частичных порядков  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m = \tau$ , что отношения  $\sigma_{k-1}$  и  $\sigma_k$  смежны при всех  $k = 2, \dots, m$ . Через  $G_\sigma(X)$  будем обозначать ту компоненту связности графа  $G(X)$ , которая содержит данный частичный порядок  $\sigma$ .

### 3. Об особенностях строения графа частичных порядков.

Зафиксируем частичный порядок  $\sigma \in V(X)$ , элемент  $x \in X$ , и пусть

$$I_x \doteq \{y \in X: \sigma(x, y) = 1, \sigma(y, x) = 0\},$$

$$J_x \doteq \{y \in X: \sigma(x, y) = 0, \sigma(y, x) = 1\},$$

$$K_x \doteq \{y \in X: \sigma(x, y) = \sigma(y, x) = \delta_{xy}\}.$$

Последовательность смежных частичных порядков

$$\sigma \xleftrightarrow{I_x \times (K_x \cup J_x)} \sigma' \xleftrightarrow{(I_x \cup K_x) \times J_x} \sigma^x,$$

приводит нас к частичному порядку  $\sigma^x \in V(X)$ , обладающему тем свойством, что  $\sigma^x(x, y) = \sigma^x(y, x) = \delta_{xy}$  для всех  $y \in X$  (другими словами,  $x$  является как максимальным, так и минимальным элементом частичного порядка  $\sigma^x$ ).

Таким образом, для любого фиксированного частичного порядка  $\sigma \in V(X)$  определено отображение  $X \rightarrow G_\sigma(X)$ , сопоставляющее элементу  $x \in X$  частичный порядок  $\sigma^x \in G_\sigma(X)$  (может оказаться, что  $\sigma^x = \sigma^y$  при  $x \neq y$ ).

**Лемма.** Пусть частичные порядки  $\sigma, \tau \in V(X)$  принадлежат одной и той же компоненте связности графа  $G(X)$ . Тогда  $\sigma^x = \tau^x$  для любого  $x \in X$ .

Если  $\text{card } X < \infty$  (можно считать, что  $X = \{1, \dots, n\}$ ), то существует взаимно-однозначное соответствие между множеством  $V(X)$  и множеством всех помеченных транзитивных графов, определенных на  $X$  (см., например, [1, с. 28]), и, в свою очередь, существует взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех помеченных  $T_0$ -топологий, определенных на  $X$  (см., например, [2, с. 256]). Обозначим через  $T_0(n)$  число таких топологий.

**Следствие.** Если  $X = \{1, \dots, n\}$ , то  $\text{card } V(X) = T_0(n)$ , а количество компонент связности графа  $G(X)$  равно  $T_0(n-1)$ .

**4. Смежность ациклических графов.** Пусть  $X = \{1, \dots, n\}$ , а  $A(X)$  – совокупность всех помеченных ациклических графов (ациклических отношений), определенных на  $X$ . В [3] доказана формула

$$\text{card } A(X) = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2},$$

в которой суммирование ведется по всем упорядоченным наборам  $(p_1, \dots, p_k)$  натуральных чисел таких, что  $p_1 + \dots + p_k = n$ .

Справедливо утверждение: если  $\sigma$  и  $\tau$  – смежные отношения, определенные на конечном множестве  $X = \{1, \dots, n\}$ , то включение  $\sigma \in A(X)$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\tau \in A(X)$ .

## Литература

- [1] *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980.
- [2] *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. – М.: Мир, 1977.
- [3] *Rodionov V.I.* On the number of labeled acyclic digraphs // Discrete Mathematics. 1992. № 105. Pp. 319–321.

## О ПЕРЕСЕЧЕНИИ СОПРЯЖЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

Байкалов А.А.<sup>1</sup>

Изучается вопрос 17.40 из «Коуровской тетради» [1] в случае, когда группа  $G$  разрешима. Доказана следующая

**Теорема.** Пусть группа  $G$  такова, что  $G/F(G)$  абелева. Тогда для любой нильпотентной подгруппы  $N$  группы  $G$  существует элемент  $x \in F(G)$  такой, что  $N \cap N^x \leq F(G)$ .

Отметим, что данное утверждение обобщает результат В. И. Зенкова [2].

## Литература

- [1] *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2010.
- [2] *Зенков В.И.* Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 150–152.

---

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП КОНЕЧНОЙ СТУПЕНИ

Верников Б.М., Гусев С.В.<sup>1</sup>

*Эпигруппой* называется полугруппа  $S$ , в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т.е. принадлежит некоторой подгруппе в  $S$ . Обширную информацию об эпигруппах можно найти в работах [3, 5]. На всякой эпигруппе можно некоторым естественным образом ввести унарную операцию, называемую *псевдообращением* (см. [3–5]). Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Элемент, псевдообратный к элементу  $x$  эпигруппы  $S$ , принято обозначать через  $\bar{x}$ .

Класс эпигрупп включает в себя, в частности, все периодические полугруппы. Хорошо известно и легко проверяется, что во всякой периодической полугруппе операция псевдообращения может быть выражена через умножение. Таким образом, периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп.

Многообразие эпигрупп  $\mathcal{V}$  называется многообразием *конечной степени*, если все нильполугруппы в  $\mathcal{V}$  нильпотентны; при этом  $\mathcal{V}$  есть многообразие *степени*  $n$ , если степени нильпотентности нильполугрупп из  $\mathcal{V}$  ограничены числом  $n$ , причем  $n$  – наименьшее число с таким свойством. Ранее эти понятия были введены и активно изучались для многообразий полугрупп<sup>2</sup>. Различные характеристики многообразий этих двух типов были получены в работах [1, 2, 6]. Отметим, что многообразия полугрупп конечной степени являются, очевидно, периодическими и потому могут рассматриваться как многообразия эпигрупп.

Обозначим через  $\mathcal{F}$  многообразие эпигрупп, заданное тождествами  $x^2 = 0$ ,  $xy = yx$ , а через  $\mathcal{F}_k$ , где  $k$  – произвольное натуральное число, – его подмногообразие, заданное внутри  $\mathcal{F}$  тождеством  $x_1x_2 \dots x_k = 0$ . Из [1, теорема 2] и [6, предложение 2.11] вытекает,

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>При этом длительное время вместо термина «степень многообразия» использовался термин «индекс многообразия».

что для многообразия полугрупп  $\mathcal{V}$  следующие условия эквивалентны:

- а)  $\mathcal{V}$  имеет конечную ступень,
- б)  $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{F}$ ,
- в)  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству вида

$$x_1 \dots x_n = w \quad (1)$$

для некоторого натурального  $n$  и некоторого слова  $w$  длины  $> n$ ,

- г)  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству вида

$$x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_{i-1} (x_i \dots x_j)^{m+1} x_{j+1} \dots x_n \quad (2)$$

для некоторых  $m, n, i$  и  $j$  таких, что  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Пусть теперь  $n$  – произвольное натуральное число. Из результатов работ [1, 6] и их доказательств вытекает эквивалентность следующих условий:

- а')  $\mathcal{V}$  имеет ступень  $\leq n$ ,
- б')  $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ ,
- в')  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству (1) для некоторого слова  $w$  длины больше  $n$ ,
- г')  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству (2) для некоторых  $m, i$  и  $j$  таких, что  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

В данной работе получены аналоги всех этих утверждений для многообразий эпигрупп. Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** *Для многообразия эпигрупп  $\mathcal{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- 1)  $\mathcal{V}$  – многообразие конечной ступени;
- 2)  $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{F}$ ;
- 3)  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторого натурального  $n$  и некоторого слова  $w$  со следующим свойством:

$$\text{если слово } w \text{ не содержит операции} \quad (3)$$

псевдообращения, то его длина больше  $n$ ;



4)  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству вида

$$x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_{i-1} \cdot \overline{x_i \dots x_j} \cdot x_{j+1} \dots x_n \quad (4)$$

для некоторых  $i, j$  и  $n$  таких, что  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Из доказательства теоремы легко вытекает

**Следствие.** Пусть  $n$  – произвольное натуральное число. Для многообразия эпигрупп  $\mathcal{V}$  следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\mathcal{V}$  имеет степень  $\leq n$ ;
- 2)  $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ ;
- 3)  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству вида (1) для некоторого слова  $w$  со свойством (3);
- 4)  $\mathcal{V}$  удовлетворяет тождеству вида (4) для некоторых  $i$  и  $j$  таких, что  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

## Литература

- [1] Сапир М.В., Суханов Е.В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1981. № 4. С. 48–55.
- [2] Тищенко А.В., Волков М.В. Характеризация многообразий полугрупп конечного индекса на языке «запрещенных делителей» // Изв. вузов. Матем. 1995. № 1. С. 91–99.
- [3] Шеврин Л.Н. К теории эпигрупп. I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.
- [4] Шеврин Л.Н., Верников Б.М., Волков М.В. Решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2009. № 3. С. 3–36.
- [5] Shevrin L.N. Epigroups // Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra. Dordrecht: Springer, 2005. Pp. 331–380.
- [6] Vernikov B.M. Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59, № 3–4. Pp. 405–428.

## НЕКОТОРЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КОММУТАТИВНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУКОЛЕЦ

Вечтомов Е.М., Петров А.А.<sup>1</sup>

*Полукольцом* называется алгебра  $\langle S, +, \cdot \rangle$ , такая, что  $\langle S, + \rangle$  – коммутативная полугруппа,  $\langle S, \cdot \rangle$  – полугруппа, умножение  $\cdot$  дистрибутивно относительно сложения  $+$  с обеих сторон.

Полукольцо  $S$  называется *мультипликативно идемпотентным* (*аддитивно идемпотентным*), если на нем тождественно  $xx = x$  (соответственно,  $x + x = x$ ). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, назовем *идемпотентным*. Идемпотентное полукольцо будем называть *моно-полукольцом*, если оно удовлетворяет тождеству  $x + y = xy$ . Полукольцо  $S$  называется *дистрибутивным*, если на нем выполняется тождество  $x + yz = (x + y)(x + z)$ . Будем говорить, что полукольцо  $S$  обладает *константным сложением*, если  $(\exists t \in S)(\forall x, y \in S)(x + y = t)$ .

К любому полукольцу  $S$  можно присоединить внешним образом *нулевой* элемент  $0$  такой, что  $\forall x \in S (x + 0 = x, x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0)$ , или *поглощающий* элемент  $\infty$ , полагая  $\forall x \in S (x + \infty = x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty)$ . Обозначим эти полукольца  $S \cup \{0\}$  и  $S \cup \{\infty\}$  соответственно.

Обозначим через  $\mathfrak{M}$  многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец.

В многообразии  $\mathfrak{M}$  – с точностью до изоморфизма – существует четыре двухэлементных полукольца: двухэлементная цепь  $\mathbb{B}$ , двухэлементное поле  $\mathbb{Z}_2$ , двухэлементное моно-полукольцо с единицей  $\mathbb{D} = \{1, \infty\}$  и двухэлементное полукольцо с единицей и константным сложением  $\mathbb{T} = \{1, \infty\}$ . Полукольца  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{T}$  исчерпывают все конгруэнц-простые полукольца из  $\mathfrak{M}$ .

**Теорема 1.** *Для всякого подпрямо неразложимого полукольца  $S \in \mathfrak{M}$  справедливы следующие утверждения:*

1.  $S$  обладает единицей 1.
2.  $S \setminus \{1\}$  – идеал полукольца  $S$  с единицей  $e$ .
3. Наименьшей ненулевой конгруэнцией на  $S$  служит конгруэнция, склеивающая только элементы 1 и  $e$ .

<sup>1</sup>Вятский государственный гуманитарный университет, Киров

4.  $S$  может иметь любую мощность, кроме 1.
5. Если  $S$  конечно, то оно обладает нулевым или поглощающим элементом (для бесконечных  $S$  это, вообще говоря, неверно).

Для полуколец  $S_1, \dots, S_n$  через  $\mathfrak{M}(S_1, \dots, S_n)$  будем обозначать многообразие полуколец, порожденное этими полукольцами. Многообразия  $\mathfrak{M}(\mathbb{B}), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2), \mathfrak{M}(\mathbb{D}), \mathfrak{M}(\mathbb{T})$  дают все атомы решетки подмногообразий в  $\mathfrak{M}$  по включению.

Пусть  $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})$ .

В произвольном полукольце  $S \in \mathfrak{N}$  выполняются тождества

$$2x + 2xy + 2xz = 2x + 2xz + 2xyz, \quad (*)$$

$$3x + y = x + y. \quad (**)$$

Полукольца  $\mathbb{D} \cup \{0\}$  и  $\mathbb{T} \cup \{0\}$  из  $\mathfrak{M}$  не принадлежат  $\mathfrak{N}$ , поскольку  $\mathbb{D} \cup \{0\}$  не удовлетворяет тождеству (\*), а в  $\mathbb{T} \cup \{0\}$  не выполняется тождество (\*\*).

**Теорема 2.** Полукольца  $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{B} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$  суть (с точностью до изоморфизма) все подпрямо неразложимые полукольца в многообразии  $\mathfrak{N}$ .

**Следствие 1.** Произвольное полукольцо  $S \in \mathfrak{N}$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{B} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$ .

**Следствие 2.** Тождества (\*) и (\*\*) определяют многообразие  $\mathfrak{N}$  в классе  $\mathfrak{M}$ .

**Следствие 3.** Многообразие  $\mathfrak{N}$  имеет ровно 16 подмногообразий, образующих булеву решетку.

Продолжается изучение подмногообразий в  $\mathfrak{N}$ , начатое в [1].

Хорошо известно, что  $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$  есть многообразие всех дистрибутивных решеток, а  $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$  – многообразие булевых колец. Кроме того, произвольное моно-полукольцо является подпрямым произведением семейства полуколец  $\mathbb{D}$ , а всякое полукольцо из  $\mathfrak{M}$  с константным сложением есть подпрямое произведение семейства полуколец  $\mathbb{T}$ .

**Предложение 1.** Для любого полукольца  $S \in \mathfrak{M}$  справедливы следующие утверждения:

1. [2, corollary 4.4]  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $x + 2xy = x \Leftrightarrow S$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{Z}_2$ ;

2. [3, theorem]  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}) \Leftrightarrow S$  – дистрибутивное идемпотентное полукольцо  $\Leftrightarrow S$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{D}$  и  $\mathbb{B} \cup \{\infty\}$ ;

3.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $x + xy = 2x \Leftrightarrow S$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{T}$ ;

4.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $2x + xy = xy \Leftrightarrow S$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}$  и  $\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$ .

5.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $2x = 2y \Leftrightarrow S$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{T}$ ;

6.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{D}, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $x + y = 2xy \Leftrightarrow S$  является подпрямым произведением полуколец  $\mathbb{D}$  и  $\mathbb{T}$ .

**Предложение 2.** Для всякого полукольца  $S \in \mathfrak{N}$  имеют место следующие утверждения:

1.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $3x = x$ ;

2.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $2x + 2xy = 2x$ ;

3.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $3x = 2x \Leftrightarrow S$  дистрибутивно;

4.  $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}) \Leftrightarrow S$  обладает тождеством  $2x + 2xy = 2xy$ .

**Следствие 4.** Полукольцо  $S \in \mathfrak{N}$  принадлежит  $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}) \Leftrightarrow S$  идемпотентно.

## Литература

- [1] Вечтомов Е.М., Петров А.А. Полукольца с коммутативным идемпотентным умножением // в сб. «Математика в современном мире», Материалы Междунар. конф., посв. 150-летию Д.А. Граве. С. 10–11. Вологда, 2013.
- [2] Ghosh S. A characterization semirings which subdirect products of rings and distributive lattices // Semigroup Forum. 1999. Vol. 59. Pp. 106–120.
- [3] Kalman J.A. Subdirect decomposition of distributive quasilattices // Fund. Math. 1971. Vol. 71. Pp. 161–163.

## ПОЛУТЕЛА ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ

Вечтомов Е.М., Петухова Я.В.<sup>1</sup>

*Полутелом* называется алгебраическая структура  $S$  с бинарными операциями сложения  $(+)$  и умножения  $(\cdot)$  такая, что  $\langle S, \cdot \rangle$  – группа,  $\langle S, + \rangle$  – коммутативная полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Полутело с коммутативным умножением называется *полуполем*. Основные понятия теории полутел можно найти в [1].

*Кольцом разностей* полутела  $S$  называется пара  $\langle R, f \rangle$ , где  $R$  – кольцо и  $f: S \rightarrow R$  – полукольцевой гомоморфизм, удовлетворяющий условию универсальности: для любого гомоморфизма  $g: S \rightarrow T$ , где  $T$  – кольцо, существует единственный кольцевой гомоморфизм  $h: R \rightarrow T$  такой, что  $h \circ f = g$ . Любое полутело  $S$  имеет кольцо разностей, однозначно определенное с точностью до изоморфизма над  $S$ . Заметим, что кольцо  $R = \{0\}$  – нулевое в том и только в том случае, когда полутело  $S$  – зероидное, то есть  $a + b = a$  для некоторых  $a, b \in S$  [2].

Полутело с аддитивным сокращением  $a + c = b + c \Rightarrow a = b$  называется *сократимым* полутелом. Кольцом разностей сократимого полутела  $S$  фактически является кольцо  $R(S)$ , содержащее  $S$  в качестве подполукольца, для которого  $R(S) = S - S$  (здесь  $f$  – тождественное вложение  $S$  в  $R(S)$ ).

Пусть  $\langle J, \leq \rangle$  – некоторое локально конечное упорядоченное множество,  $S$  – произвольное полутело и  $\langle R, f \rangle$  – кольцо разностей для  $S$ .

Определим матричное полутело  $T_J(S)$  следующим образом. Множество  $T_J(S)$  состоит из всех таких обобщенных матриц  $A = (a_{ij})_{J \times J}$ , что  $a_{ij} \in R$  для любых  $i \neq j$  из  $J$ ,  $a_{ii} \in S$  при  $i \in J$  и  $a_{ij} = 0$ , если неверно, что  $i \leq j$ .

Сложение матриц производится поэлементно. Для матриц  $(a_{ij})_{J \times J}$  и  $(b_{ij})_{J \times J}$  их произведение имеет вид  $(c_{ij})_{J \times J}$ , где

$$c_{ij} = \sum_{i \leq k \leq j} a_{ik} b_{kj} \text{ при } i \leq j \text{ и } c_{ij} = 0 \text{ в противном случае.}$$

При этом  $a_{ii} b_{ik} \in S$  для  $k = i$  и  $a_{ii} b_{ik} = f(a_{ii}) b_{ik} \in R$  для  $k > i$ .

<sup>1</sup>Вятский государственный гуманитарный университет, Киров

**Теорема 1.**  $\langle T_J(S), +, \cdot \rangle$  – полутело, которое будет сократимым тогда и только тогда, когда  $S$  сократимо.

### Примеры.

1. Если  $J = \{1 < 2 < \dots < n\}$  –  $n$ -элементная цепь, то  $T_J(\mathbb{R}^+) = V_n(\mathbb{R}^+)$  – полутело верхних треугольных матриц размерности  $n \times n$  с действительными коэффициентами, все диагональные элементы которого положительны. См. [3].

Кольцо  $M_n(\mathbb{R}^+)$  всех верхних треугольных матриц  $n$ -го порядка с действительными элементами с обычными операциями сложения и умножения матриц является кольцом разностей сократимого полутела  $V_n(\mathbb{R}^+)$ .

2.  $T_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}^+)$  – полутело бесконечных верхних треугольных матриц с действительными коэффициентами.
3. Если  $J$  – антицепь, то  $T_J(S)$  – полутело обобщенных диагональных матриц, изоморфное степени полутела  $S : T_J(S) \cong S^J$ .

Конгруэнцией на полутеле  $S$  называется любое отношение эквивалентности  $\rho$  на  $S$ , согласованное с операциями:  $a\rho b, c\rho d \Rightarrow (a+c)\rho(b+d), (ac)\rho(bd) \ (\forall a, b, c, d \in S)$ .

Ядром полутела называется класс единицы 1 произвольной конгруэнции на нем. Неодноэлементное полутело называется *ограниченным*, если оно как ядро порождается элементом  $2=1+1$ .

Множество  $\text{Con } S$  всех ядер полутела  $S$  замкнуто относительно операций умножения и пересечения и образует полную модулярную алгебраическую решетку, которая изоморфна решетке всех конгруэнций полутела  $S$  по отношению включения.

**Теорема 2.** Для любого натурального числа  $n$  полутело  $V_n(\mathbb{R}^+)$  ограниченное, все его ядра главные, решетка  $\text{Con } V_n(\mathbb{R}^+)$  дистрибутивна, имеет единственный атом и число ее элементов равно  $(n+1)$ -му числу Каталана.

Заметим, что если полутело  $S$  имеет только конечное число ядер, то решетка  $\text{Con } S$  дистрибутивна.

На любом полутеле  $S$  следующее бинарное отношение

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \text{ или } \exists c \in S \ a + c = b$$

является отношением порядка, превращающим  $S$  в упорядоченное полутело.

**Предложение 1.** В полутеле  $T_J(S)$  ядро, порожденное элементом 2, имеет вид:

$$\{(a_{ij}) \in M_J(S) : \exists n \in \mathbb{N} \forall i \in J \ 2^{-n} \leq a_{ij} \leq 2^n\}.$$

**Теорема 3.** Полутело  $T_J(S)$  является ограниченным тогда и только тогда, когда  $S$  ограничено и  $J$  конечно.

Центром полутела  $S$  называется множество всех его элементов, коммутирующих с любым элементом из  $S$ . Легко видеть, что центр полутела  $S$  является подполуполем в  $S$ .

**Теорема 4.** Для любого сократимого полутела  $S$  центр матричного полутела  $T_J(S)$  совпадает с множеством диагональных матриц  $(a_{ij})$  с равными элементами  $a_{ii}$ , принадлежащими центру полутела  $S$ .

**Следствие 1.** Полутело  $T_J(S)$  является полуполем тогда и только тогда, когда  $S$  – полуполе и  $J$  – антицепь.

## Литература

- [1] Вечтомов Е.М., Черанева А.В. Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.
- [2] Черанева А.В. Кольцо разностей полутела // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. Математика, информатика, язык, 2007. № 4. С. 205–207.
- [3] Вечтомов Е.М., Петухова Я.В. Полутела треугольных матриц // в сб. «Алгебра и логика; теория и приложения», Тез. докл. междунар. конф. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. С. 17–18.

## О ЧАСТИЧНЫХ ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ $[0, \infty]$ -ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Вечтомов Е.М., Шалагинова Н.В.<sup>1</sup>

*Полукольцом* называется алгебраическая система  $(S, +, \cdot, 0, 1)$ , в которой  $(S, +, 0)$  – коммутативный моноид,  $(S, \cdot, 1)$  – моноид, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения  $+$ , тождественно  $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$  и  $0 \neq 1$  [1].

Будем рассматривать коммутативные *частичные полукольца*  $S$ , в которых сумма или произведение некоторых элементов могут быть не определены. Множество  $[0, \infty]$  с обычными операциями сложения и умножения – коммутативное полукольцо, причем все элементы  $a \in (0, \infty)$  обратимы. Элемент  $\infty$  обладает свойствами:  $x + \infty = \infty$  при  $x \in (0, \infty]$ ,  $x \cdot \infty = \infty$  при  $x \in [0, \infty)$  и  $0 \cdot \infty = \infty$ . Относительно интервальной топологии  $[0, \infty]$  является компактом, гомеоморфным отрезку  $[0, 1]$ . Умножение в  $[0, \infty]$  разрывно только в точке  $(0, \infty)$ .

Непустое подмножество  $I$  частичного полукольца  $S$  называется *идеалом* в  $S$ , если для любых  $x, y \in I$  и  $s \in S$  элементы  $x + y$ ,  $sx \in I$ , если они определены. Идеал  $I$  называется *строгим (полустрогим)*, если  $x + y \in I \Rightarrow x, y \in I$  ( $x + y, x \in I \Rightarrow y \in I$ ) для любых  $x, y \in S$ . Собственный идеал  $I$  полукольца  $S$  называется: *максимальным*, если в  $S$  нет собственных идеалов, строго содержащих  $I$ ; *простым*, если  $x \cdot y \in I \Rightarrow x \in I$  или  $y \in I$  для любых  $x, y \in S$ .

Пусть  $X$  – произвольное тихоновское пространство. Множество  $C_{\infty}^{+}(X)$  всех непрерывных функций, определенных на  $X$ , со значениями в полукольце  $[0, \infty]$  с поточечными операциями сложения и умножения функций является коммутативным частичным полукольцом. Частичное полукольцо  $C_{\infty}^{+}(X)$  замкнуто относительно сложения, но не обязано быть замкнутым относительно умножения.

Каждой функции  $f \in C_{\infty}^{+}(X)$  соответствуют: нуль-множество  $Z(f) = f^{-1}(0)$ , конуль-множество  $\text{coz } f = \{x \in X : f(x) \in (0, \infty)\}$  и замкнутое множество  $H(f) = f^{-1}(\infty)$ , также являющееся нуль-множеством на  $X$ . Через  $\bar{A}$  и  $A^0$  будем обозначать, соответственно, замыкание и внутренность подмножества  $A$  топологического пространства.

---

<sup>1</sup>Вятский государственный гуманитарный университет, Киров



Для любой функции  $f \in C_\infty^+(X)$  определим функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x \in Z(f); \\ f^{-1}(x), & \text{если } x \in \text{coz } f; \\ 0, & \text{если } x \in H(f). \end{cases}$$

Ясно, что  $f^* \in C_\infty^+(X)$ . Произведение функций  $ff^*$ , равное 1 на  $\text{coz } f$  и 0 на  $Z(f) \cup H(f)$ , не обязано быть непрерывной функцией. Непрерывность функции  $ff^*$  равносильна тому, что замкнутые множества  $Z(f)$  и  $H(f)$  открыты. Поэтому частичное полукольцо  $C_\infty^+(X)$  является полукольцом тогда и только тогда, когда  $X$  будет  $P$ -пространством.

Определения и свойства  $P$ -пространств и  $F$ -пространств можно найти в [2].

Для любого тихоновского пространства  $X$  существует его стоун-чеховская компактификация  $\beta X$  [1]. Продолжение функции  $f \in C_\infty^+(X)$  на  $\beta X$  определяется единственным образом и обозначается  $f^\beta \in C_\infty^+(\beta X)$ . Для всякой функции  $f \in C_\infty^+(\beta X)$  имеем  $f = (f|_X)^\beta$ , и для любой функции  $g \in C_\infty^+(X)$  выполняется  $g = g^\beta|_X$ . Отметим, что частичные полукольца  $C_\infty^+(X)$  и  $C_\infty^+(\beta X)$  изоморфны тогда и только тогда, когда пространство  $X$  псевдокомпактно.

Заметим, что непустое множество  $I \subset C_\infty^+(X)$  будет идеалом в  $C_\infty^+(X)$ , если для любых  $f, g \in I$  и  $h \in C_\infty^+(X)$  элементы  $f+g, fh \in I$ , если произведение  $fh$  является непрерывной функцией.

Зафиксируем точку  $p \in \beta X$ . Следующие множества будут идеалами в  $C_\infty^+(X)$ :

$$\begin{aligned} M_p &= \left\{ f \in C_\infty^+(X) \mid p \in \overline{Z(f)}^{\beta X} \right\}, \\ M_{p,\infty} &= \left\{ f \in C_\infty^+(X) \mid p \in \overline{Z(f) \cup H(f)}^{\beta X} \right\}, \\ O_p &= \left\{ f \in C_\infty^+(X) \mid p \in (\overline{Z(f)}^{\beta X})^0 \right\}. \end{aligned}$$

Идеалы  $M_p$  и  $M_{p,\infty}$  — простые.

Отметим, что  $O_p = M_p$  для всех  $p \in \beta X$  тогда и только тогда, когда  $X$  является  $F$ -пространством.

**Лемма 1.** Если для идеала  $J$  частичного полукольца  $C_\infty^+(X)$  выполняется  $J \not\subseteq M_{p,\infty}$ , то существует функция  $f \in J \setminus M_{p,\infty}$  со значениями в  $[0, 1]$ .

**Теорема 1.** Для любого тихоновского пространства  $X$  максимальные идеалы в частичном полукольце  $C_\infty^+(X)$  суть в точности идеалы  $M_{p,\infty}$ ,  $p \in \beta X$  и каждый собственный идеал из  $C_\infty^+(X)$  содержится в некотором максимальном идеале.

Аналогично теореме Гельфанда–Колмогорова для полуколец  $C^+(X)$  непрерывных неотрицательных функций на тихоновском пространстве  $X$  [4] существует гомеоморфизм между пространством всех максимальных идеалов частичного полукольца  $C_\infty^+(X)$  и компактификацией  $\beta X$ .

**Лемма 2.** Для любых двух различных точек  $p, q \in \beta X$  верно  $O_p + O_q = C_\infty^+(X)$  и идеал  $O_p$  содержится в единственном максимальном идеале  $M_{p,\infty}$ .

**Лемма 3.** Если  $X$  – тихоновское пространство,  $J$  – идеал частичного полукольца  $C_\infty^+(X)$ ,  $p \in \beta X$  и  $O_p \cap C^+(X) \subseteq J$ , то  $O_p \subseteq J$ .

**Теорема 2.** Для произвольного тихоновского пространства  $X$  любой простой идеал  $P$  частичного полукольца  $C_\infty^+(X)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $P$  содержит идеал  $O_p$  для некоторой однозначно определенной точки  $p \in \beta X$ ;
- 2) если  $O_p \subseteq P$  при  $p \in \beta X$ , то  $P \subseteq M_{p,\infty}$ .

**Теорема 3.** Для любого тихоновского пространства  $X$  идеалы  $M_p$ ,  $p \in \beta X$ , – это в точности максимальные среди полустрогих (строгих) простых идеалов частичного полукольца  $C_\infty^+(X)$ .

## Литература

- [1] Golan J.S. Semirings and their applications. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. – N.J.: Springer-Verlag, 1976.

- [3] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.
- [4] *Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Чермных В.В.* Элементы теории полуколец. – Киров: Радуга-ПРЕСС, 2012.

## О РЕАЛИЗУЕМОСТИ КОНЕЧНОГО ГРАФА С НЕБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН КАК ГРАФА ГРЮНБЕРГА–КЕГЕЛЯ ПОДХОДЯЩЕЙ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Гаврилюк А.Л., Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Храмцов И.В.<sup>1,2,3</sup>

Всюду в работе мы будем употреблять термин «граф» в значении «неориентированный конечный граф без петель и кратных ребер», а термин «группа» в значении «конечная группа».

Граф называется *кликкой* (соответственно, *коккликкой*), если все его вершины попарно смежны (соответственно, несмежны). Клика (соответственно, коклика) на  $n$  вершинах называется  $n$ -*кликкой* (соответственно,  $n$ -*коккликкой*).

Обозначим через  $\omega(G)$  *спектр* группы  $G$ , т.е. множество порядков всех ее элементов, а через  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей числа  $|G|$ . Множество  $\omega(G)$  определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга–Кегеля*)  $\Gamma(G)$  группы  $G$ , в котором множество вершин есть  $\pi(G)$  и две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда число  $pq$  принадлежит  $\omega(G)$ .

Граф простых чисел группы  $G$  можно понимать как некоторый абстрактный граф на  $|\pi(G)|$  вершинах, которые помечены различными простыми числами из  $\pi(G)$  так, что две вершины, помеченные

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>УрФУ

<sup>3</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), Совета по грантам Президента РФ (проекты МК-3395.2012.1 и МК-1719.2013.1), фонда Дмитрия Зимина «Династия», Уральского отделения РАН (проект 14-1-НП-27) и гранта для молодых ученых ИММ УрО РАН за 2013 г.

простыми числами  $p$  и  $q$ , смежны тогда и только тогда, когда в группе  $G$  есть элемент порядка  $pq$ . В связи с таким пониманием графа простых чисел можно сформулировать следующую проблему.

**Проблема 1.** Пусть  $\Gamma$  – граф, вершины которого помечены различными простыми числами. Существует ли группа  $G$  такая, что  $\Gamma(G) = \Gamma$ ?

Будем говорить, что граф  $\Gamma$  реализуем как граф простых чисел группы, если существует разметка вершин этого графа различными простыми числами такая, что  $\Gamma$  становится графом простых чисел некоторой группы. Следующая проблема является обобщением проблемы 1.

**Проблема 2.** Пусть  $\Gamma$  – некоторый граф. Реализуем ли  $\Gamma$  как граф простых чисел группы?

Этим интересным проблемам посвящено не так много работ. В неопубликованной бакалаврской работе И.Н. Жаркова [4], ученика В.Д. Мазурова, проблема 2 рассматривалась для случая, когда  $\Gamma$  является цепью. Было доказано, что для цепи эта проблема решается положительно тогда и только тогда, когда ее длина не превышает 4.

Аналогичные проблемы рассматривались для некоторых других графов, связанных с группой. Например, Х.П. Тонг-Виет [1] рассматривал аналог проблемы 2 для графа  $\Delta(G)$ , построенного по группе  $G$  по следующим правилам: множеством вершин графа  $\Delta(G)$  является множество простых делителей степеней неприводимых представлений группы  $G$ , и две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны в  $\Delta(G)$  тогда и только тогда, когда существует неприводимое представление группы  $G$ , степень которого делится на  $pq$ .

Из теоремы Грюнберга–Кегеля [2, Теорема А] и описания компонент связности графов простых чисел конечных простых групп, полученного в работах Уильямса [2] и второго автора [5], легко следует, что проблема 2 в общем случае решается отрицательно. В качестве контрпримера к проблеме 2 можно взять 5-клик. Ввиду этого интересно исследовать те случаи, когда проблема 2 решается положительно.

Ранее в [3] было показано, что проблема 2 решается положительно для всех графов с количеством вершин не более, чем 4, и для

некоторых графов на 5 вершинах. В настоящей работе завершается исследование проблемы 2 для графов с пятью вершинами.

Доказана следующая

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  – граф с не более, чем 5 вершинами. Тогда

(1) если  $\Gamma$  является 5-кликкой, то для  $\Gamma$  проблема 2 решается отрицательно;

(2) если  $\Gamma$  не является 5-кликкой, то для  $\Gamma$  проблема 2 решается положительно.

## Литература

- [1] *Tong-Viet H.P.* Groups whose prime graphs have no triangles // J. Algebra. 2013. Vol. 378. Pp. 196–206.
- [2] *Williams J.S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. Pp. 487–513.
- [3] *Гаврилюк А.Л., Маслова Н.В., Храпцов И.В.* О реализуемости заданного графа как графа Грюнберга–Кегеля некоторой группы // в сб. «Теория групп и ее приложения», Тез. Международной школы-конференции, посвященной 90-летию со дня рождения З.И. Бореви́ча. С. 38–40. – Владикавказ: СОГУ, 2012.
- [4] *Жарков И. Н.* О группах, граф простых чисел которого является цепью, Бакалаврская работа. Новосибирск: НГУ, 2008 (не опубликовано).
- [5] *Кондратьев А.С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.

## О НЕАБЕЛЕВЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, В КОТОРОЙ КАЖДАЯ МАКСИМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА НЕПРИМАРНОГО ИНДЕКСА РАЗРЕШИМА

Демина Е.Н.<sup>1</sup>, Маслова Н.В.<sup>2,3,4</sup>

Хорошо известно, что в конечной разрешимой группе все максимальные подгруппы разрешимы и имеют примарные индексы. Однако обратное утверждение неверно: существуют конечные неразрешимые группы, в которых каждая максимальная подгруппа разрешима и имеет примарный индекс. Пример такой группы дает конечная простая группа  $PSL_2(7)$ . Конечные неразрешимые группы, все локальные подгруппы которых разрешимы, были изучены Томпсоном [1], максимальные подгруппы примарных индексов в конечных простых группах исследованы Гуральником [3].

Многими авторами изучались конечные группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса (не обязательно максимальная) является группой, близкой к нильпотентной. Например, П.П. Барышовец [2] доказал, что группами  $PSL_2(5)$ ,  $PSL_2(7)$ ,  $SL_2(5)$  и  $SL_2(7)$  исчерпываются все конечные группы, в которых каждая подгруппа непримарного индекса нильпотентна или является группой Шмидта (минимальной ненильпотентной группой). Ослабив условия и рассмотрев конечные группы, в которых каждая максимальная подгруппа непримарного индекса разрешима, получаем более широкий класс групп. Возникают следующие вопросы: *каковы неабелевы композиционные факторы конечной неразрешимой группы, все максимальные подгруппы непримарного индекса которой разрешимы, и каково строение такой группы?*

В настоящей работе исследуется первый из этих вопросов. Основным результатом работы является следующая

---

<sup>1</sup>Московский городской педагогический университет

<sup>2</sup>ИММ УрО РАН

<sup>3</sup>УрФУ

<sup>4</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), фонда Дмитрия Зимина «Диалог» и Уральского отделения РАН (проект 14-1-НП-27).

**Теорема.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы непримарного индекса которой разрешимы, исчерпываются группами из следующего списка:

- (1)  $PSL_2(2^p)$ , где  $p$  – простое число;
- (2)  $PSL_2(3^p)$ , где  $p$  – простое число;
- (3)  $PSL_2(p^{2^w})$ , где  $p$  – нечетное простое число и  $w \geq 0$ ;
- (4)  $Sz(2^p)$ , где  $p$  – нечетное простое число;
- (5)  $PSL_3(3)$ .

Каждый из пунктов теоремы реализуется.

## Литература

- [1] Thompson J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, № 3. Pp. 383–437.
- [2] Барышовец П.П. Конечные неразрешимые группы, в которых подгруппы непримарного индекса нильпотентны или являются группами Шмидта // Укр. мат. ж. 1981. Т. 33, № 1. С. 37–39.
- [3] Guralnick R.M. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 82, № 2. Pp. 304–311.

## КОНСЕРВАТИВНЫЕ «АЛГЕБРЫ» 2-МЕРНЫХ АЛГЕБР

Кайгородов И.Б.<sup>1,2</sup>

Идея классификации всех алгебр, допустимых на  $n$ -мерном векторном пространстве, не нова, но в общем случае является достаточно трудной. Так, в некоторых работах были предприняты попытки описания всех алгебр, допустимых на 2-мерном векторном пространстве (к примеру, см. работу Ремм и Гозе [1]).

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты МК-330.2013.1)

Одним из других подходов к изучению алгебр  $n$ -мерного векторного пространства является подход Кантора, который на множестве бинарных алгебр векторного пространства с фиксированной размерностью определил структуру бинарного умножения, то есть определил умножение алгебр, и таким образом можно получить структуру алгебры. Фактически, он получил «алгебру» алгебр  $n$ -мерного векторного пространства. Как оказалась, полученная алгебра является консервативной. Ранее [2] Кантор определил понятие консервативных алгебр как класса, являющегося расширением хорошо известных ассоциативных и йордановых алгебр, а также алгебр Ли. Основная идея задания этого класса заключалась в определении класса алгебр, допускающих малые деформации операции умножения. Он также показал, что каждая консервативная алгебра вкладывается в подходящую «алгебру» алгебр.

Одним из важнейших классов, лежащих между йордановыми и консервативными алгебрами, является класс терминальных алгебр, также введенный Кантором. Терминальные алгебры, вообще говоря, не являются коммутативными, но, в некотором смысле, их можно считать дуальным понятием к коммутативным алгебрам. Напомним, что один из основных примеров коммутативных алгебр – это йордановы алгебры. Также оказалось, что основными примерами простых терминальных алгебр являются «алгебра» коммутативных алгебр  $n$ -мерного векторного пространства и некоторые ее простые подалгебры.

Таким образом, вопрос изучения «алгебры» алгебр в смысле Кантора и ее основных подалгебр является хорошо обоснованным и актуальным.

В работе были изучены 8-мерная «алгебра» 2-мерных алгебр в смысле Кантора и ее основные подалгебры: 6-мерная «алгебра» коммутативных алгебр и 4-мерная «подалгебра» алгебр с нулевым следом. Были явно описаны таблицы умножений этих алгебр, изучены алгебры дифференцирований и подалгебры размерности 1.

В частности, была доказана

**Теорема.** *Алгебра дифференцирований «алгебры» 2-мерных (и «алгебры» коммутативных 2-мерных) алгебр изоморфна простой 3-мерной алгебре Ли.*



## Литература

- [1] Remm E., Goze M. 2-dimensional algebras // Afr. J. Math. Phys. 2010. Vol. 19, № 1. Pp. 81–91.
- [2] Кантор И. Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. сем. по вект. и тенз. анал. 1972. Т. 16. С. 407–499.

## ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С $N$ -МАКСИМАЛЬНЫМИ $\mathfrak{F}$ -СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Ковалева В.А.<sup>1</sup>

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Символами  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{N}$  and  $\mathfrak{N}^r$  обозначаются классы всех сверхразрешимых групп, всех нильпотентных групп и всех разрешимых групп с нильпотентной длиной не более  $r$  ( $r \geq 1$ ) соответственно. Символом  $\pi(G)$  обозначается множество всех простых делителей порядка группы  $G$ .

Напомним, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется 2-максимальной (второй максимальной) подгруппой в  $G$ , если  $H$  является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе  $M$  группы  $G$ . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы и т.д. Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Тогда подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$ , если либо  $H = G$ , либо найдется такая цепь  $H = H_0 < \dots < H_n = G$ , что  $H_{i-1}$  – максимальная подгруппа в  $H_i$  и  $H_{i-1}/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$  для всякого  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Нами исследовались группы, все  $n$ -максимальные подгруппы которых  $\mathfrak{F}$ -субнормальны, где  $\mathfrak{F}$  – некоторая насыщенная формация. В частности, для случая, когда  $\mathfrak{F}$  – такая  $r$ -кратно насыщенная формация, что  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^{r+1}$  для некоторого  $r \geq 0$ , было доказано, что если  $|\pi(G)| \geq n + r + 1$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ ; если  $|\pi(G)| \geq n$  и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$ , то  $G$   $\phi$ -дисперсивна для некоторого упорядочения  $\phi$  множества всех простых чисел. Для случая же, когда  $|\pi(G)| \geq n + 1$  и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$ , было получено полное описание группы  $G$ . Кроме того, был доказан следующий полезный факт.

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Белоруссия

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – такая наследственная насыщенная формация, что каждая минимальная не  $\mathfrak{F}$ -группа разрешима и содержит нормальную силовскую  $p$ -подгруппу  $G_p \neq 1$  для некоторого простого числа  $p$ . В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа из  $G$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ , когда либо  $G \in \mathfrak{F}$ , либо  $G$  является минимальной не  $\mathfrak{F}$ -группой с минимальной нормальной подгруппой  $G^\mathfrak{F}$ .

## Литература

- [1] Ballester-Bolínches A., Ezquerro L.M. *Classes of Finite Groups*. Springer-Verlag, 2006.
- [2] Mann A. Finite groups whose  $n$ -maximal subgroups are subnormal // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. Pp. 395–409.

## О КОНЕЧНЫХ ПОЧТИ ПРОСТЫХ 6-ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ

Колпакова В.А.<sup>1</sup>, Кондратьев А.С.<sup>2,3</sup>

Пусть  $G$  – конечная группа. Обозначим через  $\pi(G)$  множество простых делителей порядка группы  $G$ . Группа  $G$  называется  $n$ -примарной, если  $|\pi(G)| = n$ . Граф простых чисел (граф Грюнберга–Кегеля)  $\Gamma(G)$  группы  $G$  определяется как граф с множеством вершин  $\pi(G)$ , в котором две различные вершины  $p$  и  $q$  смежны тогда и только тогда, когда в  $G$  есть элемент порядка  $pq$ .

В теории конечных групп интерес многих исследователей вызывают различные частные случаи общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел. В рамках этой общей задачи прежде всего наше внимание привлекает более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел.

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>ИММ УрО РАН

<sup>3</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Это объясняется тем, что указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга–Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. [12]). Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна.

Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [12] и А.С. Кондратьева [3]. Они составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие «малые» в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Например, все конечные простые группы исключительного лиева типа, кроме групп  $E_7(q)$  при  $q > 3$ , а также все простые группы из известного «Атласа конечных групп» [7], кроме группы  $A_{10}$ , имеют несвязный граф простых чисел. Классификация компонент связности графа простых чисел для конечных простых групп, полученная в работах [3, 12], была применена Лучидо [11] для получения аналогичной классификации для всех конечных *почти простых* групп, т.е. групп с простым неабелевым цокелем. Задача изучения конечных групп с несвязным графом простых чисел, которые не являются почти простыми, решена только для нескольких отдельных частных случаев. В этой задаче возникают нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных почти простых групп.

В рамках отмеченной задачи А.С. Кондратьев и И.В. Храмцов [4–6] изучали конечные группы, имеющие несвязный граф простых чисел с числом вершин, не превосходящим 4. В недавней работе А.С. Кондратьева [10] были определены почти простые 5-примарные группы вместе с их графами простых чисел, что является необходимым предварительным шагом для изучения конечных 5-примарных групп с несвязным графом простых чисел. Мы продолжаем эти исследования, имея целью определить сначала почти простые 6-примарные группы и их графы Грюнберга–Кегеля.

Для этого мы используем следующий список всех простых 6-примарных групп, полученный в [9]:

- (1)  $A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, M_{23}, M_{24}, J_1, Suz, Ru, Co_2, Co_3, Fi_{22}, HN, L_5(7), L_6(3), L_7(2), O_7(4), O_7(5), O_7(7), O_9(3), PSp_6(4), PSp_6(5), PSp_6(7), PSp_8(3), U_5(4), U_5(5), U_5(9), U_6(3), U_7(2), F_4(2), O_8^+(4), O_8^+(5), O_8^+(7), O_{10}^+(2), O_8^-(3), O_{10}^-(2), {}^3D_4(4), {}^3D_4(5);$
- (2)  $L_2(q)$ , где  $\pi(q^2 - 1) = 5$ ;

- (3)  $L_3^\epsilon(q)$ , где  $\epsilon \in \{+, -\}$  и  $\pi((q^2 - 1)(q^3 - \epsilon 1)) = 5$ ;
- (4)  $L_4^\epsilon(q)$ , где  $\epsilon \in \{+, -\}$  и  $\pi((q^2 - 1)(q^3 - \epsilon 1)(q^4 - 1)) = 5$ ;
- (5)  $PSp_4(q)$ , где  $\pi(q^4 - 1) = 5$ ;
- (6)  $G_2(q)$ , где  $\pi(q^6 - 1) = 5$ ;
- (7)  $Sz(q)$ , где  $q = 2^{2m+1} > 2$  и  $\pi((q - 1)(q^2 + 1)) = 5$ ;
- (8)  $R(q)$ , где  $q = 3^{2m+1} > 3$  и  $\pi((q - 1)(q^3 + 1)) = 5$ .

В данной работе определены графы Грюнберга–Кегеля для каждой почти простой 6-примарной группы с цокелем, изоморфным одной из групп пункта (1) этого списка. При этом используются результаты из [1–3, 7, 8, 12].

## Литература

- [1] *Васильев А.В., Вдовин Е.П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // *Алгебра и логика*. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
- [2] *Васильев А.В., Вдовин Е.П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // *Алгебра и логика*. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
- [3] *Кондратьев А.С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // *Мат. сб.* 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
- [4] *Кондратьев А.С., Храмцов И.В.* О конечных трипримарных группах // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
- [5] *Кондратьев А.С., Храмцов И.В.* О конечных четырёхпримарных группах // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
- [6] *Кондратьев А.С., Храмцов И.В.* О конечных непростых трипримарных группах с несвязным графом простых чисел // *Сиб. эл. матем. изв.* 2012. Т. 9. С. 472–477.
- [7] *Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.* Atlas of finite groups. – Oxford: Clarendon Press, 1985.

- [8] *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of finite simple groups. Number 3. Math. Surv. Monogr.— Providence: Amer. Math. Soc., 1998.
- [9] *Jafarzadeh A., Iranmanesh A.* On simple  $K_n$ -groups for  $n = 5, 6$  // London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 340. Pp. 668–680.
- [10] *Kondrat'ev A. S.* Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg–Kegel graphs // Сиб. эл. матем. изв., в печати.
- [11] *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. Pp. 1–22; addendum, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. Pp. 189–190.
- [12] *Williams J.S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. Pp. 487–513.

## СТРОЕНИЕ ПОЛУКОЛЕЦ, В КОТОРЫХ РЕШЕТКА ИДЕАЛОВ И РЕШЕТКА КОНГРУЭНЦИЙ ИЗОМОРФНЫ

Лукин М.А.<sup>1</sup>

Важным методом изучения структуры полуколец является их представление в виде расширений полуколец, где фактор-полукольцо и класс нуля изучены. При этом возникает естественный вопрос: для каких полуколец между идеалами и конгруэнциями существует взаимно-однозначное соответствие, при котором конгруэнции сопоставляется ее класс нуля, иначе говоря, канонический гомоморфизм  $\text{Con}(S) \rightarrow \text{Id}(S)$  является изоморфизмом. При этом необходимо проверить два свойства полуколец: каждый ли идеал является полустрогим (то есть выступает классом нуля некоторой конгруэнции) и действительно ли для любых двух разных конгруэнций полукольца их классы нуля также различны. Отметим, что в класс таких полуколец входят, например, ассоциативные кольца с единицей и обобщенно-булевы решетки.

---

<sup>1</sup>Вятский государственный университет, Киров

Метод изучения структуры таких полуколец состоит в исследовании свойств конгруэнций с богатым набором свойств. При этом по мере надобности вводятся новые конгруэнции на полукольцах с дополнительными условиями. Примеры конгруэнций на полукольцах приводятся в работах [1, 2].

Пусть  $\langle S, +, \cdot \rangle$  – полукольцо. Определим на нем отношение  $\lambda$  следующим образом:  $a\lambda b$  тогда и только тогда, когда существуют конечные наборы элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_m \in S$  и  $p_1, p_2, \dots, p_n \in N$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_m \in N$ , такие, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a$ ,  $b_1 + b_2 + \dots + b_m = b$  и  $p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n = t_1 b_1 + t_2 b_2 + \dots + t_m b_m$ . Под произведением  $rs$ ,  $r \in N$ ,  $s \in S$ , понимаем сумму  $\underbrace{s + s + \dots + s}_r$ .

**Теорема 1.** Транзитивное замыкание  $\rho$  отношения  $\lambda$  является конгруэнцией на  $S$ . Класс нуля  $\rho$  совпадает с  $r(S)$  – множеством обратимых по сложению элементов полукольца  $S$ , факторполукольцо  $S/\rho$  идемпотентно по сложению. Конгруэнция  $\rho$  является наименьшей из множества  $L = \{\sigma \in \text{Con } S : s\sigma(2s)\forall s \in S\}$ .

Полукольца, в которых отображение  $\text{Con}(S) \rightarrow \text{Id}(S)$  является изоморфизмом, будем называть полукольцами с условием  $*$ . Из первой теоремы получаем теорему 2.

**Теорема 2.** Полукольцо  $S$  удовлетворяет условию  $*$  тогда и только тогда, когда оно либо является кольцом, в котором каждый полукольцевой идеал является кольцевым, либо представляется в виде прямого произведения  $L \times R$  с покомпонентными операциями сложения и умножения идемпотентного по сложению полукольца  $L \neq \{0\}$  с условием  $*$  и кольца  $R$ , для которого  $RI + IR = I$  для любого полукольцевого идеала  $I$  кольца  $R$ .

В произвольном кольце  $R$  каждый полустрогий полукольцевой идеал является кольцевым, а значит, конгруэнции по всем полустрогим идеалам определяются однозначно. Следовательно, для того чтобы кольцо  $R$  удовлетворяло условию  $*$ , необходимо и достаточно требовать, чтобы каждый его полукольцевой идеал являлся кольцевым. Строение таких колец описывает следующее предложение.

**Предложение 1.** В кольце  $R$  каждый полукольцевой идеал является кольцевым тогда и только тогда, когда для любого элемента  $r \in R$  существуют  $n \in N$ ,  $r_1, r_2 \in R$  такие, что  $nr = r_1 r + r r_2$ .

Примером кольца из предложения 1 служит кольцо матриц над полем действительных чисел.

В итоге, изучение полуколец с условием  $*$  сводится к изучению идемпотентных по сложению полуколец с условием  $*$ . Следующие результаты получены для идемпотентных полуколец  $L$ , коммутативных в нуле.

**Теорема 3.** *Каждый элемент идемпотентного полукольца  $L$  с условием  $*$  представляется в виде суммы мультипликативных идемпотента и нильпотента, причем идемпотент определяется единственным образом. Множества мультипликативных идемпотентов  $M$  и нильпотентов  $I$  образуют подполукольца в  $L$ . Множество  $I$  является идеалом в  $L$ .*

**Предложение 2.** *Для каждого элемента  $m \in M$  множество  $I_m = \{i \in I : m + i = m\}$  является идеалом в  $L$ , множество таких идеалов образует подрешетку в  $\text{Id}(I)$ , при этом  $I_{k+t} = I_k + I_t$ ,  $I_{kt} = I_k \cap I_t$ . Отображение  $m \mapsto I_m$  является решеточным гомоморфизмом  $M \rightarrow \text{Im}$ , где  $\text{Im} = \{I_m, m \in M\}$ .*

**Теорема 4.** *Коммутативное идемпотентное полукольцо  $L$  удовлетворяет условию  $*$  тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1.  $L$  – сумма обобщенно-булевой решетки  $M$  и нильпотентного полукольца  $I$ , в которой проекция любого элемента на  $M$  определяется однозначно.
2. Полукольцо  $I$  покрывается системой идеалов, выделяющихся прямым сомножителем в  $I$ , образующих обобщенно-булеву решетку, которая является эпиморфным образом  $L$ .
3. Для любых элементов  $a, b \in I$  из того, что  $a > b \Leftrightarrow a + b = a$ , следует, что  $b = a_i + ca$ , где  $a_i$  – проекция элемента  $a$  на некоторый идеал из условия 2,  $c \in I$ .
4. Любой идеал полукольца  $I$ , содержащий вместе с каждым своим элементом любую его проекцию на идеалы из условия 2, является классом нуля только одной конгруэнции – конгруэнции Берна.

**Пример.** Если в качестве  $M$  выступает конечная булева решетка  $B$ , то  $I$  – прямое произведение идеалов, которые удовлетворяют условию  $*$ . При этом каждый из них является эпиморфным образом некоторого атома  $B$ .

В заключение скажем, что вопрос о строении некоммутативных идемпотентных полуколец с условием  $*$  остается открытым. Часть доказательств приведенных выше результатов можно найти в [3].

## Литература

- [1] Вечтомов Е.М. Введение в полукольца. Киров: ВятГПУ, 2000.
- [2] Вечтомов Е.М., Черанева А.В. Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 4. С. 3–54.
- [3] Лукин М.А. Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах / в сб. «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России», Труды V всероссийской научно-методической конференции. С. 312–316. – Киров: ВятГГУ, 2012.

## НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПИРСОВСКИХ ЦЕПЕЙ ПОЛУКОЛЕЦ

Марков Р.В.<sup>1</sup>

В работе автора [1] вводится понятие пирсовской цепи полуколец, аналога пирсовской цепи колец [2], и доказываются некоторые свойства этой конструкции. Показано, в частности, что некоторые свойства полуколец могут «подниматься» (наследоваться) от неразложимых факторполуколец (не имеющих нетривиальных прямых слагаемых) или  $ti$ -факторов (максимальных неразложимых факторполуколец) к исходному полукольцу. В данном докладе приведена теорема, продолжающая исследования полуколец в терминах пирсовских цепей а также приводятся некоторые применения построенной конструкции.

С необходимыми определениями, связанными с полукольцами и пучковыми представлениями, можно ознакомиться в [3]; с определениями хорновской формулы и её интерпретаций – в [4].

**Определение 1.** Мультипликативный идемпотент  $e$  полукольца  $S$  называется *центральный дополняемым идемпотентом*, если:

---

<sup>1</sup>Вятский государственный гуманитарный университет, Киров



1.  $e$  – центральный:  $(\forall x \in S)(ex = xe)$ ;
2.  $e$  – дополняемый:  $(\exists e^\perp \in S)(e + e^\perp = 1 \wedge ee^\perp = 0)$ .

**Определение 2.** Идеал  $A$  полукольца  $S$  назовем *регулярным*, если он порожден некоторым множеством дополняемых идемпотентов.

**Определение 3.** Конгруэнцию  $\phi$  вида

$$a \phi b \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp,$$

где  $a, b \in S$ ,  $e^\perp$  – дополнение к центральному дополняемому идемпотенту  $e$  из некоторого максимального регулярного идеала  $A$ , назовем *пирсовской конгруэнцией*.

Факторполукольцо  $S/\phi$  называется *пирсовским слоем* полукольца  $S$ .

Через  $\rho$ ,  $\phi$  и  $\mu$  обозначим конгруэнции, образующие неразложимое факторполукольцо  $S/\rho$ , пирсовский слой  $S/\phi$  и *ti*-фактор  $S/\mu$  соответственно.

**Определение 4.** *Сильной хорновской формулой* назовем предваренную формулу, у которой бескванторная часть есть конъюнкция членов, каждый из которых есть или простейшая формула вида  $f = g$ , где  $f, g$  – термы, или дизъюнкция одной простейшей формулы указанного вида и нескольких отрицаний простейших формул.

**Теорема 1.** Для произвольных полукольца  $S$  и сильной хорновской формулы  $X$  равносильны следующие утверждения:

1. Существует такая интерпретация  $M_S$  формулы  $X$  на полукольце  $S$ , что  $X$  – истинна.
2. Существует такая интерпретация  $M_{S/\rho}$  формулы  $X$  на неразложимом факторполукольце  $S/\rho$ , что  $X$  – истинна.
3. Существует такая интерпретация  $M_{S/\phi}$  формулы  $X$  на пирсовском слое  $S/\phi$ , что  $X$  – истинна.
4. Существует такая интерпретация  $M_{S/\mu}$  формулы  $X$  на *ti*-факторе  $S/\mu$ , что  $X$  – истинна.

Продemonстрируем применение теоремы 1 на примере положительных, ограниченных, взаимных и мультипликативно сократимых полуколец.

**Определение 5.** Полукольцо  $S$  с 1 называется *положительным*, если для любого элемента  $a \in S$  элемент  $a + 1$  обратим в  $S$ .

Это определение записывается в виде следующей хорновской формулы:

$$(\forall x \exists y) ((f_1 = g_1) \wedge (f_2 = g_2)), \quad (1)$$

где  $f_1(x, y) = f_2 = (x + 1)y$ ,  $g_1(x, y) = y(x + 1)$ ,  $g_2(x, y) = 1$  – интерпретация хорновской формулы над  $S$ ,  $S/\rho$ ,  $S/\phi$  или  $S/\mu$ .

**Определение 6.** Полукольцо  $S$  называется *ограниченным*, если для любого  $a \in S$  выполняется  $a + 1 = 1$ :

$$(\forall a) (a + 1 = 1). \quad (2)$$

**Определение 7.** Полукольцо  $S$  называют *взаимным*, если в нем выполнены следующие тождества:

1.  $a \cdot a = a$  (идемпотентность операции умножения полукольца);
2.  $a \cdot b = b \cdot a$  (коммутативность операции умножения полукольца);
3.  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$  (дистрибутивность операции сложения полукольца относительно умножения);
4.  $1 + a = 1$  (поглощающее свойство единицы полукольца относительно сложения).

Запишем условия в виде формулы:

$$(\forall a, b) ((aa = a) \wedge (ab = ba) \wedge (a + bc = (a + b)(a + c)) \wedge (1 + a = 1)). \quad (3)$$

**Определение 8.** Полукольцо с импликацией

$$(\forall a, b, c) (ac = bc \Rightarrow a = b)$$

называется *мультипликативно сократимым*.

Определению 8 соответствует хорновская формула:

$$(\forall a, b, c) ((ac \neq bc) \vee (a = b)). \quad (4)$$

**Теорема 2.** Сильные хорновские формулы (1), (2), (3), (4) удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, свойства полуколец, описываемые определениями 1 – 4, «переносятся» от неразложимых факторполуколец, пирсовских слоев и  $ti$ -факторов к исходному полукольцу и обратно.

## Литература

- [1] Марков Р.В. Пирсовские цепи полуколец // Вестник Сыктывкарского университета. 2013. № 16.
- [2] Burgess W.D., Stephenson W. An analogue of the Pearce sheaf for noncommutative rings // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6, № 9. Pp. 863–886.
- [3] Чермных В.В. Функциональные представления полуколец. – Киров: ВятГГУ, 2010.
- [4] Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

## АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (392, 115, 18, 40)

Махнев А.А., Падучих Д.В., Пономарев Д.Н.<sup>1,2,3</sup>

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , то есть подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Подграф  $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$  называется окрестностью вершины  $a$  и обозначается  $[a]$ , если граф  $\Gamma$  фиксирован. Положим  $a^\perp = \{a\} \cup [a]$ .

*Степенью вершины* называется число вершин в ее окрестности. Граф  $\Gamma$  называется *регулярным* степени  $k$ , если степень любой вершины  $a$  из  $\Gamma$  равна  $k$ . Граф  $\Gamma$  назовем *реберно регулярным* с параметрами  $(v, k, \lambda)$ , если он содержит  $v$  вершин, регулярен степени  $k$  и каждое его ребро лежит в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  – *вполне регулярный граф* с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$ , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и  $[a] \cap [b]$  содержит точно  $\mu$  вершин для любых двух вершин  $a, b$ , находящихся на расстоянии 2 в  $\Gamma$ .

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>УрФУ

<sup>3</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (грант 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

В [1] начато решение задачи изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 3. Если  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(392, 115, 18, 40)$ , то для любой вершины  $u \in \Gamma$  подграфы  $[u]$  и  $\Gamma_2(u)$  сильно регулярны с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$  и  $(276, 75, 10, 24)$ . Более того, графы с такими параметрами имеют неглавное собственное значение 3. В [2] найдены возможные автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$  и  $(276, 75, 10, 24)$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  – элемент простого порядка  $p$  из  $G$ ,  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 23\}$  и выполняется одно из утверждений:

(1)  $\Omega$  – пустой граф, либо  $p = 5$  и  $\alpha_1(g) = 15, 55$ , либо  $p = 23$  и  $\alpha_1(g) = 23$ ;

(2)  $\Omega$  является  $l$ -кликкой,  $1 \leq l \leq 25$ ,  $p = 3$ ,  $l$  сравнимо с 1 по модулю 3 и  $\alpha_1(g) = 24s + 23 - 5l$ ;

(3)  $\Omega = a^\perp$  для некоторой вершины  $a \in \Omega$  и  $p = 2$ .

**Предложение 2.** Пусть  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(276, 75, 10, 24)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  – элемент простого порядка  $p$  из  $G$ ,  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$  и выполняется одно из утверждений:

(1)  $\Omega$  – пустой граф, либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 12$ , либо  $p = 3$  и  $\alpha_1(g) = 60t + 12$ , либо  $p = 23$  и  $\alpha_1(g) = 92$ ;

(2)  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, либо  $p = 5$ ,  $n = 1$  и  $\alpha_1(g) = 75, 175$ , либо  $p = 2$ ,  $n = 4$  и  $\alpha_1(g) = 40l + 24$ ;

(3)  $\Omega$  является  $l$ -кликкой,  $p = 3$ ,  $3 \leq l \leq 48$ ;

(4)  $\Omega$  является объединением  $t$  ( $t \geq 2$ ) изолированных клик, либо  $p = 3$  и  $\Omega$  – клика, либо  $p = 2$  и порядки изолированных клик в  $\Omega$  равны 2 или 4;

(5)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь и  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ .

С помощью предложений 1 и 2 найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами  $(392, 115, 18, 40)$ .

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(392, 115, 18, 40)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  – элемент из  $G$  простого порядка

$p$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $|G|$  делит  $8 \cdot 7 \cdot 23$  и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $\Omega$  – пустой граф, либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 56r$ , либо  $p = 7$  и  $\alpha_1(g) = 140$ ;
- (2)  $|\Omega| = 1$ ,  $p = 23$  и  $\alpha_1(g) = 115$ .

## Литература

- [1] Махнев А.А. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Доклады академии наук. 2013. Т. 451, № 5. С. 475–478.
- [2] Махнев А.А., Самойленко М.С. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами (115, 18, 1, 3) и (276, 75, 10, 24) // Тезисы молод. конф. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2014.

## АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С ПАРАМЕТРАМИ (115, 18, 1, 3) И (276, 75, 10, 24)

Махнев А.А.<sup>1</sup>, Самойленко М.С.<sup>2,3</sup>

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , то есть подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Положим  $[a] = \Gamma_1(a)$ ,  $a^\perp = \{a\} \cup [a]$ . Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  ( $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений*  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ , если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  для любого  $i = 0, \dots, d$ .

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>УрФУ

<sup>3</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (грант 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-C-1-1009).

В [1] начато решение задачи изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 3. В [2] классифицированы дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$ .

**Предложение.** Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$ . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(576, 115, 18, 24)$ ,  $(484, 115, 18, 30)$  или  $(392, 115, 18, 40)$ ;
- (2) диаметр  $\Gamma$  равен 3,  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{115, 96, 8; 1, 8, 92\}$  и спектр  $115^1, 23^{217}, 3^{713}, -9^{805}$ ;
- (3) диаметр  $\Gamma$  равен 4 и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ .

Если  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ , то для любой вершины  $u \in \Gamma$  подграф  $\Gamma(u)$  является сильно регулярным с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$ , а подграф  $\Gamma_2(u)$  является дистанционно регулярным с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ . Антиподальные частные  $\Gamma_2(u)$  и  $\Gamma$  сильно регулярны с параметрами  $(276, 75, 10, 24)$  и  $(392, 115, 18, 40)$  соответственно. В данной работе изучены автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$  и  $(276, 75, 10, 24)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  – элемент простого порядка  $p$  из  $G$ ,  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 23\}$  и выполняется одно из утверждений:

- (1)  $\Omega$  – пустой граф, либо  $p = 5$  и  $\alpha_1(g) = 15, 55$ , либо  $p = 23$  и  $\alpha_1(g) = 23$ ;
- (2)  $\Omega$  является  $l$ -кликлой,  $1 \leq l \leq 13$ ,  $p = 3$ ,  $l$  сравнимо с 1 по модулю 3 и  $\alpha_1(g) = 24s + 23 - 5l$ ;
- (3)  $\Omega = b^\perp$  для некоторой вершины  $b \in \Omega$  и  $p = 2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(276, 75, 10, 24)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  – элемент простого порядка  $p$  из  $G$ ,  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$  и выполняется одно из утверждений:

- (1)  $\Omega$  – пустой граф, либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 12$ , либо  $p = 3$  и  $\alpha_1(g) = 60t + 12$ , либо  $p = 23$  и  $\alpha_1(g) = 92$ ;
- (2)  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, либо  $p = 5$ ,  $n = 1$  и  $\alpha_1(g) = 75, 175$ , либо  $p = 2$ ,  $n = 4$  и  $\alpha_1(g) = 40l + 24$ ;
- (3)  $\Omega$  является  $l$ -коккликой,  $p = 3$ ,  $3 \leq l \leq 48$ ;
- (4)  $\Omega$  является объединением  $m$  ( $m \geq 2$ ) изолированных клик, либо  $p = 3$  и  $\Omega$  – коклика, либо  $p = 2$  и порядки изолированных клик в  $\Omega$  равны 2 или 4;
- (5)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь и  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ .

## Литература

- [1] Мазнев А.А. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Доклады академии наук. 2013. Т. 451, № 5. С. 475–478.
- [2] Мазнев А.А. О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (115, 18, 1, 3) // Доклады академии наук. 2013. Т. 451, № 6. С. 615–619.

## СТАНДАРТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИЕВСКОГО ТИПА

Мурсеева А.И.<sup>1</sup>

Пусть  $g = \bigoplus_{\alpha \in K} g_{\alpha}$  – конечноградуированная алгебра Ли, не обязательно конечномерная над полем рациональных чисел,  $g_0 \subseteq \sum_{\alpha \neq 0} [g_{\alpha}, g_{-\alpha}]$ ,  $g_{\alpha} \subseteq \sum_{\beta} [g_{\beta}, g_{\alpha-\beta}]$ , где  $\beta$  и  $\alpha$  линейно независимы и  $E(g)$  – группа, порожденная  $e^{ad x_{\alpha}}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $x_{\alpha} \in g_{\alpha}$ .

Далее, пусть  $R$  – произвольная ассоциативная алгебра над  $Q$  с 1. Элемент  $a \in R$  называется унитарным, если  $(a - 1)^n = 0$  для некоторого натурального  $n$ . Гомоморфизм  $\varphi : E(R) \rightarrow u(R)$ , где  $u(R)$  – группа обратимых элементов алгебры  $R$ , назовем стандартным представлением группы лиевского типа  $E(R)$ , если все элементы  $\varphi(e^{ad(x_{\alpha})})$  унитарны при  $\alpha \neq 0$ ,  $x_{\alpha} \in g_{\alpha}$ .

<sup>1</sup>Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

**Теорема.** *Стандартные представления групп лиевского типа  $E(g)$  сводятся к гомоморфизмам алгебры Ли  $g$  и ядер этих представлений – конгруэнцы подгрупп.*

## Литература

- [1] Голубчик И.З. Группы лиевского типа над PI-кольцами // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3, № 2. С. 399–424.
- [2] Голубчик И.З. Эпиморфизмы групп лиевского типа / IV Межд. алг. конф. Новосибирск, 2000. С. 61.
- [3] Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестник МГУ. 1983. Сер. 1, Матем. и мех. № 3. С. 61–71.
- [4] Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативным кольцом // Сб. «Модули и алгебраические группы».
- [5] Зельманов Е.И. Изоморфизм полной линейной алгебры над ассоциативным кольцом // Сиб. матем. журнал. 1985. Т. 26, № 4. С. 49–67.
- [6] Golubchik I.Z. Isomorphisms of General Linear Group over an Associative Ring // Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 131, part 1. Pp. 123–136.
- [7] Исмагилова А.С. Изоморфизмы унитарных групп над кольцами // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 55–70.
- [8] Бунина Е.И. Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 5. С. 143–144.



## О $p$ -ДОПОЛНЕНИЯХ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Нестеров М.Н.<sup>1</sup>

Пусть  $p$  – простое число. Подгруппа  $H$  конечной группы  $G$  называется  $p$ -дополнением, если её порядок не делится на  $p$ , а индекс является степенью числа  $p$ .

Обозначим через  $\mathcal{NC}$  множество всех простых чисел  $p$  таких, что для некоторых натурального числа  $s$ , степени  $q$  простого числа и нечетного простого числа  $l$  справедливо равенство

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}.$$

Справедлива следующая

**Теорема.** *Для данного простого числа  $p$  следующие утверждения эквивалентны:*

1. В каждой конечной группе любые два  $p$ -дополнения сопряжены.
2. В каждой конечной группе  $G$  любые два  $p$ -дополнения сопряжены в  $\text{Aut}(G)$ .
3. В каждой конечной группе любые два  $p$ -дополнения изоморфны.
4.  $p \notin \mathcal{NC}$ .

Для доказательства теоремы используется описание  $p$ -дополнений в конечных простых группах [1], полученное с помощью классификации конечных простых групп.

Доказано, что числа Ферма, а также числа 2, 19, 37 и 487 не принадлежат множеству  $\mathcal{NC}$ , в то время как числа Мерсенна принадлежат множеству  $\mathcal{NC}$ . Кроме того, с помощью компьютерных вычислений найден ряд чисел из  $\mathcal{NC}$ , среди них числа 11, 13 и 73 не превосходят 100.

## Литература

- [1] Казарин Л.С. О произведении конечных групп // Доклады АН СССР. 1984. Т. 269, № 3. С. 528–531.

---

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

## О СТРОЕНИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЗАДАННОГО ПОРЯДКА

Пастухова Г.В.<sup>1</sup>

Классификационная задача Кэли, которая заключается в том, чтобы дать полную классификацию всех групп, порядка которых равны заданному натуральному числу  $n$ , решается по двум направлениям. Первое – это фиксирование порядка и изучение неабелевой группы, исходя или из размеров центра, или нормальности силовской подгруппы или иных характеристик группы, абелевы же конечные группы имеют полное описание. Для решения этой задачи привлекаются различные математические пакеты, которые имеют богатую библиотеку конечных групп. Например, система GAP 4.5.4 включает в себя группы порядка не более 2000, за исключением групп порядка 1024, и всего рассмотрены 423 164 062 группы. Второе направление – это рассмотрение целого класса групп порядка  $n$  с определенным каноническим разложением этого порядка. Так, например, известно, что если  $n$  – простое число, то существует единственная группа такого порядка. Классический пример описания групп порядка  $n = pq$ , где  $p$  и  $q$  – различные простые числа, реализован с помощью теорем Людвиг Силова [1]. Ф. Холл обобщил результаты Силова.

При возрастании порядка группы проблема ее описания в общем случае не имеет рационального решения, в связи с чем она на сегодняшний день претерпела некоторые изменения, например, описать группы порядка  $ap$ , где  $a$  – некоторый множитель (в общем случае не являющийся простым числом) и такой, что  $(a, p) = 1$ .

Автором описаны неабелевы группы порядка  $8p$ .

Заметим, что порядок  $2^3$  первый представил всю линейку групп, то есть с таким порядком имеют место, помимо существующей для любого порядка циклической, и две абелевы нециклические группы, и две неабелевы. В связи с этим, описание этих групп является традиционной задачей применения теорем силовского типа [2] и иных

---

<sup>1</sup>Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Академическая школа информационных технологий при Пермском государственном университете

арифметических критериев группы, таких, например, как спектр [3].

**Теорема.** Пусть  $H$  – неабелева группа порядка  $2^3p$ , силовская  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $H$  нормальна в  $H$ . Тогда  $H$  изоморфна одной из следующих групп:

1.  $H = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = 8$ ,  $b^{-1}ab = a^r$ ,  $r^i \not\equiv 1 \pmod{p}$ , где  $1 \leq i \leq 8$ ,  $p \equiv 1 \pmod{8}$ .

2.  $H = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = 8$ ,  $b^{-1}ab = a^r$ ,  $r^i \not\equiv 1 \pmod{p}$ , где  $1 \leq i \leq 4$ ,  $ab^4 = b^4a$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

3.  $H = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle b \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = 4$ ,  $o(c) = 2$ ,  $bc = cb$ ,  $b^{-i}ab^i = a^{r^i}$ ,  $r^i \equiv 1 \pmod{p}$ , где  $1 \leq i \leq 4 \equiv 1 \pmod{4}$ .

4.  $H = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle b \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = 4$ ,  $o(c) = 2$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$ ,  $ab^2 = b^2a$ ,  $bc = cb$ .

5.  $H = (\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle b \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = 4$ ,  $o(c) = 2$ ,  $c^{-1}ac = a^{-1}$ ,  $bc = cb$ .

6.  $H = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle d \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = o(c) = o(d) = 2$ ,  $d^{-1}ad = a^{-1}$ ,  $bd = db$ ,  $cd = dc$ .

7.  $H = (\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \lambda \langle b \rangle$ ,  $o(a) = p$ ,  $o(b) = 4$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$ ,  $ab^2 = b^2a$ ,  $c^{-1}bc = b$ .

Также с помощью теорем Силова показано, что все группы порядка  $2^3p$ ,  $p$  – простое, имеют единственную силовскую подгруппу, кроме групп порядка  $2^3 \cdot 7 = 56$  и  $2^3 \cdot 3 = 24$ . Таким образом, все неабелевы группы порядка  $2^3p$ , кроме вышеуказанных исключений, описаны.

## Литература

- [1] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
- [2] Вдовин Е.П., Ревин Д.О. Теоремы силовского типа // УМН. 2011. Т. 66:5, № 401. С. 829–850.
- [3] Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д. Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2011. Т. 48, № 6. С. 685–728.

## ОБ ЭКСПОНЕНТАХ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ПУАССОНА

Рацеев С.М.<sup>1</sup>

Векторное пространство  $A$  над полем  $K$  с двумя  $K$ -билинейными операциями умножения  $\cdot$  и  $\{, \}$  называется алгеброй Пуассона, если относительно операции  $\cdot$  пространство  $A$  является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции  $\{, \}$  – алгеброй Ли и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д.

Пусть  $F(X)$  – свободная алгебра Пуассона от счетного множества свободных образующих  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $P_n$  – подпространство в  $F(X)$ , состоящее из всех полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть также  $\mathbf{V}$  – некоторое многообразие алгебр Пуассона,  $\text{Id}(\mathbf{V})$  – идеал тождеств многообразия  $\mathbf{V}$ . Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n / (P_n \cap \text{Id}(\mathbf{V})), \quad \exp(\mathbf{V}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\dim P_n(\mathbf{V})}.$$

Хорошо известно, что в случае основного поля нулевой характеристики  $S_n$ -модуль  $P_n(\mathbf{V})$  является вполне приводимым и разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda. \quad (1)$$

Обозначим через  $\mathbf{V}_s$  многообразие алгебр Пуассона, определенное всеми полилинейными тождествами степени  $2s$  вида

$$\begin{aligned} & \{\{x_{11}, y_{11}\}, \dots, \{x_{1\lambda_1}, y_{1\lambda_1}\}\} \cdot \{\{x_{21}, y_{21}\}, \dots, \{x_{2\lambda_2}, y_{2\lambda_2}\}\} \cdot \dots \\ & \dots \cdot \{\{x_{k1}, y_{k1}\}, \dots, \{x_{k\lambda_k}, y_{k\lambda_k}\}\} = 0, \quad \lambda \vdash s. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Ульяновский государственный университет

Например, многообразие  $\mathbf{V}_4$  определяется следующими полилинейными тождествами:

$$\begin{aligned}\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}\} &= 0, \\ \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\} \cdot \{x_4, y_4\} &= 0, \\ \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{\{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}\} &= 0, \\ \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{x_3, y_3\} \cdot \{x_4, y_4\} &= 0, \\ \{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \{x_3, y_3\} \cdot \{x_4, y_4\} &= 0.\end{aligned}$$

В работе [1], в частности, показано, что для любого многообразия алгебр Пуассона  $\mathbf{V}$  над произвольным полем  $\exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_s)$  существует и является целым числом, а в работе [2] показано, что многообразие  $\mathbf{V}_2$  имеет почти полиномиальный рост. В следующей теореме приводятся эквивалентные условия для нахождения экспонент подмногообразий в  $\mathbf{V}_s$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{V}$  – многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики и  $d$  – некоторое неотрицательное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны.

1.  $\exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_{d+1}) \leq d$ ;
2. для любого  $s > d$  выполнено неравенство  $\exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_s) \leq d$ ;
3. существует такая константа  $C$ , что в (1)  $m_\lambda(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_{d+1}) = 0$  в случае, если выполнено условие  $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) > C$ ;
4. для любого  $s > d$  существует такая константа  $C = C(s)$ , что в сумме (1)  $m_\lambda(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_s) = 0$  в случае, если выполнено условие  $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) > C$ .

**Теорема 2.** Пусть для некоторого многообразия алгебр Пуассона  $\mathbf{V}$  над полем нулевой характеристики и некоторого целого неотрицательного  $d$  выполнено равенство  $\exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_{d+1}) = d$ . Тогда для любого целого  $s > d$  будет выполнено равенство  $\exp(\mathbf{V} \cap \mathbf{V}_s) = d$ .

## Литература

- [1] Рацеев С.М. Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 68–88.
- [2] Рацеев С.М. Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13.

## О КОНСТРУКЦИЯХ НЕКОТОРЫХ PI-АЛГЕБР

Рацеев С.М.<sup>1</sup>, Череватенко О.И.<sup>2</sup>

Хорошо известно, что любая ассоциативная алгебра с операцией коммутирования является алгеброй Ли. В данной работе рассмотрены конструкции алгебр с определенным набором тождеств на основе алгебр с другим набором тождеств. Рассматриваются алгебры Лейбница, алгебры Пуассона и алгебры Лейбница–Пуассона.

**Алгебры Лейбница.** Напомним, что алгебра называется алгеброй Лейбница, если оператор правого умножения на любой элемент данной алгебры является дифференцированием. Соответствующее определяющее тождество Лейбница имеет вид

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]].$$

С помощью следующих предложений из любой ассоциативной или лиевой алгебры можно построить алгебру Лейбница.

**Предложение 1.** Пусть  $A$  – некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения  $\wedge$  над произвольным полем  $K$ . В векторном пространстве  $B = A \oplus A$  над полем  $K$  определим операцию умножения  $[\cdot, \cdot]$  следующим образом:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1),$$

где  $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$ ,  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$ . Тогда полученная алгебра  $B$  будет являться алгеброй Лейбница.

**Предложение 2.** Пусть  $L$  – некоторая алгебра Ли с операцией умножения  $[\cdot, \cdot]$  над произвольным полем  $K$ . Распространим операцию умножения  $[\cdot, \cdot]$  в векторном пространстве  $B = L \oplus L$  следующим образом:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_1]),$$

где  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$ . Тогда полученная алгебра  $B$  будет являться алгеброй Лейбница.

---

<sup>1</sup>Ульяновский государственный университет

<sup>2</sup>Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова

**Алгебры Пуассона.** Алгебра  $A = A(+, \cdot, \{, \}, K)$  над полем  $K$  называется алгеброй Пуассона, если  $A(+, \cdot, K)$  – ассоциативная коммутативная алгебра с единицей,  $A(+, \{, \}, K)$  – алгебра Ли с операцией умножения  $\{, \}$ , которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Пусть  $A_L$  – некоторая алгебра Ли над полем  $K$  с левым умножением  $[\cdot]$ . Пусть  $v_1, v_2, \dots$  – линейный базис пространства  $A_L$  над  $K$ . Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов  $K[v_1, v_2, \dots]$ . Скобки Пуассона  $\{, \}$  для элементов  $v_i$  определим как умножение в  $A_L$ :  $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$ . Распространим скобки Пуассона  $\{, \}$  на все  $K[v_1, v_2, \dots]$ , используя линейность и правило Лейбница. Таким образом получается алгебра Пуассона  $PS(A_L)$ .

Пусть  $A$  – некоторая ассоциативная алгебра с единицей над полем  $K$  нулевой характеристики и умножением  $\wedge$ , в которой выполнено тождество  $[[x_1, x_2], x_3] = 0$  (см. [1]). Определим в  $A$  операции  $\cdot$  и  $\{, \}$  следующим образом:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in A.$$

Полученная алгебра  $(A, +, \cdot, \{, \}, K)$  будет алгеброй Пуассона.

**Предложение 3 ([2]).** Пусть  $A_L$  – некоторая ненулевая алгебра Ли с левым умножением  $[\cdot]$  над произвольным полем  $K$ . Рассмотрим векторное пространство

$$A = A_L \oplus K,$$

в котором определим операции  $\cdot$  и  $\{, \}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} (a + \alpha) \cdot (b + \beta) &= (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta, \\ \{a + \alpha, b + \beta\} &= [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда полученная алгебра  $(A, +, \cdot, \{, \}, K)$  будет являться алгеброй Пуассона, в которой выполнено тождество  $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ .

**Алгебры Лейбница–Пуассона.** Рассмотрим алгебры Пуассона с неантикоммутативной операцией  $\{, \}$ , которые будем называть алгебрами Лейбница–Пуассона. Более точно, векторное пространство

$A$  над полем  $K$  с двумя  $K$ -билинейными операциями умножения  $\cdot$  и  $\{, \}$  называется алгеброй Лейбница–Пуассона, если относительно операции  $\cdot$  пространство  $A$  является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции  $\{, \}$  – алгеброй Лейбница и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b,$$

$$\{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где  $a, b, c \in A$ .

**Предложение 4** ([3]). Пусть  $A_L$  – некоторая ненулевая алгебра Лейбница с умножением  $[, ]$  над бесконечным полем  $K$ . В векторном пространстве  $A = A_L \oplus K$  определим операции умножения (1). Тогда полученная алгебра  $(A, +, \cdot, \{, \}, K)$  будет являться алгеброй Лейбница–Пуассона, в которой выполнено тождество  $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ .

**Предложение 5.** Пусть  $A$  – некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения  $\wedge$  над произвольным полем  $K$ . В векторном пространстве  $C = A \oplus A \oplus K$  определим две операции умножения  $\cdot$  и  $\{, \}$  следующим образом:

$$(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha \beta),$$

$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_2, 0),$$

где  $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$ ,  $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$ . Тогда полученная алгебра  $C$  будет являться алгеброй Лейбница–Пуассона, в которой выполнено тождество  $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ .

## Литература

- [1] Mishchenko S.P., Petrogradsky V.M., Regev A. Poisson PI algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 2007. Vol. 359, № 10. Pp. 4669–4694.
- [2] Рацеев С.М. Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.



- [3] Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2012. Т. 94, № 3/1. С. 54–65.

## ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ПОЛУПОЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Сидоров В.В.<sup>1</sup>

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $\mathbb{P}$  – множество положительных действительных чисел с обычной топологией,  $U(X)$  – полуполе непрерывных функций из  $X$  в  $\mathbb{P}$  с поточечными операциями сложения и умножения. Непустое множество  $A \subseteq U(X)$  будем называть подалгеброй, если  $A \cdot A \subseteq A$ ,  $A + A \subseteq A$  и  $P \cdot A \subseteq A$ . Примеры: подалгебра констант  $\mathbb{P}$ , однопорожденная подалгебра  $\langle f \rangle$  (наименьшая подалгебра, содержащая функцию  $f \in U(X)$ ), подалгебра  $A_{x,y} = \{f \in U(X) : f(x) = f(y)\}$ , где  $x \neq y \in X$ .

Множество всех подалгебр полуполя  $U(X)$  с добавленным пустым множеством (пустой подалгеброй) относительно отношения включения образует решетку  $\mathbb{A}(U(X))$  всех подалгебр полуполя  $U(X)$ .

В 1997 г. Е. М. Вечтомов [1] доказал, что для произвольных компактов (компактных хаусдорфовых пространств)  $X$  и  $Y$  изоморфность решеток  $\mathbb{A}(C(X))$  и  $\mathbb{A}(C(Y))$  подалгебр колец  $C(X)$  и  $C(Y)$  непрерывных действительнoзначных функций равносильна гомеоморфности  $X$  и  $Y$ . В связи с развитием теории полуполей непрерывных функций возникла

**Гипотеза.** Для произвольных компактов  $X$  и  $Y$  решетки  $\mathbb{A}(U(X))$  и  $\mathbb{A}(U(Y))$  изоморфны тогда и только тогда, когда пространства  $X$  и  $Y$  гомеоморфны.

Нами получена

**Теорема 1.** Пусть  $X$  и  $Y$  – произвольные компакты.

1) Если решетки  $\mathbb{A}(U(X))$  и  $\mathbb{A}(U(Y))$  изоморфны, то пространства  $X$  и  $Y$  конечны или бесконечны одновременно.

<sup>1</sup>Вятский государственный гуманитарный университет, Киров

2) Для произвольных конечных компактов (дискретных топологических пространств)  $X$  и  $Y$  изоморфизм решеток  $\mathbb{A}(U(X))$  и  $\mathbb{A}(U(Y))$  влечет гомеоморфизм  $X$  и  $Y$ , то есть пространства  $X$  и  $Y$  содержат одно и то же число точек.

Вопрос о справедливости гипотезы в ситуации, когда  $X$  и  $Y$  – бесконечные компакты, остается открытым. Поиск ответа на него привел нас к следующему аналогу теоремы Стоуна–Вейерштрасса для полуполей непрерывных функций на языке подалгебр:

**Теорема 2.** Пусть  $X$  – компакт и подалгебра  $A \subseteq U(X)$  – максимальная среди подалгебр, для которых выполняются следующие условия:

- 1)  $\mathbb{P} \subset A$ ;
- 2) для любых  $\langle f \rangle \subseteq A$  и  $\langle g \rangle \subseteq U(X)$  из  $\langle f \rangle \subset (\langle f \rangle \vee \langle g \rangle) \cap A$  следует  $\langle g \rangle \subseteq A$ .

Тогда  $A$  всюду плотна в  $U(X)$  (относительно супремум-нормы) или  $A = A_{x,y}$  для некоторых  $x, y \in X$ .

Теорема 2 показывает, что при изоморфизме  $\alpha$  решеток  $\mathbb{A}(U(X))$  и  $\mathbb{A}(U(Y))$ , где  $X$  и  $Y$  – компакты, (про)образом подалгебры  $A_{x,y}$  может служить лишь подалгебра такого же типа, либо всюду плотная подалгебра. Можно показать, что если  $\alpha$  и  $\alpha^{-1}$  сохраняют подалгебры вида  $A_{x,y}$ , то пространства  $X$  и  $Y$  гомеоморфны (гипотеза верна). Кроме того, нами получено описание подобных изоморфизмов.

**Теорема 3.** Для произвольных компактов  $X$  и  $Y$  любой изоморфизм решеток  $\mathbb{A}(U(X))$  и  $\mathbb{A}(U(Y))$ , при котором образами и прообразами подалгебр вида  $A_{x,y}$  служат подалгебры такого же вида, индуцируется однозначно определенным изоморфизмом полуполей  $U(X)$  и  $U(Y)$  за исключением случая, когда  $X = \{x, y\}$  – несвязное двоеточие: в этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между изоморфизмами решеток  $\mathbb{A}(U(X))$  и  $\mathbb{A}(U(Y))$  и парами автоморфизмов  $(\gamma_x, \gamma_y)$  цепи  $(0, 1]$ .

## Литература

- [1] Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.

## О МНОЖЕСТВЕ КОММУТАТОРОВ В СОВЕРШЕННОЙ ГРУППЕ

Старолетов А.М.<sup>1</sup>

Коммутатором двух элементов  $a, b$  группы  $G$  называется элемент  $a^{-1}b^{-1}ab$ , который обычно обозначается через  $[a, b]$ . Множество коммутаторов конечной группы с давних времен привлекает исследователей. В частности, известно множество примеров, когда множество коммутаторов группы не является группой.

В Коуровской тетради [1] сформулирован следующий вопрос:

**Вопрос 1** (17.76, Д. Макхейл). *Существует ли конечная группа  $G$  порядка  $|G| > 2$ , в которой ровно один элемент не является коммутатором?*

Нетрудно понять, что если такая группа существует, то этот единственный элемент является инволюцией, которая лежит в центре группы. Кроме того, такая группа должна быть совершенной, то есть совпадать со своим коммутантом. Заметим, что библиотека Finite Perfect Groups в GAP [2] содержит все совершенные группы, порядок которых не превосходит  $10^6$ , за конечным числом исключений. С помощью компьютерной программы, написанной для GAP, удалось проверить, что все группы, содержащиеся в этой библиотеке, не могут быть примерами для положительного ответа на Вопрос 1.

**Теорема 1.** *Пусть  $G$  – конечная группа и  $2 < |G| \leq 10^6$ , кроме того,  $|G| \notin \{61440, 86016, 122880, 172032, 245760, 344064, 368640, 491520, 688128, 737280, 983040\}$ . Тогда в  $G$  количество элементов, не представимых в виде коммутаторов, отлично от 1.*

Поскольку мы знаем, что центр группы  $G$  нетривиален, а сама группа  $G$  совершенна, то естественно попытаться искать пример такой группы среди квазипростых групп (группа  $G$  называется квазипростой, если  $G/Z(G)$  – простая неабелева группа). Разобраться с этим случаем помогает следующий результат.

---

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

**Теорема 2.** (*Blau*, [3]) Предположим, что  $G$  – это квазипростая группа, и пусть  $z \in Z(G)$ . Тогда выполнено одно из следующих условий:

- (i)  $|z| = 6$  и  $G/Z(G) \simeq A_6, A_7, Fi_{22}, PSU(6, 2^2)$  или  ${}^2E_6(2^2)$ ;
- (ii)  $|z| = 6$  или  $12$  и  $G/Z(G) \simeq PSL(3, 4), PSU(4, 3^2)$  или  $M_{22}$ ;
- (iii)  $|z| = 2$  или  $4$ ,  $G/Z(G) \simeq PSL(3, 4)$  и  $Z(G)$  нециклическая;
- (iv) существует сопряженный класс  $C$  в  $G$  такой, что  $Cz = C$ .

Четвертое условие, в частности, означает, что этот элемент  $z$  будет представим в виде коммутатора. Заметим, что  $|z| = 2$  лишь в случае  $G/Z(G) \simeq PSL(3, 4)$ . Поскольку в нашем предположении  $G$  совершенна, то  $|Z(G)|$  делит  $|M(PSL(3, 4))|$ , где  $M(PSL(3, 4))$  – мультипликатор Шура группы  $PSL(3, 4)$ . Известно, что  $|M(PSL(3, 4))| = 48$ . Поскольку  $48 \cdot |PSL(3, 4)| = 967680$ , то из Теоремы 1 следует

**Следствие.** Пусть  $G$  – конечная квазипростая группа. Тогда в  $G$  число элементов, не представимых в виде коммутатора элементов, отлично от 1.

Нетрудно показать, что в произвольной группе либо все элементы данного сопряженного класса являются коммутаторами, либо все они не представимы в виде коммутаторов. Естественным обобщением Вопроса 1 является поиск примера группы, в которой элементы ровно одного класса сопряженности не представимы в виде коммутаторов элементов. Пример такой группы существует.

**Теорема 3.** Существует группа порядка 960, в которой элементы ровно одного сопряженного класса не представимы в виде коммутаторов.

## Литература

- [1] Мазуров В.Д., Хухро Е.И. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. – 17 изд., ИМ СО РАН, Новосибирск, 2010.
- [2] GAP – Groups, algorithms and programming, version 4.6.3, <http://www.gap-system.org>
- [3] Blau H.I. A fixed-point theorem for central elements in quasisimple groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 122. Pp. 79–84.

## ПОРОЖДАЮЩИЕ ТРОЙКИ ИНВОЛЮЦИЙ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА $G_2$ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Тимофеев И.А.<sup>1,2</sup>

В 2002 г. Я.Н. Нужин поставил следующий вопрос [1, вопрос 15.67]:

*Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

Известно [2], что группы  $SL_n(\mathbb{Z})$ , при  $n > 13$ , являются такими. Группы  $PSL_n(\mathbb{Z})$  являются такими тогда и только тогда, когда  $n > 4$  [3].

Доказана следующая

**Теорема.** *Группа Шевалле  $G_2(\mathbb{Z})$  типа  $G_2$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

### Литература

- [1] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 17-е изд., дополненное. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.
- [2] *Tamburini M.C., Zucca P.* Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra. 1997. Vol. 195. Pp. 650–661.
- [3] *Нужин Я.Н.* О порождаемости группы  $PSL_n(\mathbb{Z})$  тремя инволюциями две из которых перестановочны // Владикавказский матем. журнал. 2008. Т. 10, вып. 1. С. 68–74.

---

<sup>1</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск

<sup>2</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/4620).

## НОВОЕ БЕСКОНЕЧНОЕ СЕМЕЙСТВО ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА 3, СВЯЗАННОЕ С ГРУППАМИ $U_3(q)$

Циовкина Л.Ю.<sup>1,2</sup>

Напомним, что антиподальный дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  диаметра 3 имеет массив пересечений  $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$  и является  $r$ -накрытием  $(k+1)$ -клики, где  $k$  – степень графа  $\Gamma$ ,  $r$  – порядок антиподального класса и  $\mu$  – число общих соседей для двух вершин, находящихся на расстоянии 2 в  $\Gamma$  [1]. Положим  $\lambda = k - 1 - \mu(r - 1)$ .

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер). В [2] выделены три новые потенциальные бесконечные серии реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с  $\lambda = \mu$ , отвечающие группам  $Sz(q), U_3(q), {}^2G_2(q)$ . Вопрос существования указанных семейств дистанционно регулярных графов являлся открытым и позднее был положительно решен автором в случае групп  $Sz(q)$  и  ${}^2G_2(q)$ , что анонсировано в работах [3, 4].

В настоящей работе данный вопрос решается положительно и в случае групп  $U_3(q)$ , а именно, в теоремах 1 и 2 приводятся конструкции соответствующего семейства дистанционно регулярных графов.

Пусть даны инвариантная подгруппа  $H$  группы  $G$  и элемент  $g \in G - H$ . Через  $\Gamma(G, H, HgH)$  обозначим граф с множеством вершин  $V(G, H) = \{Hx \mid x \in G\}$  и множеством ребер  $E(G, H, g) = \{\{Hx, Hy\} \mid xy^{-1} \in HgH\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G = U_3(q)$ , где  $q > 2$  – некоторая степень 2,  $S \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $H$  – централизатор инволюции из  $S$  в  $G$ ,  $g$  – инволюция из  $G - S$  и  $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ . Тогда  $\Gamma$  – реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{q^3, q^3 - q^2 - q - 2, 1; 1, q^2 + q + 1, q^3\}$ .

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (научный проект 14-01-31298 мол\_а) и УрО РАН (грант 14-1-НП-278 для молодых ученых за 2014 год).

**Теорема 2.** Пусть  $G = U_3(q)$ , где  $q = p^n$ ,  $p$  – нечетное простое число,  $S \in \text{Syl}_p(G)$ . Положим  $M = N_G(S)$ . Пусть  $g$  – инволюция из  $G - M$ ,  $M \cap M^g = U \times P$ , где  $U$  – максимальная подгруппа в  $M \cap M^g$  нечетного порядка  $r > 1$ , делящего число  $q - 1$ ,  $H = SP$  и  $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ . Тогда  $\Gamma$  – реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{q^3, \mu(r-1), 1; 1, \mu, q^3\}$ , где  $\mu = (q^3 - 1)/r$ .

## Литература

- [1] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
- [2] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с  $\lambda = \mu$  // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 237–246.
- [3] Tsioukina L.Yu. On the existence of arc-transitive distance-regular covers of cliques with  $\lambda = \mu$  related to Suzuki groups / Abstracts of the International Conference on Group Theory in Honor of the 70th Birthday of Professor V.D. Mazurov. Novosibirsk, 2013.
- [4] Tsioukina L.Yu. A new infinite family of arc-transitive distance-regular covers of cliques with  $\lambda = \mu$  related to Ree groups  ${}^2G_2(q)$  / в сб. «Мальцевские чтения», Тезисы междунар. конф. С. 83. Новосибирск, 2013.

## ABOUT SHUNKOV GROUPS SATURATED BY FULL LINEAR GROUPS OF DIMENSION TWO ON FINITE FIELDS

Shlyopkin A.A.<sup>1</sup>

The structure of periodic Shunkov Group center, saturated by full linear groups of dimension two on finite fields, was obtained in present work.

---

<sup>1</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск

Group  $G$  is saturated by groups from the set  $X$ , if any finite subgroup  $K$  from  $G$  is contained in subgroup of group  $G$ , isomorphic to some group from  $X$  [1].

Let  $K$  be finite subgroup from  $G$  saturated by the set  $X$ . Define  $X(K)$  as a set of all subgroups from  $G$  containing  $K$  and isomorphic to groups from  $X$ . In particular, if  $1$  is a unity subgroup from  $G$ , then  $X(1)$  is the set of all subgroups of  $G$  isomorphic to groups from  $X$  [2].

We continue studies started in the articles [3–6]. Define  $\text{Im} = \{GL_2(p^n)\}$ , where  $p$  and  $n$  vary. We proved the following result.

**Theorem.** Let  $G$  be a periodic Shunkov group, saturated by the set  $\text{Im}$  and  $K \in \text{Im}(1)$ . Then  $Z(K) \subset Z(G)$  and  $Z(G)$  is locally cyclic group.

## Литература

- [1] A.K. *Shlyopkin*, Shunkov groups, contains finite unsolvable subgroups A.K. Shlyopkin, / book of abstracts of the third international conference on algebra. Pp. 363. Krasnoyarsk, 1993.
- [2] A.A. *Kuznezov* K.A. *Filippov*, Groups, saturated by given set of groups, // Siberian electronic mathematical reports. 2011. № 1. Pp. 230–246.
- [3] D.N. *Panushkin*, Shunkov groups, saturated by direct products of different groups. // phd dissertation - Krasnoyarsk. 2010. Pp. 66.
- [4] A.A. *Shlyopkin*, Periodic groups saturated by the groups  $GL_2(p^n)$ . / book of abstracts of the international conference on algebra. Pp. 144. Kyiv, Ukraine, 2012.
- [5] A.A. *Shlyopkin*, About groups, saturated by the groups  $GL_2(p^n)$ . // Journal of SibSAU. № 1. 2013. Pp. 100–108.
- [6] A.A. *Shlyopkin*, About Shunkov group center with one saturation condition. / Book of abstracts of the international conference on algebra «Maltsev meeting». P. 115. Novosibirsk, 2013.



## ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ИГРЫ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Авербух Ю.В.<sup>1,2</sup>

Игры среднего поля – относительно новая часть теории игр, предложенная Lasry, Lions [1], [2] и независимо Huang, Caines, Malhamé [3]. Игры среднего поля исследуют ситуацию взаимодействия однотипных игроков в случае, когда каждый игрок рассматривает всех остальных обезличенно. С математической точки зрения предполагается, что в уравнение динамики и в функционал платы каждого игрока положение остальных игроков входит симметрично, т.е. имеет место зависимость от взвешенной суммы мер Дирака. К игре  $N$  персон формально применяется метод динамического программирования. В силу однотипности игроков можно считать, что цена игры не зависит от номера игрока. Переход к пределу при числе игроков, стремящемся к бесконечности, дает пару уравнений: первое уравнение – это уравнение Гамильтона–Якоби, которое в детерминированном случае имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu(t, \cdot), \nabla V) = 0, \quad V(T, \cdot) = \sigma(\cdot), \quad (1)$$

второе уравнение – кинетическое уравнение:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu(t, dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla_p H(t, x, \mu(t, \cdot), \nabla_x V), \nabla_x \phi(x) \rangle \mu(t, dx),$$

$$\forall \phi \in C_1(\mathbb{R}^n), \quad \mu(0, \cdot) = m_0(\cdot). \quad (2)$$

Здесь  $\nabla_p = (\partial/\partial_{p_1}, \dots, \partial/\partial_{p_n})$ ,  $\nabla_x = (\partial/\partial_{x_1}, \dots, \partial/\partial_{x_n})$ . В системе неизвестны:  $V$  – функция позиции и  $\mu$  – поток мер, т.е. функция, определенная на декартовом произведении отрезка  $[0, T]$  и борелевской  $\sigma$ -алгебры на  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu(t, \cdot)$  – мера на  $\mathbb{R}^n$ .

В литературе наиболее исследован стохастический случай. Детерминированный случай рассматривался Cardaliaguet [4] в случае суперлинейного роста по фазовой переменной (и при некоторых других

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00537, 12-01-31172.

существенных условиях). Сложности в изучении детерминированного случая связаны с тем, что в коэффициенты кинетического уравнения входит производная решения уравнения Гамильтона–Якоби, а в детерминированном случае решение уравнения Гамильтона–Якоби, вообще говоря, недифференцируемо [5].

Мы предполагаем, что для  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  и  $m$  – вероятностной мере на  $\mathbb{R}^n$

$$H(t, x, m, p) = \max_{u \in P} [\langle p, f(t, x, m, u) \rangle - g(t, x, m, u)].$$

С системой среднего поля связывается дифференциальная игра бесконечного числа лиц, она получается формальным предельным переходом в игре конечного числа лиц. Пусть  $\Omega$  – множество игроков. Мы предполагаем, что  $\Omega$  – метрический компакт. Пусть, также,  $\eta$  – неатомическая мера на  $\Omega$ ,  $x_0 : \Omega \rightarrow G$  – непрерывная функция, здесь  $G$  – компактное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть положение игрока  $\omega$   $x(t, \omega)$  описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t, \omega) = f(t, x(t, \omega), \mu(t, \cdot), u(t)), \quad x(0) = x_0(\omega), \quad u(t) \in P. \quad (3)$$

Здесь  $\mu(t, \cdot)$  имеет смысл распределения игроков в момент времени  $t$ . Оно удовлетворяет уравнению: для любого измеримого множества  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$   $\mu(t, \Gamma) = \eta\{\omega : x(t, \omega) \in \Gamma\}$ . Если  $u$  – управление игрока  $\omega$ , то функционал платы равен

$$J[x(\cdot, \omega), u, \mu] \triangleq \sigma(x(T, \omega), \mu(T, \cdot)) - \int_0^T g(t, x(t, \omega), \mu(t, \cdot), u(t))dt. \quad (4)$$

Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш. Для того чтобы система (1), (2) соответствовала игре (3), (4), необходимо, чтобы  $m_0(\Gamma) = \eta\{\omega : x_0(\omega) \in \Gamma\}$ . Если  $V$  – некоторая функция позиции,  $\mu$  – поток мер, то через  $B[V, \mu]$  обозначим множество всех выживающих в графике  $V$  решений дифференциального включения

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in \text{co}\{f(t, x, \mu(t, \cdot), u), g(t, x, \mu(t, \cdot), u) : u \in P\}.$$

Будем говорить, что пара  $(V, \mu)$  – обобщенное (минимаксное) решение системы (1), (2), если

1.  $V$  – минимаксное решение уравнения (1) (определение минимаксного решения уравнения Гамильтона–Якоби см. в [5]);
2.  $\mu(0, \cdot) = m_0(\cdot)$  и существует мера  $\chi_0$  на  $B[V, \mu]$  такая, что для всех  $\phi \in C_1[0, T]$  верно равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu(t, dx) = \int_{B[V, \mu]} \phi(x(t)) \chi_0(d(x(\cdot), z(\cdot))).$$

Дифференциальная игра с бесконечным числом игроков рассматривается в классе обобщенных управлений. Равновесие по Нэшу рассматривается в классе программных смешанных стратегий (т.е. игрок может выбрать распределение на пространстве стратегий). В этом случае доказывается существование равновесия в игре бесконечного числа лиц.

Вводится понятие функции цены  $V$  как выигрыша пробного игрока, начавшего свое движение из позиции  $(t_0, x_0)$ . Показывается, что пара  $(V, \mu)$  является обобщенным решением системы. Здесь  $\mu$  – поток мер, соответствующий ситуации равновесия по Нэшу. Также рассматривается вопрос о построении на основе решения системы (1), (2) приближенного равновесия в игре конечного числа игроков.

## Литература

- [1] Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux champ moyen. I. Le cas stationnaire. (French) // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. Vol. 343, № 9. Pp. 619–625.
- [2] Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux champ moyen. II. Horizon fini et contrôle optimal. (French) // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. Vol. 343, № 10. Pp. 679–684.
- [3] Huang M., Caines P.E., Malhame R.P. Large population stochastic dynamic games: closedloop McKean–Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. Communication in information and systems. 2006. Vol. 6, № 3. Pp. 221–252.
- [4] Cardaliaguet P. Weak solutions for first order mean field games with local coupling // arXiv:1305.7015 [math.OC]

- [5] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: ИКИ, 2003.

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ РЕЛАКСАЦИИ ОГРАНИЧЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА МАКСИМИН

Бакланов А.П.<sup>1,2</sup>

Рассматривается асимптотика значений максимина функции платы при ужесточении ослабленных ограничений. Функция платы зависит от траекторий управляемых систем первого и второго игрока. Упомянутые системы могут быть нелинейными, и это является существенным отличием от ранних работ, где также исследовались различные асимптотические эффекты, но для линейных систем с импульсными ограничениями (см., например, [1]), что естественным образом приводило к использованию конструкций расширения в классе конечно-аддитивных мер [2]. В представленной работе привлекается другой аппарат для построения расширений (меры Радона), который является более традиционным для теории управления и теории дифференциальных игр [3–5].

Рассмотрим управляемые системы первого и второго игрока

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P, x \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, t \in I \triangleq [t_0, \vartheta_0]; \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(t, y, v), \quad v \in Q, y \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}, t \in I. \quad (2)$$

Здесь множества  $P, Q$  ( $P \subset \mathbb{R}^p$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ) суть непустые компакты. Допустимые программные управления игроков суть кусочно-постоянные и непрерывные справа функции. Обозначим через  $\mathcal{U}, \mathcal{U} \subset P^I$ , и  $\mathcal{V}, \mathcal{V} \subset Q^I$ , множества допустимых управлений первого и второго игрока соответственно. Пусть фазовые ограничения для первого и второго игрока заданы в терминах семейств

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-90414 Укр\_ф\_а, № 13-01-00304\_А.

$(N_t)_{t \in I}$  и  $(M_t)_{t \in I}$ . Пусть также задан непрерывный функционал  $\Upsilon(x(\cdot), y(\cdot))$  на траекториях систем (1) и (2). Игроки вправе выбирать начальные условия для своих систем из заданных множеств  $H \subset I \times \mathbb{R}^n$ ,  $S \subset I \times \mathbb{R}^m$ . Цель первого игрока – минимизация значения  $\Upsilon$  путем выбора управления  $u \in \mathcal{U}$  и начального условия  $h \in H$ , цель второго – максимизация значения  $\Upsilon$  путем выбора  $v \in \mathcal{V}$  и  $s \in S$ . При этом игроки должны соблюдать соответствующие фазовые ограничения в терминах  $(N_t)_{t \in [pr_1(h), \vartheta_0]}$  и  $(M_t)_{t \in [pr_1(s), \vartheta_0]}$ , где  $pr_1(z)$  и  $pr_2(z)$  – компоненты упорядоченной пары  $z$ . Рассматриваем задачу

$$\Upsilon(\phi(\cdot; h, u), \xi(\cdot; s, v)) \rightarrow \sup_{(s, v) \in S \times \mathcal{V}} \inf_{(h, u) \in H \times \mathcal{U}},$$

где

$$\left( \phi(t; h, u) \in N_t \ \forall t \in [pr_1(h), \vartheta_0] \right) \& \left( \xi(t; s, v) \in M_t \ \forall t \in [pr_1(s), \vartheta_0] \right);$$

$\phi, \xi$  – траектории первой и второй системы соответственно.

Пусть  $A$  – непустое подмножество  $\mathbb{R}^s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , тогда  $A^\kappa$ ,  $\kappa > 0$ , есть замкнутая  $\kappa$ -окрестность множества  $A$  в смысле метрики Чебышева. Введем множества обычных управлений игроков, отвечающих ослаблению ограничений 1-го типа:  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall \delta > 0$

$$\mathbb{P}[\varepsilon] \triangleq \{(h, u) \in H \times \mathcal{U} \mid \phi(t; h, u) \in N_t^\varepsilon \ \forall t \in [pr_1(h) + \varepsilon, \vartheta_0]\};$$

$$\mathbb{Q}[\delta] \triangleq \{(s, v) \in S \times \mathcal{V} \mid \xi(t; s, v) \in M_t^\delta \ \forall t \in [pr_1(s) + \delta, \vartheta_0]\}.$$

Принимаем следующее **предположение о совместности задачи**:  $(\forall \varepsilon > 0 \ \mathbb{P}[\varepsilon] \neq \emptyset)$  и  $(\forall \delta > 0 \ \mathbb{Q}[\delta] \neq \emptyset)$ .

Ослаблению ограничений 1-го типа отвечает значение:  $\forall \varepsilon, \delta > 0$

$$V[\varepsilon, \delta] \triangleq \sup_{(s, v) \in \mathbb{Q}[\delta]} \inf_{(h, u) \in \mathbb{P}[\varepsilon]} \Upsilon(\phi(\cdot; h, u), \xi(\cdot; s, v)) \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Ослаблению ограничений 2-го типа отвечают множества:  $\forall \varepsilon, \delta > 0$

$$\mathbb{P}_N[\varepsilon] \triangleq \{(h, u) \in H^\varepsilon \times \mathcal{U} \mid \phi(t; h, u) \in N_t^\varepsilon \ \forall t \in [pr_1(h) + \varepsilon, \vartheta_0]\},$$

$$\mathbb{Q}_M[\delta] \triangleq \{(s, v) \in S^\delta \times \mathcal{V} \mid \xi(t; s, v) \in M_t^\delta \ \forall t \in [pr_1(s) + \delta, \vartheta_0]\}.$$

Ослаблению ограничений 2-го типа отвечает значение:  $\forall \varepsilon, \delta > 0$

$$\mathbb{V}[\varepsilon, \delta] \triangleq \sup_{(s,v) \in \mathbb{Q}_M[\delta]} \inf_{(h,u) \in \mathbb{P}_N[\varepsilon]} \Upsilon\left(\phi(\cdot; h, u), \xi(\cdot; s, v)\right) \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Нас интересует асимптотика значений (3) и (4) при естественном требовании на ужесточение ослабленных ограничений. Полагаем, что для систем (1), (2) **выполнены условия обобщенной единственности и локальной ограниченности решений** [6, условия 3.1 и 3.2]. Используя конструкцию расширения из работы [6], можно ввести значение максимина  $\mathbf{V}$  в обобщенной задаче подобно тому, как это было сделано в [1, 7].

**Теорема.**  $\mathbf{V}$  есть обобщенный предел для значений максимина в задачах с ослабленными ограничениями:  $\forall \kappa > 0 \exists \psi_\kappa > 0$  :

$$\left(|\mathbf{V} - V[\varepsilon, \delta]| < \kappa\right) \text{ и } \left(|\mathbf{V} - \mathbb{V}[\varepsilon, \delta]| < \kappa\right) \quad \forall \varepsilon, \delta \in ]0, \psi_\kappa[.$$

Теорема указывает также на «асимптотическую эквивалентность» варианта релаксации ограничений только в терминах трубки в фазовом пространстве и варианта релаксации ограничений в терминах трубки и начальных состояний. Отметим, что можно гарантировать любую заданную наперед «близость» по результату при упомянутых вариантах, выставя требование о «крайней степени» ослабления ограничений.

## Литература

- [1] Бакланов А.П. К вопросу о представлении максимина в одной задаче импульсного управления // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2012. № 3. С. 49–69.
- [2] Chentsov A.G. Asymptotic attainability. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [3] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974.
- [4] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. – М.: Наука, 1981.

- [5] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977.
- [6] Chentsov A.G., Pak V.E. On the extension of the nonlinear problem of optimal control with nonstationary phase restrictions // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1996. № 2. Pp. 383–394.
- [7] Ченцов А.Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского Университета. Мат. Мех. Комп. науки. 2010. № 3. С. 104–119.

## ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СО МНОГИМИ УБЕГАЮЩИМИ

Банников А.С.<sup>1,2</sup>

### Постановка задачи

В пространстве  $R^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma$   $n+m$  лиц:  $n$  преследователей и  $m$  убегающих. Закон движения каждого из преследователей  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t) + u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U. \quad (1)$$

Закон движения каждого из убегающих  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , имеет вид:

$$\dot{y}_j(t) = A(t)y_j(t) + v_j(t), \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v_j \in U, \quad (2)$$

причем  $x_i^0 \neq y_j^0$ , для всех  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Здесь  $x_i$ ,  $y_j$ ,  $u_i$ ,  $v_j \in R^k$ ,  $U \subset R^k$  – строго выпуклый компакт с гладкой границей,  $A(t)$  – квадратная матрица порядка  $n$ , непрерывная на всей оси  $t$ .

Обозначим данную игру через  $\Gamma(n, m, z^0)$ , где

$$z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0).$$

---

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00195, № 14-01-31176.

**Определение 1.** В дифференциальной игре  $\Gamma(n, m, z^0)$  из начального состояния  $z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$  разрешима локальная задача уклонения, если существуют такие управления  $v_1(t), \dots, v_m(t)$  убегающих, что для любых траекторий  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  преследователей найдется номер  $s \in \{1, \dots, \mu\}$ , такой, что  $y_s(t) \neq x_i(t)$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$  при всех  $t \geq t_0$ . При этом в момент  $t$  управления убегающих формируются на основе реализовавшейся позиции

$$z(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_m(t)).$$

**Определение 2.** В дифференциальной игре  $\Gamma(n, m)$  разрешима глобальная задача уклонения, если из любого начального состояния  $z^0$  в игре  $\Gamma(n, m, z^0)$  разрешима локальная задача уклонения.

**Определение 3.** В игре  $\Gamma(n, m, z^0)$  происходит поимка убегающего  $E_p$ , если существуют момент  $T(z^0)$  и квазистратегии

$$\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t^1(\cdot)), \dots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t^m(\cdot))$$

преследователей  $P_1, \dots, P_n$  такие, что для любых измеримых функций  $v^1(\cdot), \dots, v^m(\cdot)$ ,  $v^j(t) \in U$ , для всех  $t \in [t_0, T(z^0)]$  и всех  $j$  существуют момент времени  $\tau \in [t_0, T(z^0)]$  и номер  $s$  такие, что  $x_s(\tau) = y_p(\tau)$ , где  $v_t^l(\cdot) = \{v^l(s), s \in [0, t]\}$  – предыстория убегающего  $E_l$ .

**Определение 4.** В игре  $\Gamma(n, m, z^0)$  происходит поимка, если в игре  $\Gamma(n, m, z_0)$  происходит поимка убегающих  $E_1, \dots, E_m$ .

Определим функцию (см. [1, 2])  $f : N \rightarrow N$  следующим образом:

$$f(n) = \min\{m \mid \text{в игре } \Gamma(n, m) \text{ разрешима} \\ \text{глобальная задача уклонения}\}.$$

### Достаточные условия разрешимости задачи уклонения и оценка функции $f$ сверху

**Теорема 1** (ср. с [3]). Для любых натуральных чисел  $p, m$  таких, что  $m \geq p \cdot 2^p + 2$ , в игре  $\Gamma(2^p + 1, m, z^0)$  разрешима глобальная задача уклонения.

Из теоремы 1 следует, что для всех  $p \in N$  справедливо неравенство  $f(2^p + 1) \leq p \cdot 2^p + 2$ . Возьмем  $p \in N$  такое, что  $2^{p-1} < n \leq 2^p + 1$ . Тогда  $f(n) \leq f(2^p + 1) \leq p \cdot 2^p + 2 \leq Cn \ln n$  и верна следующая теорема.



**Теорема 2.** *Существует константа  $C_1 > 0$  такая, что для всех  $n \in N$ ,  $n \neq 1$  справедливо следующее неравенство:  $f(n) \leq C_1 n \ln n$ .*

### Оценка функции $f$ снизу

**Предположение 1.** Если  $y_1^0 \in \text{Int co}\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ , то в игре  $\Gamma(n, 1, z^0)$  происходит поимка.

Отметим, что данное предположение, в частности, выполнено для задачи простого преследования [4], для рекуррентных дифференциальных игр, если множество допустимых управлений игроков – строго выпуклый компакт с гладкой границей [5].

**Теорема 3.** *Пусть выполнено предположение 1. Тогда существует константа  $C_2 > 0$  такая, что для всех  $n \in N$ ,  $n \neq 1$  справедливо следующее неравенство:  $f(n) \geq C_2 n \ln n$ .*

Объединив теоремы 2, 3, получаем следующее следствие.

**Теорема 4.** *Пусть выполнено предположение 1. Тогда существуют константы  $C_1 > 0, C_2 > 0$  такие, что для всех  $n \in N, n \neq 1$  справедливо неравенство  $C_2 n \ln n \leq f(n) \leq C_1 n \ln n$ .*

**Следствие 1.** *Для любого натурального  $l$  существуют натуральные  $n, m$ , существует  $z^0$  такие, что  $m - n > l$  и в игре  $\Gamma(n, m, z^0)$  происходит поимка.*

**Следствие 2.** *Для любого натурального  $l$  существуют натуральные  $n, m$  такие, что в игре  $\Gamma(n, m, z^0)$  происходит уклонение от встречи для любого  $z^0$ , а в игре  $\Gamma(n + 1, m + l, z_1^0)$  происходит поимка при некотором  $z_1^0$ .*

### Литература

- [1] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. – Киев.: Наук. думка, 1992.
- [2] Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. №. 8. С. 1366–1374.

- [3] Банников А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия института математики и информатики УдГУ. 2013. Выпуск 1(41). С. 3–46.
- [4] Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
- [5] Соловьева Н.А. Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, вып. 1. С. 81–90.

## АППРОКСИМАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Гребенникова И.В.<sup>1</sup>

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система с запаздыванием  $h > 0$  (по состоянию):

$$dx(t)/dt = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t), \quad (1)$$

$$\mu dy(t)/dt = A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t), \quad (2)$$

где  $t \in T = [t_0, t_1]$ ;  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ ;  $u \in R^r$  – управление. Начальное состояние системы (1), (2)  $x(t) = \psi(t)$ ,  $t_0 - h \leq t < t_0$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$  точно не известно, и заданы лишь ограничения  $x_0 \in X_0$ ,  $y_0 \in Y_0$ , где  $X_0$ ,  $Y_0$  – выпуклые компакты в соответствующих пространствах,  $\psi(t) \in \Psi(t)$ ,  $t_0 - h \leq t < t_0$ ,  $\Psi(t)$  – заданное выпуклозначное отображение, непрерывное по  $t$  в метрике Хаусдорфа. Управление  $u(t)$ ,  $t \in T$  – измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию

$$P = \left\{ u(\cdot) \left| \int_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t) dt \leq \lambda^2 \right. \right\}, \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Рассматривается минимаксная задача управления: среди управлений  $u(\cdot) \in P$  найти оптимальное  $u^0 = u^0(\cdot)$ , доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)), \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где  $\varphi(\cdot)$  – заданная выпуклая функция (с конечными значениями);  $z' = (x', y')$ ,  $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ ,  $t \in T$  – решение системы (1), (2), исходящее из  $Z_0 = X_0 \times Y_0$  при некотором  $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$  и фиксированном  $u(\cdot) \in P$ . Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Оптимальное управление  $u^0(\cdot, \mu)$  и величина  $\varepsilon^0(t_1, \mu)$  зависят от параметра  $\mu$ . Однако эти характеристики при  $\mu \rightarrow +0$  могут не сходиться к соответствующим решениям задачи (4) для вырожденной системы, полученной из (1), (2) при  $\mu = 0$ . Поэтому для построения оптимального решения важно правильно выбрать начальную асимптотику. Аппроксимация оптимального решения при ограничениях (4) существенно зависит [1] от вида разложения матрицы  $B_2(t, \mu)$  по параметру  $\mu$  ( $0 < \mu \leq \mu_0$ ). Разрешимость исходной задачи управления определяется рядом требований [1].

Проведем исследование для случая  $B_1(t, \mu) = B_1(t)$ ,  $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$ .

Для определения оптимального решения интервал времени  $[t_0, t_1]$  разбиваем на два отрезка  $t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha(\mu)$  и  $t_1 - \alpha(\mu) < \tau \leq t_1$ , выбрав  $\alpha(\mu) > 0$ :  $\alpha(\mu) = o(1)$ ,  $\alpha(\mu)/\mu \rightarrow +\infty$  при  $\mu \rightarrow +0$ , выделяя малый интервал для управления быстрой переменной.

Как и в [1, 2], рассмотрим следующую предельную задачу: среди управлений  $u(\tau) \in P$ ,  $\tau \in T$ ,  $v(s)$ ,  $s \geq 0$ , удовлетворяющих условию  $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in P^{(0)}$ , где

$$P^{(0)} = \left\{ u(\cdot), v(\cdot) \left| \int_{t_0}^{t_1} u'(\tau) R(\tau) u(\tau) d\tau + \int_0^\infty v'(s) R(t_1) v(s) ds \leq \lambda^2 \right. \right\},$$

найти  $u^{(0)} = u^{(0)}(\cdot)$ ,  $v^{(0)} = v^{(0)}(\cdot)$ , доставляющие

$$J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \min\{J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot)) | \{u(\cdot), v(\cdot)\} \in P^{(0)}\}; \quad (5)$$

$$J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot)) = \max\{\varphi(\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0, \psi(\cdot))) | x_0 \in X_0, \psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)\},$$

$$\tilde{z}(t_1; u(\cdot), v(\cdot), x_0, \psi(\cdot)) = (x_0(t_1)', (y_0(t_1) + \int_0^\infty \Phi_0[t_1, s] B_2(t_1, \mu) v(s) ds)')',$$

где  $x_0(\cdot) = x_0(\cdot; u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ ,  $y_0(\cdot) = y_0(\cdot; u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$  – решение вырожденной системы,  $\Phi_0[t_1, s] = \exp(A_{22}(t_1)s)$ ,  $s = (t_1 - \tau)/\mu$ .

Вычисляя в соответствии с [1], при  $0 < \mu \leq \mu_0$ , имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0(t_1) &= \varepsilon^{(0)}(t_1) + o(1), \\ \varepsilon^{(0)}(t_1) &= \max\{\chi^{(0)}(p, q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(0)}(p^{(0)}, q^{(0)}), \\ \chi^{(0)}(p, q) &= -h_0^{**}(p, q) - \lambda(\sigma_0(p, q))^{1/2}, \\ h_0(p, q) &= \varphi^*(p, q) - \rho(w'(t_0, p, q) \mid X_0) - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(w'(\tau, p, q)G_0(\tau) \mid \Psi(\tau - h))d\tau, \\ \sigma_0(p, q) &= \int_{t_0}^{t_1} w'(\tau, p, q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau, p, q)d\tau + \\ &\quad + \int_0^\infty q'\Phi_0[t_1, s]B_2(t_1, \mu)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1, \mu)\Phi_0'[t_1, s]qds,\end{aligned}$$

где  $w'(\tau, p, q) = s'(t_1, p, q)X[t_1, \tau] - q'A_{22}^{-1}(t_1)G_2(t_1)X[t_1 - h, \tau]$ ,  
 $s'(t_1, p, q) = p' - q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1)$ ,  $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$ ,  
 $X[t, \tau]$  – фундаментальная матрица решений вырожденной системы,  
 причем  $X[\tau, \tau] = E$ ,  $X[t, \tau] = 0$  при  $\tau > t$ ;  $\varphi^*$  – функция, сопряженная  
 к  $\varphi$ ;  $h^{**} = (\text{co } h)$  – замыкание выпуклой оболочки функции  $h$ ;  $\rho(q|X)$   
 – опорная функция множества  $X$  на элементе  $q$ .

Рассмотрим управляющее воздействие  $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ :

$$\begin{aligned}u_\mu^{(0)}(\tau) &= \begin{cases} u^{(0)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha(\mu), \\ (1/\sqrt{\mu})v^{(0)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases} \\ u^{(0)}(\tau) &= -\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau, p^{(0)}, q^{(0)})(\sigma_0(p^{(0)}, q^{(0)}))^{-1/2}, \quad \tau \in T, \\ v^{(0)}(s) &= -\lambda R^{-1}(t_1)B_2'(t_1, \mu)\Phi_0'[t_1, s]q^{(0)}(\sigma_0(p^{(0)}, q^{(0)}))^{-1/2}, \quad s \geq 0.\end{aligned}$$

Тогда [1]: (i) предельная задача (5) разрешима и  $u^{(0)}, v^{(0)}$  доставляют функционалу  $J^{(0)}$  значение  $J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \varepsilon^{(0)}(t_1)$ ;

(ii) при  $0 < \mu \leq \mu_0$ ,  $u_\mu^{(0)}(\cdot)$  доставляет оценку

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(0)}(\cdot)) + o(1).$$

## Литература

- [1] Гребенникова И.В. Задача оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 3–11.
- [2] Кремлев А.Г. Итерационный метод решения задач оптимального управления сингулярно возмущенными системами при квадратичных ограничениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 34, №. 11. С. 1597–1616.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Жаринов А.Н., Кумков С.С.<sup>1,2</sup>

В докладе рассматриваются управляемые системы на плоскости

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \in [\vartheta_0, \vartheta_1], \quad x \in R^2, \\ u &\in P(t, x) \subset R^p, \quad x(\vartheta_0) \in M \subset R^2, \end{aligned} \quad (1)$$

функционирующие на конечном промежутке времени. Зависимости  $f$  и  $P$  липшицевы по  $x$  и измеримы по  $t$ . Начальное множество  $M$  предполагается компактным и односвязным. Задача состоит в численном построении множеств достижимости системы (1) в моменты времени из промежутка  $[\vartheta_0, \vartheta_1]$ . Считаем, что начальное множество  $M$  и промежуток времени таковы, что множества достижимости системы являются односвязными.

Вместо управляемой системы авторы рассматривают дифференциальное включение, получаемое по Филиппову [1]. В силу липшицевости имеющихся зависимостей соответствующее включение записывается как

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in F(t, x) = \text{co } f(t, x, P(t, x)), \\ t &\in [\vartheta_0, \vartheta_1], \quad x \in R^2, \quad x(\vartheta_0) \in M. \end{aligned} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ №№ 12-01-00537 и 13-01-96055

Здесь  $\text{co}$  – операция взятия выпуклой оболочки.

Для систем типа (2) авторами предложен геометрический способ построения множеств достижимости на плоскости [2]. Этот метод основывается на пересчёте границ множеств достижимости. Ранее авторами была предложена идея обоснования этого алгоритма [3], которая к настоящему времени привела к завершённому доказательству, представляемому в докладе.

При численных построениях необходимо произвести дискретизацию времени (перейти к построениям на сетке по времени) и дискретизацию пространства (подменить идеальные множества их пиксельными или многоугольными приближениями, удобными для численной обработки). Относительно дискретизации по времени известны результаты [4, 5], касающиеся сходимости теоретических процедур типа схемы Эйлера:

$$E_0^e = M, \quad E_k^e = \bigcup_{y \in E_{k-1}^e} (y + \Delta t \cdot F(t_{k-1}, y)), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3)$$

При обосновании правая часть включения (2) подменяется кусочно-линейной функцией  $\mathbb{F}$  с многоугольными выпуклыми значениями, близкими к значениям  $F$  в метрике Хаусдорфа. Начальное множество  $M$  также подменяется близким односвязным многоугольником  $\mathbb{M}$ . Соответственно, от схемы (3) авторы переходят к схеме

$$E_0^{ep} = \mathbb{M}, \quad E_k^{ep} = \bigcup_{y \in E_{k-1}^{ep}} (y + \Delta t \cdot \mathbb{F}(t_{k-1}, y)), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

для которой обосновывается, что каждое из множеств  $E_k^{ep}$  является многоугольником. Здесь  $\Delta t = (\vartheta_1 - \vartheta_0)/N$ ,  $t_k = t_0 + k\Delta t$ . Также доказывается, что эта схема сходится к множеству достижимости системы (2) при  $N \rightarrow \infty$  и увеличении точности многоугольных аппроксимаций (уменьшении расстояния Хаусдорфа между идеальными множествами  $M$  и  $F(\cdot, \cdot)$  и их многоугольными аппроксимациями).

Построения (4) можно подменить построениями, опирающимися на пересчёт границы множеств  $E_k^{ep}$ . А именно, из точек границы многоугольника  $E_0^b = \mathbb{M}$  на промежутке времени  $\Delta t$  выпускаются движения под экстремальными управлениями, их конечные точки

собираются, и на их основе строится граница нового многоугольника  $E_1^b$ . Затем процедура повторяется для многоугольника  $E_1^b$ , в результате чего получается многоугольник  $E_2^b$ . И так далее. Доказывается, что при таком методе развития ломаной многоугольницы  $E_k^b$ , ею ограничиваемые, будут близки к многоугольникам  $E_k^{ep}$ , а следовательно, и к множествам достижимости включения (2).

## Литература

- [1] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.
- [2] Жаринов А.Н., Кумков С.С. Принцип максимума с ограничением на управление, разрывно зависящим от координат / в сб. «Теория управления и теория обобщённых решений уравнений Гамильтона–Якоби: Труды Международного семинара, посвящённого 60-летию акад. А.И. Субботина, Екатеринбург, 22-26 июня 2006 г.», Т. 2. С. 143–150. – Екатеринбург: УрГУ, 2006.
- [3] Жаринов А.Н., Кумков С.С. Геометрический подход к численному построению множеств достижимости управляемых систем на плоскости / в сб. «Тезисы докладов международной конференции по динамическим системам и дифференциальным уравнениям, Суздаль, 2–7 июля 2010 г.». С. 82. – М.: МГУ, 2010.
- [4] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- [5] Никольский М.С. Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28. С. 1252–1254.

## ОПТИМАЛЬНОЕ ВЫВЕДЕНИЕ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ НА ОКОЛОЗЕМНУЮ ОРБИТУ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Кандоба И.Н., Костоусов В.Б., Козьмин И.В., Ложников А.Б.<sup>1,2</sup>

На протяжении последних десяти лет в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН совместно с НПО автоматики им. акад. Н.А. Семихатова (г. Екатеринбург) активно исследуются задачи оптимального выведения ракеты-носителя (РН) на заданную околоземную эллиптическую орбиту. Математическая модель управляемого движения РН описывается нелинейной динамической системой, где в качестве управления используются скорости изменения углов тангажа и рысканья, определяющих угловую ориентацию строительной оси РН. Основное внимание в этих исследованиях уделяется разработке методов построения программного управления, обеспечивающего выведение на заданную орбиту полезной нагрузки максимальной массы и удовлетворяющего ряду дополнительных требований. Рассматриваемые требования приводят к возникновению фазовых ограничений и диктуются необходимостью обеспечения падения отделяемых частей (ОЧ) ракеты-носителя в заданные районы, а также учета возможности успешного возвращения космического аппарата на Землю с любой точки траектории движения РН. Особую актуальность последнее условие приобретает при подготовке РН к пилотируемому пуску.

Задача вывода РН на заданную орбиту решается на базе математических моделей управляемого движения РН на всей траектории полета [1] и движения его отделяемых частей при баллистическом спуске [2].

Движение центра масс РН в некоторой инерциальной прямоугольной системе координат от момента старта  $t_0$  до момента  $t_f$  вы-

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022), (проект 13-1-006-НПО), «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» (проект 12-П-1-1023).



хода на заданную орбиту описывается уравнениями:

$$\dot{x} = v; \dot{v} = W(t, x, v, \vartheta, \psi); \dot{m} = -\mu(t); \dot{\vartheta} = u_1(t); \dot{\psi} = u_2(t) \quad (1)$$

$$t \in [t_0, t_f].$$

Здесь  $x, v \in \mathbb{R}^3$  – координаты и скорости центра масс РН;  $m$  – масса РН;  $\mu$  – заданная положительная кусочно-непрерывная функция расхода массы;  $\vartheta, \psi$  – углы тангажа и рыскания РН;  $W(t, x, v, \vartheta, \psi) = W_R(t, x, \vartheta, \psi) + W_A(t, x, v, \vartheta, \psi) + g(x)$  – ускорение (задается суммой составляющих, определяемых реактивными ( $W_R$ ), аэродинамическими ( $W_A$ ) и гравитационными ( $g$ ) силами).

Для системы (1) задаются начальные условия

$$x(t_0) = x^{(0)}, v(t_0) = v^{(0)}, m(t_0) = m^{(0)}, \vartheta(t_0) = \vartheta^{(0)}, \psi(t_0) = \psi^{(0)}. \quad (2)$$

Требование выведения РН на заданную орбиту приводит к возникновению в этой задаче терминальных фазовых ограничений.

В качестве управления в модели (1)-(2) используются скорости  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  изменения углов тангажа  $\vartheta$  и рыскания  $\psi$  соответственно, ограниченные по величине неравенствами

$$|u_1(t)| \leq u_1^{\max}, |u_2(t)| \leq u_2^{\max} \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (3)$$

Эти ограничения на управление обусловлены, в частности, инерционными свойствами двигательной установки РН.

Приведем модель движения ОЧ при баллистическом спуске. Здесь для того, чтобы различать соотношения, описывающие движение РН и движение ОЧ, величины, относящиеся к ОЧ, будут снабжаться символом «крышка». Уравнения движения центра масс ОЧ на промежутке  $[\hat{t}_0, \hat{t}_f]$  записываются в следующем виде:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{v}; \dot{\hat{v}} = \hat{W}_A(t, \hat{x}, \hat{v}) + g(\hat{x}).$$

Здесь начальный момент  $\hat{t}_0 \in [t_0, t_f]$ ; момент  $\hat{t}_f = \hat{t}_f(\hat{t}_0)$  соответствует моменту падения ОЧ на Землю. Начальные условия для этой системы определяются значениями векторов  $x$  и  $v$  для РН в момент  $\hat{t}_0$ :

$$\hat{x}(\hat{t}_0) = x(\hat{t}_0), \hat{v}(\hat{t}_0) = v(\hat{t}_0).$$

Разрешенный район падения ОЧ считается круговым и задается тремя параметрами:  $\varphi, \lambda, \varepsilon$  – широта и долгота центра района и его

радиус, т.е. предельно допустимое отклонение точки  $\hat{x}(\hat{t}_f)$  от центра района падения. В терминах  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\hat{x}(\hat{t}_f)$  можно вычислить «радиус промаха»  $r$  для точки  $\hat{x}(\hat{t}_f)$ . Тогда ограничение на точку падения ОЧ записывается в виде:

$$r(\hat{t}_f, \hat{x}(\hat{t}_f)) \leq \varepsilon. \quad (4)$$

В случае, если отделяемой частью РН является пилотируемый космический аппарат (КА), то важной величиной, связанной с динамикой баллистического спуска КА в атмосфере, является перегрузка. Эта величина показывает, во сколько раз аэродинамическое ускорение больше ускорения силы тяжести  $g_0$  на поверхности Земли, и вычисляется по формуле  $n = n(\hat{x}, \hat{v}) = |\hat{W}_A|/|g_0|$ .

Для обеспечения успешного возвращения КА на Землю требуется, чтобы максимально возможные перегрузки при баллистическом спуске КА не превышали заданного допустимого значения  $\bar{n}_{\max}$

$$\max_{\hat{t}_0 \in [t_0, t_f]} \max_{t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_f]} n(\hat{x}(t), \hat{v}(t)) \leq \bar{n}_{\max}. \quad (5)$$

В докладе рассматриваются эффективные алгоритмы численного решения задачи оптимального выведения РН на заданную орбиту при дополнительных ограничениях (3) на управление и фазовых ограничениях (4), (5) на состояние нелинейной динамической системы (1), (2), описывающей управляемое движение РН от точки старта до выхода на орбиту. Приводятся результаты широкомасштабного вычислительного эксперимента на многопроцессорной вычислительной системе с использованием реальных данных.

## Литература

- [1] Сизхарумидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
- [2] Охоцимский Д.Е, Голубев Ю.Ф., Сизхарумидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. – М.: Наука, 1975.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Коробицина Н.С.<sup>1</sup>

Рассматривается следующая задача оптимального управления [1]:

$$L_\varepsilon z = f + u, \quad x \in [0, 1], \quad z \in H_0^1([0, 1])$$

$$z(0) = z(1) = 0,$$

где  $L_\varepsilon z := \varepsilon^2 z'' - z' - \alpha^2 z$ , управление  $u$  – кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию:  $|u| \leq 1$  почти всюду,  $H_0^1[0, 1]$  – соболевское пространство функций, равных нулю на границе отрезка  $[0, 1]$ . Критерий качества для управления:

$$J := \int_0^1 (z^2(x) + u^2(x)) dx \rightarrow \inf.$$

В силу принципа максимума Понтрягина, единственное оптимальное управление  $u_\varepsilon$  и соответствующее ему  $z_\varepsilon$  можно найти как решение следующей задачи:

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = f - F(p_\varepsilon), \quad L_\varepsilon^* p_\varepsilon = z_\varepsilon, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1[0, 1], \quad (1)$$

$$\text{где } L_\varepsilon^* p = \varepsilon^2 p'' + p' - \alpha^2 p, \quad F(p) = \begin{cases} 1, & p > 1 \\ p, & |p| \leq 1 \\ -1, & p < -1 \end{cases}$$

В этом случае управление  $u_\varepsilon$  находится из соотношения:  $u_\varepsilon = F(p_\varepsilon)$ .

Аналогичная ситуация для задач управления решениями систем с частными производными рассматривалась в [2].

Соотношения, даваемые оператором  $F$ , разбивают отрезок  $[0, 1]$  на несколько областей, на каждой из которых система выглядит по-разному. В рамках работы [3] получено асимптотическое решение

---

<sup>1</sup>УрФУ

задачи с точностью  $O(\varepsilon)$  для случая, когда для предельной и допредельной задач таких областей оказывается три и  $p_\varepsilon \geq -1$ . То есть, если обозначить решение предельной задачи  $z_0, p_0$ , то отрезок  $[0, 1]$  разбивается соотношениями  $|p_0| \leq 1, p_0 > 1, p_0 < -1$  следующим образом: отрезки  $[0, \vartheta_0], [\theta_0, 1]$  (здесь  $|p_0| \leq 1$ ) и отрезок  $[\vartheta_0, \theta_0]$  (где здесь  $p_0 \geq 1$ ). В точках  $\vartheta_0, \theta_0$ , которые можно вычислить и которые считаются известными,  $p_0$  равна единице. В данной работе для этого же случая найдено асимптотическое решение задачи при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с точностью  $O(\varepsilon^n)$  для некоторого наперед заданного  $n$ .

Точки  $\vartheta_\varepsilon, \theta_\varepsilon$ , границы областей постоянства вида системы для допредельной задачи, лежат в окрестностях соответствующих им точек  $\vartheta_0, \theta_0$ . В этих точках  $p_\varepsilon$  равна единице.

Нулевым приближением станет решение предельной задачи с крайевыми условиями:  $z_0(0) = 0 = p_0(1)$  плюс экспоненциально убывающие функции погранслоя возле границ отрезка.

Внешнее разложение состоит из следующих пар функций:

$$\begin{aligned} \overset{+}{z}(x, \varepsilon) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{+}{z}_k(x), \overset{+}{p}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{+}{p}_k(x), \text{ при } x \in [\vartheta_\varepsilon, \theta_\varepsilon]; \\ \overset{o}{z}(x, \varepsilon) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{o}{z}_k(x), \overset{o}{p}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{o}{p}_k(x), \text{ при } x \in [0, \vartheta_\varepsilon]; \\ \overset{1}{z}(x, \varepsilon) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{1}{z}_k(x), \overset{1}{p}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \overset{1}{p}_k(x), \text{ при } x \in [\theta_\varepsilon, 1]. \end{aligned}$$

Здесь  $\overset{+}{z}_0, \overset{+}{p}_0, \overset{o}{z}_0, \overset{o}{p}_0, \overset{1}{z}_0, \overset{1}{p}_0$  – сужение  $z_0, p_0$  на соответствующие отрезки. Все остальные находятся из обычных рекуррентных формул внешнего разложения для системы вида, соответствующего рассматриваемой области.

Внутреннее разложение будет состоять из функций погранслоя в окрестностях нуля, единицы и точек  $\vartheta_\varepsilon, \theta_\varepsilon$ . При этом слева и справа от точек  $\vartheta_\varepsilon, \theta_\varepsilon$  будут функции, удовлетворяющие разным системам. Функции погранслоя ищутся как решения систем, переписанных в растянутых переменных, на соответствующих областях:

$$\begin{aligned} \overset{o}{W}_\varepsilon(\eta_1) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{o}{W}_n(\eta_1), \overset{o}{V}_\varepsilon(\eta_1) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{o}{V}_n(\eta_1), \eta_1 = \frac{x}{\varepsilon^2}, \\ \overset{\vartheta-}{W}_\varepsilon(\eta_2) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\vartheta-}{W}_n(\eta_2), \overset{\vartheta-}{V}_\varepsilon(\eta_2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\vartheta-}{V}_n(\eta_2), \eta_2 = \frac{\vartheta_\varepsilon - x}{\varepsilon^2}, \\ \overset{\vartheta+}{W}_\varepsilon(\eta_3) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\vartheta+}{W}_n(\eta_3), \overset{\vartheta+}{V}_\varepsilon(\eta_3) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\vartheta+}{V}_n(\eta_3), \eta_3 = \frac{x - \vartheta_\varepsilon}{\varepsilon^2}, \\ \overset{\theta-}{W}_\varepsilon(\eta_4) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\theta-}{W}_n(\eta_4), \overset{\theta-}{V}_\varepsilon(\eta_4) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{\theta-}{V}_n(\eta_4), \eta_4 = \frac{\theta_\varepsilon - x}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon}^{\theta+}(\eta_5) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} W_n^{\theta+}(\eta_5), V_{\varepsilon}^{\theta+}(\eta_5) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} V_n^{\theta+}(\eta_5), \eta_5 = \frac{x-\theta_{\varepsilon}}{\varepsilon^2}, \\ W_{\varepsilon}^1(\eta_6) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} W_n^1(\eta_6), V_{\varepsilon}^1(\eta_6) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} V_n^1(\eta_6), \eta_6 = \frac{1-x}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты этих разложений являются экспоненциально убывающими и полиномиальными функциями. Последние требуют согласования на бесконечности. Коэффициенты внешнего и внутреннего разложений будут однозначно определены из краевых условий, условий непрерывности в точках смены структуры решения и условия согласования в окрестностях этих точек.

**Теорема.** *Решение задачи (1)  $z_{\varepsilon}, p_{\varepsilon}$  раскладывается в асимптотический ряд равномерно по  $x$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Разложение составляется с помощью внешнего и внутреннего разложений, описанных выше. При построении используется метод согласования асимптотических разложений [4].*

Кроме того, если рассматривать частичные суммы  $Z_k$  и  $P_k$  рядов для какого-то фиксированного  $k \geq 1$ , то верны следующие асимптотические оценки:

$$z_{\varepsilon} - Z_k = O(\varepsilon^{2k-2}), \quad p_{\varepsilon} - P_k = O(\varepsilon^{2k-2})$$

в метрике пространства  $C([0, 1])$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Литература

- [1] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. – М.: Мир, 1972.
- [2] Данилин А.Р. Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления с геометрическими ограничениями на управление // Труды ИММ УрО РАН, 2003. Т. 9, № 1. С. 71–78.
- [3] Данилин А.Р., Коробицина Н.С. Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с геометрическими ограничениями // Труды ИММ УрО РАН, 2013. Т. 19, № 3. С. 104–112.
- [4] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989.

## О ПРОДОЛЖИМОСТИ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Крупенников Е.А.<sup>1,2,3</sup>

В ходе исследования задачи идентификации параметров макроэкономической модели [1]:

$$\frac{dp}{dt} = u_1 \frac{\partial G(p, q)}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = u_2 \frac{\partial G(p, q)}{\partial p}, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $G(p, q) = pq(a_0 + a_1p + a_2q)$ ,  $|u_1| \leq U_1$ ,  $|u_2| \leq U_2$ ,  $U_1 > 0$ ,  $U_2 > 0$ , по статистическим данным – неточным замерам  $\bar{p}_i = \bar{p}_i(t_i)$ ,  $\bar{q}_i = \bar{q}_i(t_i)$ ,  $\bar{h}_i = G(\bar{p}_i, \bar{q}_i) = \bar{h}_i(t_i)$ ,  $t_i = i \cdot \frac{T}{n}$ ,  $i \in \overline{0, n}$ , с погрешностью  $\delta > 0$ , возникает вопрос об оценке отрезка продолжимости рассматриваемых движений.

Решение задачи идентификации, т.е. определения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ , ограничений  $U_1, U_2$  и реалистичных законов управления  $u_1(t), u_2(t)$  таких, что динамика модели  $p(t), q(t)$  наиболее приближена к статистике, предлагается строить с помощью задачи оптимального управления системой (1) с функционалом невязки

$$I_{t_0, x_0}(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_0^T (p(t) - \bar{p}(t))^2 + (q(t) - \bar{q}(t))^2 + \epsilon(u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad (2)$$

где  $\bar{p}(t)$  и  $\bar{q}(t)$  – непрерывные интерполяции дискретных статистических данных,  $p(t)$  и  $q(t)$  – решения системы (1), порождаемые измеримыми программными управлениями  $(u_1(t), u_2(t))$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $|u_1| \leq U_1$ ,  $|u_2| \leq U_2$ ,  $\epsilon$  – регуляризирующий параметр.

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>УрФУ

<sup>3</sup>Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00214) и Программой Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» (проекты 12-П-1-1002, 12-П-1-1012, 12-С-1-1017).

Гамильтониан задачи оптимального управления имеет вид

$$H(t, s_1, s_2, p, q, \epsilon) = \min_{|u_1| \leq U_1, |u_2| \leq U_2} \left[ s_1 u_1 \frac{\partial G}{\partial p} - s_2 u_2 \frac{\partial G}{\partial q} + (p - \bar{p}(t))^2 + (q - \bar{q}(t))^2 + \epsilon(u_1^2 + u_2^2) \right]. \quad (3)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина [2], необходимым условием оптимальности управлений  $(\hat{u}_1(\cdot), \hat{u}_2(\cdot))$  и порожденных ими траекторий  $\hat{p}(t)$  и  $\hat{q}(t)$  системы (1) с начальными условиями  $\hat{p}(0) = p_0$ ,  $\hat{q}(0) = q_0$  является существование функций  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ , удовлетворяющих характеристической системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}(t)}{dt} &= \hat{u}_1(t) \frac{\partial G(\hat{p}(t), \hat{q}(t))}{\partial q} = \frac{\partial H(t, \hat{p}(t), \hat{q}(t), s_1(t), s_2(t))}{\partial s_1}, \\ \frac{\hat{q}(t)}{dt} &= \hat{u}_2(t) \frac{\partial G(\hat{p}(t), \hat{q}(t))}{\partial p} = \frac{\partial H(t, \hat{p}(t), \hat{q}(t), s_1(t), s_2(t))}{\partial s_2}, \\ \frac{ds_1(t)}{dt} &= -\frac{2s_1^2}{\epsilon} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} - \frac{2s_2^2}{\epsilon} \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial q} + 2(p - \bar{p}(t)), \\ \frac{ds_2(t)}{dt} &= -\frac{2s_1^2}{\epsilon} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial q} - \frac{2s_2^2}{\epsilon} \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial^2 G}{\partial q^2} + 2(q - \bar{q}(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

с краевыми условиями  $\hat{p}(0) = p_0, \hat{q}(0) = q_0, s_1(T) = 0, s_2(T) = 0$ . Те из решений  $\hat{p}(t, p_0, q_0)$ ,  $\hat{q}(t, p_0, q_0)$  системы (4), что вместе с порождающими их управлениями минимизируют функционал (2), являются оптимальными.

Рассмотрим вопрос о продолжимости решений характеристической системы (4).

Перепишем уравнения для сопряженных переменных из системы (4) с учетом ограничений на управления из (1) в следующем виде:

$$\frac{ds_1}{dt} = - \left[ 2(p - \bar{p}(t)) + s_1 \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial p^2} u_1^\epsilon + s_2 \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial p \partial q} u_2^\epsilon \right], \quad (5)$$

$$\frac{ds_2}{dt} = - \left[ 2(q - \bar{q}(t)) + s_1 \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial p \partial q} u_1^\epsilon + s_2 \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial q^2} u_2^\epsilon \right], \quad (6)$$

где

$$u_i^\epsilon = u_i^\epsilon(p, q, s_i) = \begin{cases} -U_i, & \text{если } r_i^\epsilon(p, q, s_i) \leq -U_i, \\ r_i^\epsilon(p, q, s_i), & \text{если } r_i^\epsilon(p, q, s_i) \in [-U_i, U_i], \\ U_i, & \text{если } r_i^\epsilon(p, q, s_i) \geq U_i, \end{cases} \quad (7)$$

$$r_1^\epsilon(p, q, s_i) = -\frac{1}{\epsilon} s_1 \frac{\partial G(p, q)}{\partial p}, \quad r_2^\epsilon(p, q, s_i) = -\frac{1}{\epsilon} s_2 \frac{\partial G(p, q)}{\partial q}.$$

В этом случае уравнения (5) и (6) мажорируются следующим образом:

$$\frac{ds_1}{dt} \leq -2(p - \bar{p}(t)) + |2a_1 s_1| U_1 + |(a_0 + 2a_1 p + 2a_2 q) s_2| U_2,$$

$$\frac{ds_2}{dt} \leq -2(q - \bar{q}(t)) + |(a_0 + 2a_1 p + 2a_2 q) s_1| U_1 + |2a_2 q s_2| U_2.$$

Как можно видеть, коэффициенты при  $s_1$  и  $s_2$  будут ограничены в силу того, что параметры  $p$  и  $q$  находятся в ограниченном множестве достоверности замеров их значений. Следовательно, правые части удовлетворяют условиям подлинейного роста и сопряженные переменные продолжимы на отрезке из  $[0, T]$ , где  $p$  и  $q$  не выходят из области достоверности замеров.

Таким образом, вопрос о продолжимости решений характеристической системы (4) сводится к исследованию продолжимости фазовых переменных  $p$  и  $q$  внутри области достоверности замеров. Получены оценки интервалов продолжимости. Результаты использованы для численного решения исходной задачи идентификации.

## Литература

- [1] *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». 2002. Т. 5. С. 54–86.
- [2] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. – М.: Наука, 1969.
- [3] *Крупенников Е.А., Токманцев Т.Б., Субботина Н.Н.* Численное решение задачи идентификации макроэкономической модели // Современные проблемы математики: тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, 2012. С. 145–147. Екатеринбург: ИММ УрО РАН.



## СТАТИСТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ларина Я.Ю.<sup>1</sup>

Пусть  $H(n, m)$  – пространство  $(n \times m)$ -матриц над полем  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (1)$$

с измеримыми и ограниченными на  $\mathbb{R}$  функциями  $A : \mathbb{R} \rightarrow H(n, n)$ ,  $B : \mathbb{R} \rightarrow H(n, m)$ , а также непрерывные функции  $U : \mathbb{R} \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ ,  $M : \mathbb{R} \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ . Предполагаем, что функции  $A$ ,  $B$ ,  $U$  и  $M$  периодические с периодом  $T > 0$ .

**Определение 1.** [4, 5] Система (1) называется  $(U, M)$ -допустимой, если для любой измеримой  $T$ -периодической функции  $u(t)$  со значениями в  $U(t)$  система (1) имеет единственное  $T$ -периодическое решение  $\tilde{\varphi}(t)$ , и это решение при всех  $t$  находится в множестве  $M(t)$ .

Необходимые и достаточные условия  $(U, M)$ -допустимости системы (1) получены в работах [4, 5]. Вместе с множеством  $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\}$  будем рассматривать множество

$$\mathfrak{M}^\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M^\varepsilon(t)\}, \quad \text{где } M^\varepsilon(t) = M(t) + O_\varepsilon(0),$$

$O_\varepsilon(0)$  – замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность нуля в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.** [1, 2] Относительной частотой поглощения множества достижимости  $D(t, X)$  системы (1) множеством  $\mathfrak{M}$  называется следующий предел:

$$\text{freq}(X) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } \alpha(\vartheta, X)}{\vartheta}, \quad (2)$$

где  $\alpha(\vartheta, X) \doteq \{t \in [0, \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\}$ ,  $\text{mes}$  – мера Лебега на числовой прямой. Если предел (2) не существует, то характеристики

$$\text{freq}^*(X) \doteq \overline{\lim}_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } \alpha(\vartheta, X)}{\vartheta}, \quad \text{freq}_*(X) \doteq \underline{\lim}_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } \alpha(\vartheta, X)}{\vartheta}$$

---

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

называются соответственно верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости  $D(t, X)$  системы (1) множеством  $\mathfrak{M}$ .

**Определение 3.** [1, 2] Множество  $\mathfrak{M}$  называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1), если предел

$$\text{freq}(M(0)) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, M(0)) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}$$

существует и имеет место равенство  $\text{freq}(M(0)) = 1$ .

**Теорема.** Пусть система (1) является  $(U, M)$ -допустимой и система  $\dot{x} = A(t)x$  асимптотически устойчива. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $\mathfrak{M}^\varepsilon$  статистически инвариантно относительно системы (1).

Если, кроме того, для каждого  $T$ -периодического решения системы (1) выполнено равенство  $\text{mes}\{t \in [0, T] : \tilde{\varphi}(t) \in \partial M(t)\} = 0$ , то множество  $\mathfrak{M}$  статистически инвариантно относительно данной системы (здесь через  $\partial M(t)$  мы обозначаем границу множества  $M(t)$ ).

**Пример.** Рассмотрим дискретно-непрерывную модель, которая используется при описании динамики изолированной популяции [3]. Предположим, что численность популяции  $x(t)$  изменяется согласно дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(ax + b), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= (w - 1)x, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $a, b$  – положительные постоянные,  $w = \text{const} > 0$  – коэффициент размножения, численно равный количеству новых особей, приходящихся на одну выжившую к моменту размножения особь в популяции. Будем считать, что мы можем управлять коэффициентом  $w$ , уменьшая или увеличивая его в зависимости от цели практической задачи.

Обозначим через  $\tilde{x}(t)$  периодическое решение задачи (3) с периодом  $T$ . Через  $x(t)$  обозначим такое решение задачи (3), для которого выполняется условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$ .

Рассмотрим статистические характеристики для множества  $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, C]\}$ , где  $C > 0$  – некоторая постоянная. В данном случае

$$\text{freq}(x) = \text{freq}(\tilde{x}) = \frac{\text{mes}\{t \in [0, T] : \tilde{x}(t) \in [0, C]\}}{T}.$$

После некоторых вычислений получим, что

$$\text{freq}(\tilde{x}) = 1 - \frac{1}{bT} \ln \frac{(w - e^{bT})(aC + b)}{aC(w - 1)}. \quad (4)$$

Пусть задано  $\lambda_0 \in [0, 1]$ . Из (4) следует, что при

$$C = C(\lambda_0) = \frac{b(w - e^{bT})}{a(w - 1)e^{bT(1-\lambda_0)} - a(w - e^{bT})}$$

выполнено равенство  $\text{freq}(\tilde{x}) = \lambda_0$ . Это означает, что при относительной частоте  $\lambda_0$  размер популяции не превышает значения  $C(\lambda_0)$ .

## Литература

- [1] *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
- [2] *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
- [3] *Недорезов Л.В.* Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997.
- [4] *Петрова В.В., Тонков Е.Л.* Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений. I // Известия вузов. Математика. 1996. № 11. С. 65–72.
- [5] *Петрова В.В., Тонков Е.Л.* Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений. II // Известия вузов. Математика. 1997. № 6. С. 17–24.

## МЕТОД ПРИТЯГИВАНИЯ КО МНОЖЕСТВУ РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ

Паршиков Г.В.<sup>1,2</sup>

Для управляемой системы в  $\mathbb{R}^n$ , рассматриваемой на конечном промежутке  $[t_0, \vartheta]$ , обсуждается задача о сближении с компактом  $M \subset \mathbb{R}^n$  в момент  $\vartheta$  [1].

Предложен пошаговый (по времени) метод конструирования управления, обеспечивающего приближенное решение задачи. Один из известных методов, с помощью которого можно решать задачу о сближении, – метод экстремального прицеливания на множество  $W$  разрешимости задачи [1]. Предлагаемый здесь метод отличается от метода экстремального прицеливания; в его основе лежит выбор на каждом шаге (по времени) управлений, доставляющих максимальное притягивание движения системы к  $W$ . Метод восходит к работе [2].

На промежутке  $[t_0, \vartheta]$  ( $t_0 < \vartheta < \infty$ ) задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0; \quad (1)$$

здесь  $x \in \mathbb{R}^n$  – фазовый вектор системы,  $u \in P$  – вектор управлений,  $P$  – компакт в  $\mathbb{R}^r$ .

Предполагается, что выполнены условия

- A.**  $f(t, x, u)$  непрерывна по  $t, x, u$  и для любой ограниченной, замкнутой области  $D \subset [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  существует такая константа  $L \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x_*, u) - f(t, x^*, u)\| \leq L \|x_* - x^*\|, \quad (t, x_*, u), (t, x^*, u) \in D \times P;$$

- B.** Найдется такая константа  $\gamma \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times P;$$

- C.** Множество  $F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in P\}$  выпукло при любых  $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00427\_а.

Наряду с системой (1) задан компакт  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

**Задача о сближении.** Найти допустимое управление  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , порождающее такое движение  $x^*(t)$ ,  $x^*(t_0) = x_0$  системы (1), что  $x^*(\vartheta) \in M$ .

В сколь-нибудь сложных конкретных задачах о сближении мы не в состоянии выделить разрешающее управление  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ . В связи с этим рассматриваем вопрос о построении управления, обеспечивающего приближенное решение задачи.

Опишем кратко метод построения этого управления на  $[t_0, \vartheta]$ .

Для построения привлечем множество разрешимости  $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$  задачи о сближении ([1, 2]), где  $W(\vartheta) = M$ ; здесь обозначено  $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in W, t \in [t_0, \vartheta]\}$ .

Учитывая условие **B** и ограниченность множества  $M$ , можем указать такую компактную область  $D^*$ , что  $W \subset D^*$ .

Зададим разбиение  $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_N = \vartheta\}$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$  с равными шагами  $\Delta = t_{j+1} - t_j$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ .

Считаем, что умеем вычислять лишь приближенно множества  $W(t_j)$  и множества достижимости  $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ ,  $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$  системы (1) как множества  $W^a(t_j)$  и  $\tilde{X}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) = x^{(j)} + \Delta F(t_j, x^{(j)})$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ; при этом  $d(W(t_j), W^a(t_j)) \leq \varepsilon(\Delta)$ ,  $d(X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}), \tilde{X}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})) \leq \omega(\Delta)$ , где функция  $\varepsilon(\delta)$  ( $\delta > 0$ ) задается нами, а функция  $\omega(\Delta)$  ( $\Delta^{-1}\omega(\Delta) \downarrow 0$  при  $\Delta \downarrow 0$ ) определяется условием **A** и выбором компакта  $D^*$ ;  $d(W^{(1)}, W^{(2)})$  – хаусдорфово расстояние между компактами  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$ .

Для системы (1) конструируются управление  $u^{(\Delta)}(t)$  и соответствующие движение  $x^{(\Delta)}(t)$  по шагам разбиения  $\Gamma$ , начиная с промежутка  $[t_0, t_1]$ .

Выберем произвольную точку  $\tilde{x}^{(0)} \in W^a(t_0)$  в качестве начальной для системы (1) и рассмотрим множество

$$\tilde{X}(t_1, t_0, \tilde{x}^{(0)}) = \{\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \Delta f(t_0, \tilde{x}^{(0)}, u) : u \in P\}.$$

Полагаем  $u^{(\Delta)}(t) = u^{(0)} \in P$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , где  $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \Delta f(t_0, \tilde{x}^{(0)}, u^{(0)})$  – ближайшая точка в  $\tilde{X}(t_1, t_0, \tilde{x}^{(0)})$  к  $W^a(t_1)$ .

На следующем промежутке  $[t_1, t_2]$  полагаем  $u^{(\Delta)}(t) = u^{(1)} \in P$ , где  $\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \Delta f(t_1, \tilde{x}^{(1)}, u^{(1)})$  – ближайшая точка в  $\tilde{X}(t_2, t_1, \tilde{x}^{(1)})$  к  $W^a(t_2)$ .

Конструируя по аналогии управление  $u^{(\Delta)}(t)$  на промежутках  $[t_2, t_3]$ ,  $[t_3, t_4]$ , ...,  $[t_{N-1}, t_N]$  ( $u^{(\Delta)}(t) = u^{(j)} \in P$ ,  $t \in [t_j, t_{j+1})$ ),

определим ломаную Эйлера для системы (1) равенством  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^{(j)} + (t - t_j)f(t_j, \tilde{x}^{(j)}, u^{(j)})$ ,  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ .

Учитывая, что  $W(t_N) = M$  и  $d(W(t_N), W^a(t_N)) \leq \varepsilon(\Delta)$ , при достаточно малых  $\Delta > 0$  получаем следующую оценку:

$$\rho(\tilde{x}^{(N)}, M) \leq \frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{L\Delta} (2\varepsilon(\Delta) + \omega(\Delta)) + (4e^{L(\vartheta-t_0)} + 1)\varepsilon(\Delta). \quad (2)$$

Здесь  $\rho(x, \mathcal{W})$  – расстояние от точки  $x$  до  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ ;  $L = L(D^*)$  – константа, определенная для области  $D^*$  из условия **A**.

Движение  $x^{(\Delta)}(t)$ ,  $x^{(\Delta)}(t_0) = \tilde{x}^{(0)} \in W^a(t_0)$ , отвечающее управлению  $u^{(\Delta)}(t)$ , удовлетворяет неравенству

$$\|x^{(\Delta)}(\vartheta) - \tilde{x}^{(N)}\| \leq \frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{L\Delta} \omega(\Delta). \quad (3)$$

Из (2), (3) следует

$$\rho(x^{(\Delta)}(\vartheta), M) \leq 2 \frac{e^{L(\vartheta-t_0)} - 1}{L\Delta} (\varepsilon(\Delta) + \omega(\Delta)) + (4e^{L(\vartheta-t_0)} + 1)\varepsilon(\Delta). \quad (4)$$

**Утверждение.** Пусть  $\Gamma^{(\Delta)} = \{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_N = \vartheta\}$  – разбиение промежутка  $[t_0, \vartheta]$  ( $t_{j+1} - t_j = \Delta$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ ),  $\{W^a(t_j) : t_j \in \Gamma^{(\Delta)}\}$  – система компактных множеств в  $\mathbb{R}^n$ , где  $d(W(t_j), W^a(t_j)) \leq \varepsilon(\Delta)$ ,  $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta) \downarrow 0$  при  $\Delta \downarrow 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\Delta > 0$ , что движение  $x^{(\Delta)}(t)$  системы (1), отвечающее управлению  $u^{(\Delta)}(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$ , удовлетворяет неравенству  $\rho(x^{(\Delta)}(\vartheta), M) \leq \varepsilon(\Delta)$ .

## Литература

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974.
- [2] Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод притягивания к множеству разрешимости в задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 275–284.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ГАРАНТИИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Плаксин А.Р.<sup>1,2</sup>

В рамках теоретико-игрового подхода [1, 2] рассматривается задача управления, описываемая дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\sum_{i=0}^m \left( A_i \dot{x}[t - h_i] + B_i x[t - h_i] \right) = P[t]u[t] + Q[t]v[t] + f[t], \quad (1)$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^l, \quad v[t] \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^r,$$

с начальным условием

$$x[t_0 + \tau] = g[\tau], \quad \tau \in [-h, 0], \quad (2)$$

и показателем качества

$$\gamma = \sqrt{\|D_1(x[\vartheta_1] - c_1)\|^2 + \dots + \|D_K(x[\vartheta_K] - c_K)\|^2}. \quad (3)$$

Здесь  $x[t]$  – вектор состояния в момент  $t$ ;  $u[t]$  и  $v[t]$  – воздействие управления и помехи;  $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h$  – константы запаздывания;  $A_i$  и  $B_i$  –  $(n \times n)$ -матрицы, причем  $\det A_0 \neq 0$ ;  $P[t]$ ,  $Q[t]$  и  $f[t]$  – непрерывны;  $g[\tau]$  – абсолютно непрерывна;  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  – известные компакты. Моменты оценки качества движения  $\vartheta_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $t_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_K = \vartheta$ ,  $(p_k \times n)$ -матрицы  $D_k$  и цели  $c_k$  заданы.

Цель оптимизации – доставить показателю (3) как можно меньшее значение.

В работах [1] даны эффективные конструкции решений задач оптимизации с показателем (3) для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В данной работе, на примере задачи (1)–(3), обсуждается развитие этих конструкций для систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа.

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002)

Допустимой стратегией управления называем любую функцию

$$U(t, x[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[\cdot] \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n), \quad \varepsilon > 0,$$

где  $\varepsilon$  – параметр точности [1]. Управление осуществляется в дискретной по времени схеме на базе некоторого разбиения

$$\Delta_\delta = \{t_j: 0 < t_{i+1} - t_i < \delta, \quad i = \overline{0, J-1}, t_J = \vartheta\}, \quad \delta > 0. \quad (4)$$

На каждом шаге  $[t_i, t_{i+1})$  этого разбиения имеем

$$u[t] = U(t_j, x_{t_j}[\cdot], \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (5)$$

где  $x_{t_j}[\cdot] = \{x_{t_j}[\tau] = x[t_j + \tau], \tau \in [-h, 0]\}$ .

Пусть  $S = S(t_0, g[\cdot], U, \Delta_\delta, \varepsilon)$  – множество троек  $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$  таких, что  $v[\cdot]$  – измеримая функция из  $[t_0, \vartheta]$  в  $\mathbb{V}$ ,  $u[\cdot]$  – кусочно-постоянная функция из  $[t_0, \vartheta]$  в  $\mathbb{U}$ , которая формируется в согласии с (5),  $x[\cdot]$  – непрерывная функция на  $[t_0 - h, \vartheta]$ , которая удовлетворяет (2), является абсолютно непрерывной на  $[t_0, \vartheta]$  и вместе с  $u[\cdot]$  и  $v[\cdot]$  почти всюду удовлетворяет (1). Оптимальный гарантированный результат управления определяется равенством

$$\rho(t_0, g[\cdot]) = \inf_U \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \{\gamma | \{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S\}.$$

Стратегия управления  $U^\circ$  называется оптимальной, если для любого  $\zeta > 0$  существуют такие  $\varepsilon^* > 0$  и  $\delta^* > 0$ , что  $\gamma \leq \rho(t_0, g[\cdot]) + \zeta$ , каковы бы ни были значение  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ , разбиение (4) с шагом  $0 < \delta \leq \delta^*$  и  $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S(t_0, g[\cdot], U^\circ, \Delta_\delta, \varepsilon)$ .

Для системы (1) существует (см., например [3]) матрица  $Y[t]$ :  $Y[t] = 0$ , при  $t < t_0$ ;  $Y[t_0] = A_0^{-1}$ ; функция  $\sum_{i=0}^m A_i Y[t - h_i]$  – непрерывна при  $t > t_0$ ;  $Y[t]$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^m (A_i \dot{Y}[t - h_i] + B_i Y[t - h_i]) = 0, \quad t > t_0, \quad t \notin \left\{ \sum_{i=0}^m l_i h_i, \quad l_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Определим  $(p_k \times n)$ -матрицы-функции  $P_k[t] = D_k Y[\vartheta_k - t] P[t]$ ,  $Q_k[t] = D_k Y[\vartheta_k - t] Q[t]$ , при  $t \in [t_0, \vartheta_k]$  и  $P_k[t] = Q_k[t] = 0$ , при  $t \in [\vartheta_k, \vartheta]$ . Пусть  $p = p_1 + \dots + p_N$ . Сконструируем из  $P_k[t]$ ,  $k = \overline{1, K}$



матрицу-функцию  $\tilde{P}[t]$  размера  $(p \times n)$  по правилу: первые  $p_1$  строк матрицы  $\tilde{P}[t]$  совпадают со строкам матрицы  $P_1[t]$ , следующие  $p_2$  строк – со строками  $P_2[t]$  и так далее. Аналогичным образом сконструируем  $(p \times n)$ -матрицу-функцию  $\tilde{Q}[t]$  из  $Q_k[t]$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Следуя функциональной трактовке [2], рассмотрим вспомогательную дифференциальную игру

$$\dot{z}[t] = \tilde{P}[t]u[t] + \tilde{Q}[t]v[t], \quad t \in [t_0, T], \quad z \in \mathbb{R}^p, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}, \quad (6)$$

$$z[t_0] = z_0 \in \mathbb{R}^p, \quad \gamma_z = \|z[\vartheta]\|. \quad (7)$$

Известно (см., например, [1]), что игра (6), (7) имеет цену  $\rho_z(t_0, z_0)$  и седловую точку  $\{u_z^\circ(t, z, \varepsilon), v_z^\circ(t, z, \varepsilon)\}$ . Пусть

$$w_k(t, x_t[\cdot]) = D_k \left( \sum_{i=0}^m Y[\vartheta_k - h_i - t] A_i x[t] + \int_t^{\vartheta_k} Y[\vartheta_k - \xi] f[\xi] d\xi - \right. \\ \left. - \sum_{i=0}^m \int_{t-h_i}^t Y[\vartheta_k - h_i - \xi] \left( A_i \dot{x}[\xi] + B_i x[\xi] \right) d\xi - c_k \right), \quad t \in [t_0, \vartheta_k),$$

и  $w_k(t, x_t[\cdot]) = D_k(x[\vartheta_k] - c_k)$ , при  $t \in [\vartheta_k, \vartheta]$ . Определим информационный образ  $w(t, x_t[\cdot])$ , действующий в  $\mathbb{R}^p$ , такой, что первые  $p_1$  компонент вектора его значения равны вектору значений  $w_1(t, x_t[\cdot])$ , следующие  $p_2$  компонент – вектору значений  $w_2(t, x_t[\cdot])$  и так далее.

Следующая теорема устанавливает связь между исходной задачей оптимизации (1)–(3) и дифференциальной игрой (6), (7).

**Теорема.** *Справедливы равенства*

$$\rho(t_0, g[\cdot]) = \rho_z(t_0, w(t_0, g[\cdot])), \quad U^\circ(t, x_t[\cdot], \varepsilon) = u_z^\circ(t, w(t, x_t[\cdot]), \varepsilon).$$

Эта теорема позволяет применить для решения исходной задачи оптимизации с показателем качества, оценивающим качество движения в промежуточные моменты, методы, разработанные для решения аналогичных задач управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с терминальным показателем качества.

## Литература

- [1] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985.
- [2] Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885-900.
- [3] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.

## О СТРУКТУРЕ КУСОЧНО-ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА

Родин А.С.<sup>1,2,3</sup>

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + H(t, x, s) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), \quad (1)$$

$t \in [0, T]$ ,  $x \in R^n$ . Обозначим  $\Pi_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in R^n\}$ . Задача рассматривается при следующих предположениях:

A1 функция  $H(t, x, s)$  непрерывно дифференцируема по всем переменным и вогнута по переменной  $s$ ;

A2 функция  $\sigma(x)$  непрерывно дифференцируема;

A3 функции  $\frac{\partial H(t, x, s)}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial H(t, x, s)}{\partial s_j}$ ,  $i, j \in \overline{1, n}$ , обладают подлинейным ростом по  $x, s$ .

Условия A1 – A3 гарантируют существование, единственность и продолжимость решений характеристической системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial s}, \quad \dot{s} = -\frac{\partial H(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial x}, \quad \dot{z} = \left\langle \tilde{s}, \frac{\partial H(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial s} \right\rangle - H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>УрФУ

<sup>3</sup>Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00214) и проектами 12-П-1-1002, 12-П-1-1012, 12-С-1-1017.

с краевыми условиями

$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T, \xi) = D_x \sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T, \xi) = \sigma(\xi), \quad \forall \xi \in R^n. \quad (3)$$

**Определение 1.** ([2], стр. 157) Обобщенным решением задачи (1) называется липшицевая супердифференцируемая функция  $\Pi_T \ni (t, x) \mapsto \varphi(t, x) \in R$  такая, что  $\forall (t_0, x_0) \in \Pi_T \quad \exists \xi_0 \in R^n$  и решения системы (2), (3)  $\tilde{x}(\cdot, \xi_0), \tilde{s}(\cdot, \xi_0), \tilde{z}(\cdot, \xi_0)$ , удовлетворяющие условию  $\tilde{x}(t_0, \xi_0) = x_0, \quad \tilde{z}(t_0, \xi_0) = \varphi(t_0, x_0)$  и  $\tilde{z}(t, \xi_0) = \varphi(t, x(t, \xi_0)) \quad \forall t \in [t_0, T]$ .

Это определение эквивалентно определениям минимаксного и вязкостного решений задачи (1) [1].

**Определение 2.** Множеством сингулярности  $Q$  для обобщенного решения  $\varphi$  задачи (1) называется множество точек  $(t, x) \in \Pi_T$ , в которых функция  $\varphi$  недифференцируема.

Справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** ([2], стр. 157) Пусть в задаче (1) выполнены условия A1 – A3. Для того чтобы точка  $(t, x) \in Q$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали  $\xi_1, \xi_2 \in R^n, \xi_1 \neq \xi_2$ , для которых выполнены соотношения

$$\tilde{x}(t, \xi_1) = \tilde{x}(t, \xi_2) = x, \quad \tilde{z}(t, \xi_1) = \tilde{z}(t, \xi_2) = \varphi(t, x), \quad \tilde{s}(t, \xi_1) \neq \tilde{s}(t, \xi_2),$$

где  $\tilde{x}(\cdot, \xi_i), \tilde{s}(\cdot, \xi_i), \tilde{z}(\cdot, \xi_i), \quad i = 1, 2$ , – решения характеристической системы (2), (3).

**Утверждение 2.** ([2], стр. 159) Если множество сингулярности  $Q$  содержит кривую, описываемую дифференцируемой функцией  $t \mapsto x(t), 0 < t_0 < t \leq T$ , то справедливо соотношение

$$\left\langle \tilde{s}(t, \xi_1) - \tilde{s}(t, \xi_2), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = H(t, x(t), \tilde{s}(t, \xi_1)) - H(t, x(t), \tilde{s}(t, \xi_2)).$$

Рассмотрим случай, когда обобщенное решение  $\varphi(t, x)$  является кусочно-гладкой функцией [1]. Это означает, что

$$\Pi_T = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \emptyset, \quad \text{если } i \neq j, \quad i, j \in I, \quad I = 1, 2, \dots, N.$$

$M_i$  – дифференцируемые подмногообразия. Функция  $\varphi(t, x)$  при  $(t, x) \in \overline{M}_j, j \in I$ , является непрерывно дифференцируемой.

Обозначим

$$J := \{i \in I : M_i \text{ является } n\text{-мерным многообразием}\}.$$

$$J(x) := \{j \in J | x \in \overline{M}_j\}.$$

Предполагаем, что  $J(x_1) = J(x_2), x_1, x_2 \in M_i \quad \forall i \in I$ .

Получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть в задаче (1) выполнены условия A1 – A3. Тогда для того чтобы  $(t, x) \in \overline{M}_j, j \in I \setminus J$ , где  $\overline{M}_j$  – многообразие размерности  $n+1-k, k \in \overline{1, n}$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали решения системы (2), (3)  $\tilde{x}(\cdot, \xi_i), \tilde{s}(\cdot, \xi_i), \tilde{z}(\cdot, \xi_i), i \in \overline{1, r+1}$ , такие, что

$$\tilde{x}(t, \xi_i) = x, \quad \tilde{z}(t, \xi_i) = \varphi(t, x), \quad \tilde{s}(t, \xi_i) \neq \tilde{s}(t, \xi_j)$$

при  $\xi_i \neq \xi_j, i, j \in \overline{1, r+1}, r \geq k$  и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} s_1^1 - s_2^1 & s_1^2 - s_2^2 & \dots & s_1^n - s_2^n & H_1 - H_2 \\ s_2^1 - s_3^1 & s_2^2 - s_3^2 & \dots & s_2^n - s_3^n & H_2 - H_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_r^1 - s_{r+1}^1 & s_r^2 - s_{r+1}^2 & \dots & s_r^n - s_{r+1}^n & H_r - H_{r+1} \end{pmatrix}$$

был равен  $k$ , где  $(s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^n) = \tilde{s}(t, \xi_i), H_i = H(t, \tilde{x}(t, \xi_i), \tilde{s}(t, \xi_i)), i \in \overline{1, r+1}$ .

**Теорема 2.** Пусть в задаче (1) выполнены условия A1–A3 и  $x \in R$ . Пусть  $t \mapsto y(t)$  – непрерывно дифференцируемая функция такая, что  $(t, y(t)) \in Q$  и решения  $\tilde{x}(\cdot, \xi_i), \tilde{s}(\cdot, \xi_i), \tilde{z}(\cdot, \xi_i)$  системы (2), (3),  $i = 1, 2, 3$ , удовлетворяют условиям теоремы 1 при  $k = 1$  и  $r = 2$ . Тогда

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t, \xi_3) = \frac{dy}{dt}(t) = \frac{H(t, \tilde{x}(t, \xi_3), \tilde{s}(t, \xi_1)) - H(t, \tilde{x}(t, \xi_3), \tilde{s}(t, \xi_2))}{\tilde{s}(t, \xi_1) - \tilde{s}(t, \xi_2)}.$$

Приведены примеры, демонстрирующие полученные результаты.

## Литература

- [1] *Субботин А.И.* Обобщённые решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2003.
- [2] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Екатеринбург: УрО РАН, 2013.

## ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА

Сахаров Д.В.<sup>1,2</sup>

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $n+1$  лица:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и убегающего  $E$ . Закон движения каждого из преследователей  $P_i$  имеет вид:

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \dots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in U. \quad (1)$$

Закон движения убегающего  $E$  имеет вид:

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + \dots + a_l y = v, \quad v \in U. \quad (2)$$

Здесь и далее  $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$ ,  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ ,  $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ ,  $U$  – выпуклый компакт из  $\mathbb{R}^k$ .

При  $t = t_0$  заданы начальные условия:

$$x_i^{(\alpha)}(t_0) = x_{i\alpha}^0, \quad y^{(\alpha)}(t_0) = y_\alpha^0, \quad \alpha = 0, \dots, l-1,$$

причем  $x_{i0}^0 - y_0^0 \notin M_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , где  $M_i$  – выпуклые компакты из  $\mathbb{R}^k$ .

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + \dots + a_l z_i &= u_i - v, \quad u_i, v \in U, \\ z_i(t_0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \dots, z_i^{(l-1)}(t_0) &= z_{i,l-1}^0 = x_{i,l-1}^0 - y_{l-1}^0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00195, 12-01-31077, 14-01-31176.

**Определение 1.** Будем говорить, что задана квазистратегия  $\mathcal{U}_i$  преследователя  $P_i$ , если определено отображение  $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ , ставящее в соответствие начальному состоянию  $z^0$ , моменту  $t$  и произвольной предыстории управления  $v_t(\cdot)$  убегающего  $E$  измеримую функцию  $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$  со значениями в  $U$ .

Обозначим данную игру через  $\Gamma$ . Пусть

$$\Omega(m) = \{\{i_1, \dots, i_m\} \mid i_1, \dots, i_m \in I \text{ и попарно различны}\}.$$

**Определение 2.** В игре  $\Gamma$  происходит  $m$ -кратная поимка ( $n \geq m \geq 1$ ), если существует момент  $T(z^0)$ , квазистратегии  $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \dots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  такие, что для любой измеримой функции  $v, v(t) \in U, t \in [t_0, T(z^0)]$  найдется множество  $\Lambda \in \Omega(m)$  такое, что

$$z_q(T(z^0)) \in M_q \text{ для всех } q \in \Lambda.$$

Обозначим через  $\varphi_p(t), p = 0, \dots, l-1$ , решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1 w^{(l-1)} + \dots + a_l w = 0$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \dots, w^{(p-1)}(0) = 0, \quad w^{(p)}(0) = 1, \\ w^{(p+1)}(0) = 0, \dots, w^{(l-1)}(0) = 0. \end{aligned}$$

**Предположение 1.** В системах (1), (2)  $l = 2p$  и характеристическое уравнение

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \dots + a_l = 0$$

имеет простые чисто мнимые корни.

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t)z_{i0}^0 + \varphi_1(t)z_{i1}^0 + \dots + \varphi_{2p-1}(t)z_{i,2p-1}^0.$$

Через  $H_i$  обозначим кривые

$$H_i = \{\xi_i(t), t \in [t_0, \infty)\},$$

положим

$$d = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in D = D_\varepsilon(h_1^0) \times D_\varepsilon(h_2^0) \times \dots \times D_\varepsilon(h_n^0)$$

и определим функции  $r, \lambda_i, J_i$  следующим образом:

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{2p-1}(t) \geq 0, \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda_i(v, r, h_i, m_i) = \begin{cases} \sup\{\lambda | \lambda \geq 0, v - \lambda r(h_i - m_i) \in U\}, & \text{если } h_i \neq m_i, \\ 0, & \text{если } h_i = m_i, \end{cases}$$

$$\lambda_i(v, r, h_i) = \sup_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, r, h_i, m_i),$$

$$J_i(t, h_i) = \int_{t_0}^t |\varphi_{2p-1}(t-s)| \lambda_i(v(s), r(t-s), h_i) ds.$$

**Предположение 2.** Существуют  $h_i^0 \in H_i, h_i^0 \neq 0$  такие, что при некотором  $\varepsilon > 0$  выполнено:

$$\delta = \inf_{d \in D} \min_{r \in \{-1, 1\}} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_i(v, r, h_i^0) > 0.$$

**Теорема.** Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда в игре  $\Gamma$  происходит  $m$ -кратная поимка.

**Предположение 3.** Начальные позиции участников игры таковы, что при некотором  $\varepsilon > 0$  выполнено:

$$\delta = \inf_{d \in D} \min_{r \in \{-1, 1\}} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_i(v, r, z_{i0}^0) > 0.$$

**Следствие.** Пусть выполнены предположения 1, 3. Тогда в игре  $\Gamma$  происходит  $m$ -кратная поимка.

## Литература

- [1] Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1990.
- [2] Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. – Ижевск: Издательство «Удмуртский университет», 2009.

- [3] *Благодатских А.И.* Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 2. С. 43–45.
- [4] *Сахаров Д.В.* Одна задача группового преследования в линейной почти периодической дифференциальной игре // МТИП. 2012. Т. 4. Вып. 3. С. 86–100.

## СТУПЕНЧАТЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОДУКТИВНОСТИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Тарасьев А.М., Усова А.А.<sup>1,2</sup>

В работе рассматривается задача оптимального управления инвестициями, направленными на увеличение продуктивности природных ресурсов. Пусть переменная  $m(t)$  отвечает текущему потреблению материалов, тогда общий объем потребленных ресурсов к моменту времени  $t$  находится из равенства  $M(t) = \int_0^t m(s)ds$ . Условие ограниченности природных ресурсов  $M(t) \leq M_0 < +\infty$  является существенным для задачи, в текущей версии модели оно выражается, в частности, в механизме ценообразования, который предполагает обратную пропорциональность между ценами и запасами природных ресурсов  $p(t) = p_0 (M_0 - M(t))^{-1}$ , где  $p_0$  – цена на природные ресурсы в начальный момент времени. Известно, что *продуктивность ресурсов*  $z(t)$  есть отношение объема выпускаемой продукции  $y(t)$  к затраченным материалам  $m(t)$ . Производственная функция, связывающая объемы выпуска  $y(t)$  с потребляемыми материалами, есть экспоненциальная функция Кобба–Дугласа

$$y(t) = ae^{-bt}m^\alpha(t), \quad a, b > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ (11-01-00427-а, 12-01-00024-а, 12-01-31300-мол-а), Программой ведущих научных школ (НШ-64508.2010.1), Программой президиума РАН (12-П-1-1002, 12-П-1-1012, 12-П-1-1038, 12-П-7-1001) и Международным Институтом Прикладного Системного Анализа (NSFC-IIASA).



Поскольку модель ориентирована на увеличение продуктивности ресурсов за счет инвестиций, будем считать, что грамотная инвестиционная политика обеспечивает относительный рост продуктивности ресурсов пропорционально вложениям  $u(t)$ , то есть

$$\dot{z}(t) = \beta u(t)z(t), \quad (2)$$

где параметр  $\beta$  отвечает за эффективность инвестиционных программ. Так как средства  $u(t)$  выделяются из общего объема выпуска  $y(t)$ , то должно быть выполнено ограничение  $0 \leq \underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u} < 1$ .

Качество процесса управления оценивается при помощи суммарного индекса потребления  $c(t)$  логарифмического типа, дисконтированного на бесконечном промежутке времени, где объем потребления выражается из соотношения баланса  $c(t) = y(t) - m(t)p(t) - u(t)y(t)$ , которое имеет место в условиях замкнутой экономической системы.

При помощи соотношений (1), (2) можно выписать задачу управления, суть которой – *максимизировать функцию полезности*

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt \text{ вдоль траекторий динамической системы}$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{b}{\alpha} x_1(t) - \frac{1}{M_0} x_2(t), \quad x_1(0) = x_1^0 = 1, \quad (3)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{x_2(t)}{1 - \alpha} \left( \frac{b}{\alpha} - \beta u(t) \right), \quad x_2(0) = x_2^0 = m_0, \quad (4)$$

когда управление  $u(t)$  удовлетворяет ограничениям  $\underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$ . Здесь в качестве фазовых переменных были выбраны следующие величины:  $x_1 = e^{\frac{b}{\alpha} t} (1 - M(t)/M_0)$ ,  $x_2 = e^{\frac{b}{\alpha} t} m(t)$ .

Опишем основные идеи аппроксимационной схемы решения задачи. Пусть управление на промежутке времени  $[0, T]$  было выбрано на некотором уровне  $u_1$ , а по прошествии момента времени  $T$  произошла смена управляющего режима на стационарный уровень<sup>3</sup>  $u^*$ , то есть  $u(t) = \begin{cases} u_1, & 0 \leq t \leq T, \\ u^*, & t \geq T. \end{cases}$  Подставим управление в диффе-

<sup>3</sup>Исследование задачи проводилось в рамках принципа максимума Понтрягина для задач на бесконечном промежутке времени [1, 2]. Анализ гамильтоновой динамики показал, что система может иметь стационарную точку и, соответственно, стационарный режим управления на уровне  $u^* = \frac{b}{\alpha\beta}$ .

ренциальное уравнение, описывающее изменение потребление ресурсов  $\dot{m}(t) = \left( \frac{b - \beta u(t)}{1 - \alpha} \right) m(t)$ ,  $m(0) = m_0$ . Решим полученное уравнение и подставим найденную функцию  $m(t, u_1)$  в условие ограниченности природных ресурсов  $M_0 = \int_0^{+\infty} m(t) dt$ . В итоге получим уравнение, которое позволяет аналитически выразить момент времени  $T = T(u_1)$ , когда происходит смена режимов управления.

$$T = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{b-\beta u_1} \ln \left( \frac{b/\alpha}{m_0/M_0} \frac{\hat{u}-u_1}{u^*-u_1} \right), & \beta u_1 \neq b \\ \frac{M_0}{m_0} - \frac{\alpha}{b}, & \beta u_1 = b \end{cases} ; \beta \hat{u} = b + (1-\alpha) \frac{m_0}{M_0}.$$

Для нахождения начального уровня управления  $u_1$  воспользуемся предположением о том, что в момент времени  $T = T(u_1)$  на стационарный уровень выходит не только управление, но и основные модельные переменные, в частности, объем выпуска  $y(t)$ , то есть выполнено равенство<sup>4</sup>  $y(T(u_1)) = ae^{bT(u_1)} m^\alpha(T(u_1)) = y^*$ . Решение  $u_1 = u_1^0$  уравнения находится численно и удовлетворяет неравенству  $u_1^0 < \hat{u}$ .

Графики объемов потребленных ресурсов  $M(t)$  и выпуска  $y(t)$ , построенные по управлению ступенчатого вида, изображены на рис. 1.

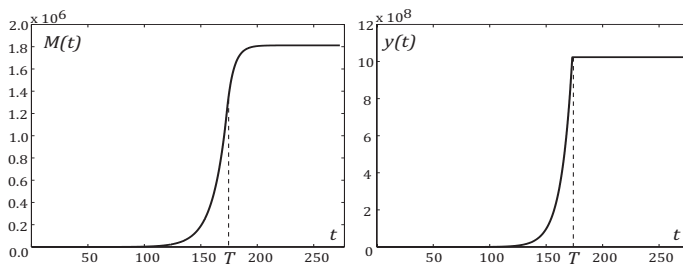


Рис. 1: Графики потребленных ресурсов  $M(t)$  и выпуска  $y(t)$ .

<sup>4</sup>Расчет стационарного уровня выпуска  $y^*$  рассмотрен в работе [2].

## Литература

- [1] Асеев С.М., Кряжисимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН, 2007. Т. 257. С. 5–271.
- [2] Tarasyev, A., Zhu, B. Optimal Proportions in Growth Trends of Resource Productivity // Proceedings of the 15th IFAC Workshop «Control Applications of Optimization» CAO'12, 2012.

## УКЛОНЕНИЕ ОТ МНОГИХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Щелчков К.А.<sup>1,2</sup>

### Нестационарная задача с простым движением

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $n + 1$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и убегающий  $E$ .

Закон движения каждого из преследователей  $P_i$  имеет вид

$$\dot{x}_i = b(t)u_i, \quad \|u_i\| \leq \alpha_i,$$

причем  $\alpha_i = 1$  для всех  $i = 1, \dots, m < n$  и  $\alpha_i < 1$  для всех  $i = m + 1, \dots, n$ .

Закон движения убегающего  $E$  имеет вид

$$\dot{y} = b(t)v, \quad \|v\| \leq 1.$$

При  $t = t_0$  заданы начальные положения преследователей  $x_1^0, \dots, x_n^0$  и начальное положение убегающего  $y^0$ , причем  $x_i^0 \neq y^0$ .

Здесь  $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k, i = 1, \dots, n, b : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$  – измеримая функция.

---

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-31176.

Дополнительно предполагается, что убегающий  $E$  в процессе игры не покидает выпуклого множества  $D$  ( $D \subset \mathbb{R}^k$ ) с непустой внутренностью.

Убегающий использует кусочно-программные стратегии. Обозначим данную игру через  $\Gamma(n)$ , внутренность множества  $D$  – через  $\text{Int } D$ .

**Теорема 1.** Пусть  $y^0 \in \text{Int } D$ ,  $b$  – функция, ограниченная на любом компакте и  $m < k$ . Тогда в игре  $\Gamma(n)$  происходит уклонение от встречи, т.е.  $y(t) \neq x_i(t)$  для всех  $t \geq t_0$ .

Случай  $b(t) = 1, m = n$  был рассмотрен в [1];  $b(t) = 1, m = 0$  – в [2]. Случай  $b(t) = 1$  с произвольными  $m, n$  рассматривался в [3], а случай  $m = n$  и с произвольной функцией  $b(t)$  – в [4].

### Уклонение в конусе в линейной задаче с простой матрицей

Закон движения каждого из преследователей  $P_i$  имеет вид

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + u_i, \quad \|u_i\| \leq \alpha_i,$$

причем  $\alpha_i = 1$  для всех  $i = 1, \dots, m < n$  и  $\alpha_i < 1$  для всех  $i = m + 1, \dots, n$ .

Закон движения убегающего  $E$  имеет вид

$$\dot{y} = a(t)y + v, \quad \|v\| \leq 1.$$

При  $t = t_0$  заданы начальные положения преследователей  $x_1^0, \dots, x_n^0$  и начальное положение убегающего  $y^0$ , причем  $x_i^0 \neq y^0$ .

Здесь  $a : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$  – измеримая функция.

Предполагается, что убегающий  $E$  в процессе игры не покидает пределы выпуклого конуса  $D = \{y : y \in \mathbb{R}^k, (p_j, y) \leq 0, j = 1, \dots, r\}$ , где  $p_1, \dots, p_r$  – единичные векторы  $\mathbb{R}^k$  такие, что  $\text{Int } D \neq \emptyset$ .

Убегающий использует кусочно-программные стратегии.

**Теорема 2.** Пусть  $y^0 \in \text{Int } D$ ,  $a$  – функция, ограниченная на любом компакте и  $m < k$ . Тогда в игре  $\Gamma(n)$  происходит уклонение от встречи.

**Литература**

- [1] *Иванов Р.П.* Простое преследование на компакте // ДАН СССР. 1978. Т. 254, № 6. С. 1318–1321.
- [2] *Черноусько Ф.Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей // ПММ. 1976. Т. 40, № 1. С. 14–23.
- [3] *Петров Н.Н., Щелчков К.А.* К задаче Черноусько // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2, С. 62–67.
- [4] *Петров Н.Н.* К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и её приложения. 2010. Т. 2, № 4. С. 74–83.

## ГОМОЛОГИИ ХОВАНОВА ДЛЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

Акимова А.А.<sup>1,2</sup>

В 2008 году М. Хованов сопоставил каждой диаграмме узла в сфере специальный градуированный цепной комплекс [1]. Построение этого комплекса аналогично построению полинома Кауфмана. Нужно рассмотреть все возможные состояния диаграммы (т.е. расстановки маркеров  $A, B$  и соответствующие разрешения перекрестков) и правильным образом организовать информацию, извлекаемую из получающихся картинок (наборов непересекающихся окружностей) на сфере. Поэтому не удивительно, что эйлерова характеристика, вычисленная по гомологиям этого цепного комплекса, совпадает с полиномом Кауфмана.

Мы рассматриваем естественное обобщение этой конструкции на случай узлов в утолщенном торе  $T \times I$ . Для табулирования и различения таких узлов оказался чрезвычайно полезным так называемый обобщенный полином Кауфмана, построенный в [2]. Он отличается от классического наличием ещё одной переменной, появляющейся за счет того, что на торе есть два типа окружностей – тривиальные и нетривиальные.

Оказывается, что с небольшими изменениями конструкция Хованова проходит и для узлов в утолщенном торе. Как и следовало ожидать, эйлерова характеристика получающегося комплекса совпадает с обобщенным полиномом Кауфмана.

### Литература

- [1] *Khovanov M.* A categorification of the Jones polynomial // *Duke Mathematical Journal*. 2000. Vol. 101. Pp. 359–426. arXiv:math.QA/9908171.

---

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00748 и грантом НШ 1414.2012.1 ведущих научных школ.

- [2] Акимова А.А., Матвеев С.В. Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 3.

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ШУБЕРТА

Кулакова А.М.<sup>1,2</sup>

**Определение 1.** Пусть  $K$  – узел в  $S^3$  и  $S$  – двумерная сфера в  $S^3$ , которая трансверсально пересекает узел  $K$  в двух точках. Тогда сферическая редукция узла  $K$  по сфере  $S$  состоит в разрезании узла  $K$  вдоль сферы  $S$  и заклеивании шарами с тривиальными дугами в них двух копий этой сферы на крае получившегося многообразия. В результате такой операции получаются два узла  $K_1$  и  $K_2$ , каждый из которых лежит в своей трехмерной сфере.

Редукция (и обратная ей операция связного суммирования) называются тривиальными, если  $S$  ограничивает в  $(S^3, K)$  шар с тривиальной дугой или, эквивалентно, один из узлов  $K_1, K_2$  является тривиальным.

**Теорема.** [3] *Любой нетривиальный узел представим в виде конечной связанной суммы примарных узлов. При этом получившийся набор примарных слагаемых определен однозначно с точностью до перестановки узлов.*

*Доказательство.* Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части доказывается существование примарного разложение, а во второй – его единственность с точностью до перестановки узлов. Доказательство первой части теоремы основано на понятии рода узла и здесь не приводится.

Докажем единственность примарного разложения. Назовем узел регулярным, если он имеет единственное разложение на примарные слагаемые, и сингулярным, если таких разложений несколько.

<sup>1</sup>Челябинский государственный университет

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00605, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ и Программы ОМН РАН (проект 12-Т-1-1003/2).

Объединение примарных слагаемых регулярного узла  $K$ , с учетом кратностей, будем обозначать  $U(K)$ . Объединение примарных слагаемых нескольких узлов  $K_1, K_2, \dots, K_n$  будем обозначать аналогичным образом:  $U(K_1, K_2, \dots, K_n)$ .

**Предложение.** *Если существует хотя бы один сингулярный узел, то существует сингулярный узел, при любом разложении которого в связную сумму двух узлов оба слагаемых регулярны.*

Доказательство этого предложения здесь не приводится.

Рассуждая от противного, предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда, по Предложению, найдется сингулярный узел  $G$ , все слагаемые которого регулярны. С другой стороны, так как  $G$  сингулярен, то к нему можно применить две нетривиальные сферические редукции по некоторым сферам  $S_1, S_2$  так, что выполнено следующее условие:  $U(K_1, K_2) \neq U(K_3, K_4)$ , где узлы  $K_1, K_2$  получаются из узла  $G$  редукцией по сфере  $S_1$ , а узлы  $K_3, K_4$  – редукцией по сфере  $S_2$ .

Можно считать, что сферы  $S_1, S_2$  находятся в общем положении. Сопоставим им целое неотрицательное число  $\#(S_1 \cap S_2)$ , равное общему числу окружностей в их пересечении. Из всех пар сфер, удовлетворяющих приведенному выше условию, выберем пару сфер (по-прежнему обозначаемую  $S_1, S_2$ ), для которых число  $\#(S_1 \cap S_2)$  принимает минимально возможное значение. Возможны два случая:  $\#(S_1 \cap S_2) = 0$  и  $\#(S_1 \cap S_2) > 0$ .

Рассмотрим первый случай, когда сферы не имеют общих точек. Тогда каждая из них выживает при редукции по другой. Это означает, что одна из сфер  $S^3$ , содержащих соответственно узлы  $K_1, K_2$ , получающиеся при редукции по сфере  $S_1$ , содержит копию сферы  $S_2$ . Выполняя редукцию этого слагаемого по этой копии, получим три таких регулярных узла  $K', K'', K'''$ , что  $U(K_1, K_2) = U(K', K'', K''')$ . Так как результат выполнения редукций по непересекающимся сферам не зависит от порядка их выполнения, то аналогичным образом можно получить равенство  $U(K', K'', K''') = U(K_3, K_4)$ . Это противоречит сформулированному выше условию  $U(K_1, K_2) \neq U(K_3, K_4)$ .

Рассмотрим случай, когда сферы  $S_1, S_2$  пересекаются. Чтобы опять получить противоречие, воспользуемся приемом, который называется «перестройка по самой внутренней окружности» [1]. Выберем среди окружностей в  $S_1 \cap S_2$  окружность  $c$ , которая по отноше-



нию к сфере  $S_1$  является самой внутренней. Это означает, что она ограничивает в  $S_1$  такой диск  $D$ , что  $D \cap S_2 = c$ . После небольшого шевеления получатся две новые сферы  $S'_2, S''_2$ , которые не пересекают сферы  $S_2$ , причем каждая пересекает сферу  $S_1$  по меньшему числу окружностей (поскольку окружность  $c$  исчезла). Возможны два случая:  $G \cap D = \emptyset$  и  $G \cap D \neq \emptyset$ .

Рассмотрим первый случай, когда  $G \cap D = \emptyset$ . Так как любой узел пересекает сферу в четном числе точек, то одна из них (пусть  $S''_2$ ) пересекает узел  $G$  в двух точках, а вторая (сфера  $S'_2$ ) не пересекает узла.

Сфера  $S'_2$  делит  $S^3$  на два шара, один из которых не имеет с узлом общих точек. Поэтому существует изотопия сферы  $S^3$ , которая неподвижна на узле и переводит  $S_2$  в  $S'_2$ . Редукции по этим сферам дают один и тот же результат, причем  $\#(S_1 \cap S'_2) < \#(S_1 \cap S_2)$ . Это противоречит минимальности числа  $\#(S_1 \cap S_2)$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $G \cap D \neq \emptyset$ . Тогда существует диск, который пересекает узел  $G$  в одной точке. Действительно, если бы нашелся диск, пересекающий узел  $G$  в двух точках, то нашелся бы и диск, не пересекающий узла, но мы рассматриваем ситуацию, когда нет дисков, не пересекающих узла. Аналогично первому случаю, после разрезания сферы  $S_2$  по окружности  $c$  получим две сферы  $S'_2, S''_2$ , каждая из которых делит сферу  $S^3$  на два шара с дугой узла в каждом из них. Из-за нетривиальности узла  $G$  хотя бы в одном из этих шаров (пусть в шаре, ограниченном сферой  $S''_2$ ) такая дуга нетривиальна. Выполнив редукцию по сфере  $S''_2$ , получим два новых узла  $K_5, K_6$ . Так как множества  $U(K_1, K_2)$  и  $U(K_3, K_4)$  различны, то хотя бы одно из них отлично от множества  $U(K_5, K_6)$ . Это противоречит минимальности числа  $\#(S_1 \cap S_2)$ , поскольку числа  $\#(S_1 \cap S'_2)$  и  $\#(S_1 \cap S''_2)$  строго меньше числа  $\#(S_1 \cap S_2)$ .

□

## Литература

- [1] Матвеев С.В. Корни геометрических объектов // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, № 3(405). С. 63–114.
- [2] Кроуэл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. – М.: Мир, 1967.

- [3] Schubert, H. Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten – S.B Heidelberg : Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 1949. Pp. 57–104.

## О ЧИСЛАХ ЙОРГЕНСЕНА И ГЕРИНГА–МАРТИНА–ТАНА ГРУПП УЗЛОВ И ТРЕХМЕРНЫХ ОРБИФОЛДОВ

Маслей А.В.<sup>1,2</sup>

Пусть  $\mathbb{H}^3$  – трехмерное гиперболическое пространство, представленное моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве, и  $\overline{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$ . Хорошо известно, что группа всех сохраняющих ориентацию изометрий  $\mathbb{H}^3$  изоморфна  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Группа  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  является *дискретной* тогда и только тогда, когда она действует разрывно в  $\mathbb{H}^3$ .

Группа  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  называется *элементарной*, если существует конечная  $G$ -орбита в  $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ , и *неэлементарной* – в противном случае. Известна полная классификация элементарных дискретных групп. Неэлементарная группа  $G$  дискретна тогда и только тогда, когда для любых  $f, g \in G$  группа  $\langle f, g \rangle$  дискретна [1, §5.4].

**Теорема 1.** [1] Пусть элементы  $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  порождают неэлементарную дискретную группу. Тогда  $|\mathrm{tr}^2(f) - 4| + |\mathrm{tr}[f, g] - 2| \geq 1$ . Указанная нижняя граница является наилучшей.

Для  $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  обозначим  $\mathcal{J}(f, g) = |\mathrm{tr}^2(f) - 4| + |\mathrm{tr}[f, g] - 2|$ .

Пусть  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  – двупорожденная неэлементарная группа. Величина  $\mathcal{J}(G) = \inf_{\langle f, g \rangle = G} \mathcal{J}(f, g)$ , где инфимум берется по всем упорядоченным парам  $(f, g)$  порождающих группы  $G$ , называется *числом Йоргенсена группы*  $G$ . В силу теоремы 1, если  $G$  – дискретная группа, то  $\mathcal{J}(G) \geq 1$ .

Двупорожденная неэлементарная дискретная группа  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  называется *группой Йоргенсена*, если существуют порождающие  $f$  и  $g$  этой группы такие, что  $\mathcal{J}(f, g) = 1$ . Очевидно,  $\mathcal{J}(G) = 1$ .

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ–13–01–00513 и НШ–1015.2014.1.

Пусть  $4_1$  – узел восьмерка в трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$ . Фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1)$  дополнения к нему называется *группой узла восьмерка*. Она имеет точное представление в  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  [2], образ которого в дальнейшем мы не будем различать с самой группой.

**Теорема 2.** [3] *Группа  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1)$  является группой Йоргенсена.*

**Теорема 3.** [4] *Дополнение к узлу восьмерка является единственным ориентируемым трехмерным гиперболическим многообразием, фундаментальная группа которого является группой Йоргенсена.*

Пусть  $\mathcal{O}_n$  – орбиформ с носителем  $\mathbb{S}^3$ , сингулярным множеством которого является узел восьмерка с сингулярностью порядка  $n$ . Группа орбиформы  $\mathcal{O}_n$  определяется следующим образом:

$$G_n = \langle f_n, g_n \mid f_n^n = g_n^n = f_n \cdot [g_n, f_n] \cdot g_n \cdot [g_n, f_n]^{-1} = 1 \rangle.$$

При  $n \geq 4$  группа  $G_n$  имеет точное представление в  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , образ которого в дальнейшем мы не будем различать с самой группой.

**Теорема 4.** [5] *Пусть  $G_n$  – группа орбиформы  $\mathcal{O}_n$  и  $n \geq 4$ . Тогда имеет место двойное неравенство:*

$$1 \leq \mathcal{J}(G_n) \leq 4 \sin^2(\pi/n) + \sqrt{1 + 4 \sin^2(\pi/n)}.$$

**Следствие 1.** *Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $\mathcal{J}(G_n) \rightarrow \mathcal{J}(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1))$ .*

Известен аналог теоремы 1. А именно, имеет место

**Теорема 5.** [6] *Пусть элементы  $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  порождают дискретную группу. Если  $\mathrm{tr}[f, g] \neq 1$ , то  $|\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}[f, g] - 1| \geq 1$ ; если  $\mathrm{tr}[f, g] = 1$  и  $\mathrm{tr}^2(f) \neq 2$ , то  $|\mathrm{tr}^2(f) - 2| > 1/2$ .*

В случае  $\mathrm{tr}[f, g] \neq 1$  теорема 5 также была установлена в [7].

Для  $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  таких, что  $\mathrm{tr}[f, g] \neq 1$ , обозначим

$$\mathcal{G}(f, g) = |\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\mathrm{tr}[f, g] - 1|.$$

Если пара  $(f, g)$  такова, что  $\mathrm{tr}[f, g] = 1$ , то для нее величина  $\mathcal{G}(f, g)$  не определяется.

Пусть  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  – двупорожденная группа. Величину

$$\mathcal{G}(G) = \inf_{\langle f, g \rangle = G} \mathcal{G}(f, g)$$

будем называть *числом Геринга–Мартина–Тана группы  $G$* . В силу теоремы 5, если  $G$  – дискретная группа, то  $\mathcal{G}(G) \geq 1$ .

Двупорожденная дискретная группа  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  называется *группой Геринга–Мартина–Тана*, если существуют порождающие  $f$  и  $g$  этой группы такие, что  $\mathcal{G}(f, g) = 1$ . Очевидно,  $\mathcal{G}(G) = 1$ .

**Теорема 6.** [5] Пусть  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1)$  – группа узла восьмерка. Тогда  $\mathcal{G}(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1)) = 3$ .

**Следствие 2.** Группа  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1)$  не является группой Геринга–Мартина–Тана.

**Теорема 7.** [5] Пусть  $G_n$  – группа орбифолда  $\mathcal{O}_n$  и  $n \geq 4$ . Тогда имеет место двойное неравенство

$$1 \leq \mathcal{G}(G_n) \leq 3 - 4 \sin^2(\pi/n).$$

**Следствие 3.** Группа  $G_4$  орбифолда  $\mathcal{O}_4$  является группой Геринга–Мартина–Тана.

**Следствие 4.** При  $n \geq 4$  выполнено неравенство

$$\mathcal{G}(G_n) \leq \mathcal{G}(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus 4_1)).$$

## Литература

- [1] Бердон А. Геометрия дискретных групп. – М.: Наука, 1986.
- [2] Riley R. A quadratic parabolic group. // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. Vol. 77. Pp. 281–288.
- [3] Li C., Oichi M., Sato H. Jørgensen groups of parabolic type I (finite case) // Comput. Methods Funct. Theory. 2005. Vol. 5, № 2. Pp. 409–430.
- [4] Callahan J. Jørgensen number and arithmeticity // Conform. Geom. Dyn. 2009. Vol. 13. Pp. 160–186.

- [5] *Веснин А.Ю., Маслей А.В.* Двупорожденные подгруппы  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , экстремальные для неравенства Йоргенсена и его аналогов // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике (принято в печать).
- [6] *Tan D.* On two-generator discrete groups of Möbius transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 106, № 3. Pp. 763–770.
- [7] *Gehring F.W., Martin G.J.* Iteration theory and inequalities for kleinian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 21, № 1. Pp. 57–63.

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ СПАЙНЫ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ОРБИЭДРЫ

Овчинников М.А.<sup>1,2</sup>

Пусть  $P$  – двумерный полиэдр, т.е. компактное топологическое пространство, в котором каждая точка имеет замкнутую окрестность вида конус над графом, и  $G$  – конечная группа симметрий, действующая на полиэдре  $P$ . *Орбиэдром* будем называть факторпространство  $P/G$ , снабженное информацией о действии группы  $G$  на  $P$ . Название указывает на аналогию с понятием орбиобразия – «многообразие орбит» [1]. В нашем случае это «полиэдр орбит».

Понятие орбиэдра позволяет описать некоторые специальные спайны 3-многообразий кратко, а иногда и более наглядно, чем традиционные графические способы посредством диаграмм спайнов. Напомним несколько определений [2].

Двумерный полиэдр  $P$  называется *спайном* компактного трехмерного многообразия  $M$  с непустым краем, если в  $M$  имеется полиэдр  $P'$ , гомеоморфный полиэдру  $P$ , и многообразие  $M$  является замкнутой регулярной окрестностью полиэдра  $P'$ .

Двумерный полиэдр  $P$  называется *специальным полиэдром*, если 1) линк каждой его сингулярной точки является тэта-кривой или

---

<sup>1</sup>Челябинский государственный университет

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-00441 и НШ-1015.2014.1.

графом  $K_4$ , т.е. полным графом с 4 вершинами, 2) полиэдр  $P$  имеет хотя бы одну сингулярную точку второго типа, 3) дополнение к сингулярному множеству в  $P$  является набором открытых дисков. Например, тор, к которому приклеены два диска вдоль меридиана и параллели, является специальным спайном утолщенной сферы  $S^2 \times I^1$ . Если в этом полиэдре отождествить два диска, выбранные в торе подходящим образом, то получится специальный спайн многообразия  $S^2 \times S^1$  с удаленным шаром.

**Теорема 1.** Пусть  $P_1$  – 2-остов 4-симплекса.

Тогда пространство двулистного накрытия полиэдра  $P_1$ , разветвленного вдоль центров 2-компонент полиэдра  $P_1$ , является специальным спайном трехмерного многообразия  $M$ , которое является дополнительным пространством некоторой замкнутой цепочки 5 последовательно зацепленных окружностей в трехмерной сфере.

Обозначим через  $P_2$  полиэдр, полученный из конуса над графом  $K_4$  приклеиванием четырех сфер по триодам – замкнутым окрестностям вершин в графе  $K_4$ . Приклеивание здесь означает отождествление триода в графе с произвольным триодом, лежащим в сфере. Краем полиэдра называется замыкание множества точек полиэдра, у которых линк является отрезком. У полиэдра  $P_2$  край состоит из 6 отрезков (ребер сингулярного графа).

**Теорема 2.** Пространство двулистного накрытия полиэдра  $P_2$ , разветвленного вдоль края полиэдра  $P_2$ , является специальным спайном многообразия  $M$  – того же, что в теореме 1.

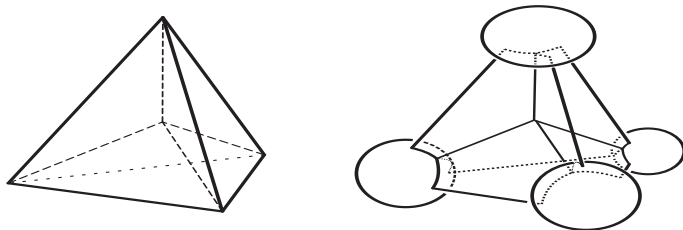


Рис. 1: Полиэдры  $P_1$  и  $P_2$

В докладе будет приведён ещё ряд аналогичных примеров и конструкций [3].

## Литература

- [1] *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. – М.: Мир, 1986.
- [2] *Матвеев С.В.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. – М.: МЦНМО, 2007.
- [3] *Овчинников М.А.* Специальный спайн линзы типа длинная восьмерка и линза как пространство двулистного накрытия 3-сферы разветвленного вдоль двуместного зацепления // Вестник ЧелГУ. Математика, механика. 1999. Т. 1. С. 145–154.

## ОБ ОБОБЩЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ОПЕРАТОРА КРИВИЗНЫ 4-МЕРНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Хромова О.П.<sup>1,2</sup>

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1, 2], и касается обобщенных деформаций римановых метрик на многообразиях, которые представляют собой композиции конформных деформаций и вариаций ранга один исходных метрик. Получены формулы, показывающие, как при данных деформациях изменяются компоненты оператора кривизны 4-мерного риманова многообразия.

Пусть  $(M, g)$  – компактное ориентированное риманово многообразие размерности  $n$ . Обозначим через  $\nabla$  связность Леви-Чивита, а через  $R$ ,  $r$  и  $s$ , соответственно, тензор кривизны Римана, тензор Риччи и скалярную кривизну.

<sup>1</sup> Алтайский государственный университет, Барнаул

<sup>2</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-90716-мол\_рф\_нр, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (№ НШ–921.2012.1) и грантом ФЦПК (Соглашение № 8206, заявка № 2012-1.1-12-000-1003-014).

Риманова метрика  $g$  индуцирует скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в слоях пространства расслоения  $\Lambda^p M$  по правилу  $\langle X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_p, Y_1 \wedge Y_2 \wedge \dots \wedge Y_p \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j))$ . Тогда для любого числа  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , определим оператор Ходжа  $*$  как единственный изоморфизм векторных расслоений  $*$  :  $\Lambda_x^p M \rightarrow \Lambda_x^{n-p} M$ , для которого  $\langle \alpha, \beta \rangle \text{vol} = \alpha \wedge (*\beta)$  для любых  $\alpha, \beta \in \Lambda_x^p M$ ,  $x \in M$ , где  $\text{vol}$  – форма объема на  $M$ .

Риманову тензору кривизны  $R$  в любой точке многообразия  $M$  можно поставить в соответствие оператор  $\mathcal{R} : \Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2 M$ , определяемый равенством  $\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V)$ , где  $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$ .

При  $\dim M = 4$  и  $p = 2$  оператор Ходжа задает эндоморфизм на  $\Lambda_x^2 M$  такой, что  $*^2 = \text{Id}$ . И, следовательно, имеет место разложение  $\Lambda_x^2 M = \Lambda_x^+ \oplus \Lambda_x^-$ , где  $\Lambda_x^+$  и  $\Lambda_x^-$  обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям  $+1$  и  $-1$  оператора  $*$ .

Матрицу оператора кривизны  $\mathcal{R}$  относительно данного разложения можно представить в блочном виде [4]:

$$\mathcal{R} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{W^+ + \frac{s}{12}\text{Id}}{Z^t} & \frac{Z}{W^- + \frac{s}{12}\text{Id}} \end{array} \right), \quad (1)$$

где  $W^+$  и  $W^-$  – матрицы автодуальной и антиавтодуальной составляющих тензора Вейля  $W$ .

**Определение 1.** Четырехмерное риманово многообразие  $(M, g)$  называется *конформно полуплоским*, если автодуальная или антиавтодуальная составляющая его тензора Вейля тривиальна.

Пусть на многообразии  $M$  дополнительно определена риманова метрика  $\bar{g}$ . Тогда по аналогии с символами Кристоффеля первого рода (коэффициентами связности  $\nabla$ ) можно определить тензор деформации связности

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2} \bar{g}^{ks} (\bar{g}_{sj,i} + \bar{g}_{is,j} - \bar{g}_{ij,s}), \quad (2)$$

где  $\bar{g}^{ks}$  – матрица, обратная к  $\bar{g}_{ij}$ , а  $\bar{g}_{ij,s}$  – ковариантная производная  $\bar{g}_{ij}$  относительно связности  $\nabla$ . Нетрудно проверить, что  $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k +$



$+T_{ij}^k$ , где  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  – символы Кристоффеля первого рода для метрики  $\bar{g}$ . Для тензора кривизны

$$\bar{R}_{lki}^q = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{li}^q}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{kp}^q \bar{\Gamma}_{li}^p - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ki}^q}{\partial x^l} - \bar{\Gamma}_{lp}^q \bar{\Gamma}_{ki}^p \quad (3)$$

метрики  $\bar{g}$  получим формулу (см. подробнее [3]):

$$\bar{R}_{lki}^q = R_{lki}^q + Q_{lki}^q, \quad (4)$$

где  $R_{lki}^q$  – тензор кривизны связности  $\nabla$ ,

$$Q_{lki}^q = T_{li,k}^q + T_{kp}^q T_{li}^p - T_{ki,l}^q - T_{lp}^q T_{ki}^p.$$

**Определение 2.** Будем говорить, что метрика  $\bar{g}$  получена обобщенной деформацией исходной метрики  $g$ , если  $\bar{g}_{ij} = \mu g_{ij} + \lambda \theta_i \theta_j$ , где  $\theta \in C^\infty(M)$  и  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Применение формул (2) – (4) при обобщенной деформации метрики позволяет доказать следующее утверждение.

**Теорема.** При обобщенной деформации метрики  $g$  имеют место следующие формулы для тензоров кривизны Римана, Риччи и скалярной кривизны:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{lkis} &= \mu R_{lkis} + \frac{\lambda \mu (\theta_{li} \theta_{sk} - \theta_{ki} \theta_{sl})}{\mu + \lambda |\nabla \theta|^2}, \\ \bar{r}_{ki} &= r_{ki} + \frac{\lambda (\theta_i^s \theta_{sk} - \theta_{ki} \theta_s^s)}{\mu + \lambda |\nabla \theta|^2} - \frac{\lambda^2 \theta^l \theta^s (\theta_{li} \theta_{sk} - \theta_{ki} \theta_{sl})}{(\mu + \lambda |\nabla \theta|^2)^2} - \frac{\lambda \theta^l \theta^s R_{lkis}}{\mu + \lambda |\nabla \theta|^2}, \\ \bar{s} &= \frac{s}{\mu} - \frac{2\lambda^2 \theta^l \theta^s (\theta_l^k \theta_{sk} - \theta_k^k \theta_{sl})}{\mu(\mu + \lambda |\nabla \theta|^2)^2} - \frac{2\lambda \theta^k \theta^i r_{ki}}{\mu(\mu + \lambda |\nabla \theta|^2)} + \frac{\lambda (\theta_l^k \theta_k^l - \theta_k^k \theta_l^l)}{\mu(\mu + \lambda |\nabla \theta|^2)}, \end{aligned}$$

где  $\theta_{li}$  – ковариантные производные ковектора  $\theta_l$  относительно метрики  $g$  и  $|\nabla \theta|^2 = g^{ij} \theta_i \theta_j$ .

**Замечание.** Результаты работ [1, 2] и формулы данной теоремы в размерности 4 позволяют определить, как меняются компоненты матрицы оператора кривизны (1) и, в частности, автодуальной и антиавтодуальной составляющих тензора Вейля при обобщенных деформациях римановых метрик; а также изучить обобщенные деформации конформно полуплоских римановых метрик.

В качестве примера приведем одну из деформированных компонент оператора кривизны:

$$\overline{\mathcal{R}}_{11} = \mu \mathcal{R}_{11} + \frac{\lambda \mu [\theta_{11}\theta_{22} - (\theta_{12})^2 + 2(\theta_{13}\theta_{24} - \theta_{23}\theta_{14}) + \theta_{33}\theta_{44} - (\theta_{34})^2]}{2(\mu + \lambda |\nabla \theta|^2)}.$$

## Литература

- [1] *Гладунова О.П., Родионов Е. Д., Славский В.В.* О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // ДАН. 2013. Т. 450, № 2. С. 140–142.
- [2] *Гладунова О.П., Родионов Е. Д., Славский В.В.* О конформно полуплоских 4-мерных алгебрах Ли // ДАН. 2012. Т. 442, № 3. С. 303–305.
- [3] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967.
- [4] *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. – М.: Мир, 1990.

## ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЧЕТА СВЕРХДЛИННЫХ ЗАДАЧ НА КЛАСТЕРЕ «УРАН»

Берсенеv А.Ю.<sup>1,2</sup>

В силу технологических особенностей планирования заданий на кластере «Уран» на задачи накладывается ограничения по максимальной продолжительности выполнения. Существуют практические задачи, для которых ограничение по времени счета является препятствием. Как правило, это большие программы, в которые невозможно встроить сохранение состояний на уровне алгоритма, или программы, для которых в принципе недоступен исходный код.

Для решения описанной проблемы исследована возможность применения механизмов создания контрольных точек, т.е. периодического сохранения состояния задачи в файл. Это требует согласованной работы целого ряда компонентов:

1. Низкоуровневых модулей ядра для сохранения состояния одного процесса.
2. Библиотеки MPI для сохранения состояния распределённой задачи.
3. Системы прохождения задач для координации создания контрольных точек.

Каждый следующий компонент опирается на предыдущий. К сожалению, текущее состояние развития этих компонентов не позволяет легко и просто развернуть надёжную и быструю систему создания контрольных точек, поэтому цель этой работы – обеспечить создание контрольных точек для как можно большего числа задач.

Для этого принято решение, совместно с уже используемыми ОС Linux и системой планирования задач Slurm, использовать на кластере «Уран» модуль ядра BLCR для сохранения состояния процесса и реализацию MPI MVARICH2, собранную с поддержкой создания контрольных точек.

Протестировано быстродействие и стабильность создания контрольных точек для разных типов процессов. Для тестирования ис-

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН № 18 «Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1034).

пользовалась система хранения EMC Celerra NS-480, состоящая из 15 дисков SATA объемом по 1 ТБ и 6 дисков FC объемом 300 ГБ, смонтированная по протоколу NFS. Для передачи данных между узлами и системой хранения использовались 4 интерфейса Gigabit Ethernet. Для тестов было использовано от 1 до 4 узлов, на каждом узле запускалось от 1 до 4 задач.

Размер контрольной точки на системе хранения приблизительно равен объему физической памяти, занимаемой процессами, поэтому для тестирования использовались главным образом задачи, которые выделяли память заданного размера и затем раз в секунду проверяли её целостность для контроля правильности восстановления. Оценивалась в первую очередь время создания контрольной точки (рис.). Также для тестирования были написаны программы, использующие различные стандартные возможности ОС Linux.

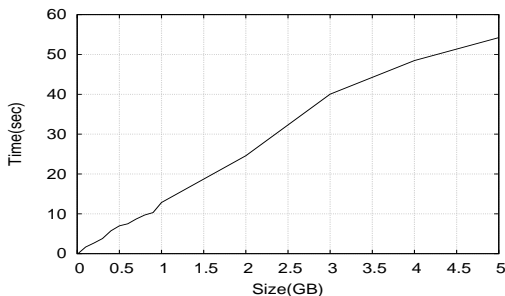


Рис. Зависимость времени создания контрольной точки от размера памяти процесса

#### Результаты:

1. Для одиночных вычислительных процессов создание контрольных точек выполняется стабильно, если в программе не используются сокеты, `ipc`-объекты, прямая работа с устройствами и ожидание дочерних процессов.

2. Для распределённых задач при использовании последней стабильной версии MVARICH2(1.9) и запуске MPI-задачи с использованием системы Slurm наблюдаются проблемы, приводящие к невозможности запуска задачи. В MVARICH2 версии 2.0b эти проблемы устранены.

3. В системе планирования задач Slurm создание контрольных точек процесса выполняется стабильно, если процесс не использует MPI и если создание контрольной точки занимает непродолжительное время. Выяснилось, что если создание контрольной точки занимает более одной минуты, то контрольная точка не создается, а выполняемая задача аварийно завершается. Если процесс использует MPI, то создание контрольной точки производится неоптимальным способом, что всегда приводит к невозможности восстановления задачи.

4. При создании контрольных точек основное время тратится на перенос областей памяти процесса на жесткий диск. Время остальные этапы записи состояния задачи пренебрежимо мало.

На настоящий момент конфигурация системы хранения кластера «Уран» в достаточной степени соответствует потребностям сохранения контрольных точек, позволяя сохранить память типичной задачи за разумное время. Однако, с развитием кластера и увеличением числа узлов, требующих сохранения КТ, может появиться необходимость в специализированной (возможно, распределённой) ФС с объемом кэша, сравнимым с суммарным размером всех сохраняемых контрольных точек.

## Литература

- [1] *Игумнов А.С., Берсенёв А.Ю.* Интеграция возможностей fault-tolerance OpenMPI в систему управления кластером ИММ УрО РАН // Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи: Труды Международной суперкомпьютерной конференции (20-25 сентября 2010 г., г. Новороссийск). М.: МГУ, 2010. С. 90–92.
- [2] *Созыкин А.В., Берсенева А.Ю., Степанов Р.А., Гольдштейн М.Л., Игумнов А.С.* Система хранения и записи данных суперкомпьютера «УРАН» / в сб. «Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее», Труды Международной суперкомпьютерной конференции. С. 367. М.: МГУ, 2011.

## РАЗРАБОТКА БИБЛИОТЕКИ ОБРАБОТКИ ВХОДНЫХ ДАННЫХ СЧЁТНЫХ ПРОГРАММ

Кумков С.С., Шмаков Е.Ю.<sup>1,2</sup>

Вычислительная программа должна быть снабжена входными данными вне зависимости от того, на каком языке и в какой среде она написана. Простейший формат входных данных – «plain text», когда входной файл представляет собой поток чисел, смысл которых определяется их положением в этом потоке. Например, если программа численно интегрирует на промежутке времени  $[0, T]$  систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений  $\dot{x} = Ax$  с начальным условием  $x(0) = y$ , то ей надо передать  $n^2 + n + 2$  числа: в начале вещественное число  $T$ , после целое  $n$  – размерность вектора  $x$ , затем  $n^2$  вещественных чисел, описывающих матрицу  $A$ , и, наконец,  $n$  вещественных чисел, задающих начальное значение  $y$ .

Такая простота входного формата определяет простоту его чтения: сначала обрабатывается вещественное число, потом целое, потом ещё  $n^2$  чисел, и затем ещё  $n$  чисел. Но поскольку никакой дополнительной информации не задано, все проверки правильности должны производиться при подготовке входных данных. И, если объём данных велик, велика вероятность ошибки пользователя, которую трудно обнаружить. Например, если в нашем примере в файле будет задано только  $n^2 + n + 1$  число, то весьма непросто понять, какое именно число пропущено.

Другая проблема заключается в том, что если мы желаем решать нестационарную задачу  $\dot{x} = A(t)x$ , то наш файл должен содержать как числа, так и формулы. И программист (который, чаще всего, не профессионал, а математик-прикладник) должен организовать чтение и разбор формул, а также счёт по ним.

Основная задача данной работы состоит в разработке библиотеки, которая берет на себя чтение входного файла, разбор описания данных, сохранение считанных объектов и обеспечивает удобный доступ к ним. Важным компонентом библиотеки (собственно, и составляющим основную сложность для разработки) является модуль ра-

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ №№ 12-01-00537 и 13-01-96055

боты с формульными выражениями: чтение, разбор, проверка корректности, пересчёт значений в соответствии с текущими значениями переменных, входящих в них.

Ранее авторами была спроектирована и разработана прототипная версия такой библиотеки [1, 2]. Разработка велась на языке C#. Этот язык был выбран в силу следующих соображений. Во-первых, он обеспечивает весьма гибкую и всестороннюю реализацию объектно-ориентированной парадигмы, что позволяет создавать «умные» объекты, которые работают почти так же, как и обыкновенные переменные, и скрывают внутренние процессы от пользователя. Во-вторых, C# обеспечивает переносимость программ, поскольку .NET платформа реализована как для Windows (собственная реализация компании Microsoft), так и для Linux (open-source разработка Mono, во многом реализующая системные возможности .Net 4.0).

В прототипной версии библиотеки язык разметки входного файла основывался на XML. Описание входных данных состоит из двух частей. Первая, файл структуры входных данных, содержит информацию о том, какие данные требуются программе. В нашем примере это описание содержит четыре переменные: вещественную  $T$ , целую  $n$ , вещественный массив  $A$  размера  $n \times n$  и вещественный вектор-столбец  $y$  размера  $n$ . (При этом параметры или значения одних переменных могут зависеть от других.) Вторая часть описания содержит значения переменных, объявленных в файле структуры. Эти данные задают конкретный набор параметров вычисляемого примера. (В нашем примере файл значений содержит конкретные числовые или формульные значения, определяющие задачу Коши.) Файл структуры уникален для конкретной программы, а файлов значений может быть много – для каждого просчитываемого примера.

Прототипная версия библиотеки использовалась при создании вычислительных программ решения дифференциальных игр. В докладе приводятся численные примеры, просчитанные с использованием этих программ. В процессе пробной эксплуатации библиотеки был накоплен опыт, который был учтён при разработке текущей версии.

Во-первых, был изменён синтаксис языка описания данных: авторы отказались от использования XML, который при своей простоте излишне громоздок для подготовки данных. В текущей версии библиотеки вид языка описания весьма сходен с языком Си. Во-вторых, была перепроектирована подсистема синтаксического анализа фор-

мульных выражений, что сделало её более гибкой и упростило внесение новых функций по работе с данными. В-третьих, было принято решение о поддержке строковых объектов (они необходимы для передачи данных об именах различных файлов, а также для записи в результирующие файлы идентификационной информации).

Авторы пошли по пути создания собственного языка описания, а не использования тех или иных языков разметки данных (XML, JSON), поскольку кроме информации о значении объекта требуется передавать вспомогательные параметры: тип объекта, размеры для матриц и т.д., для чего существующие языки общего назначения подходят не очень хорошо. Кроме того, разбор формульных выражений автоматизирован и совмещен с разбором входных файлов: описание допустимых формул уже встроено в грамматику языка (для генерации парсера авторы используют библиотеку ANTLR).

Авторам не известны аналоги создаваемой библиотеки. В некотором смысле задачу структурирования входных данных решает формат ini-файлов, однако нет библиотек, позволяющих использовать этот формат для передачи формул. Кроме того, популярная система MatLab предоставляет достаточно богатые возможности работы с входными данными. В частности, имеется возможность загрузить текстовый файл с программой на языке MatLab и исполнить её, тем самым определив нужные данные, в том числе и в формульном виде, с контролем их корректности. Однако система MatLab является проприетарной, и программы, использующие указанные возможности, могут исполняться только в самой системе.

## Литература

- [1] *Kumkov S.S., Sannikov D.Yu.* Automatization of Processing Input Data in Computational Programs / в сб. «Game Theory and Management: abstr. 4th Intern. Conf.». – С. 111–112. – СПб.: Высшая школа менеджмента СПбГУ, 2010.
- [2] *Бахтерев М.О., Косенко В.В., Кумков С.С., Голубев А.В., Санников Д.Ю.* Библиотека обработки входных данных вычислительных программ / в сб. «Супервычисления и мат. моделирование: тез. 12-го Междунар. семинара». – С. 17–18. – Саров: РОСАТОМ, 2010.



## ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛЕЙ ГАЛУА В РЕШЕНИИ ВОПРОСА О ПОСТРОЕНИИ МЕТОДА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОБНОВЛЕНИЯ СЕКРЕТА

Кучукова Н.Н., Кучуков В.А.<sup>1</sup>

Современное использование распределенных вычислительных систем остро поставило вопрос о защите данных в процессе их обработки, хранения и передачи. Криптографические методы и средства помогают эффективно решить эту проблему. Важной составляющей систем защиты информации является система управления ключами, которые составляют ядро методов периодического обновления секретной информации и лежат в основе систем активной безопасности. Под управлением ключами будем понимать набор методов и средств, поддерживающих распределение и обработку ключевого материала между автоматизированными сторонами.

Одной из самых сложных задач при использовании криптографических алгоритмов является генерация ключей. Решением данной проблемы является разработка генератора псевдослучайных чисел на точках эллиптической кривой над расширенными полями Галуа.

Для построения псевдослучайных чисел воспользуемся неприводимым многочленом третьей степени  $F(c, x) = x^3 - cx^2 + c^p x - 1$  над  $F_{p^2}$ . Корни  $h$  многочлена  $F(c, x)$  обладают следующими замечательными свойствами:

1.  $h^{p^2-p+1} = 1$ ;
2.  $h$  – образующий элемент подгруппы  $F_{p^6}^*$  порядка  $p^2 - p + 1$ .

Для построения генератора псевдослучайных чисел нужно уметь находить неприводимые многочлены  $F(c, x) = x^3 - cx^2 + c^p x - 1$ , причем вероятность того, что  $F(c, x)$  окажется неприводимым многочленом при случайном выборе  $c$  из  $F_{p^2}$ , равна  $1/3$ . В работах [1–3] приведены несколько алгоритмических тестов на неприводимость для  $F(c, x)$ . Самый быстрый алгоритм работает за  $1.8 \log_2 p$  умножений в  $F_p$  [3], но при использовании  $p$  размером в 170 бит для вычисления

---

<sup>1</sup>Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

потребуется 306 умножений с числами длиной в 170 бит, что приводит к большим временным затратам и затрудняет использование этого алгоритма. В работе [4] нами был предложен эффективный способ построения неприводимых многочленов  $F(c, x) = x^3 - cx^2 + c^p x - 1$  над  $F_{p^2}$ , основанный на нахождении  $G(x) = x^3 - atx^2 + bx + a -$  неприводимого многочлена в  $F_p[x]$ , где  $t$  – квадратичный невычет в  $F_{p^6}^*$ , и нижеследующей теореме.

**Теорема.** Пусть  $t$  – квадратичный невычет по модулю  $p$ , и  $G(x) = x^3 - atx^2 + bx + a -$  неприводимый многочлен в  $F_p[x]$ . Тогда  $F(c, x) = x^3 - cx^2 + c^p x - 1$ , где  $c = \frac{3-tb+4ata}{1+tb}$  и  $t = \alpha^2$ , неприводим в  $F_p[x]$ .

Алгоритм генерации псевдослучайных чисел основывается на построении точек эллиптической кривой с использованием неприводимого многочлена  $F(c, x) = x^3 - cx^2 + c^p x - 1$  над  $F_{p^2}$ . Так как корень  $h$  неприводимого многочлена третьей степени  $F(c, x) = x^3 - cx^2 + c^p x - 1$  над  $F_{p^2}$  обладает свойством  $h^{p^2-p+1} = 1$  и является порождающим элементом подгруппы в  $F_{p^6}^*$  порядка  $p^2 - p + 1$ , то его элементы можно представить в виде  $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i)$ , где  $h^i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i)$  и  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in F_p$ .

Выберем шесть точек на эллиптической кривой  $P_1, \dots, P_6 \in E(F_p)$ . Тогда последовательность будет генерироваться по формуле  $R_n = a_n P_1 + b_n P_2 + c_n P_3 + d_n P_4 + e_n P_5 + f_n P_6$ .

Выходными значениями генератора являются либо точки  $R_n$ , либо только их абсциссы  $x_n$ , либо только их ординаты  $y_n$ .

Для обеспечения криптографической безопасности эллиптическая кривая должна удовлетворять следующим требованиям международного стандарта ISO/IEC CD 15946-2:

1.  $q > 2^{256}$ ;
2.  $E(F_q) = hn$ , где – простое число,  $n > 4\sqrt{q}$ ;
3.  $h \neq \left[ \frac{(\sqrt{q}+1)^2}{n} \right]$ ;
4. Должно выполняться MOV условие с целью исключения криптографически слабых кривых  $q \not\equiv 1 \pmod{n}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, B$ ,  $20 \leq B$ .

Условие 4 позволяет добиться того, что нельзя эффективно применить метод дискретного логарифмирования из работы [5], а условие 2 обеспечивает неприменимость методом спуска Вейля [6] к взлому криптосистемы.

## Литература

- [1] *Lenstra A.K., Verheul E.R.* The XTR public key system / Proceedings of Crypto 2000, LNCS 1880. Pp. 1–19. Springer-Verlag, 2000.
- [2] *Lenstra A.K., Verheul E.R.* Key improvements to XTR / Proceedings of Asiacrypt 2000, LNCS 1976. Pp. 220–233. Springer-Verlag, 2000.
- [3] *Lenstra A.K., Verheul E.R.* Fast irreducibility and subgroup membership testing in XTR / Proceedings of PKC 2001, LNCS 1992. Pp. 73–86. Springer-Verlag, 2001.
- [4] *Бабенко М.Г., Бабенко Н.А.* О выборе неприводимых многочленов для криптосистемы XTR / в сб. «Проблемы математики и радиофизики в области информационной безопасности», Труды I Всероссийской конференции. С. 174–177. Ставрополь: Фабула, 2012.
- [5] *Menezes A., Okamoto T., Vanstone S.* Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field / IEEE Transactions on Information Theory 39. 1993. Pp. 1639–1660.
- [6] *Gordon M.D.* A Survey of Fast Exponentiation Methods // Journal of Algorithms. 1998. Vol. 27. Pp. 129–146.

## О СОВЕРШЕННЫХ ШИФРАХ

Рацеев С.М.<sup>1</sup>

К. Шеннон в 40-х годах 20-го века ввел понятие совершенного шифра, обеспечивающего наилучшую защиту открытых текстов. Такой шифр не дает криптоаналитику никакой дополнительной информации об открытом тексте на основе перехваченной криптограммы. При этом хорошо известный шифр гаммирования с равновероятной гаммой является совершенным, но максимально уязвимым к попыткам имитации и подмены. В данной работе рассматриваются совершенные шифры, стойкие к имитации и подмене сообщений.

Все необходимые определения можно найти в работе [1]. Пусть  $U$  – конечное множество возможных «шифрвеличин», а  $V$  – конечное множество возможных «шифробозначений». Пусть также имеются  $r$  ( $r > 1$ ) инъективных отображений из  $U$  в  $V$ :  $E_1, E_2, \dots, E_r$ . Данные отображения называются простыми заменами. Обозначим  $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \dots, r\}$ . Опорным шифром замены назовем совокупность  $\Sigma = (U, \mathbb{N}_r, V, E, D)$ , для которой выполнены следующие условия:

1. для любых  $u \in U$  и  $j \in \mathbb{N}_r$  выполнено равенство  $D_j(E_j(u)) = u$ ;
2.  $V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_r} E_j(U)$ .

При этом  $E = \{E_1, \dots, E_r\}$ ,  $D = \{D_1, \dots, D_r\}$ ,  $D_j : E_j(U) \rightarrow U$ ,  $j \in \mathbb{N}_r$ .  $l$ -й степенью опорного шифра  $\Sigma$  назовем совокупность

$$\Sigma^l = (U^l, \mathbb{N}_r^l, V^l, E^{(l)}, D^{(l)}),$$

где  $U^l, \mathbb{N}_r^l, V^l$  – декартовы степени соответствующих множеств  $U, \mathbb{N}_r, V$ . Множество  $E^{(l)}$  состоит из отображений  $E_{\bar{j}} : U^l \rightarrow V^l$ ,  $\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l$ , таких, что для любых  $\bar{u} = u_1 \dots u_l \in U^l$ ,  $\bar{j} = j_1 \dots j_l \in \mathbb{N}_r^l$  выполнено равенство

$$E_{\bar{j}}(\bar{u}) = E_{j_1}(u_1) \dots E_{j_l}(u_l) = v_1 \dots v_l \in V^l,$$

а множество  $D^{(l)}$  состоит из отображений  $D_{\bar{j}} : E_{\bar{j}}(U^l) \rightarrow U^l$ ,  $\bar{j} \in \mathbb{N}_r^l$ , таких, что для любых  $\bar{v} = v_1 \dots v_l \in V^l$ ,  $\bar{j} = j_1 \dots j_l \in \mathbb{N}_r^l$  выполнено равенство

$$D_{\bar{j}}(\bar{v}) = D_{j_1}(v_1) \dots D_{j_l}(v_l) = u_1 \dots u_l \in U^l.$$

---

<sup>1</sup>Ульяновский государственный университет

Пусть  $\psi_c$  – случайный генератор ключевого потока, который для любого натурального числа  $l$  вырабатывает случайный ключевой поток  $j_1 \dots j_l$ , где все  $j_i \in \mathbb{N}_r$ .

Обозначим через  $\Sigma_H^l$  следующую совокупность величин:

$$\Sigma_H^l = (U^l, \mathbb{N}_r^l, V^l, E^{(l)}, D^{(l)}, P(U^l), P(\mathbb{N}_r^l)),$$

где  $P(U^l)$ ,  $P(\mathbb{N}_r^l)$  – независимые априорные распределения вероятностей соответственно на конечных множествах  $U^l$  и  $\mathbb{N}_r^l$ , не содержащие нулевых вероятностей. Шифром замены с неограниченным ключом назовем семейство

$$\Sigma_H = (\Sigma_H^l, l \in \mathbb{N}; \psi_c).$$

Заметим, что математическая модель шифра замены с неограниченным ключом имеет ряд полезных свойств, например, она позволяет строить модели совершенных шифров и оптимальных кодов аутентификации, стойких к имитации и подмене [2, 3].

Говорят, что шифр  $\Sigma_H$  является совершенным тогда и только тогда, когда для любого натурального  $l$  шифр  $\Sigma_H^l$  является совершенным по Шеннону.

Для шифра  $\Sigma_H$  обозначим через  $P_{im}^l$  вероятность имитации сообщения для шифра  $\Sigma_H^l$ , а через  $P_{podm}^l(s)$  – вероятность подмены в сообщении длины  $l$  ровно  $s$  символов для шифра  $\Sigma_H^l$ , где  $s \leq l$ .

Будем говорить, что матрица  $A = A(m, n)$ ,  $m \geq n$ , над некоторым  $m$ -элементным множеством  $S$  является латинским прямоугольником, если каждый столбец матрицы  $A$  является перестановкой элементов множества  $S$ , причем в строках каждый элемент встречается не более одного раза.

**Теорема 1.** Пусть  $A = A(n+1, n)$  – некоторая матрица над множеством «шифробозначений»  $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ , которая является латинским прямоугольником, и пусть матрица  $A$  является матрицей зашифрования для опорного шифра замены с неограниченным ключом  $\Sigma_H$ . Пусть также случайный генератор ключевых последовательностей  $\psi_c$  из конструкции шифра  $\Sigma_H$  имеет равномерное распределение. Тогда для любого натурального  $l$  шифр  $\Sigma_H^l$  является совершенным по Шеннону и выполнены следующие равенства:

$$P_{im}^l = \left( \frac{n}{n+1} \right)^l, \quad P_{podm}^l(s) = \left( \frac{n-1}{n} \right)^s.$$

Пусть  $S_n$  – симметрическая группа степени  $n$ ,  $T^j \in S_n$  – циклическая перестановка на  $j$  позиций влево. Обозначим через  $A_j = A_j(n, 2)$  матрицу размера  $n \times 2$  над множеством  $\mathbb{N}_n$ , имеющую такой вид:

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ T^j(1) & T^j(2) & \dots & T^j(n) \end{pmatrix}^T, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Из матриц  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , составим матрицу  $M = M(n^2 - n, 2)$  размера  $(n^2 - n) \times 2$  путем последовательной графической записи матриц  $A_1, \dots, A_{n-1}$  одной под другой.

**Теорема 2.** Пусть  $M = M(n^2 - n, 2)$  – матрица над множеством  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , построенная выше,  $r = n^2 - n$ ,  $|U| = 2$  и пусть матрица  $M$  является матрицей зашифрования для опорного шифра замены с неограниченным ключом  $\Sigma_H$ . Пусть также случайный генератор ключевых последовательностей  $\psi_c$  из конструкции шифра  $\Sigma_H$  имеет равномерное распределение. Тогда для любого натурального  $l$  шифр  $\Sigma_H^l$  является совершенным по Шеннону и выполнены следующие равенства:

$$P_{im}^l = \left(\frac{2}{n}\right)^l, \quad P_{podm}^l(s) = \left(\frac{1}{n-1}\right)^s.$$

Заметим, что в теоремах 1 и 2  $P_{im}^l \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ ,  $P_{podm}^l(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ .

## Литература

- [1] Зубов А.Ю. Криптографические методы защиты информации. Совершенные шифры. – М.: Гелиос АРВ, 2005.
- [2] Рацеев С.М. О совершенных имитостойких шифрах // Прикладная дискретная математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 41–47.
- [3] Рацеев С.М. Об оптимальных кодах аутентификации // Системы и средства информатики. 2013. Т. 23, № 1. С. 53–57.

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНОГО ЯЗЫКА,  
ИСПОЛЗУЮЩЕГО ДВУХСТРОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ  
И РЕЛЯЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ  
МЕЖДУ АТРИБУТАМИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ  
СХЕМ БАЗ ДАННЫХ**

Убалехт И.П.<sup>1</sup>

Наиболее распространенным на практике подходом к проектированию схем реляционных баз данных (БД) является подход, ведущий проектирование от семантики предметной области (ПрО), от инфологической модели. Такие часто используемые на практике модели, относящиеся к данному подходу, как ER модель, UML (без языка OCL), являются недостаточно формализованными. Применение этих моделей не гарантирует получение схемы БД в третьей нормальной форме (ЗНФ) на даталогическом уровне. Альтернативный подход к проектированию схем БД – это метод синтеза, который является математически строгим и гарантирует получение схемы БД как минимум в ЗНФ. Однако, данный подход трудно применим на практике, так как вынуждает работать с большими неупорядоченными массивами атрибутов и функциональных зависимостей (ФЗ), а также не формализует процесс получения ФЗ.

Автор данной работы предлагает декомпозиционно-синтетический подход проектирования схем БД, совмещающий элементы методов, ведущих проектирование от инфологической модели, и элементы математически строгого метода синтеза. В данной работе описывается не весь метод, а лишь его часть, относящаяся к формализации процесса определения зависимостей между атрибутами. В работе рассматриваются только ФЗ, хотя модель, предлагаемая автором, учитывает и другие виды зависимостей.

Для определения ФЗ необходима удобная модель, в том числе и на пользовательском, визуальном уровне. При этом эта модель должна математически строго определять ФЗ.

Для решения этих задач предлагается:

---

<sup>1</sup> Омский государственный технический университет

- использовать графический интерактивный язык, близкий по возможностям к языкам класса Query-By-Example (QBE);
- принцип сведения всех кортежей отношения до строго двух кортежей для перехода к логическим формулам;
- интерпретация ФЗ как логических формул в реляционном исчислении для формализации логики отношений между заданными атрибутами.

Применение этих пунктов позволяет решить описанную выше проблему формализации получения начального множества ФЗ. Приведём теорему, обосновывающую корректность перехода от логических формул и двухстрочных отношений, на которых основан интерактивный язык, к произвольным конечным отношениям на даталогическом уровне.

Вначале, опираясь на [1], определим понятие двухстрочного логического отношения.

**Определение.** Пусть  $r$  – отношение со схемой  $R$ ,  $A$  – атрибут в  $R$ . Отношение  $r$  будем называть двухстрочным логическим отношением, если оно содержит в точности два кортежа  $t_1$  и  $t_2$  и если с отношением  $r$  ассоциировано  $\Psi_r$  – присваивание истинностных значений атрибутам из  $r$ .  $\Psi_r$  является функцией из  $R$  в {истина, ложь} такой, что

$$\Psi_r(A) = \begin{cases} \text{истина, если } t_1(A) = t_2(A), \\ \text{ложь, если } t_1(A) \neq t_2(A). \end{cases}$$

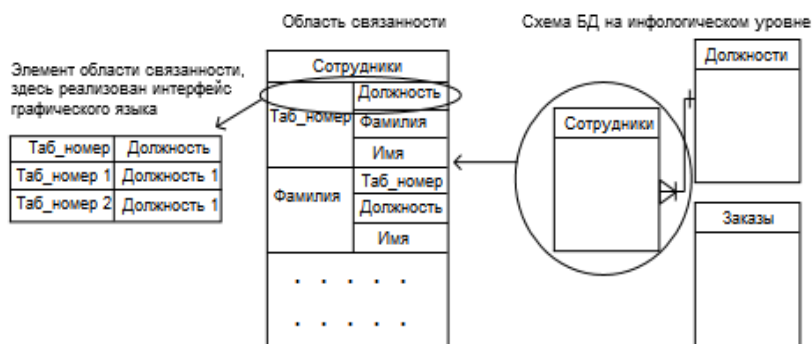
В соответствии с [1], приведём теорему об эквивалентности ФЗ в отношениях с произвольным (конечным) множеством кортежей, ФЗ в двухстрочных логических отношениях и импликации. Доказательство см. в [1].

**Теорема.** Пусть  $F$  – множество ФЗ над схемой  $R$  и  $A \rightarrow B$  есть зависимость над  $R$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны: из  $F$  следует  $A \rightarrow B$  для произвольных (конечных) отношений; из  $F$  следует  $A \rightarrow B$  для двухстрочных логических отношений; из  $F$  следует  $A \rightarrow B$  как логическая формула (импликация).

На рисунке показан пример пользовательского интерфейса системы проектирования схем БД в нотации, предлагаемой автором.



Показана диаграмма ПрО инфологического уровня, схематично показан интерфейс графического интерактивного языка. С помощью этого языка можно формализовать связи между атрибутами. На рисунке названия колонок соответствуют атрибутам, две строки ниже отражают логику двухстрочных отношений в пользовательском интерфейсе. Пользователь может подставлять туда любые значения, соответствующие доменам этих атрибутов, и видеть количественные отношения между элементами данных первого и второго атрибута.



Применение примеров реальных данных в интерфейсе позволит пользователю легко делать логические заключения о наличии связей между атрибутами. Такие логические заключения строго интерпретируются как ФЗ в произвольных отношениях и могут быть отражены формулами реляционного исчисления. Ниже представлена формула реляционного исчисления с переменными-кортежами. Формула отражает наличие ФЗ между атрибутами Таб\_Номер и Должность из примера представленного на рисунке.

$$\{t^{(2)} | (\exists u)(\text{сотрудники}(t) \wedge \text{сотрудники}(u) \wedge \wedge(t[\text{таб\_номер}] \neq u[\text{таб\_номер}] \vee t[\text{должность}] = u[\text{должность}]))\}$$

## Литература

- [1] Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – М.: Мир, 1987.
- [2] Ульман Дж. Основы систем баз данных. – М.: Финансы и статистика, 1983.

## О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ЛОМАНЫМИ

Барабошкин Н.Д.<sup>1,2</sup>

Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывной вектор-функции кусочно-линейными непрерывными вектор-функциями с фиксированными узлами. Конкретно, в данной работе нас интересует геометрическая характеристика элемента наилучшего приближения в этой задаче. Такая характеристика может оказаться полезной, например, в задачах, связанных с навигацией [1].

А.Н. Колмогоров [2] получил характеристику элемента наилучшего приближения в случае приближения непрерывной комплексной функции, заданной на компакте, «полиномами» с комплексными коэффициентами, построенными на конечной системе комплексных функций. Для случая непрерывной вещественнозначной функции, приближаемой сплайнами произвольной степени на отрезке, характеристика была получена Дж. Р. Райсом в [3].

Пусть имеется непрерывная функция  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Зафиксируем разбиение отрезка  $[0, 1]$ :  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n = 1$  и обозначим через  $\mathcal{L}$  множество кусочно-линейных непрерывных вектор-функций с узлами  $p_0, \dots, p_n$ . Положим

$$\|f - l\| = \max_{t \in [0, 1]} \|f(t) - l(t)\|_{\mathbb{R}^2}.$$

Рассматривается задача о наилучшем приближении:

$$\min_{l \in \mathcal{L}} \|f - l\|.$$

Зафиксируем ломаную  $l \in \mathcal{L}$  и обозначим  $\|f - l\| = \delta$ . Найдем точки максимального отклонения  $f$  от  $l$ , обозначим их множество через  $M$ . Для каждого  $\bar{t} \in M$  построим открытый круг радиуса  $\delta$  в

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнялась в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» при поддержке УрО РАН, проект 12-П-1-1022.

плоскости  $(xy) + \bar{t}$  с центром в точке  $f(\bar{t})$ . Обозначим проекцию этого круга на плоскость  $xy$  вдоль ломаной  $l$  через  $s_{\bar{t}}$ . Вместо проекции можно говорить о параллельном переносе в точку  $l(0)$ .

Предположив, что множество  $M$  содержит не менее двух точек, разобьем его на «пачки»: полуинтервалы вида  $[t_{j-1}, t_j)$ , кроме последней пачки, которая может оказаться отрезком или одной точкой. В случае одноточечного множества  $M$  мы считаем, что имеем единственную пачку из одной точки.

Положив  $t_0 = \min\{t \in M\}$ , будем выбирать

$$t_j = \sup \left\{ \tilde{t} : \bigcap_{t \in [t_{j-1}, \tilde{t}) \cap M} s_t \neq \emptyset \right\}$$

до тех пор, пока не получим  $t_k = \max\{t \in M\}$ . Если верно, что

$$\bigcap_{t \in [t_{k-1}, t_k]} s_t \neq \emptyset,$$

то последняя пачка является отрезком  $[t_{k-1}, t_k]$ , иначе она состоит из одной точки  $t_k$ .

**Определение.** Жестким участком для функции  $f$  называется отрезок  $[p_i, p_{i+k}]$ , который пересекают  $k + 2$  пачки.

**Теорема.** Ломаная  $l \in \mathcal{L}$  является элементом наилучшего приближения для функции  $f$  тогда и только тогда, когда  $l$  содержит жесткий участок.

## Литература

- [1] Бердышев В.И., Костоусов В.Б. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
- [2] Колмогоров А.Н. Замечание по поводу многочленов П.Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // УМН 3. 1948. Т. 1 (83).
- [3] Rice J.R. Characterization of Chebyshev approximations by splines // SIAM J. Numer. Anal. 1967. Vol. 4, № 4. Pp. 557–565.

## ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ Б. БОЯНОВА

Габдуллин М.Р.<sup>1,2</sup>

А.А. Марков [1] в 1889 году доказал, что на множестве  $\mathcal{P}_n$  алгебраических многочленов степени не выше  $n$  с действительными коэффициентами справедливо неравенство  $\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty$ ,  $\|P\|_\infty = \max\{|P(x)| : x \in [-1, 1]\}$ . Экстремальным является многочлен Чебышёва 1-го рода  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ . В 1981 году Б.Д. Боянов [2] получил следующее обобщение этого неравенства: при всех  $p \geq 1$

$$\|P'\|_p \leq M(n, p) \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad (1)$$

с константой  $M(n, p) = \|T'_n\|_p$ . Здесь и ниже для  $p > 0$

$$\|P\|_p = \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |P(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Функционал  $\|\cdot\|_p$  при  $p \rightarrow 0+$  имеет предел

$$\|P\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0+} \|P\|_p = \exp \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |P(x)| dx \right),$$

который является средним геометрическим модуля  $P$  на  $[-1, 1]$ . В работе рассматривается задача о значении наилучшей константы в неравенстве (1) при  $p = 0$ :

$$\|P'\|_0 \leq M(n) \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n. \quad (2)$$

В случае  $n = 1$  задача (2) тривиальна, экстремальным является многочлен  $P(x) = T_1(x) = x$  и наилучшая константа есть  $M(1) = 1$ . При  $n = 2$  доказано, что  $M(2) = \|T'_2\|_0 = 4/e$  и экстремальным также является многочлен Чебышёва  $T_2$ . В общем случае получен следующий результат [4].

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011) и РФФИ (проект 12-01-31495).

**Теорема.** Для любого  $n \geq 2$  справедливы оценки

$$Kn < M(n) < n, \quad (3)$$

где

$$K = \exp \left( 1 - \ln 2 - \frac{M_1}{2} \pi \right) = 0.479898 \dots, \quad (4)$$

$$M_1 = \max \left\{ -\sin 2t \cdot \ln \operatorname{tg} t : 0 < t \leq \frac{\pi}{4} \right\} = 0.662743 \dots$$

**Замечание.** Для любого  $n \geq 2$  справедливо равенство

$$\|T'_n\|_0 = C(n) \cdot n,$$

в котором величина  $C(n)$  обладает следующими двумя свойствами

$$C(n) \rightarrow \frac{e}{4} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad K < C(n) < 1,$$

и константа  $K$  задана формулой (4).

**Утверждение 1.** Пусть многочлен  $f$  экстремален в задаче (1),  $0 < p < 1$ . Тогда

$$\min\{|f'(1)|, |f'(-1)|\} \geq (1-p)^{1/p} \|f'\|_p.$$

**Утверждение 2.** Существует число  $\bar{p} > 0$  такое, что при всех  $p \in (0, \bar{p})$  любой многочлен  $f$ , экстремальный в задаче (1), удовлетворяет условию  $|f(1)| = |f(-1)| = 1$ .

**Утверждение 3.** Пусть многочлен  $f$  экстремален в задаче (2). Тогда

$$\min\{|f'(1)|, |f'(-1)|\} \geq \frac{1}{e} \|f'\|_0.$$

**Утверждение 4.** В задаче (2) существует экстремальный многочлен  $f$  такой, что  $|f(1)| = |f(-1)| = 1$ .

## Литература

- [1] Марков А.А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Зап. Импер. акад. наук. 1889. Т. 62. С. 1–24.
- [2] Bojanov B.D. An extension of the Markov inequality // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 35, № 2. Pp. 181–190.
- [3] Боянов Б.Д. Обобщение неравенства Маркова // ДАН СССР. 1982. Т. 262, № 1. С. 13–15.
- [4] Габдуллин М.Р. Оценка среднего геометрического производной алгебраического многочлена через его равномерную норму на отрезке // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 153–161.

## ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Дубосарский Г.А.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим область  $\tilde{K}$  комплексной плоскости, полученную путем удаления из единичного шара с центром в нуле  $m$  лежащих внутри него попарно непересекающихся замыканий шаров с центрами в точках  $z_k$  и радиусами  $r_k$ . Положим  $z_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ . Обозначим через  $C_r(a)$  окружность с центром в точке  $a$  радиуса  $r$ .

В докладе рассматриваются следующие классические задачи математической физики в области  $\tilde{K}$ . Задача Дирихле состоит в определении гармонической функции в области по ее известным граничным значениям на окружностях  $C_{r_k}(z_k)$ ,  $k = \overline{0, m}$ . Задача Неймана заключается в нахождении гармонической функции по ее известным производным по нормали к окружностям  $C_{r_k}(z_k)$ ,  $k = \overline{0, m}$ .

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00004 и Интеграционного проекта, выполняемого учеными УрО РАН совместно с СО РАН (проект 12-С-1-1018)

Опишем построение всплесков. Произведем ортогонализацию Грама–Шмидта специальной системы гармонических функций

$$\left\{ h_0^0(z) \equiv 1, h_0^l(z) = \ln |z - z_l|, h_k^0(z) = \operatorname{Re} z^k, \tilde{h}_k^0(z) = \operatorname{Im} z^k, \right. \\ \left. h_k^l(z) = \operatorname{Re} \left( \frac{r_l}{z - z_l} \right)^k, \tilde{h}_k^l(z) = \operatorname{Im} \left( \frac{r_l}{z - z_l} \right)^k, l = \overline{1, m}, k \in \mathbb{N} \right\} \quad (1)$$

относительно произведений

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m \int_0^{2\pi} u(z_k + r_k e^{ix}) v(z_k + r_k e^{ix}) dx, \\ (u, v)_{\partial n} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial u(z_k + r e^{ix})}{\partial r} \right|_{r=r_k} \left. \frac{\partial v(z_k + r e^{ix})}{\partial r} \right|_{r=r_k} dx$$

для задачи Дирихле и Неймана соответственно, с той разницей, что для задачи Неймана удалим из системы (1) функцию  $h_0^0(z) \equiv 1$ . Ортогонализацию будем производить в следующем порядке:

$$h_0^0(z), h_0^1(z), h_0^2(z), \dots, h_0^m(z), \\ h_1^0(z), \tilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \tilde{h}_1^1(z), \dots, h_1^m(z), \tilde{h}_1^m(z), \\ h_2^0(z), \tilde{h}_2^0(z), h_2^1(z), \tilde{h}_2^1(z), \dots, h_2^m(z), \tilde{h}_2^m(z), \dots \quad (2)$$

Полученные после ортогонализации системы обозначим через  $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\{g_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Рассмотрим пространство  $h_\infty(\tilde{K})$  функций, гармонических в  $\tilde{K}$  и непрерывных в  $\tilde{K}$ . Система (1) выбрана из того соображения, что она, в силу специального разложения гармонической функции статьи [1], является всюду плотным множеством в пространстве  $h_\infty(\tilde{K})$  с нормой  $\max_{\tilde{K}} |u(z)|$ .

Опишем построение всплесков на примере задачи Дирихле и системы  $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Функция  $f_n(z)$  является линейной комбинацией функций  $h_k^l(z)$  и  $\tilde{h}_k^l(z)$ . Рассмотрим функцию  $h_k^l(z)$  или  $\tilde{h}_k^l(z)$  этой линейной комбинации, дальше всех расположенную в порядке (2).

Функцию  $f_n(z)$  будем тогда обозначать через  $f_k^l(z)$  или  $\tilde{f}_k^l(z)$  соответственно. Сопоставим гармонической функции  $u(z) \in h_\infty(\tilde{K})$  ряд

$$u(z) \sim \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (u, f_k^l) f_k^l(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (u, \tilde{f}_k^l) \tilde{f}_k^l(z) \right\}. \quad (3)$$

Этот ряд может быть использован для решения задачи Дирихле, поскольку для его построения достаточно знать только граничные значения функции  $u(z)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $u(z) \in h_\infty(\tilde{K})$ . Тогда ряд (3) сходится в области  $\tilde{K}$ , однако на ее границе он может расходиться. Ряд (3) сходится на границе  $\tilde{K}$  тогда и только тогда, когда сходятся тригонометрические ряды Фурье функций  $u(z_k + r_k e^{ix})$ ,  $k = \overline{0, m}$ .

В статье [2] построены следующие всплески, являющиеся базисом пространств  $L_p[0, 2\pi]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$w_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w_n(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \theta_\nu^n \cos \nu x, \quad \tilde{w}_n(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \theta_\nu^n \sin \nu x,$$

где

$$\theta_\nu^n = 2^{(2-j)/2} \hat{\theta} \left( \frac{\nu}{2^j} \right) \sin \frac{2\pi \nu (k + 0.5)}{2^j},$$

$$n = 2^{j-1} + k, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1,$$

$\hat{\theta}(\omega)$  – функция Мейера с компактным носителем.

Построим систему всплесков

$$\{F_0^l(z), F_n^l(z), \tilde{F}_n^l(z) : n \in \mathbb{N}, l = \overline{0, m}\}$$

по следующим формулам:

$$F_0^l(z) = h_0^l(z), \quad F_n^l(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \theta_\nu^n f_\nu^l(z), \quad \tilde{F}_n^l(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \theta_\nu^n \tilde{f}_\nu^l(z).$$

Сопоставим гармонической функции  $u(z)$  ряд

$$u(z) \sim \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (u, F_k^l) F_k^l(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (u, \tilde{F}_k^l) \tilde{F}_k^l(z) \right\}. \quad (4)$$



**Теорема 2.** Пусть  $u(z) \in h_\infty(\tilde{K})$ , тогда ряд (3) равномерно сходится в области  $\tilde{K}$  вместе с границей.

Таким образом, мы построили ряд (4), всегда сходящийся при  $u(z) \in h_\infty(\tilde{K})$  на границе  $\tilde{K}$ , в отличие от ряда (3).

## Литература

- [1] Голузин Г. М. Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'a и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
- [2] Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральной дыркой // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. С. 129–149. Тула: ТулГУ, 2007.

## ВАРИАНТ АДДИТИВНОГО НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГорова для оператора Лапласа и его второй степени

Кошелев А. А.<sup>1,2</sup>

Для дважды дифференцируемых функций  $f$  многих переменных оператор Лапласа  $\Delta$  определяется формулой  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$  ( $m \geq 2$ ). На классы менее гладких функций оператор Лапласа и его вторая степень распространяются по схеме Соболева (см., например, [1]).

В пространстве  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ , определим множество функций

$$W^m(I) = W^m = \{f \in C(I) : \Delta^2 f \in L_\infty(I), \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(I)} \leq 1\},$$

где  $I$  – пространство  $\mathbb{R}^m$  или шар  $B_R^m = B_R^m(0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < R\}$ .

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (Госзадание 1.1544.2011).

Рассмотрим аналог задачи Ландау–Колмогорова для оператора Лапласа и его второй степени: найти

$$\sup\{||\Delta f||_{C(I)} : f \in W^m(I), ||f||_{C(I)} \leq A\}.$$

В случае  $I = \mathbb{R}^m$  эта задача сводится к исследованию наилучшей константы в мультипликативном неравенстве Колмогорова

$$||\Delta f||_{C(\mathbb{R}^m)} \leq \mathcal{K}_m \sqrt{||f||_{C(\mathbb{R}^m)} \cdot ||\Delta^2 f||_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}}, \quad f \in W^m(\mathbb{R}^m). \quad (1)$$

Оператор Лапласа инвариантен относительно сдвигов пространства  $\mathbb{R}^m$ , поэтому последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$|\Delta f(0)| \leq \mathcal{K}_m \sqrt{||f||_{C(\mathbb{R}^m)} \cdot ||\Delta^2 f||_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}}, \quad f \in W^m(\mathbb{R}^m). \quad (2)$$

В связи с неравенством (2) возникает задача о вычислении величины  $\sup\{|\Delta f(0)| : f \in W^m(I), ||f||_{C(I)} \leq A\}$  и для случая  $I = B_R^m$ . С этой задачей связано аддитивное неравенство

$$|\Delta f(0)| \leq \mathcal{M}_0^m ||f||_{C(B_R^m)} + \mathcal{M}_2^m ||\Delta^2 f||_{L_\infty(B_R^m)}. \quad (3)$$

В настоящее время известно большое количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной; значительно меньше таких результатов получено для функций многих переменных (см. обзорную статью [2]). Неравенство (1) изучал О. Кунчев [3]. Им была получена оценка  $\mathcal{K}_m \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}$ ,  $m \geq 2$ . Автор улучшил эту оценку для случая  $m = 2$  и  $m = 3$  (см. работу [4] и приведенную там библиографию).

Оператор Лапласа инвариантен относительно ортогональных преобразований пространства  $\mathbb{R}^m$ . Отсюда, с использованием результатов работы [5], можно сделать вывод, что для случая  $I = B_R^m$  экстремальную функцию, на которой неравенство (3) обращается в равенство, можно искать среди функций, обладающих той же инвариантностью, что и оператор Лапласа  $\Delta$ .

Рассмотрим эквивалентную задачу Колмогорова с учётом инвариантности оператора Лапласа  $\Delta$ . Для сферически симметричной функции  $f(x) = g(|x|)$  оператор Лапласа и его вторая степень определяются следующим образом:

$$\Delta f(x) = D_2 g(r) = \frac{1}{r^2} (r^2 g'(r))' = g''(r) + \frac{m-1}{r} g'(r), \quad r = |x|;$$

$\Delta^2 f(x) = D_2(D_2 g)(r) = D_4 g(r)$ . Все производные в этом определении мы будем понимать в обобщенном смысле. В пространстве  $C[0, 1]$  выделим множество функций

$$\widetilde{W}^m = \{f \in C[0, 1] : \|D_4 f\|_{L_\infty[0,1]} \leq 1, f'(0) = 0, (D_2 f)'(0) = 0\}.$$

Рассмотрим задачу:  $\sup\{|D_2 f(0)| : f \in \widetilde{W}^m, \|f\|_{C[0,1]} \leq A\}$ .

**Лемма.** Для оператора  $D_2$  справедливо следующее представление

$$D_2 f(0) = T f + \int_0^1 \psi(t) D_4 f(t) dt,$$

$$T f = \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i f(\nu_i), \quad \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i (\nu_i)^2 = 2m\nu_1,$$

$$\psi(t) = I_m(t) \left[ \mathcal{E}_m^2(t) + \sum_{i=1}^{n+3} \alpha_i \mathcal{E}_{m,\nu_i}^4(t) \right].$$

Здесь  $\mathcal{E}_m^2(|x|)$  – фундаментальная функция оператора Лапласа,  $\mathcal{E}_m^4(|x|)$  – фундаментальная функция второй степени оператора Лапласа,  $\mathcal{E}_{m,\nu_i}^2, \mathcal{E}_{m,\nu_i}^4$  – сдвиги фундаментальных функций.

Из этой леммы получаем следующее неравенство:

$$|D_2 f(0)| \leq \|T\|_{\mathcal{L}} \|f\|_{C[0,1]} + \|D_4 f(t)\|_{L_\infty[0,1]} \|\psi(t)\|_{L_1[0,1]}.$$

Оно обращается в равенство на решении задачи  $\widetilde{A} = \|\widetilde{f}\|_{C[0,1]} = \min\{\|f\|_{C[0,1]} : f \in \mathcal{S}_1^4\}$ , где  $\mathcal{S}_1^4$  есть класс функций  $f$  со свойствами

$$f'(0) = 0, (D_2 f)'(0) = 0, D_4 f(t) = (-1)^{k+1}, t \in (t_{k-1}, t_k),$$

$$1 \leq k \leq 2, \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 = 1.$$

**Теорема.** Для функции  $f \in W^m$  справедливо неравенство

$$|\Delta f(0)| \leq \|\widetilde{T}\|_{C(B_1^m) \rightarrow C(B_1^m)} \|f\|_{C[0,1]} + \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(B_1^m)} \|\psi(|x|)\|_{L_1(B_1^m)};$$

на функции  $\widetilde{f}$  оно обращается в равенство.

## Литература

- [1] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.
- [2] Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 89–124.
- [3] Kounchev O. Extremizers for the multivariate Landau – Kolmogorov inequality // «Multivariate Approximation». Pp. 123–132. – W. Haussmann et al. (eds.): Akademie Verlag, 1997.
- [4] Кошелев А.А. Наилучшее  $L_p$  приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классах функций двух и трех переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 17, № 3. С. 217–224.
- [5] Арестов В.В. Приближение инвариантных операторов // Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 1. С. 9–29.

## ЗАДАЧА ДЕЛЬСАРТА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Куклин Н.А.<sup>1,2</sup>

Задача об упаковке максимального количества открытых шаров одинакового радиуса в метрическом пространстве является трудной и актуальной задачей из комбинаторной геометрии. Для метрического пространства  $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ , – единичной сферы в  $m$ -мерном евклидовом пространстве с метрикой  $\rho(x, y) = \arccos \sum_{i=1}^m x_i y_i$  – шарами являются сферические шапочки. Максимальное число таких шаров радиуса  $\pi/6$ , которые могут быть упакованы в  $\mathbb{S}^{m-1}$ , называется контактным числом пространства  $\mathbb{R}^m$  и обозначается  $\tau_m$ .

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).

В данной работе мы исследуем задачу бесконечномерного линейного программирования, которая возникает из схемы Дельсарта оценки сверху числа  $\tau_m$  (см. [1]):

$$\begin{cases} u_m = \min f(1), \\ f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k P_k^{(m)}(t) \leq 0, \quad t \in [-1, 1/2], \\ f_k \geq 0, \quad k \geq 1; \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $\{P_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$  – система ультрасферических многочленов, ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $\phi(t) = (1 - t^2)^{\frac{m-3}{2}}$  и нормированных условием  $P_k^{(m)}(1) = 1, k \geq 1$ . Согласно результату Дельсарта [1], справедлива оценка  $\tau_m \leq u_m$ .

Под решением задачи (1) мы понимаем нахождение значения  $u_m$  и описание множества экстремальных функций  $\mathcal{F}_m^*$ . В работе [2] было доказано, что  $\mathcal{F}_m^* \neq \emptyset$  для всех значений  $m \geq 2$ , а также найдено решение задачи (1) при  $m = 4$ . В [3] задача (1) была решена при  $5 \leq m \leq 146, 148 \leq m \leq 156, m = 161$  (кроме случаев  $m = 8, m = 24$ ); в [4] – при  $m = 147, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 164, 165, 167, 173$ . В этих работах во всех перечисленных случаях множество  $\mathcal{F}_m^*$  одноэлементно и состоит из алгебраического многочлена.

В [5] нами была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in \mathcal{F}_3^*$ . Тогда  $f$  является многочленом, причем его степень  $d$  удовлетворяет неравенствам  $27 \leq d < 1450$ .

В данной работе мы уточняем этот результат.

**Теорема 2.** Единственным элементом множества  $\mathcal{F}_3^*$  является многочлен 27-й степени, который представим в виде линейной комбинации многочленов  $P_k^{(3)}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 20, 27$  с положительными коэффициентами, имеет простой нуль в точке  $1/2$  и пять двойных нулей в интервале  $(-1, 1/2)$ .

Отметим, что в [4] показано, как по информации из теоремы 2 выписать систему нелинейных алгебраических уравнений, из решения которой экстремальный многочлен восстанавливается однозначно.

## Литература

- [1] *Delsarte Ph.* Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. Vol. 27. Pp. 272–289.
- [2] *Арестов В. В., Бабенко А. Г.* О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
- [3] *Штром Д. В.* Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. ИММ УрО РАН. 2002. Т. 8, № 2. С. 162–189.
- [4] *Куклин Н. А.* Метод Дельсарта в задаче о контактных числах пространств больших размерностей // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 224–239.
- [5] *Куклин Н. А.* Вид экстремальной функции в задаче Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного пространства // Тр. ИММ УрО РАН, 2011. Т. 17, № 3. С. 225–232.

## ОЦЕНКА НОРМ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОЖЕСТВЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В $L_0$

Леонтьева А.О.<sup>1,2</sup>

Пусть  $\mathcal{T}_n$  есть множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1)$$

порядка  $n \geq 1$  с комплексными коэффициентами. Для параметра  $p$ , удовлетворяющего условию  $0 \leq p \leq +\infty$ , определим на  $\mathcal{T}_n$  функционал  $\|\cdot\|_p$  соотношениями

$$\|f_n\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (госзадание 1.1544.2011).

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{C_{2\pi}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \max\{|f_n(t)| : t \in \mathbb{R}\},$$

$$\|f_n\|_0 = \lim_{p \rightarrow +0} \|f_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_n(t)| dt\right);$$

лишь при  $1 \leq p \leq \infty$  этот функционал является нормой.

На множестве  $\mathcal{T}_n$  тригонометрических полиномов (1) порядка  $n$  при заданном числе  $1 \leq m < n$  рассмотрим операторы, обращающие в ноль  $m$  младших коэффициентов и соответственно  $m$  старших коэффициентов полинома:

$$A_{nm}f_n(t) = \sum_{k=m}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (2)$$

$$B_{nm}f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

При  $m = 1$  оператор (2) является оператором дифференцирования порядка 0; этот оператор отбрасывает свободный член полинома.

Автора интересует задача о точных константах в неравенствах:

$$\begin{aligned} \|A_{nm}f_n\|_0 &\leq K_1(n, m) \|f_n\|_0, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \\ \|B_{nm}f_n\|_0 &\leq K_2(n, m) \|f_n\|_0, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \end{aligned}$$

т.е. нормы операторов  $A$  и  $B$  в пространстве  $L_0$  на  $\mathcal{T}_n$ . Для оператора дифференцирования порядка 0, т.е. оператора (2) при  $m = 1$  этому вопросу посвящена статья автора [1].

В следующем утверждении приведены оценки величин  $K_1(n, m) = \|A_{nm}\|_0$  и  $K_2(n, m) = \|B_{nm}\|_0$ .

**Теорема.** При всех  $1 \leq m < n$  справедливы оценки

$$C_{2n}^m \leq \|B_{nm}\|_0 \leq C_{2n}^m \cdot \left(\frac{2n-m}{m+1}\right)^{n-m},$$

$$\|A_{nm}\|_0 \leq 2C_{2n}^{n-m}.$$

**Гипотеза.** Помимо того, имеет место оценка снизу

$$\|A_{nm}\|_0 \geq C_{2n}^{n-m} - 1.$$

## Литература

- [1] *Леонтьева А.О.* Неравенство Бернштейна для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 216–223.

## ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ВСПЛЕСКОВ И ВСПЛЕСК-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Логвинова Т.О.<sup>1,2</sup>

Напомним, что семейство функций  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  из гильбертова пространства  $\mathbb{H}$  называется фреймом, если существуют такие положительные числа  $A$  и  $B$ , что для любых  $f \in \mathbb{H}$  верно

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

$A, B$  – границы фрейма. Если  $A = B$ , то фрейм называется жестким. Жесткий фрейм с границами  $A = B = 1$  является ортонормированным базисом  $\mathbb{H}$ .

В своей работе мы рассматриваем гильбертово пространство  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Преобразование Фурье функции  $f \in L(\mathbb{R}^2)$  будем определять формулой

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\mathbf{x}\mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

которая известным образом распространяется на функции из  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Пусть  $a \in \mathbb{R}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  – параметры со свойствами  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ ,  $b_1, b_2 > 0$ . По функции  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  построим семейство функций

$$\psi_{m,n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^m} \psi \left( \frac{x_1 - n_1 b_1 a^m}{a^m}, \frac{x_2 - n_2 b_2 a^m}{a^m} \right) = a^{-m} \psi(a^{-m} \mathbf{x} - n\mathbf{b}),$$

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).



где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^2$ . Нас интересует, при каких условиях на  $\psi$ ,  $a$  и  $\mathbf{b}$  это семейство образует фрейм в  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Две следующие теоремы дают частичный ответ на этот вопрос. Эти теоремы являются обобщением одного из результатов И. Добеши (см. [1, § 3.3], а также [2, § 5.1]) на двумерный случай.

**Теорема 1.** Если  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  такая, что для п. в.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  со свойством  $1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq a$ , где  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , выполняется

$$0 < \gamma \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^m \mathbf{x})|^2 \leq \eta < \infty,$$

то для любой  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  справедливо равенство

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}^2}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 b_1 b_2} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\mathbf{x})|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^m \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \text{Rest}(f) \right],$$

где остаток  $\text{Rest}(f)$  оценивается следующим образом:

$$|\text{Rest}(f)| \leq \|\hat{f}\|^2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \beta(\mathbf{k}/\mathbf{b}) \beta(-\mathbf{k}/\mathbf{b}),$$

$$\beta(\mathbf{k}/\mathbf{b}) = \left( \text{ess sup}_{1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(a^m \mathbf{x}) \hat{\psi} \left( a^m \mathbf{x} + 2\pi \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{b}} \right) \right| \right)^{1/2}.$$

Для  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  выражение  $\mathbf{k}/\mathbf{b}$  понимается как  $(k_1/b_1, k_2/b_2)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  такая, что для п. в.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  со свойством  $1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq a$ , где  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , выполняется

$$0 < \gamma \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^m \mathbf{x})|^2 \leq \eta < \infty,$$

и функция  $r(\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\beta(\mathbf{k}/\mathbf{b}) \beta(-\mathbf{k}/\mathbf{b})) \rightarrow 0$  при  $\mathbf{b} \rightarrow (0, 0)$ . Тогда найдется такой вектор  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ ,  $c_1, c_2 > 0$ , что для всех  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ ,  $0 < b_1 < c_1$ ,  $0 < b_2 < c_2$ , семейство функций  $\{\psi_{m,n}\}$  является фреймом со значениями грани

$$A = \frac{1}{b_1 b_2} (\gamma - r(\mathbf{b})), \quad B = \frac{1}{b_1 b_2} (\eta + r(\mathbf{b})).$$

## Литература

- [1] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- [2] *Heil C.E., Walnut D.E.* Continuous and discrete wavelet transforms // SIAM Rev. 1989. Vol. 31, № 4. Pp. 628–666.

## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ В ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТАЙКОВА

Серков А.О.<sup>1</sup>

Пусть  $\mathcal{T}_n$  есть множество тригонометрических полиномов порядка  $n$  с вещественными коэффициентами:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Для полинома  $T_n$  через  $\tilde{T}_n$  обозначим сопряженный полином

$$\tilde{T}_n(x) = \sum_{k=1}^n (b_k \cos(kx) - a_k \sin(kx)).$$

На множестве  $\mathcal{T}_n$  рассмотрим неравенство типа Сеге с точной константой  $C(\alpha, n)$ :

$$\|\tilde{T}_n^{(\alpha)}\|_{C[0,2\pi]} \leq C(\alpha, n) \|T_n\|_{C[0,2\pi]}, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad (1)$$

где  $\tilde{T}_n^{(\alpha)}$  – дробная производная в смысле Вейля порядка  $\alpha$  полинома  $\tilde{T}_n$ , вычисляемая по формуле

$$\tilde{T}_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^n \left( k^\alpha b_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) - k^\alpha a_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \right).$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

Целью работы является описание всех экстремальных полиномов неравенства (1) при  $\alpha = 0$ :

$$\|\tilde{T}_n\|_{C[0,2\pi]} \leq C(0, n) \|T_n\|_{C[0,2\pi]}, \quad T \in \mathcal{T}_n. \quad (2)$$

Известны следующие результаты исследования неравенства (1). Г. Сеге в своей работе [2] доказал, что  $C(\alpha, n) = n^\alpha$  для  $\alpha \in \mathbb{N}$ . А. И. Козко [3] получил ту же константу для всех вещественных  $\alpha \geq 1$ . В обоих случаях неравенство (1) обращается в равенство только на полиномах  $T_n(t) = A \cos(nt + a)$ ,  $A, a \in \mathbb{R}$ ,  $A \neq 0$ .

Л. В. Тайков [1] исследовал случай  $\alpha = 0$ . Он доказал, что

$$C(0, n) = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} \operatorname{ctg} \frac{(2\ell+1)\pi}{2(n+1)}$$

и неравенство (2) обращается в равенство на полиномах

$$T_n^*(x) = \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} \left\{ K_n \left( x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \right) - K_n \left( x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \right) \right\},$$

где  $K_n(x) = 1/2 + \sum_{v=1}^n (1 - v/(n+1)) \cos vx$  есть ядро Фейера.

Наряду с полиномом  $T_n^*$ , для четных  $n$  рассмотрим полином

$$T_n^{**} = T_n^*(x) + K_n(x - \pi).$$

**Теорема.** *Неравенство (2) обращается в равенство в случае нечетных  $n$  — только на полиномах*

$$AT_n^*(x+a), \quad A, a \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0,$$

*а в случае четных  $n$  только на полиномах*

$$A((1-B)T_n^*(x+a) + BT_n^{**}(x+a)), \quad A, B, a \in \mathbb{R}, \quad |B| \leq 1, \quad A \neq 0.$$

Заметим, что для всех  $n$  полином  $T_n^*(x)$  — нечетный, для нечетных  $n$  полином  $T_n^*(x + \pi/2)$  — четный, для четных  $n$  полином  $T_n^{**}(x - n\pi/(2n+2))$  — четный.

## Литература

- [1] *Тайков Л.В.* О сопряжённых тригонометрических полиномах // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 110–114.
- [2] *Szegő G.* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. 1928. B. 5, H. 4. P. 59–70.
- [3] *Kozko A.I.* The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. Pp. 391–416.

## НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Серкова А.В.<sup>1,2</sup>

Рассматриваются тригонометрические полиномы порядка  $n$  с действительными коэффициентами

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

и их дробные производные порядка  $\alpha$  со сдвигом  $\beta$

$$\Lambda_\beta D^{(\alpha)} T_n(x) = \sum_{k=1}^n k^\alpha \left( a_k \cos \left( kx + \frac{\alpha\pi}{2} + \beta \right) + b_k \sin \left( kx + \frac{\alpha\pi}{2} + \beta \right) \right).$$

В работе изучается точная константа в неравенстве

$$\left\| \Lambda_\beta D^{(\alpha)} T_n \right\|_{C[0,2\pi]} \leq C(n, \alpha, \beta) \|T_n\|_{C[0,2\pi]} \quad (1)$$

для значений параметров  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta = -\pi/2$ .

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).

Отметим, что при  $\beta = -\pi/2$  имеем равенство

$$\Lambda_{-\pi/2} D^{(\alpha)} T_n(x) = \tilde{T}_n^{(\alpha)}(x),$$

где

$$\tilde{T}_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \sin(kx) - b_k \cos(kx))$$

есть полином, сопряженный к полиному  $T_n$ .

Известно, что при всех  $\alpha \geq 1$  и  $\beta \in \mathbb{R}$  точная константа в неравенстве (1)

$$C(n, \alpha, \beta) = n^\alpha.$$

При  $\alpha \in \mathbb{N}$  и  $\beta = 0$  этот результат получил С. Н. Бернштейн в 1912 г., Г. Сегё в 1928 г. распространил его на  $\beta \in \mathbb{R}$ , П. И. Лизоркин в 1965 г. нашел точную константу для всех  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta = 0$ , А. И. Козко в 1998 г. [1] решил задачу в общем случае  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Доказательство А. И. Козко [1] основано на полученной им интерполяционной формуле, обобщающей известную формулу М. Рисса:

$$\Lambda_\beta D^{(\alpha)} T_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \Lambda_\beta D^{(\alpha)} Q_n(-x_k) T_n(x + x_k),$$

где  $x_k = \frac{\pi k}{n} + \frac{\alpha\pi}{2n} + \frac{\beta}{n}$ ,  $Q_n(x) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kx) + \frac{1}{2} \cos(nx) \right)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

При  $\alpha \in [0, 1)$  точные значения  $C(n, \alpha, \beta)$  известны лишь в двух случаях. А. И. Козко [1] доказал, что

$$C(n, 0, 0) = \frac{2}{1 + 1/n}.$$

Л. В. Тайков в 1990 г. нашел значение  $C(n, 0, -\pi/2) = \tilde{C}(n)$ , асимптотическое поведение этой величины  $\tilde{C}(n) \sim (2/\pi) \ln n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , было известно ранее.

Нас интересует, при каких  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta \in \mathbb{R}$  значение  $C(n, \alpha, \beta)$  становится больше, чем  $n^\alpha$ . Используя интерполяционную формулу А. И. Козко, удалось показать, что для некоторого  $\delta > 0$  при  $\alpha \in (1 - \delta, 1)$  и  $k = 2, 4, \dots, 2n - 2$  выполняются неравенства

$$\Lambda_{-\pi/2} D^{(\alpha)} Q_n(-x_0) > 0, \quad \Lambda_{-\pi/2} D^{(\alpha)} Q_n(-x_k) < 0.$$

Как следствие, для этих же  $\alpha$  справедлива оценка

$$C(n, \alpha, -\pi/2) > n^\alpha.$$

## Литература

- [1] *Kozko A.I.* The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. Pp. 391–416.

## МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМЕ С УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИМ ВЕСОМ

Симонов И.Е.<sup>1,2</sup>

Пусть  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-s}$  — фиксированные вещественные числа. Рассмотрим множество  $\mathcal{P}_n^s$  алгебраических многочленов

$$P_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_{n-s}t^{n-s} + \sum_{k=0}^{n-s-1} a_k t^k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

с  $s+1$  фиксированным старшим коэффициентом. Требуется найти такой многочлен  $P_n^* \in \mathcal{P}_n^s$ , чтобы

$$\|P_n^*\|_{1,\sigma} = \min_{P \in \mathcal{P}_n^s} \|P\|_{1,\sigma}, \quad (1)$$

где

$$\|P\|_{1,\sigma} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |P(t)|(1-t^2)^\sigma dt, \quad \sigma > -1. \quad (2)$$

Многочлен  $P_n^*$  называют многочленом, наименее уклоняющимся от нуля (в интегральной норме (2)).

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1544.2011) и РФФИ (проект 12-01-31495).

Хорошо известно, что многочлен  $P_n^*$  существует, единствен и имеет на интервале  $(-1, 1)$  не менее, чем  $n - s$  перемен знака. Проблема эта восходит к Чебышеву, и её решение для  $s = 0$ ,  $\sigma = 0$  нашли Коркин и Золотарев [1]: многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в интегральной норме, со старшим коэффициентом, равным единице, есть многочлен Чебышева второго рода

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{2^n \sin(\arccos t)}, \quad t \in [-1, 1].$$

Многочлен Чебышева первого рода

$$T_n(t) = 2^{-n} \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1]$$

является решением задачи (1) для случая  $s = 0$ ,  $\sigma = -1/2$  [2, следствие 2.9.4, с. 112]. Вес  $(1 - t^2)^{-1/2}$  будем называть весом Чебышева.

Решение задачи для  $s = 1$ ,  $\sigma = 0$  впервые получил Я.Л. Геронимус [3], а затем независимо от него и другим методом Э.М. Галеев. Затем полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля в интегральной норме, с тремя зафиксированными коэффициентами исследовал Ф. Пейерсторфер [4]. В работах В.Э. Гейта [5, 6] в явном виде выписаны многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, в случаях  $s = 2$ ,  $s = 3$ ,  $s = 4$  и  $\sigma = 0$ , а также сформулирован общий метод, позволяющий находить многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в интегральной норме, с произвольным числом заданных коэффициентов.

В докладе будет представлен новый метод, позволяющий решать задачу (1) для различных  $\sigma$ , отличных от нуля. Обозначим через  $\widehat{\mathcal{P}}_n^s$  множество многочленов вида

$$P_n(t) = T_n(t) + \tau_{n-1}T_{n-1}(t) + \dots + \tau_{n-s}T_{n-s}(t) + \sum_{k=0}^{n-s-1} \tau_k T_k(t), \quad \tau_k \in \mathbb{R},$$

с зафиксированными  $\tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \dots, \tau_{n-s}$ . Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\tau_{n-1}, \dots, \tau_{n-s}$  — фиксированные вещественные числа и

$$s \leq \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil,$$

тогда для любого  $P_n \in \widetilde{\mathcal{P}}_n^s$ , выполнено неравенство

$$\|P_n\|_{1,-1/2} \geq |\tau_{n-s}|;$$

если многочлен

$$R_s(t) = 2 \sum_{k=0}^s \tau_{n-s+k} T_k(t) - \tau_{n-s}$$

не имеет нулей внутри интервала  $(-1, 1)$ , то равенство достигается на многочлене

$$P_n^*(t) = T_{n-s}(t) \left( 2 \sum_{k=0}^s \tau_{n-s+k} T_k(t) - \tau_{n-s} \right).$$

Рассмотрим множество многочленов с двумя фиксированными старшими коэффициентами  $\widetilde{\mathcal{P}}_n^1$ ,  $\tau_{n-1} = \tau$ .

**Теорема 2.** *Многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в интегральной норме с весом Чебышева, с двумя фиксированными старшими коэффициентами равен*

$$P_n^*(t) = T_n(t) + \tau T_{n-1}(t) + \frac{\tau^2}{4} T_{n-2}(t), \quad \text{при } |\tau| \leq 2,$$

$$P_n^*(t) = T_n(t) + \tau T_{n-1}(t) + T_{n-2}(t), \quad \text{при } |\tau| \geq 2.$$

В докладе будут приведены экстремальные многочлены для случаев  $s = 1$ ,  $\sigma = 1/2$ ;  $s = 2$ ,  $\sigma = -1/2$  и  $\sigma = 1/2$ , а также некоторые другие результаты.

## Литература

- [1] Korkine A., Zolotareff G. Sur un certain minimum / Коркин А. Н. Сочинения. Т. 1. С. 329–349. – СПб.: С.-Петербург. ун-т, 1911.
- [2] Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лузин А. А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наукова думка, 1992.
- [3] Geronimus J. Sur quelques propriétés extrémales de polynômes dont les coefficients premiers sont donnés // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4, 1935. Т. 12. С. 49–58.



- [4] *Peherstorfer F.* On the representation of extremal functions in the  $L^1$ -norm // J. of Approx. Theory, 1978. Vol. 27, № 1. Pp. 61–75.
- [5] *Гейм В.Э.* О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике  $L[-1, 1]$  (третье сообщение) // Сиб. журн. вычисл. матем., РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2003. Т. 6, № 1. С. 37–57.
- [6] *Гейм В.Э.* О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике  $L[-1, 1]$ , с пятью предписанными коэффициентами // Сиб. журн. вычисл. матем., РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2009. Т. 12, № 1. С. 29–40.

## ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ УЗЛОВ

Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.<sup>1,2</sup>

Пусть  $\mathcal{D}$  – оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D} - \beta_1, \quad \mathcal{L}_s(\mathcal{D}) = (\mathcal{D} - \beta_s)\mathcal{L}_{s-1}(\mathcal{D}) \quad (s = \overline{2, r})$$

( $\beta_s$  – попарно различные действительные числа) – последовательность линейных дифференциальных операторов с постоянными действительными коэффициентами. Для произвольной последовательности  $\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  действительных чисел определим обобщенные разнесенные разности  $\Delta^{\mathcal{L}_s}[y_{j+s}, \dots, y_j]$ , соответствующие оператору  $\mathcal{L}_s$ . Положим

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{L}_1}[y_{j+1}, y_j] &= y_{j+1} - a_{1,j}y_j, \\ \Delta^{\mathcal{L}_s}[y_{j+s}, \dots, y_j] &= \Delta^{\mathcal{L}_{s-1}}[y_{j+s}, \dots, y_{j+1}] - a_{s,j}\Delta^{\mathcal{L}_{s-1}}[y_{j+s-1}, \dots, y_j] \\ &\quad (s = \overline{2, r}). \end{aligned}$$

Числа  $a_{s,j}$  будем выбирать из условия равенства нулю этих разностей для сеточных значений  $y_j = e^{\beta_s x_j}$  ( $s = \overline{1, r}$ ) функций  $e^{\beta_1 x}, \dots, e^{\beta_r x}$  в точках сетки  $\Delta = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и грантов РФФИ (проекты 11-01-00445, 11-01-00347)

Для равномерной сетки узлов ( $x_{j+1} - x_j = h$ ) эти разности впервые, вероятно, были выписаны А. Шармой и И. Цимбаларио [1] при решении задачи экстремальной функциональной интерполяции. Определим на сетке  $\Delta$  (считая ее, вообще говоря, неравномерной) последовательность  $\{B_{r,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  нормализованных (в  $L_\infty$ ) экспоненциальных  $B$ -сплайнов порядка  $r$  дефекта 1 (определение см., например, в [2]) и построим последовательность функционалов

$$I_j = \sum_{i=1}^r c_{i,j} y_{i+j-1} \quad (j \in \mathbb{Z}, c_{i,j} \in \mathbb{R}), \quad (1)$$

полагая  $y_j = f(x_j)$ , где  $f$  — произвольная функция, действующая из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Локальный экспоненциальный сплайн на сетке  $\Delta$  зададим формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_{r,j}(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

В настоящей работе нас интересует вопрос выбора коэффициентов  $c_{i,j}$  в (1) таким образом, чтобы имели место равенства

$$S(e^{\beta_{\overline{s}}}, x) = e^{\beta_s x} \quad (x \in \mathbb{R}, s = \overline{1, r}). \quad (3)$$

Для равномерной сетки узлов данная задача для локальных экспоненциальных сплайнов вида (2) авторами была полностью исследована даже в более общих ситуациях [3]; при этом оказалось, что коэффициенты  $c_{i,j}$  не зависят от  $j$ . Для полиномиальных сплайнов ( $\beta_s = 0$ ,  $s = \overline{1, r}$ ) аналогичная задача была решена Т. Личем и Л. Шумейкером [4] в 1975 году для произвольных сеток узлов сплайна.

Нам удалось доказать, что и в экспоненциальном случае для произвольной сетки узлов  $\Delta = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  числа  $c_{i,j}$  в представлении (1) условиями (3) определяются однозначно. Для их нахождения выписана система линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

## Литература

- [1] Шарма А., Цимбаларио И. Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Матем. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–173.

- [2] *Wronicz Z.* Chebyshevian splines: Dissertationes Mathematicae. Warszawa : Polska Academia Nauk, Instytut Matematyczny. 1990.
- [3] *Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.* Аппроксимация локальными  $\mathcal{L}$ -сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
- [4] *Lyche T., Schumaker L.* Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, № 4. Pp. 294–325.

## ПОРЯДОК ПОВЕДЕНИЯ МЕРЫ МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ОТРЕЗКЕ

Тихановцева К.С.<sup>1,2</sup>

Предположим, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  неотрицательны, суммируемы на отрезке  $[-1, 1]$  и отличны от 0 на множестве положительной меры из  $[-1, 1]$ ; такие функции называют весом. Пусть  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\varphi)$  есть множество алгебраических многочленов  $p$  с действительными коэффициентами, степени точно  $n \geq 1$ , для которых выполняется условие

$$\int_{-1}^1 p(t)\varphi(t) dt = 0.$$

Для многочлена  $p \in \mathcal{P}_n$  введем множество

$$\mathcal{X}(p) = \{t \in [-1, 1] : p(t) \geq 0\}$$

точек отрезка  $[-1, 1]$ , в которых многочлен неотрицателен. Величина

$$m(p) = m_\psi(p) = \int_{\mathcal{X}(p)} \psi(t) dt$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 12-01-31495) и Министерством образования и науки РФ (проект № 1.1544.2011).

является  $\psi$ -мерой множества  $\mathcal{X}(p)$ . Интерес представляет наименьшее значение этой меры, то есть величина

$$\mu_n = \mu_n(\varphi, \psi) = \inf\{m_\psi(p) : p \in \mathcal{P}_n\} = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \int_{\mathcal{X}(p)} \psi(t) dt. \quad (1)$$

В 1987 г. А. Г. Бабенко [1] для единичных весов  $\psi = \varphi \equiv 1$  нашел порядок поведения  $\mu_n$  по  $n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Десять лет спустя В. В. Арестов и В. Ю. Раевская [2] исследовали задачу (1) для  $\psi \equiv 1$  и некоторого класса весов  $\varphi$ . Они получили в этом случае точное значение величины  $\mu_n$  и указали экстремальные многочлены.

В данной работе задача (1) изучается для ультрасферического веса

$$\varphi(t) = \psi(t) = (1 - t^2)^\alpha; \quad (2)$$

величину (1) для этого случая будем обозначать  $\mu_n(\alpha)$ . В работах [3], [4] изучались свойства экстремального многочлена задачи (1), (2) для произвольного  $n$  и дано точное решение для  $n = 2$  и  $n = 3$ .

**Теорема.** При любом  $n \geq 1$  и любом  $\alpha \geq 0$  справедливы оценки

$$A(n, \alpha) \leq \mu_n(\alpha) \leq B(n, \alpha),$$

в которых величины  $A(n, \alpha)$ ,  $B(n, \alpha)$  обладают свойствами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n, \alpha) n^{2(\alpha+1)} = \left( \frac{1}{\alpha+1} \right)^{1/(\alpha+2)} \left( \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \alpha) n^{2(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1} j_1^{2(\alpha+1)};$$

здесь  $j_1 = j_1(\alpha)$  есть первый положительный нуль функции Бесселя  $J_\alpha$ . Следовательно, величина  $\mu_n(\alpha)$  имеет порядок поведения  $n^{-2(\alpha+1)}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При обосновании этого результата используются соображения работы А. Г. Бабенко [1].

## Литература

- [1] *Бабенко А. Г.* Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987.
- [2] *Арестов В. В., Раевская В. Ю.* Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // *Мат. заметки.* 1997. Т. 62, вып. 3. С. 332–344.
- [3] *Тихановцева К. С.* О наименьшей мере множества неотрицательности алгебраического многочлена с нулевым взвешенным средним значением на отрезке // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2010. Т. 16, № 4. С. 300–311.
- [4] *Кузнецов С. В., Тихановцева К. С.* Множество неотрицательности наименьшей меры многочленов с нулевым взвешенным средним значением на отрезке // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2012. Т. 18, № 4. С. 211–223.

## ОЦЕНИВАНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК РЛС БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАДАННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ

Бедин Д.А.<sup>1,2</sup>

Для наблюдения за движением воздушных судов (ВС) применяют радиолокаторы (РЛС). В измерениях РЛС присутствуют ошибки, которые можно разделить на случайные и неслучайные (систематические). Известно, что величина систематических ошибок может быть значительной. Их влияние на измерения необходимо корректировать, и получение оценок для них является актуальной задачей.

Систематические ошибки зависят от положения наблюдаемого объекта относительно РЛС. Существующие способы решения задачи оценивания систематических ошибок [1, 2] сводятся к применению параметрического подхода, когда зависимость ошибок от положения имеет точное формульное описание с неизвестными константами. Далее описывается иной способ оценивания, не предполагающий, что формульная зависимость известна.

Рассмотрим для простоты плоскую модель: РЛС и движущиеся объекты находятся в области наблюдения – ограниченном множестве  $X \subset \mathbb{R}^2$ . Предполагаем, что в области  $X$  ведут наблюдение  $m$  радиолокаторов, находящихся в разных точках. РЛС производят измерения в дискретные моменты времени. Для каждой РЛС эти моменты свои, одновременного наблюдения двумя РЛС не происходит. Измерение  $z_i(t)$  радиолокатора  $i$  в момент  $t$  в декартовой системе координат описывается следующим образом:

$$z_i(t) = x(t) + s_i(x(t)) + w_i(t), \quad z_i(t), x(t) \in X, \quad s_i(x), w_i(t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Здесь  $x(t)$  – неизвестное положение объекта в момент  $t$ ;  $s_i$  – сдвиг, вызванный систематическими ошибками  $i$ -й РЛС;  $w_i(t)$  – случайная ошибка:  $\mathbf{E}\{w_i(t)\} = 0$ ,  $\mathbf{Var}\{w_i(t)\} = W_i(x(t))$ .

Предположим, что функция  $s_i(x)$  является липшицевой с малой константой Липшица. В этом случае сдвинутая траектория ВС

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке УрО РАН, проект 12-С-1-1071, и при поддержке РФФИ, грант № 13-01-96055 р\_урал\_а.

$\xi_i(t) = x(t) + s_i(x(t))$  близка как кривая к неизвестной истинной траектории  $x(t)$ . Для гражданских самолётов движение  $x(t)$  хорошо приближается ломаной линией (за исключением коротких участков взлёта и посадки), следовательно, это справедливо и для  $\xi_i(t)$ .

Используя это предположение и уравнение (1), для каждого движущегося ВС на заданной сетке моментов времени  $\{\tau_k\}_{k=1}^M$  получим оценки  $\hat{\xi}_i(\tau_k)$  сдвинутых положений  $\xi_i(\tau_k)$  ВС в пространстве:

$$\hat{\xi}_i(\tau_k) = x(\tau_k) + s_i(x(\tau_k)) + v_i(\tau_k). \quad (2)$$

Здесь  $v_i(\tau_k)$  – ошибка приближения при помощи ломаной сдвинутой траектории  $\xi_i(\cdot)$  ВС в момент  $\tau_k$ . Исключая  $x(\tau_k)$  из (2), получим:

$$s_i(x(\tau_k)) - s_j(x(\tau_k)) = \hat{\xi}_i(\tau_k) - \hat{\xi}_j(\tau_k) + v_i(\tau_k) - v_j(\tau_k), \quad (3)$$

Дискретизируем задачу: зададимся точками  $\{\chi_p\}_{p=1}^N$  и их окрестностями  $\{X_p\}_{p=1}^N$ . Внутри  $X_p$  будем приближённо заменять  $s_i(x)$  на  $s_i(\chi_p)$ . Введём пространство  $\mathbb{S}$  векторов  $s = [s_1^T \dots s_m^T]^T$ . Каждой точке  $\chi_p$  соответствует свой экземпляр пространства  $\mathbb{S}$ . Внутри каждого множества  $X_p$  получим «вырожденную оценку» векторов  $s_i(\chi_p)$ , решая систему уравнений (3) методом наименьших квадратов: каждый из  $s_i(\chi_p)$  может быть определён лишь с точностью до принадлежности аффинному множеству вида

$$S = \{y \in \mathbb{S}: y = [(\check{s}_1 - u)^T \dots (\check{s}_m - u)^T]^T, u \in \mathbb{R}^2\}.$$

Множество такого вида, в среднем приближающее измерения (3), обозначим  $\hat{S}(\chi_p)$ . При решении (3) методом наименьших квадратов также определяется матрица ковариации  $R_s(\chi_p)$  ошибок оценивания  $s$ , которая в этом случае будет вырожденной.

Обозначим символом  $r_i(x)$  дальность от точки  $x$  до РЛС с номером  $i$ , а  $\alpha_i(x)$  – азимут, угол, под которым наблюдается  $x$ . Величины  $f_i^r(x) = r_i(x + s_i(x)) - r_i(x)$ ,  $f_i^\alpha(x) = \alpha_i(x + s_i(x)) - \alpha_i(x)$  называются систематическими ошибками  $i$ -й РЛС по дальности и азимуту в точке  $x$ . Вектору  $s_i(x)$  можно взаимно однозначно сопоставить смещения  $f_i(x) = [f_i^r(x), f_i^\alpha(x)]^T$  в полярной системе координат.

Рассмотрим пространство  $\mathbb{F}$  векторов  $f = [f_1^T \dots f_m^T]^T$ . Множество  $\hat{S}(\chi_p)$  при проектировании в пространство  $\mathbb{F}$  имеет образ  $\tilde{F}(\chi_p)$ ,

который удобно аппроксимировать аффинным множеством  $\hat{F}(\chi_p)$ . Матрицу ковариации ошибок оценивания  $f$  обозначим  $R_f(\chi_p)$ .

Функция  $f(x)$  при дискретизации соответствует сборному вектору  $\mathbf{f} = [f^{\mathbf{T}}(\chi_1), \dots, f^{\mathbf{T}}(\chi_N)]^{\mathbf{T}}$  значений  $f$  в точках  $\{\chi_p\}_{p=1}^N$ . Совместимость  $\mathbf{f}$  с измерениями может быть выражена через функционал

$$I(\mathbf{f}) = \sum_{p=1}^N (f(\chi_p) - f_0(\chi_p))^{\mathbf{T}} R_f(\chi_p)^{-1} (f(\chi_p) - f_0(\chi_p)),$$

где  $f_0(\chi_p) \in \hat{F}(\chi_p)$ . Однако такой функционал не является строго выпуклым, а соответствующая квадратичная форма вырождена.

Для выделения однозначного ответа предлагается дополнительный функционал, учитывающий «плавность» изменения функции  $f(x)$  – функционал «средней квадратичной константы Липшица»

$$J(\mathbf{f}) = \sum_{\chi_i, \chi_j \in \chi} \frac{\|f(\chi_i) - f(\chi_j)\|_F^2}{\|\chi_i - \chi_j\|_X^2} c(\chi_i, \chi_j),$$

где  $c$  – функция, регулирующая, какие пары  $\chi_i$  и  $\chi_j$  нужно брать в общую сумму;  $\|\cdot\|_X$  и  $\|\cdot\|_F$  – нормы в пространстве  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}$ .

Однозначный ответ предлагается получать, решая задачу

$$\alpha I(\mathbf{f}) + (1 - \alpha) J(\mathbf{f}) \rightarrow \min,$$

с некоторым заранее выбранным  $\alpha$ . Показано, что при  $\alpha \rightarrow 1$  решение сходится к решению, описанному в [3], а при  $\alpha \rightarrow 0$  соответствует постоянным функциям  $f(x)$ , наиболее совместимыми с измерениями.

## Литература

- [1] *Renes J.J., v.d. Kraan P., Eymann C.* Flightpath reconstruction and systematic radar error estimation from multi-radar range-azimuth measurements / 24th IEEE Conference on Decision and Control. 1985. Vol. 24, Part 1. Pp. 1282–1285.
- [2] *Garcia Herrero J., Portas J.A.B., Casar Corredera J.R.* On-line multi-sensor registration for data fusion on airport surface // IEEE Trans. on Aerosp. and Electronic Syst. 2007. Vol. 43. Pp. 356–370.



- [3] Бедин Д.А. Задача оценивания систематических ошибок радиолокаторов // Тезисы Международной конференции «Динамические системы, устойчивость, оптимизация» (DSSCO'13). Минск, 2013. С. 78–81.

## АВТОМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТИХОТВОРЕНИЙ

Бочаров А.А.<sup>1</sup>

Задача данной работы заключается в нахождении ключевых характеристик, подходящих для машинного анализа и классификации стихотворений, и написании программного комплекса для анализа стихотворений. Результаты работы могут быть использованы как для автоматического литературного анализа стихотворений и авторов, так и для построения рекомендательной системы.

Перед нахождением требуемых характеристик необходимо определиться с информацией, которая присутствует в данных об исследуемых объектах. Такие параметры, как дата написания стихотворения и тематика, обычно недоступны, или их поиск тяжело автоматизируем. Поэтому в нашей системе анализ построен, основываясь только на информации об авторе, названии и содержании произведений.

На начальном этапе работы были предприняты попытки вычлени из стихотворения тип рифмы, стихотворный размер, расстановку знаков препинания, синтаксическую связность слов в предложениях. Но выяснилось, что эти параметры не подходят для части исследуемых объектов: современные стихотворения могут не иметь рифмы, быть синтаксически несвязным текстом или не содержать знаков препинания. А в тех стихотворениях, в которых рифма и стихотворный размер все же есть, определение данных характеристик является сложной задачей, так как подход, основанный на словаре ударений и сравнении концов строк стихотворений, работает недостаточно хорошо.

Тем не менее, из стихотворения можно извлечь дополнительную информацию. На наборе слов в стихотворении был успешно приме-

---

<sup>1</sup>УрФУ

нен словарный подход, основанный на словаре синонимов и вычленении значимой части слова, с помощью которого определяется характеристика жанра стихотворения. На основе анализа суффиксов и частоты слов определяется, насколько «простым» является текст стихотворения. Звуковое содержание стихотворения позволяет провести фоносемантический анализ стихотворения.

В качестве характеристики жанра используется степень «любовности» стихотворения. Сначала была предпринята попытка найти по словарю синонимов все слова, имеющее отношение к любовной лирике, но получалось слишком много нейтральных слов, и не хватало различных словоформ найденных слов. Поэтому выбран подход выделения значимых частей «любовных» слов (т.е. слов, имеющих отношение к любовной лирике), которые выбирались в ручном режиме по словарю синонимов. В текстах стихотворений ищется доля слов, содержащих данные фрагменты «любовных» слов.

Для определения характеристики «простоты» стихотворения вычисляется частота употребления уменьшительно-ласкательных словоформ, которые определяются наличием уменьшительно-ласкательных суффиксов. Также используется словарь, составленный при помощи статистического анализа корпуса детских произведений.

При исследовании характеристик «жанр» и «простота» для преобразования слов к их начальным словоформам (леммам) используется морфологический анализатор текста на русском языке MyStem [1].

Фоносемантика – направление в лингвистике, изучающее звукоизобразительную систему языка [2]. С ее помощью можно охарактеризовать эмоциональное представление о тексте, не опираясь на смысл. С помощью фонетического анализа текста стихотворения и фоносемантических таблиц получены оценки для набора таких признаков, как: «хороший-плохой», «сильный-слабый», «быстрый-медленный» и т.д. По этим взвешенным признакам вычисляется фоносемантический коэффициент.

С помощью вычисленных характеристик проведено исследование творчества некоторых авторов по годам. На рис. представлены результаты фоносемантического анализа и жанра стихотворений С.А. Есенина. Фоносемантический коэффициент показывает степень эмоциональности стихотворений, а характеристика жанра отображает уровень «любовности» произведений. Можно проследить, как ме-

нялось творчество поэта с течением времени. Например, для данного поэта прослеживается корреляция между фоносемантикой и характеристикой «любовности» его стихотворений.

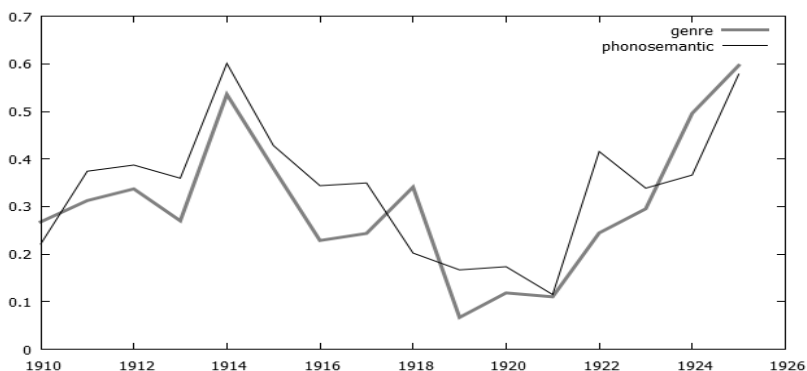


Рис. Усредненные характеристики фоносемантики и жанра стихотворений С.А. Есенина по годам

В результате работы реализован программный комплекс на языке Python для вычисления исследуемых характеристик стихотворений. При помощи вычисляемых характеристик возможно проводить анализ творчества авторов стихотворений, а также построить систему рекомендаций стихотворений и авторов – систему, которая по указанным предпочтениям пользователей делает предположения о вкусах и рекомендует объекты, которые могут понравиться пользователям.

## Литература

- [1] *Segalovich I.* A Fast Morphological Algorithm with Unknown Word Guessing Induced by a Dictionary for a Web Search Engine / Proceedings of the International Conference on Machine Learning; Models, Technologies and Applications. Pp. 273–280. – Las Vegas, Nevada, USA: CSREA Press, 2003.
- [2] *Журавлев А.П.* Фонетическое значение. – Ленингр. ун-т, 1974.

- [3] *Jannach D., Zanker M., Felfernig A., Friedrich G.* Recommender Systems: An Introduction. – Cambridge University Press, 2010.

## О ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКОВ ПРОКАТКИ

Вакула И.А., Леонова С.И.<sup>1,2</sup>

В данной работе предложен вариант математической постановки задачи построения графика прокатки партий на стане горячей прокатки. На стане горячей прокатки раз в несколько часов производится замена (перевалка) рабочих валков. В промежутке между последовательными перевалками производится прокатка стальных заготовок, собранных в партии. График прокатки представляет собой упорядоченный набор партий. Существует ряд технологических ограничений на допустимый порядок прокатки партий. Задача формирования графика прокатки состоит в том, чтобы из множества всех доступных для прокатки партий выбрать такой набор, который будет удовлетворять всем технологическим ограничениям и при этом обладать «хорошим» сочетанием показателей по ряду критериев оценки. В настоящей работе в качестве критерия выбрана максимальная суммарная длина прокатанных рулонов.

Обозначим через  $P$  множество партий  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Пусть

- $w : P \rightarrow \mathbb{R}^+$  – ширина полос в партии (одинакова для всех полос);
- $t : P \rightarrow \mathbb{R}^+$  – толщина полос в партии (также одинакова);
- $l : P \rightarrow \mathbb{R}^+$  – суммарная длина полос в партии.
- $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  – монотонно неубывающая функция, определяющая максимальную величину допустимой разности значений толщины полос между двумя соседними партиями;

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>УрФУ

- $W \in \mathbb{R}^+$  – величина, определяющая максимальную величину допустимой разности значений ширины полос между двумя соседними партиями.

Две партии  $p$  и  $q$  из  $P$  могут непосредственно следовать друг за другом в графике прокатки в том и только в том случае, когда выполнены условия:

1.  $|t(p) - t(q)| \leq \min\{r(t(p), r(t(q))\};$
2.  $0 \leq |w(p) - w(q)| \leq W.$

Пусть  $G$  – ориентированный граф на множестве узлов  $P$  с множеством дуг  $E \subseteq P \times P$  таким, что  $pq \in E$  в том и только в том случае, когда партии  $p$  и  $q$  различны, а  $q$  может непосредственно следовать за  $p$  в графике прокатки.

Множество всех допустимых графиков прокатки совпадает со множеством  $\mathbb{B}(G)$  всех простых цепей в  $G$ .

Для простой цепи  $z$  через  $l(z)$  обозначим её длину:

$$l(z) \triangleq \sum_{p \in P(z)} l(p).$$

Сформулируем задачу оптимизации – найти в  $\mathbb{B}$  цепь максимальной длины:  $l(z) \rightarrow \max$ .

Пусть  $W = \{w(p)|p \in P\}$ . Также пусть  $P_w = \{p|w(p) = w\}$ , где  $w \in W$ . Через  $G_w$  обозначим подграф графа  $G$ , индуцированный множеством узлов  $P_w$ . Через  $K_1^w, K_2^w, \dots, K_{n_w}^w$  обозначим множества вершин всех компонент связности графа  $G_w$ . Обозначим через  $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$  ориентированный граф на множестве узлов  $\hat{V} = \{K_j^w|w = w(p), p \in P, j \in \overline{1, n_w}\}$ , в котором два различных узла  $K_{j_1}^{w_1}$  и  $K_{j_2}^{w_2}$  связаны дугой в том и только в том случае, когда существует дуга  $q_1 q_2$  в графе  $G$  такая, что  $q_1 \in K_{j_1}^{w_1}$  и  $q_2 \in K_{j_2}^{w_2}$ .

Нетрудно видеть, что для решения указанной задачи оптимизации достаточно рассматривать только максимальные цепи в  $G$ . Если  $C = q_1 e_1 q_2 e_2 \dots e_{l-1} q_l$  – максимальная простая цепь в  $G$ , то в силу условия 2 для любого  $i \in \overline{1, l-1}$ :  $w(q_i) \geq w(q_{i+1})$ . Отсюда следует, что каждая максимальная цепь естественным образом разбивается на участки, множество узлов каждого из которых содержится в одном из множеств  $K_j^w$ .

Неуплотняемой дугой в  $\hat{G}$  назовем дугу  $e = pq$  из  $\hat{E}$  такую, что любая простая цепь с началом в  $p$  и концом в  $q$  имеет длину не более 1. Графом максимальных цепей назовем граф  $\hat{G}^1 = (\hat{V}, \hat{E}^1)$ , где  $\hat{E}^1 \subseteq \hat{E}$ , такой, что дуга  $e$  принадлежит  $\hat{E}^1$  в том и только в том случае, когда существует максимальная простая цепь в  $\hat{G}$ , включающая  $e$ .

**Теорема 1.** Множество дуг графа  $\hat{G}^1$  совпадает со множеством всех неуплотняемых дуг в  $\hat{G}$ .

**Теорема 2.** Множество всех максимальных простых цепей в  $\hat{G}^1$  совпадает со множеством всех простых цепей, начальный узел которых имеет нулевую входную валентность, а конечный – нулевую исходящую валентность.

**Теорема 3.**  $\sum_{b \in \text{Out}(a)} |\text{Out}(b)| \leq n_{\max} + |\text{Out}(a)| + 1$ , где  $n_{\max}$  – кол-во  $t_i : t_{i+1} = t_i + r(t_i), t_0 = t_{\min}, t_i \leq t_{\max}, t_{\min}, t_{\max}$  – наименьшее и наибольшее значения среди всевозможных значений полицины.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ARX СИСТЕМ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ ВО ВХОДНОМ СИГНАЛЕ

Иванов Д.В.<sup>1</sup>

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем. В [1] предложен метод оценивания параметров авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале, в [2] – метод оценивания динамической системы с помехой в выходном сигнале, а обобщение метода на динамическую систему нецелого порядка с ошибками в переменных приведено в [3]. В нашей работе дано обобщение метода нелинейных наименьших квадратов на случай линейной динамической ARX системы нецелого порядка с помехой в выходном сигнале.

Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую стохастическими уравнениями с дискретным вре-

<sup>1</sup>Самарский государственный университет путей сообщения

менем:

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \xi_i^{(1)}, w_i = x_i + \xi_i^{(2)}, \quad (1)$$

где  $0 < \alpha_1 \dots < \alpha_r$ ,  $0 < \beta_1 \dots < \beta_{r_1}$ ,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ ,  $\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}$ ,  $\Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j}$ ,  $\binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}$ ,  $\binom{\beta_m}{j} = \frac{\Gamma(\beta_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m-j+1)}$ .

Пусть выполняются следующие предположения:

1. Множество  $\tilde{B}$ , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы, является компактом.

2. Случайные процессы  $\{\xi_i^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2$ , являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям:  $E(\xi_i^{(k)}/F_i^{(k)}) = 0$ , п.н.,  $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2/F_i^{(k)}\right) < \infty$  п.н.  $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^4\right) < \infty$ ,  $E\left(\left(\xi_i^{(k)}\right)^2\right) < \infty$ , где  $F_i^{(k)}$  —  $\sigma$ -алгебра, индуцированная семейством непрерывных случайных величин  $\{\xi_k(t), t \in T_i\}$ ,  $T_i = \{t; t \leq i, t \in \mathbb{Z}\}$ .

3. Помехи  $\{\xi_i^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2$ , независимы в совокупности.

Входной сигнал  $x_i$  является случайным процессом с  $E(x_i) = 0$ ,  $E(x_i^2) = \sigma_x^2 < \infty$ , и истинные значения параметров удовлетворяют условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\varphi_z^{(i)}}{\varphi_x^{(i)}} \right) \left( \left( \varphi_z^{(i)} \right)^T \mid \left( \varphi_x^{(i)} \right)^T \right) = H \text{ п.н.,}$$

$$\varphi_z^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} z_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} z_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\varphi_x^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} x_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} x_{i-j} \right)^T,$$

причем  $H$  существует, ограничена и положительно определена.

4.  $\{x_i\}$  статистически не зависит от  $\{\xi_i^{(k)}\}$ .

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы, описываемой уравнением (1), по наблюдаемым последовательностям  $z_i$ ,  $w_i$ , при известных порядках  $r$ ,  $r_1$  определить оценки истинных значений параметров.

Уравнение (1) может быть представлено в форме линейной регрессии:

$$y_i = \varphi_i^T \theta + \varepsilon_i, \quad (2)$$

$$\text{где } \varphi_i = \left( \left( \varphi_z^{(i)} \right)^T \mid \left( \varphi_w^{(i)} \right)^T \right)^T,$$

$$\varphi_w^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} w_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} w_{i-j} \right)^T,$$

$$\theta = \left( b_0^T \mid a_0^T \right)^T = \left( b_0^{(1)}, \dots, b_0^{(r)} \mid a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(r_1)} \right)^T, \varepsilon_i = \xi_i^{(1)} - a_0^T \varphi_\xi^{(i)},$$

$$\varphi_\xi^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} \xi_{i-j}^{(2)}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} \xi_{i-j}^{(2)} \right)^T.$$

**Лемма.** Пусть выполняются условия 1-3, тогда средняя дисперсия обобщенной ошибки равна

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \bar{\sigma}_1^2 + a_0^T H_\xi a_0 = \omega(a_0),$$

$$\text{где } \bar{\sigma}_1^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left( \xi_i^{(1)} \right)^2, H_\xi = \begin{pmatrix} h_\xi^{(11)} & \dots & h_\xi^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\xi^{(1 r_1)} & \dots & h_\xi^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix},$$

$$h_\xi^{(mk)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_k}{j} \sigma_2^2(i-j), \quad m, k = \overline{1, r_1}.$$

Определим оценку  $\hat{\theta}(N)$  неизвестных параметров  $\theta$  из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок  $(\varepsilon_i(b, i))^2$  с весом  $\omega(b)$ , т.е.

$$\min_{\theta \in \mathbb{B}} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \varphi_i^T \theta)^2}{\bar{\sigma}_1^2 + a_0^T H_\xi a_0} = \min_{\theta \in \mathbb{B}} \frac{U_N(b, a)}{\omega(a)}. \quad (3)$$



**Теорема.** Пусть случайный процесс описывается уравнением (3) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1–4. Тогда оценка  $\hat{\theta}(N)$ , определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$ , существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой.

## Литература

- [1] Иванов Д.В. Идентификация авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале / в сб. «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики», Материалы научно-практической Интернет-конференции. С. 64–67. Ульяновск: SIMJET, 2013.
- [2] Иванов Д.В. Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2534–2536.
- [3] Ivanov D. V. Identification Discrete Fractional Order Linear Dynamic Systems with Errors-in-Variables / Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013). Pp. 374–377. Rostov-on-Don, 2013.

## ОБ ОДНОМ ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ МЕТОДЕ В МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

Исмагилов Н.С.<sup>1</sup>

Рассматривается стохастическая модель оптимального управления производством [1]. Пусть завод производит один вид продукта и имеет склад для хранения произведенной продукции. Количество хранимой на складе продукции описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = (U_t - S)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0. \quad (1)$$

Здесь  $X_t$  – уровень запасов продукции (фазовая координата),  $t \in [0, T]$ ,  $T$  – планируемый промежуток времени,  $U_t$  – скорость производства (управляющая функция),  $S$  – постоянный спрос,  $\sigma$  – постоянный коэффициент диффузии,  $W_t$  – стандартный винеровский процесс. Диффузионная составляющая в (1) отражает случайные колебания запасов продукции, связанные, например, с порчей продукции или с возвратом товара.

Требуется найти управление  $\hat{U}_T$  среди всех неупреждающих функций, которое доставляет минимум функционалу потерь

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^T (U_t^2 + X_t^2) dt + BX_T \right] \rightarrow \min. \quad (2)$$

Известно [2], что решение (1) может быть представлено в виде  $x_t = \Phi(y_t + W_t)$ , где  $y_t$  есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{U_t - S}{\sigma}, \quad y_0 = \Phi^{-1}(x_0), \quad (3)$$

$\Phi(v)$  – известная функция. Такое представление позволило автору совместно с Ф.С. Насыровым разработать [3] метод сведения стохастической задачи оптимального управления к детерминированной задаче.

---

<sup>1</sup>Уфимский государственный авиационный технический университет

С помощью метода из работы [3] стохастическая задача (1), (2) сведена к параметризованному семейству детерминированных задач

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{U_t - S}{\sigma}, \quad y_0 = \Phi^{-1}(x_0), \quad (4)$$

$$J = \int_0^T \left( U_t^2 + \Phi^2(y_t + W_t) \right) dt + B\Phi(y_T + W_T). \quad (5)$$

В задаче (4), (5) дифференциальное уравнение содержит не стохастический дифференциал, а функционал потерь математического ожидания, хотя оба содержат случайные функции. Поэтому эта задача для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$  может рассматриваться как детерминированная задача, для решения которой могут быть применены методы детерминированной теории оптимального управления.

Однако потраекторное решение (4), (5) может оказаться упреждающим. Поэтому автором показано, что детерминированная задача может быть модифицирована таким образом, что решение модифицированной задачи является неупреждающей функцией и потраекторно совпадает с решением исходной стохастической задачи (1)–(2). Модифицированная детерминированная задача имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{U_t - S}{\sigma}, \quad y_0 = \Phi^{-1}(x_0),$$

$$J = \int_0^T \left( U_t^2 + \Phi^2(y_t + W_t) + \lambda(t)U_t \right) dt + B\Phi(y_T + W_T),$$

где  $\lambda(t)$  – известная функция, построенная по коэффициентам уравнения и функционалу качества.

## Литература

- [1] *Sethi S.P., Thompson G.L.* Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics. – New York: Springer, 2006.
- [2] *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. – М.: Физматлит, 2011.
- [3] *Исмагилов Н.С., Насыров Ф.С.* О детерминированном подходе к задаче стохастического оптимального управления // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 51. № 6.

## ПРИБЛИЖАЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ

Кобылкин К.С.<sup>1,2</sup>

В работе исследуется геометрическая задача отделимости двух конечных множеств  $A$  и  $B$  в  $\mathbb{R}^d$  наименьшим по мощности семейством ориентированных гиперплоскостей в смысле логики большинства. Задачи разделения конечных множеств точек в самых различных смыслах возникают в задачах статистического обучения [1], комбинаторной геометрии [2, 3] и теории алгоритмической сложности [4]. Дадим определение полиэдральной отделимости в смысле произвольной булевой формулы, введенной Н. Мегиддо в [4]:

**Определение 1.** Два конечных непересекающихся множества  $A$  и  $B$  в  $\mathbb{R}^d$   $k$ -полиэдрально отделимы семейством ориентированных гиперплоскостей  $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i=1}^k$ , где

$$H_i = \{x : l_i(x) \triangleq (x_i, x) - x_i^0 = 0\},$$

в смысле булевой формулы  $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_k)$  от  $k$  аргументов, если соответствующая формула  $\varphi(\theta(l_1(x)), \dots, \theta(l_k(x)))$  истинна для всякого  $a \in A$  и ложна для любого  $b \in B$ , причем  $\theta(\alpha) = \text{true}$  при  $\alpha > 0$ ,  $\theta(\alpha) = \text{false}$  для  $\alpha < 0$ , где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $\mathbb{R}^d$ .

Зададим булеву формулу  $\text{MAJ}(\xi_1, \dots, \xi_k)$  [5] от нечетного числа аргументов как  $\frac{k+1}{2}$ -ю пороговую функцию: она дает истину при условии истинности не менее  $(k+1)/2$  ее аргументов, и ложь, когда по крайней мере  $\frac{k+1}{2}$  ее аргументов ложны. Для краткости будем писать  $\text{MAJ}(k)$ , не указывая явно аргументы мажоритарной формулы.

**Задача MASC-GP( $d$ )** (Хачай, [6]). Пусть заданы конечные непересекающиеся множества  $A$  и  $B$ , точки которых находятся в общем положении. Найти наименьший по мощности набор из нечетного числа  $k$  ориентированных гиперплоскостей,  $k$ -полиэдрально разделяющий множества  $A$  и  $B$  в смысле формулы  $\text{MAJ}(k)$ . (Здесь нечетное число  $k$  является минимизируемым критерием.)

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 13-07-00181, 13-01-00210 и программами Президиума РАН 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1.

Основным результатом доклада является зависящая от разделяемых множеств точная по порядку нижняя оценка для оптимального значения  $k_{\min}$  задачи **MASC-GP**( $d$ ) (числа разделяющих гиперплоскостей в ее оптимальном решении).

**Определение 2.** Под *монохромным островом* [7] понимается некоторое подмножество какого-то одного из двух множеств  $A$  или  $B$  (скажем, множества  $A$ ), выпуклая оболочка которого не пересекается с другим множеством (соответственно, с множеством  $B$ ).

Рассмотрим также мощность  $p_d$  минимального разбиения множества  $A \cup B$  монохромными островами с дизъюнктными выпуклыми оболочками. Обозначим через  $\bar{c} = \bar{c}(A, B) = \frac{|A \cup B|}{p_d}$  параметр так называемой *монохромной неравномерности* по аналогии с очень похожей величиной, введенной в работе Берега [8]. Геометрический смысл этого параметра – это максимальная средняя (по разбиению) мощность монохромного острова.

**Теорема 1.** Пусть  $q(x)$  – наименьшее нечетное число, большее или равное вещественному  $x$ . Тогда:  $k_{\min} \geq q(k_1)$ , где

$$k_1 = \begin{cases} q \left( \sqrt[d]{(d-1)! \left( \frac{|A \cup B|}{\bar{c}} - 1 \right)} \right), & \text{при } \bar{c} < 4^{-d} |A \cup B|, \\ q \left( \log_2 \frac{|A \cup B|}{\bar{c}} \right), & \text{если } \bar{c} \geq 4^{-d} |A \cup B|. \end{cases}$$

Имеется бесконечная серия примеров множеств  $A$  и  $B$ , для которых  $k_{\min}/k_1 \leq f(d)$ , где  $f(d)$  – не очень быстро растущая функция размерности  $d$ .

**Следствие.** Качество аппроксимации известного приближенного алгоритма Мазурова–Хачая [6] для решения задачи **MASC-GP**( $d$ ) со сложностью  $O(|A \cup B|)$  можно записать более точно как  $O(\sqrt[d]{\bar{c}} |A \cup B|^{d-1})$ . В частности, при  $d = 2$  эта величина равна  $O(\sqrt{\bar{c}} |A \cup B|)$ .

Рассмотрим частный случай задачи **MASC-GP**( $d$ ) при  $d = 2$ , наложим дополнительное ограничение  $x_i^0 > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , на пороговые коэффициенты разделяющих прямых и обозначим через **CMASC-GP**(2) полученную задачу. Пусть  $k'_{\min}$  – ее оптимальное значение. Несколько обобщив результат Вендела [9] для  $d = 2$ , можно получить следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $|A| = t|A \cup B|$ , где  $0 < t < 1$ . Если множества  $A$  и  $B$  распределены непрерывно и независимо друг от друга, при этом множество направлений векторов множества  $A$  равномерно распределено на единичной окружности с центром в 0, то существует приближенный алгоритм решения задачи **CMASC-GP**(2) со сложностью  $O(|A \cup B|)$ , для которого при большом  $|A \cup B|$  с близкой к единице вероятностью справедлива оценка:

$$\frac{k}{k'_{\min}} \leq \frac{2}{t},$$

где  $k$  – число прямых, возвращаемых этим приближенным алгоритмом.

## Литература

- [1] *Vapnik V.N.* Statistical Learning Theory. – Wiley, 1998.
- [2] *Рудаков К.В.* О числе гиперплоскостей, разделяющих конечные множества в евклидовом пространстве // Доклады АН СССР 1976. Т. 231, № 6. С. 1296–1299.
- [3] *Seara C.* On geometric separability. – PhD Thesis. 2002.
- [4] *Megiddo N.* On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. 1988. Vol. 3, № 1. Pp. 325–337.
- [5] *Valiant L.G.* Short monotone formulae for the majority function // Journal of Algorithms. 1984. Vol. 5, № 3. Pp. 363–366.
- [6] *Khachai M.Yu.* On Approximate Algorithm for Minimal Committee of a System of Linear Inequalities // Pattern Recognition and Image Analysis. 2003. Vol. 13, № 3. Pp. 459–464.
- [7] *Bautista C. et al.* Computing optimal islands // Operations Research Letters. 2011. Vol. 39, № 4. Pp. 246–251.
- [8] *Bereg S. et al.* On the coarseness of bicolored point sets // Operations Research Letters. 2013. Vol. 46, № 1. Pp. 65–77.
- [9] *Wendel J.G.* A problem in geometric probability // Mathematica Scandinavica. 1962. Vol. 11. Pp. 109–111.

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О ДЕМОНТАЖЕ

Кошелева М.С., Ченцов А.Г.<sup>1,2</sup>

В настоящей работе построен вариант метода динамического программирования (МДП) для решения конкретной задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования, в которой функции стоимости перемещений явным образом зависят от списка заданий. Эта особенность и ограничения возникают, в частности, в актуальной инженерной задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. Данный вариант является конкретизацией процедуры МДП [1–4]. Речь идёт о маршрутизации перемещений при радиационном воздействии излучающих элементов, подлежащих демонтажированию в той или иной очерёдности. Радиационное воздействие на работника определяется совокупностью излучающих элементов, которые ещё не демонтированы. При этом текущее воздействие каждого такого излучающего элемента на работника обратно пропорционально квадрату расстояния между ними; данное воздействие следует интегрировать вдоль траектории движения работника. Целью исследования в упомянутой конкретной задаче является определение маршрута перемещения работника, оптимального с точки зрения совокупной дозы радиации. Кроме того, в работе построен эффективный эвристический алгоритм.

**Постановка задачи.** Задано натуральное число  $N$ ,  $N \geq 2$ , определяющее количество заданий, подлежащих последовательному выполнению. Задания нумеруются числами из множества  $\overline{1, N}$ . Точку 0 рассматриваем в качестве стартового пункта (базы) процесса выполнения заданий с индексами из  $\overline{1, N}$ .

Мы располагаем возможностью выбора перестановки  $\lambda$  (маршрута) в  $\overline{1, N}$ . Выбор  $\lambda$  стеснен условиями предшествования, определяемыми посредством множества  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$ , адресных пар (отправитель–получатель); требуется, чтобы выбранный маршрут для каждой адресной пары обеспечивал посещение отправителя раньше, чем посещение получателя (случай  $\mathbf{K} = \emptyset$  не исключает-

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-90414-Укр\_ф\_а

ся и отвечает отсутствию ограничений в виде условий предшествования). Заданы функции стоимости  $\mathbf{c} : \overline{0, N} \times \overline{0, N} \times \mathfrak{N} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\mathbf{f} : \overline{0, N} \rightarrow [0, \infty]$ , где  $\mathfrak{N}$  – семейство всех непустых подмножеств  $\overline{1, N}$ .

Перемещения характеризуются затратами

$$\mathbf{c}(0, \lambda(1), \overline{1, N}) + \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}(\lambda(t), \lambda(t+1), \{\lambda(j) : j \in \overline{t+1, N}\}) + \mathbf{f}(\lambda(N)), \quad (1)$$

где  $\lambda$  –  $\mathbf{K}$ -допустимый маршрут (перестановка  $\overline{1, N}$ , удовлетворяющая условиям предшествования, см. [5, (2.1.5)]). Если  $t \in \overline{1, N}$ , то  $\mathbf{c}(\lambda(t), \lambda(t+1), \{\lambda(j) : j \in \overline{t+1, N}\})$  интерпретируется как доза облучения работника при перемещении из  $\lambda(t)$  в  $\lambda(t+1)$  в условиях, когда еще не демонтированы источники облучения, нумеруемые индексами из множества  $\{\lambda(j) : j \in \overline{t+1, N}\}$ . Выбором  $\lambda$  стремимся минимизировать значение (1) (суммарного радиационного воздействия).

**Метод динамического программирования.** Поставленную задачу решаем при помощи модифицированного МДП [1–4]. Обозначим через  $V$  значение (экстремум) возникающей экстремальной задачи. Для использования МДП ограничения задачи преобразуем к эквивалентной форме с помощью оператора  $\mathbf{I}$  [5, (2.2.27), (2.2.28)]. Тогда на  $\overline{0, N} \times \mathbf{N}$ , где  $\mathbf{N} = \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$ , определяется функция Беллмана, отвечающая расширению [1–4] исходной задачи и такая, что  $v(s, \emptyset) = \mathbf{f}(s) \ \forall s \in \overline{0, N}$  и  $v(0, \overline{1, N}) = V$ . Соответствующее уравнение Беллмана имеет вид:

$$v(s, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(s, j, K) + v(j, K \setminus \{j\})].$$

При  $s = 0$  и  $K = \overline{1, N}$  справедливо равенство, характеризующее глобальный экстремум:

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} [\mathbf{c}(0, j, \overline{1, N}) + v(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})].$$

При вычислительной реализации используются конструируемые на основе  $v$  слои функции Беллмана, получаемые в виде сужений  $v$  на соответствующие слои пространства позиций [5, §4.9].

**Заключение.** В работе построен оптимальный алгоритм с использованием модифицированного МДП для решения усложнённой



задачи курьера [6] в «точечной» постановке. Напомним, что исследованию задач в общей постановке (задачи о последовательном обходе мегаполисов) посвящены работы [1, 2, 4]. В применяемых процедурах заложен принцип активного использования ограничений для снижения вычислительной сложности, сокращения перебора.

Для решения задач большой размерности был разработан также эвристический алгоритм, гарантирующий соблюдение ограничений. Для точного и эвристического алгоритмов проведено сравнение на основе обширного вычислительного эксперимента; полученные результаты показали [3], что проигрыш эвристики по результату (для усредненных показателей) составляет 6.57%; расчет проводился для  $N = 21$  с условиями предшествования (20 адресных пар).

## Литература

- [1] *Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Обобщённая задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 2. С. 68–77.
- [2] *Ченцов А.Г.* К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2013. № 1. С. 59–82.
- [3] *Кошелева М.С., Ченцов А.Г.* Одна задача маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Тр. XV Междунар. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». Самара: Самар. НЦ РАН. 2013. С. 523–532.
- [4] *Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий // Доклады Ак. Наук. 2013. Т. 453, № 1. С. 20–23.
- [5] *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований. 2008.
- [6] *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. I. Вопросы теории; II. Точные алгоритмы. III. Приближенные ал-

горитмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9, С. 3–34; № 10, С. 3–29; № 11, С. 3–26.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АВТОРСТВА РУССКИХ ТЕКСТОВ

Логинов Н.А.<sup>1</sup>

Целью данной работы было решение задачи принадлежности русского текста одному из авторов, заданных заранее определенным множеством. С точки зрения машинного обучения, эту проблему можно рассмотреть как задачу многоклассовой классификации. Было исследовано четыре метода машинного обучения: метод ближайшего соседа, метод ближайшего центроида, метод опорных векторов и искусственная нейронная сеть.

Тестирования перечисленных методов проводилось на корпусе, состоящем из 393-х произведений семи русских писателей-классиков. Набор произведений каждого автора был поделен на три части: 50% исходного корпуса предназначалось для машинного обучения, вторая (25%) – для подгонки наилучших параметров алгоритмов (*validation set*), и третья (25%) – для тестирования результатов.

Основная идея решения состояла в том, чтобы представить текст в виде числового вектора. Каждая координата вектора при этом является значением некоего признака (например, средней длины предложения). Таким образом, построив для каждого текста из обучающей выборки его вектор, а также пометив этот текст классом его автора, мы можем передать этот набор векторов одному из алгоритмов машинного обучения. Алгоритм, в свою очередь, постарается найти наилучшие границы между классами (авторами).

Одним из решающих факторов, которые могут повлиять на качество классификации, является тот набор признаков, который будет характеризовать текст. Отобранное в итоге множество насчитывало в себе 80 признаков, а именно: *средняя длина предложения, среднее число знаков препинания в предложении, доля восклицатель-*

---

<sup>1</sup>УрФУ

ных предложений, средняя длина слова, словарный запас, относительная частота употребления служебных слов (59 слов) и относительная частота употребления частей речи (16 частей речи).

Итоговые результаты для каждого из алгоритмов вместе с указанием наилучших параметров представлены в Табл. 1.

Отдельно стоит сказать о методе опорных векторов (англ. SVM), который является бинарным линейным классификатором. Не все задачи классификации являются линейно разделимыми, и в этом случае алгоритму позволяют допускать ошибки, вводя дополнительный параметр, который играет роль величины штрафа за совершенные ошибки (параметр  $C$ ). Также был предложен метод, позволяющий на основе SVM строить нелинейные классификаторы. Идея заключается в том, что исходные вектора переводятся в пространство с более высокой размерностью, где скалярное произведение векторов было бы нелинейной функцией в исходном пространстве – такую функцию называют ядром.

Таблица 1: Сводная таблица результатов работы алгоритмов.

| Метод  | Accuracy | $F1$ |
|--|----------|------|
| Метод ближайшего центроида<br>норма $l_2$  | 69.06%   | 0.72 |
| Метод k-ближайших соседей<br>$k = 1$ , норма $l_1$   | 72.2%    | 0.80 |
| Метод опорных векторов<br>ядро – $rbf$ , $C = 3.2$ , $\gamma = 0.007$  | 90.9%    | 0.90 |
| Искусственная нейронная сеть:<br>$softmax$ функция выходного слоя,<br>логистическая функция скрытого слоя,<br>41 нейрон в скрытом слое | 88.8%    | 0.88 |

Лучше всех сработал метод опорных векторов с использованием радиальной базисной функции  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2)$  в качестве ядра, выдав 90.9% правильных ответов на тестовой выборке.

Далее была сделана попытка сократить количество вычисляемых признаков, чтобы оставить только наиболее релевантные из них.

Для решения этой задачи использовался алгоритм Recursive Feature Elimination (RFE).

Тринадцать наиболее релевантными признаками, дающими показатель ассигасу в 76%, оказались: относительная частота употребления служебных слов *и, а, да, еще, при, чтоб, наконец*, частота употребления глаголов и местоименных прилагательных, доля восклицательных предложений, среднее количество знаков препинания в предложении, словарный запас и средняя длина предложения в словах.

В заключение было проведено повторное обучение лучшего по результатам этого исследования алгоритма, но уже на новом наборе признаков.

Результаты эксперимента приведены в Табл. 2:

Таблица 2: Тестирование svm на новом наборе метрик ( $n$  – количество признаков)

| $n$ | $C$   | $\gamma$ | validation accuracy | test accuracy | validation f1 | test f1 |
|-----|-------|----------|---------------------|---------------|---------------|---------|
| 13  | 5.000 | 0.065    | 84.4%               | 90.1%         | 0.84          | 0.90    |
| 23  | 2.000 | 0.045    | 86.5%               | 92.1%         | 0.86          | 0.92    |
| 53  | 2.000 | 0.004    | 88.5%               | 94.1%         | 0.89          | 0.94    |

Тестирование на новом наборе признаков показало максимальное количество правильных ответов (94%) на 53 признаках, что является лучшим результатом всего исследования. В итоге можно утверждать, что при использовании выделенных нами признаков метод SVM практически применим для задачи установления авторства русских текстов.

## Литература

- [1] Juola P. Authorship Attribution // Foundations and Trends in Information Retrieval. Vol. 1. № 3. 2008. Pp. 233–334.

- [2] *Stamatatos E.* A Survey of Modern Authorship Attribution Methods // Journal of the American Society for Information Science and Technology. Vol. 60. № 3. 2009. Pp. 538–556.
- [3] *Hsu C.-W. Chang C.-C. Lin C.-J.* A Practical Guide to Support Vector Classification. Technical Report. Department of Computer Science, National Taiwan University. 2009.
- [4] *Chang C.-C., Lin C.-J.* LIBSVM: A Library for Support Vector Machines. Technical Report. Department of Computer Science, National Taiwan University. 2013.

## PTAS ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ ЕВКЛИДОВОЙ ЗАДАЧИ TSP

Незнахина Е.Д.<sup>1,2</sup>

В классической постановке задачи коммивояжера (TSP) нам дано  $n$  городов и для каждой пары городов  $i, j$  известно расстояние между ними  $d_{i,j}$ . Цель – найти замкнутый маршрут, посещающий все города в точности один раз и имеющий наименьшую стоимость (равную сумме расстояний между последовательно посещаемыми городами).

Известно, что даже евклидова задача коммивояжера NP-трудна [3]. Для метрической задачи коммивояжера существует  $\frac{3}{2}$ -приближенный алгоритм, полученный Н.Кристофидесом [2]. Наиболее важным результатом для задачи коммивояжера в евклидовом пространстве конечной размерности считается полиномиальная аппроксимационная схема (PTAS), обоснованная С.Аророй [1].

Как обычно, полиномиальной аппроксимационной схемой (PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации называем семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного  $\epsilon > 1$  приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью  $(1 + \frac{1}{\epsilon})$  за время, ограниченное сверху некоторым полиномом от длины записи ее исходных данных (при этом порядок и коэффициенты полинома могут, вообще говоря, зависеть от  $\epsilon$ ).

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-07-00181.

В данной работе предлагается обобщение PTAS Ароры для евклидовой задачи о двух коммивояжерах на плоскости. В указанной задаче на плоскости заданы  $n$  городов и для каждой пары  $i, j$  известно евклидово расстояние  $d_{i,j}$  между соответствующими городами. Цель – построить два замкнутых, вершинно непересекающихся маршрута, посещающих все города, суммарная стоимость которых минимальна.

Основная идея построения PTAS Ароры [1] состоит в рекурсивном разбиении плоскости на вложенные квадраты с последующим обоснованием существования маршрута, не более, чем в  $(1 + \frac{1}{c})$  раз отличающегося от оптимального и пересекающего границы всех построенных квадратов не слишком часто. Метод доказательства опирается на процедуру динамического программирования.

Мы начинаем с рассмотрения минимальных по включению квадратов в разбиении, строим отрезки маршрута наименьшей стоимости, которые посещают все города в данных клетках. Далее, переходим к квадрату, составленному из четырех меньших и ищем отрезки маршрута, посещающие все города в данном квадрате, путем составления их из отрезков, полученных на предыдущем шаге и т.д. В конце мы построим маршрут наименьшей стоимости, посещающий все города.

PTAS для евклидовой задачи о двух коммивояжерах основана на следующих модификациях PTAS Ароры. Во-первых, необходимо начинать построение маршрутов из двух различных городов, чтобы гарантировать получение в точности двух маршрутов коммивояжера. Во-вторых, полученные на каждом шаге отрезки маршрута нужно красить в два цвета, перебирая все возможные комбинации и выбирая лучшую путем минимизации целевой функции. В работе приведена оценка временной сложности PTAS для обобщенной задачи коммивояжера.

## Литература

- [1] *Arora S.* Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean Traveling Salesman and Other Geometric Problems // Journal of the ACM. 1998. Vol. 45, № 5. Pp. 753–782.

- [2] *Christofides N.* Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // In Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity. 1976. P. 441.
- [3] *Papadimitriou C.* Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 4. 1977. Pp. 237–244.

## **РАЗРАБОТКА ПРОТОТИПА ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ РАЗГРАНИЧЕНИЯ ПРАВ ДОСТУПА НА ОСНОВЕ ИЗБИРАТЕЛЬНОЙ МНОГОФАКТОРНОЙ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ АУТЕНТИФИКАЦИИ**

Ручай А.Н.<sup>1,2</sup>

Разработчики и исследователи биометрических систем предлагают программные реализации на основе, как правило, одной биометрической характеристики без дополнительных инструментов и модулей, что создает проблемы при их использовании и эксплуатации [1]. Однако, современные тенденции показывают стремление использовать системный подход для создания мультибиометрических систем аутентификации личности. Здесь под мультибиометрической системой будем понимать систему с использованием нескольких биометрических характеристик человека. В многофакторных системах используют не только различные биометрические характеристики, но и другие методы аутентификации, например, PIN-код, пароль, ритм ввода пароля, токены.

В зависимости от различных условий и факторов, в частности от доступности электронных средств, от удобства, от стойкости к атакам и уязвимостям, от болезней или увечий пользователей, может быть выбрана биометрическая аутентификация на основе любых таких биометрических характеристик, как ритм ввода пароля, голос, динамика подписи и графическое распознавание. Например, если необходимо разграничить права доступа в изолированном помещении без посторонних, то может быть использована аутентификация по голосу, по ритму ввода пароля или графическому распознаванию. Если помещение, наоборот, не обладает такими условиями, то

---

<sup>1</sup>Челябинский государственный университет

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 14-07-31049.

аутентификация может быть осуществлена на основе ритма ввода пароля или по динамике подписи. Для осуществления аутентификации в мобильных или сенсорных устройствах может быть выбрана аутентификация по ритму ввода пароля, по динамике подписи или графическому распознаванию. На пропускных пунктах возможна аутентификация по динамике подписи.

В настоящее время актуальной является задача разработки универсальных модулей, реализующих разграничение прав доступа на основе биометрической аутентификации.

Кроме того, системы разграничения доступа на основе биометрической аутентификации имеют большую практическую значимость и преимущества: уникальность, неотъемлемость и неотчуждаемость биометрической характеристики; затруднения при проведении атаки подбора по биометрической характеристике; независимость от операционной системы и кодировок символов; избирательность и многофакторность аутентификации; отсутствие ошибок третьего рода, когда невозможно аутентифицировать человека из-за болезней и увечий.

Целью данного проекта была разработка, исследование и реализация централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации с клиент-серверной архитектурой. Для этого необходимо было решить следующие задачи: разработка принципов построения системы, архитектуры, протокола взаимодействия; разработка и реализация центра и модулей биометрической аутентификации; оценка надежности и тестирование работы модулей аутентификации по различным биометрическим характеристикам.

С целью разработки и реализации централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации были сформулированы требования к ее архитектуре [3]: возможность интеграции в рамках одной системы нескольких методов биометрической аутентификации; возможность замены и модификации библиотек, в которых реализованы методы биометрической аутентификации; гибкость в конфигурировании; обеспечение комплексной безопасности и защиты биометрических данных; поддержка существующих российских стандартов в сфере биометрических технологий.

На основе анализа модели существующих атак и защиты можно



сделать вывод, что многие проблемы и атаки предотвращаются с помощью цифрового кодирования, временных меток и шифрования открытого канала передачи данных [5]. В связи с этим система разграничения прав доступа должна быть реализована с клиент-серверной архитектурой, что дает следующие преимущества: повышается общая безопасность системы; один мощный сервер сможет одновременно обслуживать множество клиентов; обеспечивается минимальная нагрузка на компьютер клиента; сводится к минимуму количество клиентских настроек; сервер можно переносить под любую ОС, а клиентские части останутся неизменными; клиентскую часть также можно написать под другую ОС, а сервер останется неизменным.

В результате всей работы был разработан прототип централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации.

Важным этапом для реализации такой биометрической системы была разработка архитектуры системы и протокола передачи биометрических данных. Кроме того, был проведен анализ возможных атак на разработанную систему, и сделаны выводы и рекомендации по методам защиты от них.

Однако, существуют направления для дальнейшего развития разработанной системы: обеспечение большей универсальности, применения других биометрических характеристик, увеличения производительности и надежности.

## Литература

- [1] Ручай А.Н. Текстозависимая верификация диктора: математическая модель, статистические исследования, комплекс программ. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
- [2] Ручай А.Н. Разработка универсального комплекса модулей для разграничения прав доступа в ОС Windows XP на основе биометрической аутентификации // Безопасность информационных технологий. № 2. 2013. С. 74–78.
- [3] Ушмаев О.С. Сервисно-ориентированный подход к разработке мультibiометрических технологий // Информатика и ее применения. Т. 2. Вып. 3. 2008. С. 41–53.

- [4] Ручай А.Н. Прототип централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации // Безопасность информационных технологий. № 1. 2013. С. 118–120.
- [5] Ручай А.Н. Модель атак и защиты биометрических систем распознавания диктора // Доклады ТУСУРа. № 1 (23). 2011. С. 96–100.

## ИЗУЧЕНИЕ СТИЛЯ ТЕКСТА ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫХ МЕТОДОВ

Усталов Д.А.<sup>1</sup>

За последние десять лет теоретико-графовые методы обработки естественного языка получили широкую популярность и успешно применяются при решении таких задач, как автоматическое реферирование, извлечение ключевых слов, анализ тональности и т. п.

Современные исследования в области автоматического определения стиля документа используют кросс-языковые методы с использованием параллельных корпусов [1] и методы классификации с открытым множеством классов [2].

Каждый функциональный стиль речи обладает уникальными особенностями повествования, которые влияют на синтаксическую структуру предложений в тексте такого стиля.

Например, научный текст содержит большое количество многословных терминов, а художественный текст характерен применением различных стилистических приёмов.

Возникает интересный вопрос: можно ли рассматривать синтаксическую структуру предложений, составляющих текст, в качестве стилового признака?

**Постановка задачи.** В рамках данного поискового исследования:

- подготовлена коллекция документов  $D$ , причём каждый  $d \in D$  представляет один из трёх заданных стилей текста,  $|D| = 60$ ;

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

- построено отображение  $D \rightarrow G$  таким образом, что неориентированный граф  $g_i \in G$  имеет вид  $g_i = (V, E)$ , где  $V$  – множество имён прилагательных и существительных в составе текста  $d_i \in D$ ,  $E$  – множество ребёр, формируемых на основании совместной встречаемости пары слов  $w_1, w_2 \in V$ ;
- для каждого графа  $g_i \in G$  вычислена средняя степень вершин, средняя длина пути, плотность, диаметр, модулярность;
- выполнена визуализация полученных характеристик графов.

**Коллекция документов.** Коллекция документов состоит из 60 свободных текстов на русском языке, представляющих три функциональных стиля речи:

- научный стиль (каталог `sci`, источник – *КиберЛенинка*) – двадцать фрагментов научных статей по физике и информатике, состоящих преимущественно из введений и заключений;
- публицистический стиль (каталог `pub`, источники – *ЧасКор* и *Викиновости*) – двадцать случайных новостей, актуальных на момент написания данной статьи;
- художественный стиль (каталог `lit`, источник – *Викитека*) – двадцать фрагментов из русскоязычной прозы.

Каждый текст содержит приблизительно 8–12 абзацев в формате `text/plain` и кодировке UTF-8. Коллекция документов распространяется<sup>2</sup> на условиях лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike.

**Результаты.** На рис. представлены следующие количественные характеристики каждого графа: средняя степень вершин графа, средняя длина пути в графе, плотность графа, диаметр графа.

Для документов научного стиля характерна высокая степень вершин графа (`Avg.Degree`), что объясняется наличием большого количества многословных терминов. Из этого следует большая связность научных текстов, что видно по графику средней длины пути (`Avg.Path`).

---

<sup>2</sup><http://ustalov.imm.uran.ru/pub/sopromat2014.tar.gz>

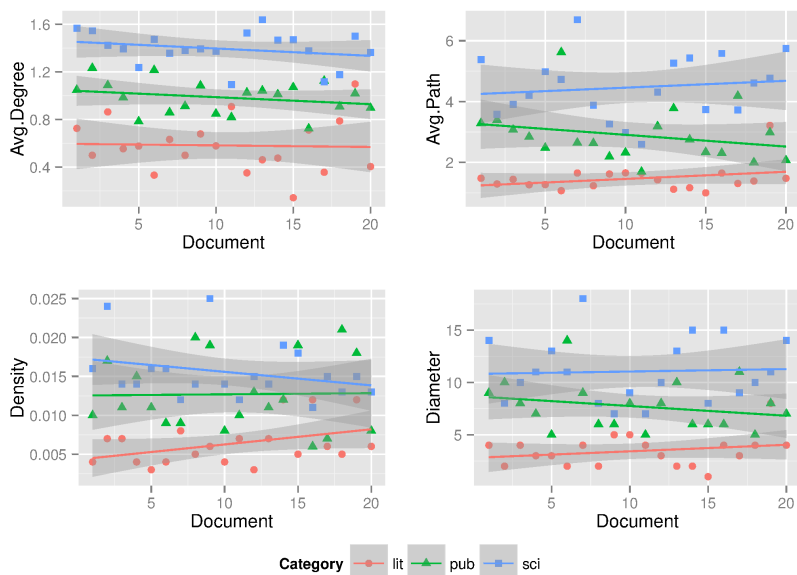


Рис. 1: Количественные характеристики графов по стилям в коллекции документов

Низкие значения плотности (*Density*) и диаметра (*Diameter*) графов художественных текстов объясняются наличием прямой речи, содержащей преимущественно наречия, междометия и другие неноминативные классы слов.

Резюмируя, можно отметить, что проявленные закономерности в текстах дают основания допускать возможность построения стилевого классификатора. Для этого необходимо снизить зашумлённость данных и провести эксперименты на более крупной коллекции документов.

## Литература

- [1] *Petrenz P., Webber B.* Robust cross-lingual genre classification through comparable corpora / The 5th Workshop on Building and Using Comparable Corpora. 2012. Pp. 1–9.

- [2] *Pritsos D., Stamatatos E.* Open-Set Classification for Automated Genre Identification // *Advances in Information Retrieval*. 2013. Vol. 7814. Pp. 207–213.

## ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА ДЛЯ ПРОСТОГО ЦИКЛА

Шангин Р.Э.<sup>1,2</sup>

В работе рассматривается дискретная задача Вебера [1, 2], когда размещаемый граф имеет вид простого цикла.

Пусть  $G = (J, E)$  – простой цикл, где  $J$  – множество вершин (размещаемые объекты),  $E$  – множество ребер графа  $G$  (связи между размещаемыми объектами). Пусть  $V$  – конечное множество позиций (точек), предназначенных для размещения вершин графа  $G$ . Размещением вершин графа  $G$  назовем однозначное отображение  $\pi : J \rightarrow V$ , то есть вершина  $i \in J$  размещается в позицию  $\vartheta_i \in V$ .

Обозначим через  $p(i, \vartheta_i)$  функцию стоимости размещения вершины  $i \in J$  в позиции  $\vartheta_i \in V$ , и  $c([i, j], \vartheta_i, \vartheta_j)$  – функцию стоимости размещения ребра  $[i, j] \in E$  на  $V^2$ , при размещении его концевых вершин  $i, j \in J$  в позициях  $\vartheta_i, \vartheta_j \in V$  соответственно.

Требуется разместить вершины графа  $G$  в позициях  $V$  таким образом, чтобы суммарная стоимость размещения вершин и ребер графа  $G$  была минимальной:

$$F(\pi) = \sum_{[i,j] \in E} c([i, j], \pi(i), \pi(j)) + \sum_{i \in J} p(i, \pi(i)) \rightarrow \min_{\pi}. \quad (1)$$

Несмотря на множество известных полиномиальных алгоритмов для частных случаев дискретной задачи Вебера, известно, что в общем случае она  $NP$ -трудна [3].

Обозначим тройкой  $(G, V, F)$  рассматриваемую дискретную задачу Вебера (1). Предлагается полиномиальный алгоритм СуWPA, основанный на динамическом программировании (ДП), находящий оптимальное решение задачи  $(G, V, F)$ .

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

<sup>2</sup>Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.0395.

Пусть  $s \in J$  – произвольная вершина цикла  $G$  и  $T = (I, W)$  – подграф графа  $G$ , индуцированный множеством вершин  $J \setminus \{s\}$ . Положим, что  $G(\vartheta_s)$  – это граф  $G$ , в котором вершина  $s$  размещена в позицию  $\vartheta_s$ . Исходную задачу  $(G, V, F)$  разобьем на ряд подзадач  $(G(\vartheta_s), V, F)$  для любых  $\vartheta_s \in V$ . Решение каждой подзадачи  $(G(\vartheta_s), V, F)$ , в свою очередь, разбивается на  $N + 1$  шагов ДП.

#### АЛГОРИТМ CyWPA.

**Этап 0.** Выбрать произвольным образом вершину  $s \in J$ . Определить подграф  $T = (I, W)$  и на множестве его вершин задать отношение частичного порядка, где корень дерева  $T$  – висячая вершина.

**Этап 1.** Для каждого  $\vartheta_s \in V$  решить подзадачу  $(G(\vartheta_s), V, F)$ :

*Шаг 1 процесса ДП.* Для каждого  $\vartheta_1 \in V$  вычислить значение функции Беллмана  $f_1(\vartheta_1)$  и определить множество размещения  $V(\vartheta_1)$  по формулам

$$f_1(\vartheta_1) = p(1, \vartheta_1) + c([1, s], \vartheta_1, \vartheta_s) + p(s, \vartheta_s); \quad V(\vartheta_1) = \{\vartheta_1\} \cup \{\vartheta_s\}.$$

*Шаг  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ) процесса ДП.* Для каждого  $\vartheta_i \in V$  и любого  $\vartheta_{i-1} \in V$  вычислить значение функции стоимости  $R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1})$ :

$$R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1}) = p(i, \vartheta_i) + c([i, i-1], \vartheta_i, \vartheta_{i-1}) + f_{i-1}(\vartheta_{i-1}).$$

Если  $i = N$ , то значение функции  $R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1})$  вычислить по формуле:

$$R(\vartheta_{i_N}, \vartheta_{i_N-1}) = R(\vartheta_{i_N}, \vartheta_{i_N-1}) + c([i_N, s], \vartheta_{i_N}, \vartheta_s).$$

Для каждого  $\vartheta_i \in V$  вычислить значение функции Беллмана  $f_i(\vartheta_i)$  и определить множество размещения  $V(\vartheta_i)$  по формулам:

$$f_i(\vartheta_i) = \min_{\vartheta_{i-1} \in V} \{R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1})\};$$

$$V(\vartheta_i) = \{\vartheta_i\} \cup V(\vartheta_{i-1}^*) : R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1}^*) = f_i(\vartheta_i).$$

*Шаг  $N+1$  процесса ДП.* Определить оптимальное размещение  $\pi_{G(\vartheta_s)}$  вершин графа  $G(\vartheta_s)$  и стоимость  $F_{G(\vartheta_s)}$  такого оптимального размещения по формулам

$$\pi_{G(\vartheta_s)} = V(\vartheta_{i_N}^*) : \vartheta_{i_N}^* = \arg \min_{\vartheta_{i_N} \in V} \{f_N(\vartheta_{i_N})\};$$

$$F_{G(\vartheta_s)} = \min_{\vartheta_{i_N} \in V} \{f_N(\vartheta_{i_N})\}.$$

**Этап 2.** После того как решение подзадач  $(G(\vartheta_s), V, F)$  для каждого  $\vartheta_s \in V$  найдено, определить оптимальное решение  $\pi_G^*$  исходной задачи  $(G, V, F)$ , где  $\pi_G^* = \pi_{G(\vartheta_s^*)} : \vartheta_s^* = \arg \min_{\vartheta_s \in V} \{F_{G(\vartheta_s)}\}$ .

**Стоп.**

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Предложенный алгоритм находит точное решение дискретной задачи Вебера  $(G, V, F)$ , где  $G$  – простой цикл.*

**Теорема 2.** *Вычислительная сложность алгоритма не превосходит  $O(|V|^3 \cdot |J|)$  операций. Пространственная сложность алгоритма равна  $O(|V|^2)$  памяти.*

Алгоритм был реализован на ЭВМ в среде MATLAB. Проведен вычислительный эксперимент по анализу эффективности предложенного алгоритма в сравнении с пакетом IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.2.

Экспериментально установлено, что среднее время решения дискретной задачи Вебера размерности  $|J| = 100, |V| = 100$  для простого цикла и конечного множества позиций размещения с помощью предложенного алгоритма CyWPA не превысило четырехсот секунд, в то время как с помощью пакета IBM ILOG CPLEX 12.2 не удалось получить решение для задачи размерности  $|J| = 40, |V| = 40$  и выше за приемлемое время (1000 с). Следует отметить, что среднее время решения задачи Вебера размерности  $|J| = 5, |V| = 5$  и ниже с помощью предложенного алгоритма значительно превзошло среднее время работы пакета IBM ILOG CPLEX.

Из результатов проведенного вычислительного эксперимента следует, что применение предложенного алгоритма перспективно для решения дискретной задачи Вебера для простого цикла средней и большой размерности.

## Литература

- [1] *Panyukov A.V., Pelzwerger B.V. Polynomial Algorithms to Finite Veber Problem for a Tree Network // Journal of Computational and Applied Math. 1991. Vol. 35. Pp. 291–296.*

- [2] *Забудский Г.Г., Филимонов Д.В.* О минимаксной и минисуммной задачах размещения на сетях // Труды XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения». Омск, 2001. С. 150–155.
- [3] *Панюков А.В.* Модели и методы решения задач построения и идентификации геометрического размещения. Диссертация ... д-ра физ.-мат. наук по спец. 05.13.16. 1999.



## О РЕЗУЛЬТАТАХ ОБРАБОТКИ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ ГИДРОЛОКАТОРА БОКОВОГО ОБЗОРА

Игумнов Г.А.<sup>1</sup>

В докладе излагаются результаты совместных исследований ИММ УрО РАН и ИПМТ ДВО РАН за 2013 г., связанных с решением задачи синтезирования апертуры многоканального ГБО [1]. В этих исследованиях были использованы методы, описанные в работах [2,3]. Имеющийся опыт позволяет сделать вывод, что путем синтезирования апертуры ГБО можно значительно повысить разрешение эхолокационного изображения, что весьма важно для применения ГБО в качестве системы акустического зрения дальнего радиуса действия на борту автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА). В последнее десятилетие появились гидролокаторы и описания методик обработки эхолокационных данных, которые позволяют даже для небольших и относительно дешевых систем различать малоразмерные объекты на расстоянии в сотни метров [2]. Это, несомненно, является революцией в области обработки эхолокационных сигналов.

В ИПМТ ДВО РАН был изготовлен многофункциональный аппаратно-программный комплекс (АПК) «Синтез», назначение которого состоит в отработке и тестировании в морских условиях перспективных гидролокационных систем, в частности, ГБО с синтезированной апертурой. Приемная антенна комплекса с рабочей частотой 75-85 кГц состоит из восьми ячеек длиной 0.076 м с расстоянием между их фазовыми центрами  $d = 0.078$  м. Ширина диаграммы направленности каждой приемной ячейки в горизонтальной плоскости составляет  $\Theta = 15^\circ$  при длине волны  $\lambda = 0.02$  м. Особенностью комплекса является возможность сохранения многоканальной информации в самом первичном виде, почти не искаженном какой-либо обработкой. На данный момент АПК «Синтез» установлен на буксируемый аппарат, что снижает стабильность его движения и повышает искажения, вносимые в реальные данные.

В ходе работы были изучены навигационные данные, полученные с АПК «Синтез». На основании данных с GPS-системы буксирую-

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

щего корабля и информации о курсовой направленности с датчиков АПК была восстановлена траектория движения аппарата. Из-за высокого уровня курсовой неустойчивости (курс колебался в пределах  $6^\circ$  при требуемой устойчивости  $0.5^\circ$ ) большая часть данных непригодна для дальнейшей обработки, но был найден участок с относительно прямолинейным движением, на котором присутствовали данные, похожие на смоделированный сигнал точечного отражателя [1]. После компенсации траекторных отклонений для этих данных, для уменьшения расстояния между отсчетами два канала были объединены, после чего было проведено синтезирование данных. Результат выправления и синтезирования можно увидеть на рис. 1. В результате синтезирования отчетливо выделился точечный отражатель, что позволяет говорить о принципиальной возможности такой обработки реальных данных, получаемых с АПК «Синтез».

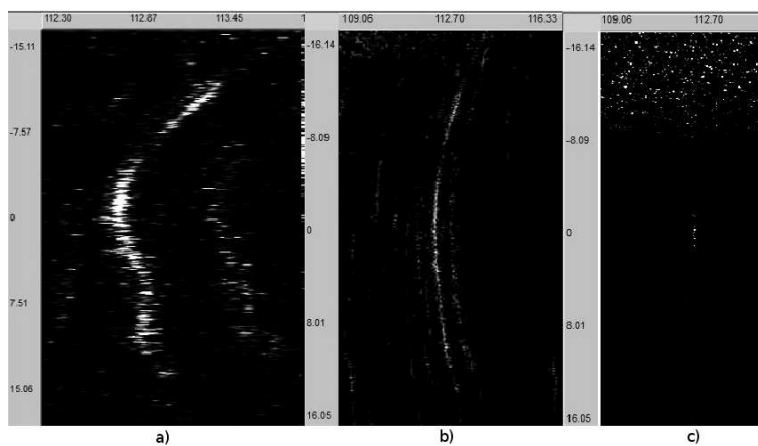


Рис. 1: а) ЛЧМ-сжатый сигнал без применения траекторных данных; б) ЛЧМ-сжатый сигнал с внесением информации о траектории, полученной с навигационных систем; в) Результат, полученный при синтезировании б)

В ходе дальнейшей работы планируется применить к этому фрагменту данных алгоритмы микронавигации и автофокусировки, для улучшения результатов синтезирования, однако для достижения бо-

лее серьезных результатов необходимо повышение курсовой устойчивости аппаратной части комплекса «Синтез», что невозможно без установки его на борт АНПА.

## Литература

- [1] Агеев А.Л., Игумнов Г.А. Костоусов В.Б., Агафонов И.Б., Золотарев В.В., Мадисон Е.А. Синтезирование апертуры многоканального гидролокатора бокового обзора с компенсацией траекторных неустойчивостей // Подводные исслед. и робототехника. 2012. № 2 (14). С. 13–27.
- [2] Roy Edgar Hansen. Introduction to Synthetic Aperture Sonar. In: Sonar Systems. InTech, 2011.
- [3] Callow H.J. Signal Processing for Synthetic Aperture Sonar Image Enhancement: a thesis ... of Doctor of Philosophy in Electrical and Electronic Engineering at the Univ. of Canterbury. Christchurch, New Zealand, 2003.

## ПОИСК ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КОНТУРОВ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАФА

Корнилов Ф.А.<sup>1,2</sup>

Преобразование Хафа [1] является одним из базовых методов поиска на изображениях заданных аналитически кривых с использованием процедуры голосования. Параметры искомой кривой образуют пространство, в котором осуществляется поиск. Заполнение пространства параметров (или аккумуляторного пространства) происходит с помощью процедуры голосования. Исходный алгоритм преобразования Хафа был разработан для поиска прямых линий. Если

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН при финансовой поддержке УрО РАН «Динамические системы и теория управления» (проект 12-П-1-1022) и «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» (проект 12-П-1-1023).

прямая задана уравнением

$$y = kx + b$$

с параметрами  $k$  и  $b$ , то пространство параметров будет двумерным. Чтобы использовать преобразование Хафа, исходное изображение контуров бинаризуется и для каждой превосходящей порог точки исходного пространства  $(x, y)$  определяется множество прямых, которые могут через нее проходить. Это множество задает в пространстве Хафа некоторую кривую. Данная процедура называется голосованием – каждая точка  $(x, y)$  голосует за множество прямых, которые могли бы через нее проходить. Перебор всех точек исходного изображения заполняет аккумулятор, в котором далее ищутся локальные максимумы, которые определяют параметры искоемых прямых. Аналогичным образом можно искать любые аналитически заданные кривые: например, окружности, для которых пространство Хафа будет трехмерным.

Модификация данного алгоритма для поиска произвольных кривых называется обобщенным преобразованием Хафа [2] и использует принципы сравнения шаблонов. Для этого осуществляется поиск положения заданной шаблоном искомой кривой на изображении: выбирается центр фигуры (например, центр тяжести) и множество точек на границе, после чего строится *просмотровая таблица*, в которой для каждой граничной точки записывается расстояние от выбранного центра и угол между этим расстоянием и вектором нормали. Таким образом осуществляется запоминание формы фигуры. Теперь каждая точка исходного изображения  $(x, y)$  отождествляется с точками просмотрной таблицы и голосует за набор возможных центров фигуры.

В данной работе приводится описание метода поиска прямоугольников на изображениях с помощью преобразования Хафа. В качестве иллюстрации будет использована задача обнаружения прямоугольных домов на космоснимках земной поверхности. Предобработка состоит в применении к исходному изображению оператора Собеля [3] и поиска прямоугольников среди найденных контуров. Прямоугольник можно задать пятью параметрами: координаты центра, высота, ширина и угол наклона. Соответственно, пространство Хафа также будет пятимерным. Поиск локальных максимумов в таком пространстве – задача нетривиальная и крайне сложная вычислительно.

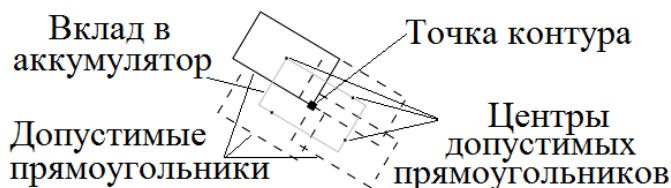


Рис. 1: Вклад в аккумулятор точки контура.

Поэтому предлагается следующий подход (рис. 1): зафиксируем размеры прямоугольника и угол его наклона, тем самым ограничив размерность пространства Хафа двумя переменными – координатами центра прямоугольника. Тогда аккумулятор представляет собой часть плоскости, совпадающей по размеру с исходным изображением. После этого будем перебирать все найденные оператором Собеля точки контуров. Каждая такая точка дает вклад в аккумулятор (по умолчанию равный единице) в виде прямоугольника (составленного из центров допустимых прямоугольников, т.е. тех, которые могли бы проходить через рассматриваемую точку контура) с зафиксированными размерами и наклоном.

В результате значение каждого элемента аккумулятора соответствует числу точек, проголосовавших за прямоугольник фиксированного размера с центром в данной точке. Теперь, перебирая все возможные размеры и углы наклона прямоугольников, составляется набор аккумуляторов, из которых строится результирующий аккумулятор – как максимум по каждой точке аккумуляторов из набора, но при этом также запоминается список параметров прямоугольника, соответствующий найденному максимуму. После этого в результирующем аккумуляторе осуществляется поиск локальных максимумов, задающих искомые прямоугольники. На рис. 2 представлен результат работы предложенного алгоритма.

## Литература

- [1] *Hough P.V.C.* Methods, Means for Recognizing Complex Patterns / U.S., Patent 3069654, 1962.

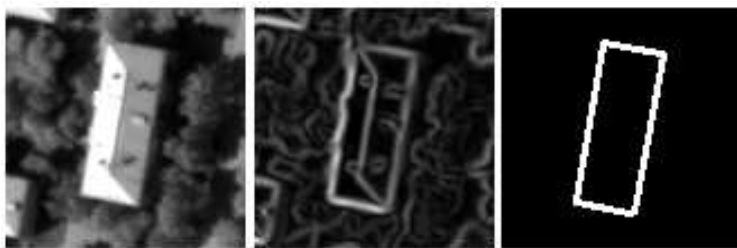


Рис. 2: Исходное изображение, найденные оператором Собеля контуры и обнаруженный прямоугольник.

- [2] Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржин А.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения: Курс лекций и практических занятий – М.: Физматкнига, 2010.
- [3] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Пер. с англ. М.: Техносфера, 2005.

## О ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ И ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ

Костоусов К.В.<sup>1,2</sup>

Для автоматического обновления топографических карт, а также для навигации по геофизическим полям [1, 2], актуальной подзадачей является задача обнаружения и локализации домов и других сооружений на космических и аэро-снимках.

Чаще всего изображения крыш таких объектов имеют прямоугольную форму либо могут быть разбиты на несколько прямоугольных частей. Цель настоящей работы – математически сформулировать и решить задачи обнаружения и локализации прямоугольных

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН, при финансовой поддержке УрО РАН (проекты № 12-П-1-1022, 12-П-1-1023).

объектов на изображении. Рассматривается простейший случай, когда изображение бинарное (т.е. каждый пиксель принимает значение 0 – черный либо 1 – белый).

Сформулируем задачу обнаружения прямоугольного объекта.

**Задача 1.** Пусть генерируется случайное бинарное изображение размером  $W \cdot H = N$  (значение каждого пикселя независимо и равновероятно). После этого его левая нижняя прямоугольная область размером  $w \cdot h = n$  (размеры  $w \leq W, h \leq H$  считаем заранее фиксированными) с вероятностью  $\frac{1}{2}$  закрашивается белым. Если закрашивание осуществлено, то на эту область еще накладывается шум: с вероятностью  $p = \frac{1}{4}$  каждый из  $n$  пикселей независимо меняет свой цвет на противоположный. Требуется построить детерминированный алгоритм, который бы по такому случайному изображению определял, было ли закрашивание, и имел наименьшую вероятность ошибки в классе всех таких алгоритмов.

Зафиксируем некоторую нумерацию пикселей входного изображения так, чтобы первые  $n$  номеров соответствовали его левой нижней прямоугольной части размером  $w \cdot h$ . Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_N$  – значения всех пикселей входного изображения. Пусть  $A$  – некоторый алгоритм из класса допустимых алгоритмов, т.е. по набору  $b_1, \dots, b_N$  он выдает значение  $A(b_1, \dots, b_N) \in \{0, 1\}$  где 0 означает, что закрашивания не было, а 1 – что закрашивание было.

**Предложение 1.** Алгоритм  $A$  имеет наименьшую возможную вероятность ошибки тогда и только тогда, когда для каждого набора  $b_1, \dots, b_N$

$$A(b_1, \dots, b_N) = \begin{cases} 1, & \text{если } p^{(n - \sum_{j=1}^n b_j)} (1 - p)^{\sum_{j=1}^n b_j} > \frac{1}{2^n}; \\ 0, & \text{если выполнено обратное строгое неравенство.} \end{cases}$$

При этом для тех наборов  $b_1, \dots, b_N$ , для которых имеет место точное равенство, решение алгоритма может быть любым: вероятность ошибки от этого не зависит.

Сформулируем задачу локализации прямоугольного объекта.

**Задача 2.** Пусть генерируется случайное бинарное изображение размером  $W \cdot H = N$ . После этого случайно выбирается прямоугольная подобласть размером  $w \cdot h = n$  со сторонами, параллельными

сторонам всего изображения (размеры  $w \leq W, h \leq H$  считаем заранее фиксированными), и закрашивается белым. Затем на эту под-область накладывается шум: с вероятностью  $p = \frac{1}{4}$  каждый из  $n$  пикселей независимо меняет свой цвет на противоположный. Требуется построить детерминированный алгоритм, который бы по такому случайному изображению определял положение закрашенной области и имел наименьшую вероятность ошибки в классе всех таких алгоритмов.

Пусть  $m = (W - w + 1)(H - h + 1)$  – количество возможных положений закрашенной области. Индексы пикселей, соответствующие  $k$ -му положению закрашенной области ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ), обозначим через  $i(k, 1), i(k, 2), \dots, i(k, n)$ . Пусть  $A$  – некоторый алгоритм из класса допустимых алгоритмов, т.е. по набору  $b_1, \dots, b_N$  он выдает значение  $A(b_1, \dots, b_N) \in \{1, \dots, m\}$ , которое означает номер позиции закрашенной области.

**Предложение 2.** *Алгоритм  $A$  имеет наименьшую возможную вероятность ошибки тогда и только тогда, когда для каждого набора  $b_1, \dots, b_N$*

$$A(b_1, \dots, b_N) = \arg \max_k p^{(n - \sum_{j=1}^n b_{i(k,j)})} (1 - p)^{\sum_{j=1}^n b_{i(k,j)}}.$$

При этом для тех наборов  $b_1, \dots, b_N$ , для которых максимум не единственный, алгоритм может выбрать любой из них.

Сформулируем задачу обнаружения и локализации прямоугольного объекта.

**Задача 3.** Пусть генерируется случайное бинарное изображение размером  $W \cdot H = N$ . После этого с вероятностью  $\frac{1}{2}$  делается следующее. Выбирается прямоугольная подобласть размером  $w \cdot h = n$  со сторонами, параллельными сторонам всего изображения (размеры  $w \leq W, h \leq H$  считаем заранее фиксированными), и закрашивается белым. Затем на эту подобласть накладывается шум: с вероятностью  $p = \frac{1}{4}$  каждый из  $n$  пикселей независимо меняет свой цвет на противоположный. Требуется построить детерминированный алгоритм, который бы по такому случайному изображению определял, было ли закрашивание, если да, то находил бы положение закрашенной области, и имел наименьшую вероятность ошибки в классе всех таких алгоритмов.



Пусть  $A$  – некоторый алгоритм из класса допустимых алгоритмов, т.е. по набору  $b_1, \dots, b_N$  алгоритм  $A$  выдает значение  $A(b_1, \dots, b_N) \in \{0, 1, \dots, m\}$ , где 0 означает, что закрашивания не было, а положительное число означает номер положения закрашенной области.

**Предложение 3.** Алгоритм  $A$  имеет наименьшую возможную вероятность ошибки тогда и только тогда, когда для каждого набора  $b_1, \dots, b_N$

$$A(b_1, \dots, b_N) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{m} \max_k p^{(n - \sum_{j=1}^n b_{i(k,j)})} (1-p)^{\sum_{j=1}^n b_{i(k,j)}} < \frac{1}{2^n}; \\ \text{аргумент максимума,} & \\ \text{если выполнено обратное строгое неравенство.} & \end{cases}$$

При этом для тех наборов  $b_1, \dots, b_N$ , для которых имеет место точное равенство, значение может вычисляться по любой из веток. Если значение вычисляется по второй ветке и максимум не единственный, то алгоритм может выбрать любой из них.

Предложения 1–3 несложно доказываются при помощи элементарных соображений теории вероятностей. Отметим, что алгоритмы, построенные в предложениях 2, 3, относятся к известному классу алгоритмов со скользящим окном.

В данной работе предложена математическая формализация задачи обнаружения, задачи локализации и задачи одновременного обнаружения и локализации прямоугольного объекта на изображении. Построены оптимальные алгоритмы их решения. При этом были сделаны весьма жесткие предположения, которые в практических задачах довольно редко выполняются. В связи с этим требуются дальнейшие исследования, связанные с ослаблением этих условий: нужно допустить вариацию размеров искомых объектов и их повороты; нужно расширить класс изображений с бинарных до полутоновых; нужно усложнить модель фона, приближая ее к реальности.

В отношении предложенной модели представляется интересным исследовать следующие вопросы. Насколько качество алгоритмов зависит от параметра шума  $p$  и от того, известен ли он? Насколько качество алгоритмов 2 и 3 зависит от вероятности появления белого объекта (в работе она предполагалась равной  $\frac{1}{2}$ ), и от того, известна ли эта вероятность?

## Литература

- [1] *Бердышев В.И., Костоусов В.Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
- [2] *Гасилов В.Л., Костоусов В.Б.* Задача идентификации параметров движения объекта на основе обработки изображения внешнего информационного поля // Изв. РАН. Сер. Техническая кибернетика, 1994, № 3. С. 78–86.

## АЛГОРИТМ СПЕКТРАЛЬНОГО МОРФИНГА ЗВУКОВЫХ СИГНАЛОВ

Лиханов А.Д.<sup>1</sup>

**Определение.** Морфинг звуковых сигналов – это получение результирующего звукового сигнала из нескольких исходных таким образом, что результирующий звуковой сигнал имеет существенные для восприятия характеристики, полученные интерполяцией характеристик исходных звуковых сигналов.

В качестве существенных характеристик звукового сигнала можно отметить тембр, высоту, громкость, спектральную огибающую, спектральный центрост.

Для того чтобы осуществить интерполяцию характеристик нескольких звуковых сигналов, необходимо представить звуковой сигнал в терминах некоторой модели. В качестве такой модели выберем модель спектрального анализа/синтеза (spectral modeling synthesis), разработанную X. Serra и J. Smith [1].

Сущность данной модели заключается в использовании коротковременного (оконного) дискретного преобразования Фурье и последующем разложении звукового сигнала на 2 компоненты: детерминированную и стохастическую остаточную. При оконном преобразовании Фурье исходный сигнал разбивается на небольшие части, которые мы будем называть кадрами, и вычисляется спектр звукового сигнала в каждом из кадров.

---

<sup>1</sup>СКБ Контур

Детерминированная составляющая моделирует гармоническую компоненту звукового сигнала в виде спектральных пиков в каждом из кадров. При сопоставлении спектральных пиков смежных кадров мы получим частотные траектории, которые отражают динамику изменения гармонической составляющей с течением времени.

Стохастическая составляющая моделирует шумовую компоненту звукового сигнала и может быть представлена в виде аппроксимации амплитудного спектра шумовой компоненты без учета фазы. Использование данной модели позволяет осуществить корректные преобразования каждой из компонент и синтезировать результирующий звуковой сигнал.

Предлагается следующий алгоритм морфинга звуковых сигналов путем подстройки высоты и тембра в терминах рассмотренной ранее модели. Для гармонических и полифонических звуков численной характеристикой высоты является фундаментальная частота, для негармонических звуковых сигналов фундаментальная частота дает некоторую оценку высоты звукового сигнала. Для определения фундаментальной высоты используем метод двухстороннего несоответствия [2] и применим его к гармонической составляющей.

Далее осуществим линейную интерполяцию фундаментальной частоты  $f_0$  с некоторым фактором морфинга *factor*, который принимает значения от 0 до 1. Параметр *factor* зафиксирован для конкретного кадра и является функцией времени  $factor(t)$ . В каждом кадре в момент времени  $t$  фундаментальная частота результирующего звука может быть вычислена по формуле:

$$f_0 = (1 - factor) \cdot f_{01} + factor \cdot f_{02} \quad (1)$$

Используя результирующую фундаментальную частоту, осуществим сжатие-растяжение амплитудного спектра первого и второго звуковых сигналов в зависимости от исходной фундаментальной частоты. Так как детерминированная составляющая состоит из спектральных пиков, с каждым из которых ассоциирована амплитуда, фаза и частота, то мы можем умножить частоту каждого пика на коэффициенты сжатия-растяжения. Эта операция корректна для близких к гармоническим сигналов, так как все пики гармонического сигнала являются гармониками фундаментальной частоты.

После сжатия-растяжения спектров исходных звуковых сигналов необходимо провести сопоставление спектральных пиков исходных

сигналов и объединить близкие по частоте пики. Результатом будет детерминированная составляющая результата морфинга. Общая схема морфинга детерминированной составляющей представлена на рис.

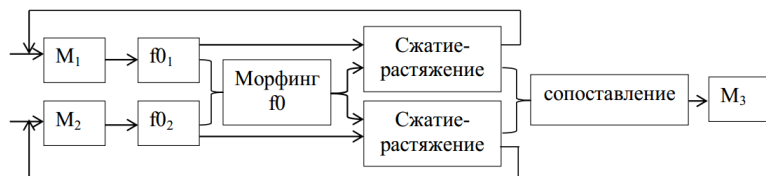


Схема морфинга детерминированной компоненты

Морфинг стохастической составляющей осуществим линейной интерполяцией амплитудного спектра исходных сигналов с соответствующим фактором морфинга. Шумовая компонента в результате будет моделироваться как фильтрация белого шума с интерполированной амплитудно-частотной характеристикой.

Для демонстрации работы алгоритма была разработана программа, осуществляющая морфинг двух звуков в режиме реального времени с возможностью настройки фактора морфинга и визуализацией спектров амплитуд исходных сигналов и результирующего сигнала. Проверена корректность алгоритма для двух гармонических сигналов и протестирована работа на более широком классе звуковых сигналов, включая гармонические, полифонические звуки и вокал.

Предложенный алгоритм морфинга приемлем для близких к гармоническим медленно изменяющихся звуковых сигналов. Чтобы учесть возможные быстрые изменения звукового сигнала, можно ввести отрицательную обратную связь, которая будет препятствовать быстрым изменениям высоты звукового сигнала, что положительно скажется на акустическом восприятии результата морфинга. Морфинг более сложных сигналов требует существенной доработки алгоритма.

## Литература

- [1] Serra X., Smith J. Spectral Modeling Synthesis: A Sound

Analysis/Synthesis Based on a Deterministic plus Stochastic Decomposition // Computer Music Journal. 1990. № 14. Pp. 12–24.

- [2] *Maher R.C., Beauchamp J.W.* Fundamental frequency estimation of musical signals using a two-way mismatch procedure // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 95, № 4. Pp. 2254–2263.

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЁТОВ В ДВУХВЕРНОЙ СХЕМЕ ОЖИДАНИЯ

Овчинников М.М., Кумков С.И.<sup>1,2</sup>

**Проблема слияния потоков самолётов.** Данная работа посвящена разработке и исследованию алгоритмов управления самолётами (СМ) для бесконфликтного слияния их двух потоков перед заходом на посадку, применительно к разрабатываемым в настоящее время [1] двухверным схемам слияния. Цель работы – практическое внедрение алгоритмов в перспективные автоматизированные системы управления воздушным движением [2]. Бесконфликтное слияние понимается как обеспечение заданного безопасного расстояния между последовательными самолётами путём задержки по времени последующего самолета относительно предыдущего.

В настоящее время на практике УВД используется схема задержки типа «тромбон» (рис. 1). Данная схема применяется благодаря простоте её реализации. Её главные недостатки: время задержки ограничено снизу величиной времени полного разворота СМ, затруднительно гарантировать минимальность времени задержки судов при безусловном обеспечении бесконфликтности.

Указанных недостатков лишены «верные схемы» задержки СМ [1, 2] (рис. 2, вариант двухверной схемы). Здесь прилетающие потоки I и II входят с безопасным расстоянием по высоте ( $\Delta H$ ) на дуги ожидания (ДО) – траектории кругового движения. По соответствующей разрешающей команде диспетчера, самолёты с ДО разворачиваются на пункт слияния (ПД<sub>с</sub>) и далее движутся на него прямолинейно. Диспетчер выдаёт команды на уход с ДО так, чтобы

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-96055 и 12-01-00537.

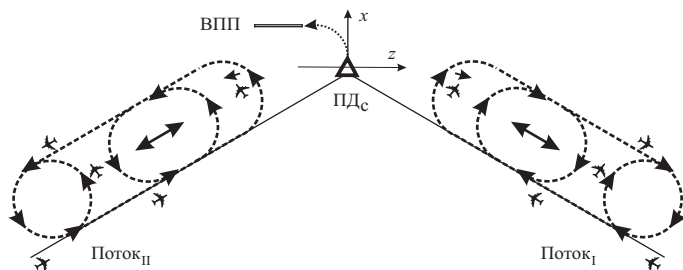


Рис. 1: Слияние двух потоков самолётов перед заходом на посадку по стандартной схеме задержки «трюмбон» с полными разворотами

обеспечить продольное расстояние между предыдущим и последующим СМ (в проекции на горизонтальную плоскость  $x \times z$ ) на всём их движении в заданном секторе – «веере» до ПДс, не менее заданной безопасной величины. Выдерживание безопасного расстояния между СМ постоянно наблюдается диспетчером визуально по рубежам контроля (рис. 2, тонкие concentric lines).

**Формулировка задачи:** при заданных скоростных режимах движения самолётов разработать алгоритмы расчёта моментов их схода с дуг ожидания так, чтобы при их дальнейшем прогнозируемом движении на веерной части гарантировать их максимальную плотность при безусловном выдерживании продольного расстояния между ними не менее безопасной величины с одновременным обеспечением минимальности времени ожидания самолётов на их ДО.

**Алгоритмы управления.** Имелась полная информация о текущем положении и скоростном режиме движения всех СМ, а их движение описывалось стандартной системой дифференциальных уравнений. Поставленную задачу удалось решить прямым прогнозированием программного движения каждого СМ от его ДО до ПДс по условию скорейшего выхода в пункт слияния. При этом искомый момент разрешения схода СМ с ДО рассчитывался из условия выполнения заданного безопасного расстояния по всей траектории движения на веере.

**Результаты исследований.** Алгоритмы управления СМ были разработаны в среде Qt на языке C++ и сведены в программный

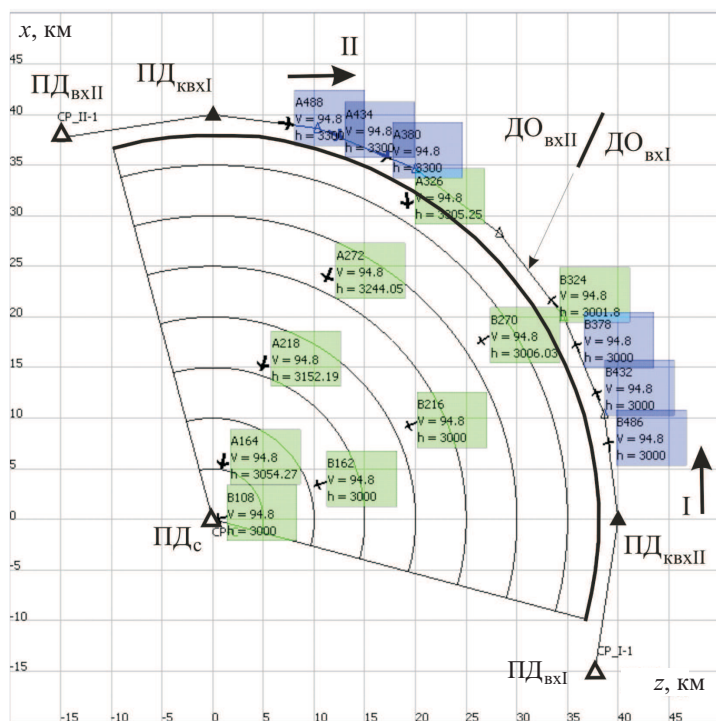


Рис. 2: Слияние двух потоков самолётов в двухвверной схеме и оптимальная организация очереди

пакет диалога с диспетчером как в режиме ручной работы, так и автоматического управления с максимальной плотностью очереди и минимальным временем задержки СМ на их дугах ожидания.

Рисунок 2 иллюстрирует пример слияния двух потоков СМ в двухвверной схеме в автоматическом режиме с оптимальной организацией очереди. В окне диалога с диспетчером выводится вся текущая обстановка движения СМ – как информация о СМ на их дугах ожидания (тёмные формуляры), так и текущая информация о СМ на ввере (светлые формуляры). Видна оптимальная работа алгоритмов: между СМ В106 (перед его входом в ПД<sub>С</sub>) и СМ А164 обеспечено минимально требуемое расстояние 5000 м (как между рубежами

контроля). Между остальными СМ очереди на веере расстояние также не меньше заданного безопасного. Разработанный пакет позволил также оценить максимальные плотности входных потоков, допустимые для нормальной работы схемы управления и диспетчера.

## Литература

- [1] Point Merge Integration of Arrival Flows Enabling Extensive RNAV Application and Continuous Descent. Operation Services and Environment Definition // Report, July 2010. Eurocontrol Experimental Center.
- [2] *Пятко С.Г.* Двухвеерная технология формирования интервалов посадки для аэродромов Московской воздушной зоны // ГосНИИ «Аэронавигация». Москва, 2011.

## ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СМЕЩЕННОЙ МЕТРИКИ ХЭММИНГА В ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ С ИЗВЕСТНЫМ УРОВНЕМ СТРУКТУРНОГО ШУМА

Перевалов Д.С.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим задачу классификации в  $\mathbb{R}^n$  с помощью правила ближайшего соседа [1]. Для простоты будем считать, что каждый класс задан одним представителем. В этом случае, для набора представителей  $K$  классов  $V = (v^1, \dots, v^K)$  и некоторого входного вектора  $u \in \mathbb{R}^n$  правило классификации можно описать как

$$v^* = \operatorname{argmin}_{v \in V} d(u, v).$$

Здесь  $d(u, v)$  – некоторая функция меры близости векторов  $u$  и  $v$ .

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН при финансовой поддержке УрО РАН «Динамические системы и теория управления» (проект 12-П-1-1022) и «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» (проект 12-П-1-1023).



В работе показано, что существуют ситуации, когда мера близости, не являющаяся метрикой (не выполняется аксиома тождества  $d(u, u) = 0$ ), дает асимптотически устойчивое решение задачи классификации для случая, когда входные вектора зашумлены с уровнем структурного шума [2], сколь угодно близким к 100%.

**Определение 1.** Для конечного множества векторов  $V$ , состоящего не менее чем из двух векторов, определим *структурное возмущение* вектора  $v \in V$  как случайный вектор  $\eta^v$ :

$$\eta_i^v = (1 - \beta_i)v_i + \beta_i w_i,$$

где  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  – набор независимых бернуллиевских случайных величин, принимающих значение 1 (0) с вероятностью  $p$  ( $q = 1 - p$ ), а  $w$  – случайный вектор, равномерно распределенный на  $V \setminus \{v\}$ .

**Определение 2.** *Смещенной метрикой Хэмминга* будем называть функционал  $h_z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  следующего вида:

$$h_z(u, v) = |h(u, v)/n - z|,$$

где  $h(u, v) = \text{card}\{i : u_i \neq v_i\}$  – метрика Хэмминга,  $z \in \mathbb{R}$  – параметр функционала.

Заметим, что при  $z \neq 0$  функционал  $h_z$  не является метрикой.

**Теорема.** Пусть  $K \geq 3$ .

1. Рассмотрим множество константных векторов  $V = (v^1, \dots, v^K)$ , где  $v^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_i^k \equiv k$ .
2. Зафиксируем уровень шума  $p \in [0, 1]$ , и для некоторого  $v \in V$  рассмотрим его структурное возмущение, которое обозначим как  $\eta^k = \eta^{v^k}$ .
3. Для произвольного  $z \in \mathbb{R}$  рассмотрим решение задачи классификации вектора  $\eta^v$  с помощью правила ближайшего соседа и  $h_z$ :

$$v_z^* = \underset{v' \in V}{\operatorname{argmin}} h_z(\eta^v, v').$$

Тогда, если  $p \in (0.5, 1)$ , то для вероятности  $P(v_z^* = v)$  правильной классификации возмущенного  $v$  справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(v_z^* = v) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \leq 0.5, \\ 1, & \text{если } 0.5 < z < (p+1)/2, \\ 0.5, & \text{если } z = (p+1)/2, \\ 0, & \text{если } z > (p+1)/2. \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(v_z^* = v) &= P( h_z(\eta^v, v) < \min_{v' \neq v} h_z(\eta^v, v') ) = \\ &= P( h_z(\eta^v, v) < \min(h_z(\eta^v, w), h_z(\eta^v, u)) ), \end{aligned}$$

где  $u \in V \setminus \{v, w\}$ , откуда

$$P(v_z^* = v) = P( |b - z| < |b - (1 - z)| \ \& \ |b - z| < 1 - z ),$$

где  $b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$ . Получаем

$$P(v_z^* = v) = \begin{cases} P( b < 0.5 ), & \text{если } z < 0.5, \\ 0, & \text{если } z = 0.5, \\ P( b \in (2z - 1, 1) ), & \text{если } z > 0.5. \end{cases}$$

Далее,  $b \cdot n$  является случайной величиной с биномиальным распределением, поэтому, в силу центральной предельной теоремы, последовательность случайных величин  $(b - p)\sqrt{n}$  сходится по распределению к нормальной случайной величине  $N(0, pq)$ .

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P( b \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon) ) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P( b \in (p, p + \varepsilon) ) = 0.5.$$

Обозначим  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P(v_z^* = v)$ .

- Если  $z \leq 0.5$ , то, рассмотрев  $\varepsilon = p - 0.5$ , получим  $L = 0$ .
- Если  $0.5 < z < (p+1)/2$ , значит,  $p \in (2z - 1, 1)$ , поэтому  $L = 1$ .
- Если  $z = (p+1)/2$ , значит,  $p = 2z - 1$ , поэтому  $L = 0.5$ .
- Наконец, если  $z > (p+1)/2$ , то  $p < 2z - 1$ , откуда  $L = 0$ .

Теорема доказана.

**Следствие.** В условиях теоремы, для любого уровня шума из интервала (50%, 100%) и для достаточно больших  $n$ , использование смещенной метрики Хэмминга  $h_{0.75}$  (соответственно, метрики  $h$ ) в решении задачи классификации дает правильный ответ с вероятностью, сколь угодно близкой к 100% (соответственно, 0%).

Следовательно, в рассмотренной задаче классификации с большим уровнем шума, использование смещенной метрики Хэмминга в статистическом смысле является более оптимальным, чем использование обычной метрики Хэмминга.

## Литература

- [1] Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
- [2] Перевалов Д.С. Структурная функция как средство анализа структурных возмущений изображений // Современные проблемы математики. Тезисы Междун. (44-й Всеросс.) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. С. 364–366.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ В GPU-РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ПОИСКА В ШИРИНУ НА ГРАФЕ

Черноскутов М.А.<sup>1,2</sup>

Интересной особенностью алгоритма поиска в ширину является тот факт, что его последовательная реализация [1] из-за отсутствия лишних накладных расходов часто может опережать по производительности свои параллельные аналоги. К накладным расходам могут быть отнесены затраты на синхронизацию данных между итерациями, потребность в массивном параллелизме, а также нерегулярность алгоритма [2]. При этом использование таких аппаратных особенностей GPU, как широкий канал доступа в DRAM-память и эффективный механизм управления большим количеством потоков, может значительно ускорить выполнение параллельного алгоритма поиска в ширину по сравнению с CPU.

Для распараллеливания данного алгоритма используются два стандартных подхода: на основе использования очередей для хранения данных о вершинах, которые должны быть обработаны на следующей итерации, и на основе полного обхода всех вершин на каждой итерации. Данные подходы носят название синхронизированных по уровням алгоритмов и ориентированы на использование структуры данных CSR (Compressed Sparse Row). Однако, они обладают рядом недостатков: работа с очередью в параллельном режиме предполагает использование атомарных операций, а обход всех вершин предполагает появление квадратичной сложности в алгоритме. Все это может негативно сказаться на производительности, однако в качестве прототипа для оптимизированной версии поиска в ширину на графе была выбрана реализация на основе полного обхода всех вершин на каждой итерации. Несмотря на возросшую теоретическую сложность по сравнению со стандартным последовательным алгоритмом, он более всего ориентирован на работу с большим числом слабонагруженных потоков, что соответствует модели програм-

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РЦП-13-П18. При проведении работ был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН.

мирования массивно-параллельных приложений для GPU.

Для того чтобы эффективно использовать ресурсы GPU, необходимо снизить дисбаланс нагрузки, вызванный неравномерным распределением степеней вершин в графе, так как время выполнения каждой итерации в данном алгоритме зависит от времени обработки самой «тяжелой» вершины. Для этого был предложен метод балансировки нагрузки, основанный на поблочном обходе массива ребер. В этом случае каждый поток будет обрабатывать только соответствующий ему блок, количество ребер (а значит и объем вычислительной нагрузки) в котором известны заранее. При этом, для того чтобы определить номер вершины по номеру элемента в массиве ребер, в структуру данных CSR дополнительно вводится еще один массив, в элементах которого хранятся номера вершин, соответствующие первому ребру из каждого блока ребер.

Для тестирования использовались безмасштабные («scale-free») графы, являющиеся моделью реальных графов, полученных в результате решения прикладных или фундаментальных задач. Для таких графов характерно неравномерное распределение степеней по вершинам. Число вершин в графах, использованных для эксперимента, варьировалось от 65 536 до 2 097 152 при средней степени вершин 48.

Тестирование проводилось на CPU Intel Xeon X5675 (6 ядер) и GPU Nvidia Tesla C2075 (448 ядер). В итоге были получены результаты, свидетельствующие о том, что реализация данного метода на GPU позволяет ускорить обход графов в ширину в два и более раз по сравнению с аналогичной реализацией метода на CPU, в пять и более раз по сравнению с последовательным алгоритмом на CPU, в десять и более раз для неоптимизированной реализации на GPU, что позволяет судить о целесообразности использования разработанного метода балансировки нагрузки для поиска в ширину на графе.

## Литература

- [1] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверс Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. – М.: Вильямс, 2011.
- [2] Murphy R., Wheeler K., Barrett B., Ang J. Introducing the Graph 500 // Cray User's Group (CUG). 2010. Pp. 1–5.

## ВРАЩЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПЕНРОУЗА

Юферева О.О.<sup>1</sup>

Треугольник Пенроуза – одна из самых известных «невозможных фигур». Цель данной работы – визуализация его вращения, то есть создание последовательности изображений, дающих тот же трехмерный образ, но с других ракурсов. При этом создается иллюзия вращения, вообще говоря, несуществующего объекта.

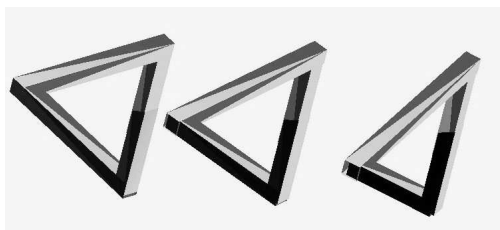


Рис. 1: Треугольник Пенроуза с разных ракурсов

Хотя треугольник Пенроуза не может быть реализован ни в одном евклидовом пространстве, каждая его достаточно маленькая часть совершенно естественно задается в  $\mathbb{R}^3$ , то есть локальные свойства треугольника Пенроуза можно считать известными. Тогда треугольнику Пенроуза можно сопоставить реализуемый в  $\mathbb{R}^3$  кубический комплекс [2, с. 97]. Поскольку есть топологически эквивалентная ему реализация в  $\mathbb{R}^3$ , то одних комбинаторно-топологических свойств треугольника Пенроуза недостаточно для описания его как невозможной фигуры. Чтобы сделать комплекс невозможной фигурой, нужно объявить некоторые его подграницы параллельными друг другу. Будем называть объект эквивалентным треугольнику Пенроуза, если он является реализацией данного кубического комплекса с сохранением параллельности соответствующих подграней.

Как оказалось, эквивалентный объект существует в  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  [1].

Объект (см. рис. 2) находится в факторпространстве  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}$ , тогда каждое четвертое колено трубопровода отождествляется с первым,

---

<sup>1</sup>УрФУ

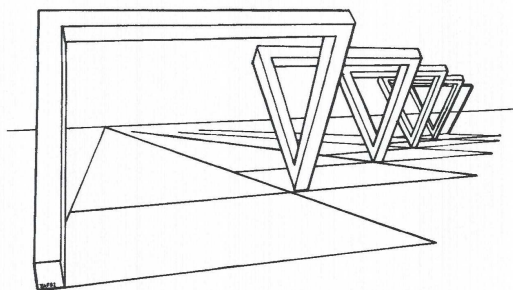


Рис. 2: «Трубопровод»

а прямые, параллельные в  $\mathbb{R}^3$ , остаются параллельными в  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ . Локально это пространство будет евклидовым, но некоторые прямые в нем замыкаются; в частности, трубопровод после факторизации становится ограниченным.

Поскольку треугольник Пенроуза «мыслится» в  $\mathbb{R}^3$ , то его вращение должно быть реализовано там же. Однако существующие средства визуализации движения объектов рассчитаны на тела, которые можно задать в  $\mathbb{R}^3$ , тогда как треугольник Пенроуза там описать невозможно.

Один из возможных способов разрешения этой проблемы – в каждый момент вращения треугольника Пенроуза создавать новый объект в евклидовом пространстве. Поскольку технически это возможно, задача сводится к нахождению правила построения этого объекта. В качестве модели можно взять три параллелепипеда (часть трубопровода), которые в процессе поворота меняют свои длины и положение в пространстве, а изменение длин однозначно задается поворотом, что позволяет вывести соответствующие формулы преобразования модели. При этом неподвижными остаются точки из «горизонтальной плоскости» – это обеспечивает «замкнутость» треугольника и перпендикулярность параллелепипедов.

Фактически этот метод создает для каждого ракурса свою «невозможную фигуру» как изображение специально подобранного трехмерного объекта. При повороте каждому ракурсу сопоставляется соответствующий трехмерный объект; в итоге возникает иллюзия вращения одной фигуры, одного треугольника Пенроуза.

Для реализации метода был создан фильтр-загрузчик данных для программы SharpEye [3]. Кроме стандартных способов работы со сценами, эта программа предоставляет возможность в фильтре-загрузчике создавать дополнительные способы управления объектами и сценами, в том числе динамическое построение трехмерной модели, именно поэтому она и была выбрана.

По-видимому, вращение некоторых других «невозможных фигур» можно получить подобным образом. Такие невозможные фигуры могут быть сведены к треугольнику Пенроуза гомотопическими преобразованиями с сохранением параллельности соответствующих подграней кубического комплекса (рис. 3).

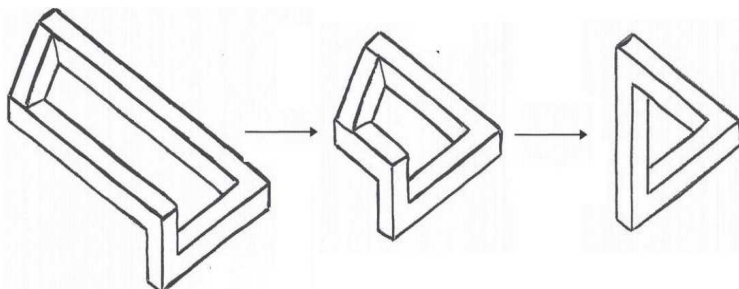


Рис. 3: Пример преобразования

## Литература

- [1] Френсис Дж. Книжка с картинками по топологии. – Мир, 1991.
- [2] Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике — МЦНМО, 2004.
- [3] Васев П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю. Конструктор специализированных систем визуализации // Научная визуализация. 2012. Т. 4, № 2. С. 64–77.



## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Балтаева У.И., Бабажанов Х.<sup>1</sup>

Рассмотрим нагруженное уравнение [1] смешанного типа

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (Lu) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u - \mu_1 u(x, 0), & \text{в } \Omega_1 \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u - \mu_2 u(x, 0), & \text{в } \Omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega_1$  – область, ограниченная отрезками  $AB$ ,  $BB_0$ ,  $AA_0$ ,  $A_0B_0$  прямых  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = h$  соответственно ( $y > 0$ );  $\Omega_2$  – характеристический треугольник, ограниченный отрезком  $AB$  оси  $OX$  и двумя характеристиками  $AC$  ( $x + y = 0$ ) и  $BC$  ( $x - y = 1$ ) уравнения (1) ( $y < 0$ );  $\lambda_i, \mu_i$  – действительные постоянные,  $i = 1, 2$ ,  $\lambda_1 > 0$ .

Введем обозначения

$$I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I.$$

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{3,1}(\Omega_1) \cap C^{3,2}(\Omega_2)$  удовлетворяющую уравнению (1) в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

**Задача А.** Найти функцию  $u = u(x, y)$ , обладающую следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ ;
- 2) функции  $u_x$  и  $u_y$  непрерывны вплоть до  $AC \cup BC$ ;
- 3)  $u(x, y)$  – регулярное решение уравнения (1) в области  $\Omega$  при  $x \neq 0$ ;
- 4)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$a(x) \frac{d}{dx} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x) \frac{d}{dx} u\left(\frac{x+1}{2}, -\frac{x-1}{2}\right) = c(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Узбекистан

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (5)$$

и условиям склеивания

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0),$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0),$$

где  $n$  – внутренняя нормаль;  $\varphi_1, \varphi_2, a, b, c, \psi_1, \psi_2$  – заданные гладкие функции такие, что  $\psi'_1(\frac{1}{2}) = -\psi'_2(\frac{1}{2})$ ,  $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$ .

**Теорема.** Если существует регулярное решение задачи  $A$ , то оно единственно.

## Литература

- [1] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифф. уравнения. 1983. № 1. Т. 19. С. 86–94.
- [2] Исломов Б., Балтаева У.И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка // Уфимский мат. журн. Уфа, 2011. Т. 3, № 3. С. 15–25.

# КРИТЕРИЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕРМИНАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА

Имомкулов С.А., Расулов У.Х., Мирсанов У.М.<sup>1</sup>

Пусть  $f(z)$  голоморфная функция в некоторой окрестности точки  $0 \in \mathbb{C}$ , и пусть её разложение в ряд Тейлора имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (1)$$

Рассмотрим следующий вопрос: Что можно сказать о полном аналитическом продолжении функции  $f(z)$ , если известны коэффициенты её разложения в ряд Тейлора (1)?

Эта задача впервые привлекла внимание математиков в конце XVIII-го века. Ею начал заниматься Адамар [3], а за ним и многие другие известные математики (см., например, [1, 2, 4]). Недавние результаты в этой области получены в работах К.В. Сафонова [5, 6].

Известен следующий критерий Кронекера рациональности функции  $f(z)$ , представляемой в виде ряда (1): функция  $f(z)$  является рациональной функцией в том и только в том случае, когда среди определителей

$$D^{(n+1)} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} \quad (2)$$

лишь конечное число отличных от нуля (см., например, [1, 2]).

Детерминант (2) называется детерминантом Ганкеля.

В этой работе мы установим критерий рациональности функции двух переменных.

Пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Навоийский государственный педагогический институт, Узбекистан

Детерминант Ганкеля ряда (3) является четырехмерным детерминантом, т.е. элементы детерминанта Ганкеля имеют четыре индекса:

$$D^{(n+1)} = \det (a_{p_1 q_1 p_2 q_2})_{p_j, q_j=1}^n \quad (j = 1, 2),$$

где

$$a_{p_1 q_1 p_2 q_2} = c_{p_1 + p_2 \, q_1 + q_2}.$$

*Четырёхмерная матрица и её детерминант.* Рассмотрим Евклидово пространство квадратных матриц

$$\mathbf{C}^{n \times n} = \{A : A = (a_{ij}), \, i, j = \overline{1, n}\}$$

со скалярным произведением

$$(A, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}.$$

Пусть  $T$  – линейное отображение пространства  $\mathbf{C}^{n \times n}$  на себя. Нетрудно убедиться, что отображение  $T$  представляется в виде четырёхмерной матрицы

$$T = (a_{p_1 q_1 p_2 q_2}), \quad p_j, q_j = \overline{1, n} \quad (j = 1, 2),$$

строки и столбцы которой состоят из квадратных матриц, и её детерминант определяется аналогично квадратной матрице.

В случае функции двух переменных справедлив следующий критерий.

**Теорема.** *Функция  $f(z_1, z_2) = \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$  является рациональной функцией в том и только в том случае, когда среди детерминантов*

$$D^{(n+1)} = \det (a_{p_1 q_1 p_2 q_2})_{p_j, q_j=1}^n \quad (j = 1, 2),$$

где

$$a_{p_1 q_1 p_2 q_2} = c_{p_1 + p_2 \, q_1 + q_2},$$

лишь конечное число отличных от нуля.

## Литература

- [1] *Bieberbach L.* Lehrbuch der Funktionentheorie // Bd. II, Leipzig, 1931.
- [2] *Bieberbach L.* Analytische fortsetzung // Berlin-Uottingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
- [3] *Hadamard J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor // J. Math. Pures Appl., 1892. Vol. (4) 8. Pp. 101–186.
- [4] *Садумлаев А.* Критерий быстрой рациональной аппроксимации в  $C^n$  // Математический сборник. 1984. Т. 125 (167), № 2 (10). С. 269–279.
- [5] *Сафонов К.* Об условиях алгебраичности и рациональности суммы степенного ряда // Математические заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 325–332.
- [6] *Сафонов К.* Обобщение критерия Кронекера о рациональности на степенные ряды алгебраических функций и его применение // Вестник КрасГУ. Серия физ-мат. науки. Красноярск, 2005. С. 151–154.

## О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДАННЫМИ НА ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Кузнецов П.А.<sup>1,2</sup>, Казаков А.Л.<sup>3</sup>

Нелинейное уравнение теплопроводности широко применяется в различных областях знания. В случае двух пространственных переменных это уравнение имеет вид

$$u_t = u(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) + \frac{1}{\sigma}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2). \quad (1)$$

Здесь  $u = u(t, x_1, x_2)$  – неизвестная функция, а  $\sigma > 0$  – константа.

С точки зрения физики, значительный интерес представляет исследование таких краевых задач для уравнения (1), которые предполагают обращение в нуль функции  $u$  в начальный момент времени, так как в таком случае происходит вырождение параболического типа уравнения и возможно распространение возмущения по нулевому фону с конечной скоростью (тепловая волна).

Такие задачи ранее исследовались, в частности, в работах А.Ф. Сидорова [1, 2], его ученика С.П. Баутина [3], а также в работах одного из авторов [4, 5]. Однако результаты, полученные в этих работах, в основном относятся к одномерному и квазиодномерному случаям. Исключением является работа [2], в которой упомянут случай, когда краевые условия заданы на круговом цилиндре.

Ранее в [6] авторами уже была исследована краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности в случае трёх пространственных переменных с данными на сфере, для которой была доказана теорема существования и единственности аналитического решения. В данной работе рассмотрена краевая задача для уравнения (1) с данными на замкнутой цилиндрической поверхности (направляющая является достаточно гладкой замкнутой кривой).

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет

<sup>2</sup>Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-31175).

<sup>3</sup>Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

В уравнении (1) делается переход к полярным координатам  $t = \tau$ ;  $x_1 = \rho \cos \varphi$ ;  $x_2 = \rho \sin \varphi$ . Предполагается, что  $\rho > 0$ , а  $\varphi$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Уравнение принимает вид

$$u_\tau = u \left( u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho} u_\rho \right) + \frac{1}{\sigma} \left( u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\varphi^2 \right). \quad (2)$$

Для полученного уравнения рассматривается краевое условие

$$u(\tau, \rho, \varphi) \Big|_{\rho=R(\varphi)} = f(\tau, \varphi), \quad (3)$$

где функция  $R(\varphi) > 0$  периодическая по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  и аналитическая в некоторой окрестности  $\varphi = 0$ , т.е. краевые условия заданы на цилиндрической поверхности, направляющей которой является бесконечно гладкая замкнутая кривая. Чтобы привести задачу (2), (3) к более удобному виду, делается замена

$$t = \tau; \quad x = \rho/R(\varphi) - 1; \quad y = \varphi.$$

Задача принимает вид

$$\begin{aligned} u_t = u \Big\{ \frac{1}{R^2} u_{xx} + \frac{1}{R^2(x+1)} u_x + \frac{1}{R^2(x+1)^2} \Big[ u_{yy} - 2(x+1) \frac{R'}{R} u_{yx} + \\ + (x+1)^2 \frac{R'^2}{R^2} u_{xx} - \frac{R''R - 2R'^2}{R^2} (x+1) u_x \Big] \Big\} + \\ + \frac{1}{\sigma} \Big\{ \frac{1}{R^2} u_x^2 + \frac{1}{R^2(x+1)^2} \Big[ u_y^2 + (x+1)^2 \frac{R'^2}{R^2} u_x^2 - 2(x+1) \frac{R'}{R} u_y u_x \Big] \Big\}, \quad (4) \\ u(t, x, y) \Big|_{x=0} = f(t, y). \quad (5) \end{aligned}$$

Для задачи (4), (5) доказана следующая

**Теорема.** Пусть  $f = f(t, y)$  – аналитическая в некоторой окрестности  $t = 0$  функция, периодическая по  $y$  с периодом  $2\pi$ . Пусть также выполняются условия

$$f(t, y)|_{t=0} = 0; \quad f_t(t, y)|_{t=0} > 0.$$

Тогда для задачи (4), (5) существует единственное аналитическое в некоторой окрестности  $t = 0$ ,  $x = 0$  решение, если выбрано направление движения фронта возмущения.

При доказательстве этой теоремы сначала строится решение в виде формального ряда  $\sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(y) \frac{t^n}{n!} \frac{x^m}{m!}$ ;  $u_{n,m}(y) = \left. \frac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial x^m} \right|_{t=0, x=0}$ . Первый коэффициент  $u_{0,1}$  определяется при решении квадратного уравнения, выбор корня определяет выбор направления движения фронта возмущения. Последующие коэффициенты определяются рекуррентно из систем линейных алгебраических уравнений, полученных при применении к (4) операторов  $\left. \frac{\partial^{n+m}}{\partial t^{n+m-k} \partial x^k} \right|_{t=0, x=0}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+m$ . Затем с помощью метода мажорант доказывается сходимость построенного ряда.

## Литература

- [1] *Сидоров А.Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [2] *Сидоров А.Ф.* О некоторых аналитических представлениях решений нелинейного уравнения нестационарной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: (Сб. науч. тр.). ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск. 1987. С. 247–257.
- [3] *Баутин С.П.* Аналитическая тепловая волна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [4] *Казаков А.Л.* Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Труды Института математики и механики. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
- [5] *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
- [6] *Казаков А.Л., Кузнецов П.А.* Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики». 2013. С. 398–401.



## ГРАНИЦЫ КВАДРАТИЧНОЙ ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ $2 \times 2$

Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б.<sup>1</sup>

Одним из классических методов изучения спектра линейного оператора  $\mathcal{A}$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  с областью определения  $D(\mathcal{A})$  является изучение его числовой области значений:  $\mathcal{W}(\mathcal{A}) = \{(\mathcal{A}x, x) : x \in D(\mathcal{A}), \|x\| = 1\}$ . Известно, что точечный спектр  $\sigma_p(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$  лежит в  $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ , а его аппроксимативно точечный спектр  $\sigma_{\text{app}}(\mathcal{A})$  содержится в  $\overline{\mathcal{W}(\mathcal{A})}$ . Надо отметить, что если спектр состоит из объединения двух непересекающихся множеств, то числовая область значений не всегда дает достаточно хорошую структуру. Для того чтобы получить более точную информацию о спектре в вышеуказанных случаях, в работе [1] введено понятие квадратичной числовой области значений, которое затем было изучено в работах [2, 3]. Это множество определено, если дано разложение  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$ , где  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$  – гильбертовы пространства, а  $L(\mathcal{H})$  – пространство линейных ограниченных операторов в  $\mathcal{H}$ . Тогда оператор  $\mathcal{A}$  всегда можно записать в виде блочно-операторной матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

с линейными ограниченными операторами  $A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Дадим определение квадратичной числовой области значений оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть  $(\cdot, \cdot)$  и  $\|\cdot\|$  – скалярное произведение и норма в соответствующих гильбертовых пространствах.

Множество всех собственных значений матрицы

$$\mathcal{A}_f = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1) & (A_{12}f_2, f_1) \\ (A_{21}f_1, f_2) & (A_{22}f_2, f_2) \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$$

таких, что  $\|f_i\| = 1$ ,  $i = 1, 2$ , называется *квадратичной числовой областью значений* оператора  $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$ , соответствующей представлению (1) блочно-операторной матрицы  $\mathcal{A}$ , и обозначается как

<sup>1</sup>Бухарский государственный университет, Узбекистан

$\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$ , т.е.

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = \bigcup_{\|f_i\|=1, i=1,2} \sigma_p(\mathcal{A}_f), \quad f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}.$$

Теперь перейдем к постановке задачи и формулировке основных результатов.

Пусть  $\mathbf{T}^d$  –  $d$ -мерный тор, т.е. куб  $(-\pi, \pi]^d$  – с соответствующим отождествлением противоположных граней,  $\mathbf{C}$  – одномерное комплексное пространство, а  $L_2(\mathbf{T}^d)$  – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $\mathbf{T}^d$ . Обозначим через  $\mathcal{H}$  прямую сумму пространств  $\mathcal{H}_1 = \mathbf{C}$  и  $\mathcal{H}_2 = L_2(\mathbf{T}^d)$ , т.е.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ .

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса  $\mathcal{A}$ , действующую в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , как  $2 \times 2$  блочно-операторную матрицу (1), где элементы  $A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$ ,  $i, j = 0, 1$ , определяются по формулам:

$$A_{11}f_1 = wf_1, \quad A_{12}f_2 = (f_2, v), \quad A_{21} = A_{12}^*, \quad (A_{22}f_2)(p) = u(p)f_2(p).$$

Здесь  $f_i \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $w$  – фиксированное вещественное число,  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$  – вещественнозначные непрерывные функции на  $\mathbf{T}^d$ , а  $A_{12}^*$  – сопряженный оператор к  $A_{12}$ .

Можно проверить, что при этих предположениях операторная матрица  $\mathcal{A}$  является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ .

Так как оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряженным, из определения множества  $\mathcal{W}^2(\mathcal{A})$  следует, что  $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) \subset \mathbf{R}$ .

Для формулировки основных результатов данной работы введем следующие обозначения:

$$\Lambda_- = \bigcup_{\|f_2\|=1} \left\{ \min\{w, (uf_2, f_2)\} - |(v, f_2)| \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_2)|}{|w - (uf_2, f_2)|} \right) \right\};$$

$$\Lambda_+ = \bigcup_{\|f_2\|=1} \left\{ \max\{w, (uf_2, f_2)\} + |(v, f_2)| \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2|(v, f_2)|}{|w - (uf_2, f_2)|} \right) \right\};$$

$$m = \min_{p \in \mathbf{T}^d} u(p), \quad M = \max_{p \in \mathbf{T}^d} u(p);$$

$$\delta_v^- = \|v\| \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arctg \frac{2\|v\|}{|w-m|} \right), \quad \delta_v^+ = \|v\| \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arctg \frac{2\|v\|}{|M-w|} \right).$$

В случае  $m = w$  или  $M = w$  положим  $\arctg \infty = \pi/2$ .

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для квадратичной числовой области значений оператора  $\mathcal{A}$  имеет место равенство  $\mathcal{W}^2(\mathcal{A}) = \Lambda_- \cup \Lambda_+$ .

**Теорема 2.** а) Если  $w > M$ , то  $\Lambda_- \cap \Lambda_+ = \emptyset$  и выполняется соотношение  $\sup \Lambda_- \leq M < w \leq \inf \Lambda_+$ ;

б) Если  $w < m$ , то  $\Lambda_- \cap \Lambda_+ = \emptyset$  и выполняется соотношение  $\sup \Lambda_- \leq w < m \leq \inf \Lambda_+$ ;

в) Если  $m \leq w \leq M$ , то для границы множества  $\Lambda_{\pm}$  имеют место следующие оценки:

$$m - \delta_v^- \leq \inf \Lambda_- \leq m, \quad \sup \Lambda_- \leq w;$$

$$\inf \Lambda_+ \geq m, \quad M \leq \sup \Lambda_+ \leq M + \delta_v^+.$$

## Литература

- [1] Langer H., Tretter C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices // Journal of Operator Theory, 1998. Vol. 39, № 2. Pp. 339–359.
- [2] Langer H., Markus A.S., Matsaev V.I., Tretter C. A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range // Linear Algebra and Applications, 2001. Vol. 330, № 1–3. Pp. 89–112.
- [3] Langer H., Markus A.S., Tretter C. Corners of numerical ranges // In Recent advances in operator theory (Groningen, 1998), vol. 124 of Oper. Theory Adv. Appl., pp. 385–400. Basel: Birkhauser, 2001.

## СУЩЕСТВЕННЫЙ И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТРЫ ОДНОЙ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ $3 \times 3$

Расулов Т.Х.<sup>1</sup>, Умарова И.О.<sup>2</sup>

Исследование спектра гамильтонианов (блочно-операторных матриц) в пространстве Фока [1] является наиболее интенсивно изучаемым объектом в теории операторов. В настоящей работе рассматривается блочно-операторная матрица, ассоциированная с системой не более чем трех квантовых частиц на решетке, и обсуждается случай, когда в рассматриваемой системе число рождений и уничтожений частиц равно 1.

Пусть  $\mathbf{T}^d$  –  $d$ -мерный тор, т.е. куб  $(-\pi, \pi]^d$  с соответствующим отождествлением противоположных граней,  $\mathbf{C}$  – одномерное комплексное пространство, а  $L_2((\mathbf{T}^d)^n)$  – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $(\mathbf{T}^d)^n$ ,  $n = 1, 2$ .

Обозначим через  $\mathcal{H}$  прямую сумму пространств  $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$ ,  $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^d)$  и  $\mathcal{H}_2 = L_2((\mathbf{T}^d)^2)$ , т.е.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  называется *трехчастичным обрезанным подпространством* фоковского пространства.

Рассмотрим блочно-операторную  $3 \times 3$  матрицу  $H$ , действующую в  $\mathcal{H}$ :

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь операторы  $H_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , определяются равенствами:

$$H_{00}f_0 = w_0f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbf{T}^d} v_1(s)f_1(s)ds, \quad (H_{11}f_1)(p) = w_1(p)f_1(p),$$

$$(H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbf{T}^d} v_2(s)f_2(p, s)ds, \quad (H_{22}f_2)(p, q) = w_2(p, q)f_2(p, q).$$

<sup>1</sup>Бухарский государственный университет, Узбекистан

<sup>2</sup>Самаркандский профессиональный колледж железнодорожного транспорта, Узбекистан

Здесь  $f_i \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $w_0$  – фиксированное вещественное число,  $w_1(\cdot)$ ,  $v_1(\cdot)$ ,  $v_2(\cdot)$  и  $w_2(\cdot, \cdot)$  – вещественно-непрерывные функции на  $\mathbf{T}^d$  и  $(\mathbf{T}^d)^2$ , соответственно, а  $H_{ij}^*$  ( $i < j$ ) – сопряженный оператор к  $H_{ij}$ .

Операторы  $H_{01}$  и  $H_{12}$  называются операторами уничтожения, а операторы  $H_{01}^*$  и  $H_{12}^*$  – операторами рождения.

Обозначим через  $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$  и  $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$  соответственно существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Далее, для формулировки основных результатов настоящей работы введем следующую блочно-операторную матрицу  $2 \times 2$   $h(p)$ ,  $p \in \mathbf{T}^d$ , действующую в  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ :

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(p) \end{pmatrix}.$$

Здесь операторы  $h_{ii}(p) : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ ,  $i = 0, 1$ , и  $h_{01} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$  определяются по формулам:

$$h_{00}(p)f_0 = w_1(p)f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbf{T}^d} v_2(s)f_1(s)ds,$$

$$(h_{11}(p)f_1)(q) = w_2(p, q)f_1(q).$$

Очевидно, что оператор  $h(p)$ ,  $p \in \mathbf{T}^d$  ограничен и самосопряжён в  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  и  $\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p); M(p)]$ , где числа  $m(p)$  и  $M(p)$  определяются формулами:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^d} w_2(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^d} w_2(p, q).$$

При каждом фиксированном  $p \in \mathbf{T}^d$  определим регулярную в  $\mathbf{C} \setminus [m(p); M(p)]$  функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором  $h(p)$ )

$$\Delta(p; z) = w_1(p) - z - \int_{\mathbf{T}^d} \frac{v_2^2(s)ds}{w_2(p, s) - z}.$$

Установим связь между собственными значениями оператора  $h(p)$  и нулями функции  $\Delta(p; \cdot)$ .

**Лемма 1.** При каждом фиксированном  $p \in \mathbf{T}^d$  оператор  $h(p)$  имеет собственное значение  $z \in \mathbf{C} \setminus [m(p); M(p)]$  тогда и только тогда, когда  $\Delta(p; z) = 0$ .

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z \in \mathbf{C} \setminus [m(p); M(p)] : \Delta(p; z) = 0\}.$$

Положим

$$m = \min_{p, q \in \mathbf{T}^d} w_2(p, q), \quad M = \max_{p, q \in \mathbf{T}^d} w_2(p, q).$$

Сформулируем основные результаты работы.

**Теорема 1.** Существенный спектр  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  оператора  $H$  не зависит от параметра  $w_0$  и функции  $v_1(\cdot)$ , и для него имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^d} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m; M].$$

Более того, множество  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  представляет собой объединение не более чем трех отрезков.

**Теорема 2.** Оператор  $H$  имеет не более четырех простых собственных значений, лежащих вне существенного спектра, и

$$\sigma_{\text{disc}}(H) = \{z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H) : \Omega(z) = 0\},$$

где

$$\Omega(z) = w_0 - z - \int_{\mathbf{T}^d} \frac{v_1^2(s) ds}{\Delta(s; z)}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H).$$

## Литература

- [1] *Mogilner A.I.* Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results // Advances in Sov. Math. 1991. Vol. 5. Pp. 139–194.

## СПЕКТР ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ВОЗМУЩЕНИЕМ РАНГА НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ 4

Расулова З.Д.<sup>1</sup>

Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики, сводятся к исследованию спектральных свойств обобщенной модели Фридрихса [1, 2]. Поэтому изучение спектра обобщенной модели Фридрихса играет важную роль в современной математической физике. В настоящей работе рассматривается обобщенная модель Фридрихса  $h$  с возмущением ранга не более чем 4. Найден явный вид существенного и дискретного спектра оператора  $h$ . Установлено, что оператор  $h$  имеет не более чем четыре (с учетом кратности) собственных значения вне существенного спектра.

Пусть  $\mathbf{T}^d$  –  $d$ -мерный тор, т.е. куб  $(-\pi, \pi]^d$  с соответствующим отождествлением противоположных граней,  $\mathbf{C}$  – одномерное комплексное пространство, а  $L_2(\mathbf{T}^d)$  – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $\mathbf{T}^d$ .

Обозначим через  $\mathcal{H}$  прямую сумму пространств  $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$  и  $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^d)$ , т.е.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ . Пространства  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_1$  называются нуль-частичным и одночастичным подпространствами фоковского пространства соответственно.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса  $h$ , действующую в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , как  $2 \times 2$  блочно-операторную матрицу

$$h = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11} \end{pmatrix},$$

где операторы  $h_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i, j = 0, 1$ , определяются по правилам:

$$h_{00}f_0 = w_0f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbf{T}^d} v_0(s)f_1(s)ds,$$

$$(h_{11}f_1)(p) = w_1(p)f_1(p) - v_1(p) \int_{\mathbf{T}^d} v_1(s)f_1(s)ds - v_2(p) \int_{\mathbf{T}^d} v_2(s)f_1(s)ds.$$

---

<sup>1</sup>Бухарский государственный университет, Узбекистан

Здесь  $f_i \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 0, 1$ ,  $w_0$  – фиксированное вещественное число,  $w_1(\cdot)$  и  $v_i(\cdot)$  – вещественно-непрерывные функции на  $\mathbf{T}^d$ ,  $i = 0, 1, 2$ , а  $h_{01}^*$  – сопряженный оператор к  $h_{01}$ .

Очевидно, что оператор  $h$  ограничен и самосопряжён в  $\mathcal{H}$ .

Оператор  $h_{01}$  называется оператором уничтожения, а оператор  $h_{01}^*$  – оператором рождения.

Обозначим через  $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$  и  $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$  соответственно существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Пусть оператор  $h_0$  действует в  $\mathcal{H}$  и имеет вид

$$h_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}^0 \end{pmatrix},$$

где

$$(h_{11}^0 f_1)(p) = w_1(p) f_1(p).$$

Оператор возмущения  $h - h_0$  оператора  $h_0$  является самосопряженным оператором ранга не более чем 4. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [3] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора  $h$  совпадает с существенным спектром оператора  $h_0$ . Известно, что  $\sigma_{\text{ess}}(h_0) = [m; M]$ , где числа  $m$  и  $M$  определяются следующим образом:

$$m = \min_{p \in \mathbf{T}^d} w_1(p), \quad M = \max_{p \in \mathbf{T}^d} w_1(p).$$

Из последних фактов следует, что  $\sigma_{\text{ess}}(h) = [m; M]$ .

Определим регулярные в  $\mathbf{C} \setminus [m; M]$  функции

$$I_{ij}(z) = \int_{\mathbf{T}^d} \frac{v_i(s) v_j(s) ds}{w_1(s) - z}, \quad i, j = 0, 1, 2;$$

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_0 - z - I_{00}(z) & I_{01}(z) & I_{02}(z) \\ I_{10}(z) & 1 - I_{11}(z) & -I_{12}(z) \\ I_{20}(z) & -I_{21}(z) & 1 - I_{22}(z) \end{vmatrix}.$$

Установим связь между собственными значениями оператора  $h$  и нулями функции  $\Delta(\cdot)$ .



**Лемма.** *Оператор  $h$  имеет собственное значение  $z \in \mathbf{C} \setminus [m; M]$  тогда и только тогда, когда  $\Delta(z) = 0$ .*

Из леммы вытекает, что

$$\sigma_{\text{disc}}(h) = \{z \in \mathbf{C} \setminus [m; M] : \Delta(z) = 0\}.$$

Согласно лемме, функция  $\Delta(\cdot)$  обладает характеристическим свойством определителя Фредгольма. По этой причине мы назовём её определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором  $h$ .

**Теорема.** *Оператор  $h$  имеет не более трех (не более одного) собственных значений, лежащих левее  $m$  (правее  $M$ ).*

## Литература

- [1] *Фаддеев Л.Д.* О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Труды Мат. Инс-та АН СССР. 1964. Т. 73. С. 292–313.
- [2] *Минлос Р.А., Синай Я.Г.* Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа // Теор. и матем. физ. 1979. Т. 2, № 2. С. 230–243.
- [3] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.

# К ВОПРОСУ О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

Родионова Н.В.<sup>1</sup>

Работа продолжает исследования [1]: при фиксированных  $\gamma \neq 0$  и  $\tau > 0$  в качестве приближенного решения задачи

$$u_{tt} = \gamma^2 u_{\xi\xi}; \quad u(0, \xi) = \phi(\xi), \quad u_t(0, \xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [0, 1];$$

$$u(t, 0) = \rho_0(t), \quad u(t, 1) = \rho_1(t), \quad t \in [0, 2\tau],$$

предлагается использовать оптимальный сплайн задачи

$$J \doteq J(N, \omega) \doteq \|u_{tt} - \gamma^2 u_{\xi\xi}\|_{L_2(\Pi)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \sigma_{N, \omega}(\Pi). \quad (1)$$

При фиксированном  $\omega \in (-1, 1)$  через  $\sigma_{N, \omega}(\Pi)$  обозначено конечномерное пространство, состоящее из сплайнов [1], зависящих от коэффициентов  $u_j^i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, 2N-1$  (где  $N$  – параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в прямоугольнике  $\Pi \doteq [0, 2\tau] \times [0, 1]$ . Применяем обозначения  $\lambda \doteq (1+\omega)/2$  и  $\mu \doteq (1-\omega)/2$ , а также  $n \doteq N-1$ ,  $h \doteq \frac{1}{2N}$ ,  $\theta \doteq \gamma^2 \frac{\tau^2}{h^2}$ ,

$$x \doteq -1 - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\mu^2} \leq -5, \quad \alpha \doteq -1 - \frac{1}{\lambda^2}, \quad \beta \doteq -1 - \frac{1}{\mu^2},$$

$$u_0^i \doteq \rho_0^i \doteq \rho_0(i\tau), \quad u_{2N}^i \doteq \rho_1^i \doteq \rho_1(i\tau), \quad i = 0, 1, 2,$$

$$\psi_j \doteq \psi(jh), \quad \phi_j \doteq \phi(jh),$$

$$x_j \doteq u_j^2 - \phi_j, \quad y_j \doteq u_j^2 - 2u_j^1 + \phi_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2N, \quad (2)$$

$$z_k \doteq \theta(\phi_{2k-2} - 2\phi_{2k-1} + \phi_{2k}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$v_k \doteq (1+\alpha)z_k + (1+\beta)z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Анализ функционала (1) породил в [1] уравнения (4.1) – (4.4) итоговой разностной схемы

$$x_{2k-1} - \lambda y_{2k-2} - y_{2k-1} - \mu y_{2k} = 2\tau \psi_{2k-1}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Ижевск

$$\mu y_{2k-2} + \lambda y_{2k} - (1 - \lambda\mu) \theta(x_{2k-2} - 2x_{2k-1} + x_{2k}) = z_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$x_{2k} - 2y_{2k} = 2\tau \psi_{2k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$y_{2k-2} + 2x y_{2k} + y_{2k+2} = v_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6)$$

а для чисел  $y_{2k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , получена явная формула (5.1)

$$y_{2k} = \frac{1}{U_n(x)} \left[ -B_{k1}(x) y_0 - B_{kn}(x) y_{2N} + \sum_{i=1}^n B_{ki}(x) v_i \right], \quad (7)$$

где использованы многочлены Чебышева 2-го рода  $U_n(\cdot)$  и порожденные ими многочлены  $B_{ki}(\cdot)$  (см. ниже). Заметим, что  $U_n(x) \neq 0$ .

**Теорема 1.** Система уравнений (3)–(6) имеет единственное решение, и оно допускает явное представление через граничные элементы  $y_0$ ,  $y_{2N}$ ,  $\psi_1, \dots, \psi_{2N-1}$ ,  $z_1, \dots, z_N$ ,  $v_1, \dots, v_n$ . Для переменных  $y_{2k}$ , входящих в систему (6), справедливо представление (7). Полученные значения позволяют сначала явно вычислить из уравнений (5) величины  $x_{2k}$ , из уравнений (4) – величины  $x_{2k-1}$ , затем из уравнений (3) – величины  $y_{2k-1}$  и, наконец, из уравнений (2) – коэффициенты  $u_j^2$  и  $u_j^1$  оптимального сплайна задачи (1).

Так как  $x \leq -5$ , то для решения уравнения (6) целесообразно применять метод прогонки, – он имеет линейную сложность вычислений и наиболее эффективен в прикладной реализации. С прикладных позиций явная формула (7) обладает следующим недостатком: при  $|x| \geq 5$  модули выражений, входящих в формулу, стремительно растут при увеличении  $n$ , что приводит к быстрому переполнению. Однако явная формула (7) имеет важное теоретическое значение: она позволяет в явном виде получить минимальное значение  $J^* = J^*(N, \omega)$  функционала (1) и показать, что в случае гладких граничных функций имеет место предельное соотношение  $J^* \xrightarrow{N} 0$ .

Совокупность  $\{U_n(x), x \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , состоящую из многочленов Чебышева 2-го рода, определяем рекурсивно:  $U_{-1}(x) \doteq 0$ ,  $U_0(x) \doteq 1$ ,  $U_{n-1}(x) + U_{n+1}(x) = 2x U_n(x)$ . Определены также функциональные матрицы  $A(x) = (A_{ki}(x))$  и  $B(x) = (B_{ki}(x))$  порядка  $n \geq 1$  такие, что

$$A_{ki}(x) = \delta_{k,i+1} + 2x \delta_{ki} + \delta_{k,i-1},$$

$$B_{ki}(x) \doteq (-1)^{k+i} \cdot \begin{cases} U_{k-1}(x)U_{n-i}(x), & \text{если } k \leq i, \\ U_{n-k}(x)U_{i-1}(x), & \text{если } k \geq i. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Если  $E_n$  – единичная матрица порядка  $n \geq 1$ , то

$$A(x)B(x) = U_n(x)E_n = B(x)A(x).$$

Произвольные числа  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  такие, что  $\alpha + \beta = 2x$  и  $N \geq 2$ , порождают матрицы  $\tilde{A} = (\tilde{A}_{ki})$  и  $\tilde{B} = (\tilde{B}_{ki})$  порядка  $N+1$  ( $k, i = 0, 1, \dots, N$ ) такие, что

$$\tilde{A}_{ki} \doteq \begin{cases} \alpha, & \text{если } (k, i) = (0, 0), \\ \delta_{k, i+1} + 2x\delta_{ki} + \delta_{k, i-1}, & \text{если } (0, 0) \neq (k, i) \neq (N, N), \\ \beta, & \text{если } (k, i) = (N, N), \end{cases}$$

$$\tilde{B}_{ki} \doteq (-1)^{k+i} \cdot \begin{cases} [U_k(x) - \beta U_{k-1}(x)] [U_{N-i}(x) - \alpha U_{n-i}(x)], & k \leq i, \\ [U_{N-k}(x) - \alpha U_{n-k}(x)] [U_i(x) - \beta U_{i-1}(x)], & k \geq i. \end{cases}$$

**Теорема 3.** Если  $E_N^0$  – единичная матрица порядка  $N+1 \geq 3$ , то

$$\tilde{A}\tilde{B} = (\alpha\beta - 1)U_n(x)E_N^0 = \tilde{B}\tilde{A}.$$

**Теорема 4.** Минимум  $J^*$  функционала (1) достигается на решении системы уравнений (3) – (6), и для него имеет место представление

$$J^* = \frac{2}{N\tau^3} \langle [-\tilde{A}]^{-1}\xi, \xi \rangle, \quad \xi \doteq \text{col}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N),$$

где  $\xi_0 \doteq y_0 - z_1$ ,  $\xi_k \doteq z_k - z_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\xi_N \doteq z_N - y_{2N}$ .

Исследован спектр матриц  $[-\tilde{A}]$  и  $[-\tilde{A}]^{-1}$ : показано, что

$$J^*(N, \omega) < \frac{1}{N\tau^3} \|\xi\|_N^2, \quad \omega \in (-1, 1),$$

а в наилучшем случае:  $\omega = 0$ ,  $x = \alpha = \beta = -5$ ,  $J^*(N, 0) < \frac{5}{6N\tau^3} \|\xi\|_N^2$ .

В случае  $\phi \in C^3[0, 1]$ ,  $\rho_0, \rho_1 \in C^2[0, 2\tau]$  найдена константа  $C > 0$  такая, что  $\|\xi\|_N^2 < C\tau^4$ , поэтому  $J^*(N, \omega) \xrightarrow{N} 0$ . Другими словами, для любых  $\omega \in (-1, 1)$  и  $\varepsilon > 0$  существуют  $N \in \mathbb{N}$  и оптимальный сплайн  $u \in \sigma_{N, \omega}(\Pi)$  такие, что  $\|u_{tt} - \gamma^2 u_{\xi\xi}\|_{L_2(\Pi)}^2 < \varepsilon$ . Эти объекты могут быть найдены априорно: значение  $N$  – исходя из неравенства  $\frac{\tau}{N} C < \varepsilon$ , а коэффициенты сплайна – в соответствии с теоремой 1.

## Литература

- [1] Родionoва Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего волнового уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 144–154.

## ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С СИЛЬНО $(L, P)$ -РАДИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рузакова О.А., Золотарёва Е.А.<sup>1</sup>

Пусть  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{U}$  – банаховы пространства, операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$ . Рассмотрим начально-конечную задачу

$$P_{\text{in}}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{\text{fin}}(x(\tau) - x_\tau) = 0 \quad (1)$$

для уравнения соболевского типа [1]

$$L \dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t). \quad (2)$$

Здесь  $\tau \in \mathbb{R}_+$ ,  $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ , а  $P_{\text{in}}, P_{\text{fin}}$  – относительно спектральные проекторы, которые определены в [2], часть спектра  $\sigma_{\text{fin}}^L(M)$  ограничена.

Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален [1], тогда, согласно результатам [2], задача (1), (2) сводится к эквивалентной системе из трех независимых уравнений

$$H\dot{x}^0 = x^0 + M_0^{-1}(I - Q)Bu, \quad (3)$$

$$\dot{x}_{\text{in}}^1 = S_{\text{in}}x_{\text{in}}^1 + L_{\text{in}}^{-1}Q_{\text{in}}Bu, \quad P_{\text{in}}(x(0) - x_0) = 0, \quad (4)$$

$$\dot{x}_{\text{fin}}^1 = S_{\text{fin}}x_{\text{fin}}^1 + L_{\text{fin}}^{-1}Q_{\text{fin}}Bu, \quad P_{\text{fin}}(x(\tau) - x_\tau) = 0. \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Решения (3)–(5), соответственно, примут вид

$$x^0(t) = - \sum_{q=0}^p H^q M_0^{-1} (I - Q) B \frac{d^q}{dt^q} u(t),$$

где  $u \in C^{(p+1)}((0, \tau); \mathfrak{Y}^0)$ ;

$$x_{\text{in}}^1(t) = X_{\text{in}}^t x_0 + \int_0^t R_{\text{in}}^{t-s} B u(s) ds,$$

где  $u \in C([0, \tau]; \mathfrak{Y}_{\text{in}}^1)$ ;

$$x_{\text{fin}}^1(t) = X_{\text{fin}}^{t-\tau} x_\tau - \int_t^\tau R_{\text{fin}}^{t-s} B u(s) ds,$$

где  $u \in C([0, \tau]; \mathfrak{Y}_{\text{fin}}^1)$ .

Сформулируем критерий  $\varepsilon$ -управляемости [3] системы (3)–(5).

**Теорема.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда

(i) Система (3)  $\varepsilon$ -управляема за время  $T$  (за свободное время) в том и только в том случае, если выполнены условия

$$\text{span} \{ \text{im } H^k M_0^{-1} (I - Q) B, k = \overline{0, p} \} = \text{dom } M_0.$$

(ii) Система (4)  $\varepsilon$ -управляема за время  $T$  (за свободное время) в том и только в том случае, если выполнены условия

$$\overline{\text{span}} \{ \text{im } R_{\text{in}}^s B, 0 \leq s \leq T \} = \mathfrak{X}_{\text{in}}^1, \quad (\overline{\text{span}} \{ \text{im } R_{\text{in}}^T B, T \geq 0 \} = \mathfrak{X}_{\text{in}}^1)$$

(iii) Система (5)  $\varepsilon$ -управляема за время  $T$  (за свободное время) в том и только в том случае, если выполнены условия

$$\overline{\text{span}} \{ \text{im } R_{\text{fin}}^s B, 0 \leq s \leq T \} = \mathfrak{X}_{\text{fin}}^1, \quad (\overline{\text{span}} \{ \text{im } R_{\text{fin}}^T B, T \geq 0 \} = \mathfrak{X}_{\text{fin}}^1).$$

## Литература

- [1] *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht–Boston–Köln–Tokyo: VSP, 2003.
- [2] *Загребина С.А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно  $(L, p)$ -радиальным оператором // Мат. заметки ЯГУ. Якутск. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 39–48.
- [3] *Рузакова О.А., Олейник Е.А.* Об управляемости линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2012. Вып. 11, № 5 (264). С. 54–61.

## МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИПШИЦА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Соболева Е.О.<sup>1</sup>

Рассматривается метод регуляризации Тихонова, где решение ищется в виде суммы двух компонент. Первая компонента принадлежит пространству  $L_2[0, 1]$ , а вторая – пространству  $H_\mu[0, 1]$ . В этом случае можно получить равномерную сходимость по второй компоненте и сильную сходимость в пространстве  $L_2[0, 1]$  по первой. Однако, такие сходимости верны лишь для подпоследовательностей, выделенных из предкомпактных последовательностей, составляющих решение задачи регуляризации. Данная работа является продолжением исследований [1].

Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$Au = y \tag{1}$$

с непрерывным оператором  $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ , обратный к которому разрывен. Таким образом, задача решения уравнения (1) является некорректно поставленной.

---

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

Для построения устойчивого приближенного решения применялся метод регуляризации Тихонова в форме

$$\min\{\|A(u_1 + u_2) - y_\delta\|_{L_2[0,1]}^2 + \alpha(\|u_1\|_{L_2[0,1]}^2 + \|u_2\|_{H_\mu[0,1]})\} \quad (2)$$

в предположении, что искомое решение  $u$  представимо в виде  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1 \in L_2[0, 1]$ ,  $u_2 \in H_\mu[0, 1]$ .

**Определение.** Пространство Липшица  $H_\mu[0, 1]$  – это нормированное пространство непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$\forall t_1, t_2 \in [0, 1] \quad |x(t_1) - x(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|^\mu, \quad \mu \in (0, 1), \quad L > 0.$$

Норма в  $H_\mu[0, 1]$  задается следующим образом:

$$\|x\|_{H_\mu[0,1]} = \|x\|_{C[0,1]} + \sup_{t_1 \neq t_2 \in [0,1]} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}, \quad \mu \in (0, 1). \quad (3)$$

Для данного пространства верны следующие факты.

**Лемма 1.** Пространство  $H_\mu[0, 1]$  с нормой (3) полное.

**Лемма 2.** Норма (3) полунепрерывна снизу относительно равномерной сходимости.

**Теорема.** Пусть оператор  $A$  в уравнении (1) является линейным непрерывным и действует из  $L_2[0, 1]$  в  $L_2[0, 1]$ , а операторное уравнение имеет единственное решение  $\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ , где  $\hat{u}_1 \in L_2[0, 1]$ ,  $\hat{u}_2 \in H_\mu[0, 1]$ . Тогда задача (2) разрешима, и если  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  – это предельные точки предкомпактных последовательностей  $\{u_1^\alpha\}, \{u_2^\alpha\}$  соответственно, то имеют место сходимости

$$\|u_1^{\alpha_k} - \hat{u}_1\|_{L_2[0,1]} \rightarrow 0, \quad \|u_2^{\alpha_k} - \hat{u}_2\|_{C[0,1]} \rightarrow 0,$$

где  $\delta_k \rightarrow 0$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $\frac{\delta_k^2}{\alpha_k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Разработанный метод применяется для восстановления модельного решения, удовлетворяющего интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 \frac{x(s)}{(t-s)^2 + 1} ds = y(t). \quad (4)$$



После дискретизации уравнения (4) с числом точек разбиения  $N = 100$  задача минимизации решается субградиентным методом. Расчеты были выполнены при следующих значениях параметров:  $\alpha = 10^{-7}$ ,  $\mu = 0,9$ . В ходе проведенных численных экспериментов были получены вполне удовлетворительные результаты.

### Литература

- [1] *Васин В.В.* Восстановление гладкой и разрывной компонент решения линейных некорректных задач // ДАН. 2013. Т. 448, № 2. С. 127–130.

## ИССЛЕДОВАНИЕ АТТРАКТОРОВ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ РУЛЬКОВА НЕЙРОННОЙ АКТИВНОСТИ

Асламов Г.С., Башкирцева И.А.<sup>1,2</sup>

В данной работе рассматривается дискретная нейронная модель, введенная впервые Н.Ф. Рульковым [1], которая задается системой

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + y_n, \quad y_{n+1} = y_n - \sigma x_n - \beta, \quad (1)$$

где  $x_n$  соответствует напряжению мембраны нейрона,  $y_n$  – концентрации открытия ионных каналов.

Поскольку переменная  $y_n$  достаточно медленно растёт, то можно принять её равной некоторой константе  $\gamma$ . Получим следующее уравнение:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + \gamma. \quad (2)$$

Зафиксируем  $\alpha = 4.1$ , как сделано в работе [1]. На рис. 1а построена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра  $\gamma$ . Как видим, в этой модели наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу.

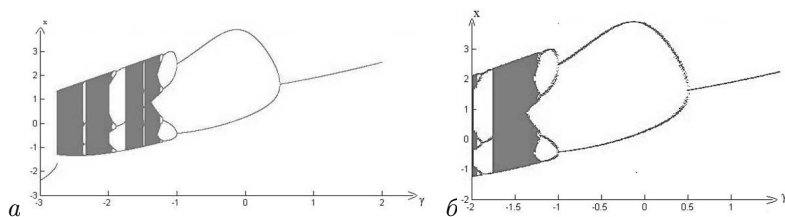


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма: а) детерминированная, б) стохастическая при  $\varepsilon = 0.01$

Исследование показало, что на интервале  $(0.5, 2)$  аттрактором модели является точка покоя, на интервале  $(-0.9, 0.5)$  наблюдается

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-08-00069.

устойчивый 2-цикл, на интервале  $(-1.21, -0.9)$  – устойчивый 4-цикл. На рис. 2 изображены лестницы Ламерея для разных значений параметра  $\gamma$ .

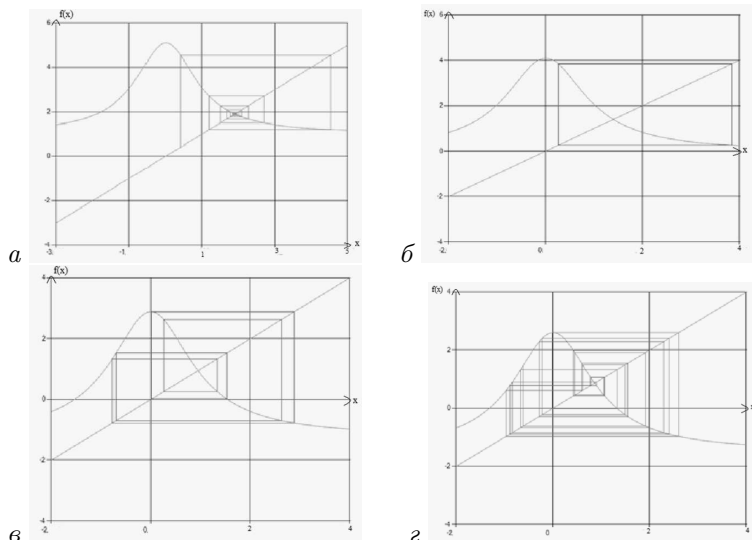


Рис. 2: Лестницы Ламерея: а) устойчивая точка при  $\gamma = 1$ ; б) 2-цикл при  $\gamma = 0$ ; в) 8-цикл при  $\gamma = -1.22$ ; г) хаос при  $\gamma = -1.5$ .

Теперь внесем в модель случайные возмущения:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + \gamma + \varepsilon \xi(t), \quad (3)$$

здесь  $\xi(t)$  – нормально распределенная случайная величина,  $\varepsilon$  – интенсивность случайного возмущения.

Построим для данной модели бифуркационную диаграмму. На рис. 1б мы видим размывание тонкой структуры бифуркационной диаграммы.

Рассмотрим значение параметра  $\gamma \in (0.5, 2)$ , где модель имеет устойчивое равновесие  $\bar{x}$ , и проведем эмпирическую оценку разброса случайных состояний модели вокруг этого равновесия. На рис. 3а для  $\gamma \in (0.5, 2)$  дисперсия  $D$  случайных состояний, полученных прямым численным моделированием, изображена точками. Как видим,

при приближении параметра к точке бифуркации дисперсия возрастает.

Для теоретической оценки этой дисперсии используем функцию стохастической чувствительности [2]. Функция стохастической чувствительности  $W$  равновесия  $\bar{x}$ , связанная с дисперсией  $D$  соотношением  $D = \varepsilon^2 W$ , вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{1 - (f'(\bar{x}))^2},$$

где  $f(x)$  – функция правой части исследуемой дискретной модели. На рис. 3а функция  $D = \varepsilon^2 W$  изображена сплошной линией. Здесь можно видеть хорошее совпадение теоретических и эмпирических результатов. Использование теоретической функции стохастической чувствительности позволяет избежать большого объема вычислений, необходимых для построения эмпирической дисперсии. С помощью функции стохастической чувствительности вокруг равновесия  $\bar{x}$  можно построить доверительный интервал, в который попадают случайные состояния модели с вероятностью  $p$ . На рис. 3б изображена доверительная полоса вокруг ветви бифуркационной диаграммы, отвечающей устойчивому равновесию.

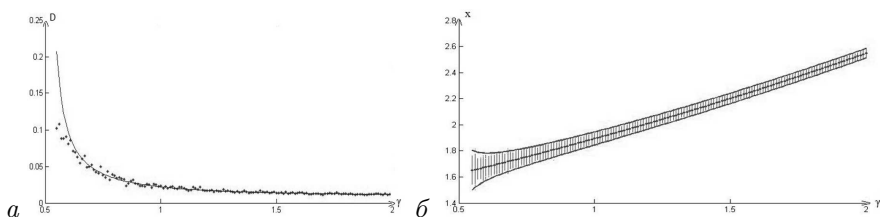


Рис. 3: а) Эмпирическая (точки) и теоретическая (сплошная) дисперсии равновесия; б) доверительная полоса при  $\varepsilon = 0.01, p = 0.99$ .

## Литература

- [1] *N.F. Rulkov. Regularization of Synchronized Chaotic Bursts // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. Pp. 183–186.*

- [2] И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко, И. Цветков. Стохастические аттракторы: чувствительность, бифуркации, управление. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

## О ПОВЕДЕНИИ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ КВАЗИТЕПЛИЦЕВОЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ РАЗМЕРНОСТИ

Батагаева Т.А.<sup>1</sup>, Казаков А.Л.<sup>2</sup>

Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) являются важным и актуальным объектом исследования, поскольку играют особую роль при решении многих задач математической физики [1–4]. Одной из ключевых характеристик всякой матрицы (не только трехдиагональной) является число обусловленности, которое, в частности, показывает, насколько точно можно получить решение соответствующей задачи.

В данной работе рассматривается вопрос о поведении числа обусловленности квазитеплицевой (т.е. «почти теплицевой») матрицы  $A_n$  в случае, когда ее размерность  $n$  неограниченно возрастает при сохранении структуры матрицы. СЛАУ с такими матрицами, в частности, возникают при построении решений некоторых краевых задач математической физики в классе аналитических функций (при рекуррентном нахождении коэффициентов степенных рядов) [7].

Исследование является продолжением работ, посвященных трехдиагональным СЛАУ, выполненных авторами ранее [5, 6].

Пусть

$$A_n = \begin{pmatrix} xb & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a & b & c \\ & & & a & b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Иркутский государственный технический университет

<sup>2</sup>Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

где  $x, a, b, c$  – действительные числа, причем  $x \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $n$  – размерность матрицы. При  $x = 1$  имеем случай теплицевой трехдиагональной матрицы.

Под числом обусловленности матрицы  $A_n$  будем понимать [1] величину  $\mu_n = \|A_n\| \cdot \|A_n^{-1}\|$ . Будем использовать первую (максимум суммы модулей элементов по столбцам) или бесконечную (максимум суммы модулей элементов по строкам) нормы матриц.

Определитель матрицы (1) можно вычислить с помощью следующих формул:

$$\Delta_n = b^n(\beta_+ \lambda_+^n + \beta_- \lambda_-^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad \beta_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{2x-1}{2\sqrt{D}}, \quad D = 1 - 4\Theta \neq 0, \quad \Theta = \frac{ac}{b^2},$$

справедливость (2) доказывается индукцией по  $n$ .

В случае когда  $\Theta < 1/4$  и, следовательно,  $D < 0$ , значения  $\lambda_{\pm}$  являются комплексно-сопряженными. Если записать в этом случае формулы (2) в тригонометрическом виде, то

$$\Delta_n = b^n r^n R \cdot \cos(n\varphi + \psi), \quad (3)$$

где

$$r = \sqrt{\Theta}, \quad R = \sqrt{\frac{\Theta - x + x^2}{\Theta - 0.25}}, \quad \varphi = \arctg(\sqrt{|D|}), \quad \psi = \arctg \frac{1 - 2x}{\sqrt{|D|}}.$$

Соотношения (2) и (3) используются при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема.** Трехдиагональные квазитеплицевы матрицы (1) обладают следующими свойствами:

1. Если  $\Theta < 1/4$ ,  $\beta_+ \lambda_+^n + \beta_- \lambda_-^n \neq 0$  и  $x \neq \lambda_-$ , то последовательность  $|\mu_n|$  ограничена по  $n$ .
2. Если  $\Theta \geq 1/4$ , то при неограниченном возрастании  $n$  последовательность  $|\mu_n|$  также неограниченно растет, при этом ее предел существует и равен  $+\infty$  только в случае  $\Theta = 1/4$ .

Доказательство теоремы громоздко и поэтому здесь не приводится. Ограничимся лишь комментариями к условиям.

Во-первых, выполнение условий теоремы, разумеется, не предполагает обязательного наличия диагонального преобладания, хотя для всех матриц, обладающих этим свойством, они выполняются. Во-вторых, проверка второго условия из пункта 1 может быть выполнена за конечное число шагов, которое можно легко оценить сверху, поскольку величина  $|\lambda_+/\lambda_-|$  заведомо больше единицы. В-третьих, условие  $x \neq \lambda_-$  является существенным: можно показать, что  $\mu_n \sim (\lambda_+/\lambda_-)^n$  при  $\Theta < 1/4$ ,  $x = \lambda_-$ .

## Литература

- [1] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1977.
- [2] Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. – М.: Наука, 1985.
- [3] Meurant G.A. Review on inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices // The SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1992. Vol. 13, № 1. Pp. 707–728.
- [4] Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [5] Батагаева Т.А., Казаков А.Л. О свойствах трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в математической физике // Современные проблемы математики: Тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. С. 388–390.
- [6] Казаков А.Л., Батагаева Т.А. Исследование устойчивости простейших квазитеплицевых трехдиагональных систем с неограниченной размерностью // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2013. С. 25–37.
- [7] Казаков А.Л., Лемперт А.А. Аналитическое и численное исследование обобщенных задач Коши, возникающих в газовой динамике // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 3. С. 30–40.

## УПРАВЛЕНИЕ ПРОТОЧНЫМ ХИМИЧЕСКИМ РЕАКТОРОМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Башкирцева И.А., Фоминых П.М.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим задачу управления стохастической системой

$$\dot{x} = f(x, u) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad x, f, \sigma, w \in R^n, \quad u \in R^l. \quad (1)$$

Пусть  $F = f'_x(\bar{x}, 0)$ ,  $B = f'_u(\bar{x}, 0)$ ,  $S = \sigma(\bar{x})\sigma^\top(\bar{x})$ ,  $\bar{x}$  – равновесие детерминированной системы,  $w(t)$  – стандартный винеровский процесс,  $W$  – матрица стохастической чувствительности [1].

**Теорема.** Если  $\text{rank}(B) = n$ , то управление  $u = K(x - \bar{x})$  синтезирует в системе (1) заданную матрицу стохастической чувствительности  $W$  при  $\bar{K} = -B^{-1}(\frac{1}{2}SW^{-1} + F) + B^{-1}ZW^{-1}$ , где  $Z$  – произвольная кососимметрическая матрица.

В качестве примера рассмотрим модель непрерывного химического реактора идеального перемешивания [2]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \exp(-\frac{1}{y}) + \lambda(\tilde{x} - x) + u_1 + \varepsilon_1 \dot{w}_1 \\ \dot{y} &= x \exp(-\frac{1}{y}) + \mu(\tilde{y} - y) + u_2 + \varepsilon_1 \dot{w}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x, y$  – безразмерные переменные, пропорциональные соответственно концентрации реагирующего вещества и температуре в реакторе;  $\tilde{x}, \tilde{y}$  – те же переменные для потока и температуры на входе реактора;  $\lambda, \mu$  – параметры реактора;  $w_{1,2}(t)$  – независимые стандартные винеровские процессы,  $\varepsilon_{1,2}$  – интенсивности случайных возмущений;  $u_{1,2}$  – управляющие воздействия. Реактор с параметрами  $\lambda = 0.5, \mu = 0.25, \tilde{x} = 1.58, \tilde{y} = 0.165$  и  $u_{1,2} = 0, \varepsilon_{1,2} = 0$  имеет экспоненциально устойчивое равновесие  $\bar{x} = 1.265, \bar{y} = 0.228$ .

При малых шумах ( $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon = 0.0001$ ) траектории системы покидают равновесие  $(\bar{x}, \bar{y})$  и формируют вокруг него некоторое облако с малой дисперсией (см. на рис. 1 траектории черного цвета), соответствующее малоамплитудным стохастическим колебаниям. При

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-08-00069.



увеличении шума ( $\varepsilon = 0.0002$ ) происходит резкое изменение динамики – система начинает генерировать стохастические колебания большой амплитуды (см. на рис. 1 траектории серого цвета). Причиной такого изменения динамики является высокая чувствительность равновесия к случайным возмущениям и неравномерность фазового портрета исходной детерминированной системы.

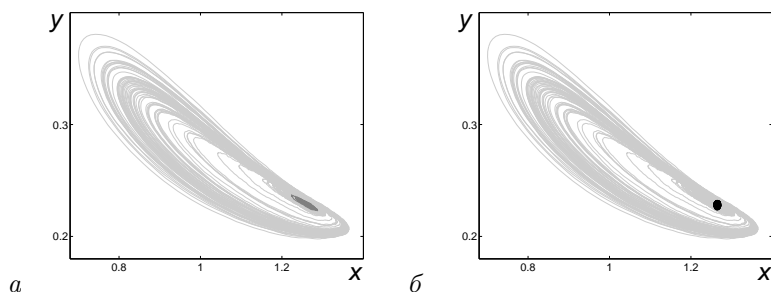


Рис. 1: *а)* Случайные траектории системы без управления при  $\varepsilon = 0.0001$  (темно-серый цвет) и  $\varepsilon = 0.0002$  (светло-серый цвет); *б)* случайные траектории системы с управлением (черный цвет)

Чувствительность равновесия к случайным возмущениям задает матрица  $W$  стохастической чувствительности. Для рассматриваемой системы матрица  $W$  и ее собственные числа равны

$$W = \begin{bmatrix} 1.0947 \cdot 10^4 & -2.2545 \cdot 10^3 \\ -2.2545 \cdot 10^3 & 5.2001 \cdot 10^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1.1417 \cdot 10^4, \\ \lambda_2 = 5.3421 \cdot 10^1. \end{matrix} \quad (3)$$

Неравномерность фазового портрета связана с тем, что при малых отклонениях детерминированная траектория по спирали равномерно стремится к равновесию  $(\bar{x}, \bar{y})$  (невозбужденный режим), а в случае когда начальное отклонение превосходит некоторый порог, траектория сначала уходит от равновесия, совершает некоторое время большеамплитудные осцилляции (возбужденный режим) и только потом сходится к равновесию (см. рис. 2*а*).

Разброс случайных состояний вокруг равновесия удобно представить с помощью доверительных эллипсов рассеивания. На рис. 2*б* – увеличенном фрагменте рис. 2 *а* – изображены эллипсы рассеивания для  $\varepsilon = 0.0001$  (штрих-пунктир) и  $\varepsilon = 0.0002$  (пунктир) и

доверительной вероятности  $p = 0.9$ . Как видим, при  $\varepsilon = 0.0001$  эллипс целиком располагается в зоне невозбужденного режима, а при  $\varepsilon = 0.0002$  выходит в зону возбуждения. Именно такой выход и объясняет природу генерации большеамплитудных стохастических колебаний.

Для того чтобы обеспечить устойчивое функционирование химического реактора при случайных возмущениях, нужно выбором управления уменьшить эллипс рассеивания так, чтобы он целиком содержался в невозбужденной зоне.

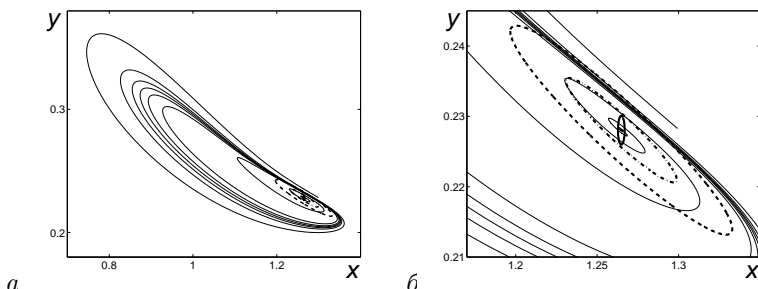


Рис. 2: Фазовый портрет и эллипсы рассеивания

Для этого нужно выбрать подходящую матрицу стохастической чувствительности  $\tilde{W}$  и построить регулятор, обеспечивающий такую чувствительность. В качестве  $\tilde{W}$  возьмем диагональную матрицу с элементами  $\tilde{w}_{11} = \tilde{w}_{22} = 10$ . Соответствующий эллипс рассеивания (см. рис. 2, сплошная линия) целиком лежит в невозбужденной зоне. Регулятор, построенный с помощью Теоремы, синтезирует назначенную  $\tilde{W}$  и решает задачу стабилизации рабочего режима реактора. На рис. 1б черным цветом показаны случайные состояния системы при  $\varepsilon = 0.0002$ .

## Литература

- [1] *Bashkirtseva I., Neiman A.B., Ryashko L.* Stochastic sensitivity analysis of the noise-induced excitability in a model of a hair bundle // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 87. P. 052711.

- [2] Вольтер Б.В., Сальников И.Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. – М.: Химия, 1981.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ВИЧ

Глушенкова В.В., Красовский А.Н., Ким А.В.<sup>1,2</sup>

Рассматривается динамическая система, моделирующая ВИЧ-процесс, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t_* \leq t \leq \Theta, \quad x(t_*) = x_*. \quad (1)$$

Здесь  $x$  – четырехмерный фазовый вектор:  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [S, I, V, E]^T$ , где согласно модели, описанной в работе [1], имеем:  $S$  – количество здоровых клеток в мл (клетки/мл),  $I$  – количество инфицированных клеток в мл (клетки/мл),  $V$  – количество вирусных частиц в мл (вирионы/мл),  $E$  – количество иммунных эффекторов в мл (клетки/мл). Задача рассматривается на фиксированном отрезке времени, определяемом необходимой длительностью лекарственной терапии.

В уравнении (1)  $u$  – вектор управления, измеримая функция из  $R^2$ ;  $u$  имеет следующий вид [1]:  $u = [u_1, u_2]^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]^T$ , где  $\varepsilon_1$  – эффективность первого лекарственного препарата,  $\varepsilon_2$  – эффективность второго лекарственного препарата. Начальный  $t_*$  и конечный  $\Theta$  моменты времени в уравнении (1) зафиксированы и удовлетворяют условию  $t_* \leq t \leq \Theta$ .

Исходная модель выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \lambda_1 - d_1 S - (1 - \varepsilon_1) k_1 V S, \\ \dot{I} &= (1 - \varepsilon_1) k_1 V S - \delta I - m_1 E I, \\ \dot{V} &= (1 - \varepsilon_2) N_T \delta I - c V - [(1 - \varepsilon_1) \rho_1 k_1 S] V, \\ \dot{E} &= \lambda_E + \frac{b_E I}{I + K_b} E - \frac{d_E I}{I + K_d} E - \delta_E E, \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>ИММ УрО РАН

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00089, № 14-01-00065 и программой президиума РАН «Фундаментальные науки – медицине», Урало-Сибирским междисциплинарным проектом.

Параметры в системе означают следующее:  $\lambda_1$  – скорость образования здоровых клеток  $S$ ,  $d_1$  – скорость смерти здоровых клеток,  $k_1$  – скорость заражения здоровых клеток,  $\delta$  – скорость смерти зараженных клеток,  $m_1$  – скорость иммунно-вызванного очищения,  $N_T$  – образование вирионов через инфицированные клетки,  $c$  – естественная скорость гибели вирусов,  $\rho_1$  – среднее количество заражений здоровых клеток вирионами,  $\lambda_E$  – скорость образования иммунных эффекторов,  $b_E$  – максимальная скорость рождения иммунных эффекторов,  $K_b$  – постоянная деления для рождения иммунных эффекторов,  $d_E$  – максимальная скорость гибели иммунных эффекторов,  $K_d$  – постоянная деления для гибели иммунных эффекторов,  $\delta_E$  – естественная скорость гибели иммунных эффекторов.

Рассматривается задача о построении управляющего воздействия  $u(t)$ ,  $t_* \leq t \leq \Theta$  переводящего систему (1) из заданного исходного состояния  $x_* = [x_{*1}, x_{*2}, x_{*3}, x_{*4}]^T$  в заданное конечное состояние  $x^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*]^T$  за фиксированное время  $t_* \leq t \leq \Theta$ .

Решение рассматриваемой задачи существует в классе программных управлений [3]. В предлагаемой модели (1) конструкция управления, решающего поставленную задачу, имеет следующий вид:

$$u(t) = u^* + \sum_{i=1}^k \omega^{(i)}(t), \quad (3)$$

где  $u^*$  – некоторое вспомогательное управление, которое после корректировки с помощью измеримых функций  $\omega^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$  из  $R^2$ , определяемых однозначно ((2.21) [3]), приводит систему в заданное конечное состояние. Эти функции  $\omega^{(i)}(t)$  определяются формулами:

$$\omega^{(i)}(t) = B^{(i)T}(t) \cdot Y^{(i)T}(t)(\Theta, t) \cdot (F^{(i)})^{-1} \cdot c^{(i)}, \quad t_* \leq t \leq \Theta. \quad (4)$$

Здесь  $B^{(i)}$  – матрица  $(4 \times 2)$ , определяемая конкретным видом вектора  $u^*$ , видом функции  $f(t, x, u)$  и граничными условиями  $x_*$ ,  $x^*$ ;  $Y^{(i)}(\Theta, t)$  – фундаментальная матрица  $(4 \times 4)$ . Матрица  $F^{(i)}$  размера  $(4 \times 4)$  определяется формулой:

$$F^{(i)} = \int_{t_*}^{\Theta} Y^{(i)T}(t)(\Theta, t) \cdot B^{(i)}(\tau) \cdot B^{(i)T}(\tau) \cdot Y^{(i)T}(\tau)(\Theta, \tau) d\tau;$$

вектор  $c^{(i)} = x^{*(i)} - x^{*(i-1)}$  определяется точками  $x^{*(i)}, i = 1, \dots, k$ , используемыми при корректировке управления (3) функциями (4).

На рис. показаны управления, решающие задачу.

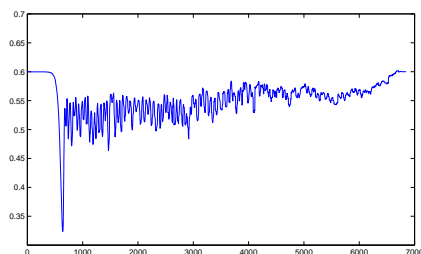
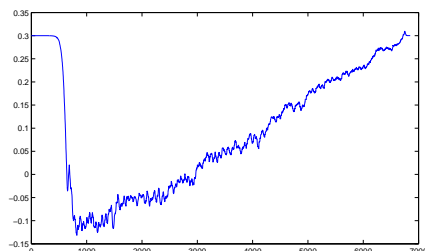
 $\varepsilon_1$  $\varepsilon_2$ 

Рис. Изменение эффективности первого и второго лекарства в зависимости от времени

## Литература

- [1] Taesoo Jang, Hee-Dae Kwon, Jeehyun Lee. Free Terminal Time Optimal Control Problem of an HIV Model Based on a Conjugate Gradient Method // Bull. Math. Biol. 2011. № 73. Pp. 2408–2429.
- [2] Косова А.А., Ким А.В., Ким П.С., Ан Р.Н., Глушенкова В.В., Новоселов А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых биомедицинских процессов. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.

- [3] Красовский Н.Н., Красовский А.Н., Третьяков В.Е. Управление динамической системой. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФИЛАМЕНТОВ В МОДЕЛИ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА

Диркс Х.<sup>1</sup>, Правдин С.Ф.<sup>2,3</sup>, Панфилов А.В.<sup>1,4</sup>

В статье [1] описана математическая модель формы и хода волокон в левом желудочке (ЛЖ) сердца. В [4] было показано, как на основе этой модели можно проводить расчёт электрофизиологической активности миокарда ЛЖ. В данной работе мы использовали феноменологическую модель распространения электрического возбуждения в миокарде Алиева–Панфилова [2] и метод расчёта электрофизиологической активности миокарда из [5]. Был использован такой протокол стимуляции, при котором возникала спиральная волна. Каждая спиральная волна на плоскости или другой поверхности вращается вокруг некоторой точки, её начала. Соответственно, спиральная волна в пространстве вращается вокруг некоторой кривой, называемой филаментом.

Мы отслеживали длину, форму, дрейф и прецессию филаментов [7] при различных значениях параметров модели Алиева–Панфилова (она задаёт свойства миокарда в точке, в частности, т. наз. натяжение  $b_2$ , см. [7]), коэффициентах диффузии (коэффициент  $D_1$  задаёт скорость распространения волны возбуждения вдоль, а  $D_2$  – поперёк волокон), углах  $\theta$  вращения волокна в стенке сердца и, наконец, при различных параметрах формы и размеров ЛЖ (в частности, толщины стенки на верхушке и на основании желудочка).

<sup>1</sup>Гентский университет, Бельгия

<sup>2</sup>ИММ УрО РАН

<sup>3</sup>Институт иммунологии и физиологии Уральского отделения РАН

<sup>4</sup>Работа поддержана грантом FWO Фландрии, проектом 12-M-14-2009 «Виртуальное сердце: интегративные компьютерные математические модели» Президиума УрО РАН, грантом 01SF1511 Гентского университета, Бельгия, Российским фондом фундаментальных исследований (проект 13-01-96048) и Правительством Свердловской области.

Для ЛЖ сферической формы и при малом коэффициенте  $D_2$  ( $D_1 : D_2 = 9$ ) мы получили следующие принципиально различные варианты динамики филамента. Отрицательное натяжение  $b_2$  и большой угол  $\theta$  вызывают появление длинного и быстро растущего филамента, разделяющегося на части, подверженного сложному дрейфу. Близкое к нулю натяжение при том же угле  $\theta$  сопровождается филаментом средней длины довольно сложной формы, совершающего близкие к циклическим колебания. Уменьшение угла  $\theta$  при отрицательном натяжении приводит к частому разделению длинного филамента на две части, из которых одна «живёт» недолго, а другая остаётся «основным» филаментом. В то же время, утолщение стенки ЛЖ при неизменных остальных параметрах приводит к замедлению скорости удлинения филамента.

На сферическом ЛЖ, имеющем большой угол  $\theta$  и близкие к физиологическим значения толщину стенки и отношения  $D_1 : D_2 = 9$ , мы наблюдали дрейф филамента в разных направлениях в зависимости от натяжения  $b_2$ . В частности, при положительном натяжении филамент был коротким и вращался в середине ЛЖ (по высоте). При  $b_2 \approx 0$  он имел несколько большую длину и вращался там же. Когда же  $b_2 < 0$ , полученный длинный филамент имел сложную форму, что согласуется с предсказаниями авторов статьи [6], и дрейфовал на верхушку сердца.

В случае несферического ЛЖ толщина стенки на верхушке была немного меньше, чем на базе, что соответствует реальному строению сердца. В одних случаях мы наблюдали дрейф филамента в область верхушки (положительное натяжение, изотропия и различные случаи анизотропии), в других – филамент двигался в сторону базы и спиральная волна пропадала (большое положительное натяжение, значительная анизотропия).

Мы сопоставили поведение филаментов, полученное в численных экспериментах, с теорией динамики филаментов, изложенной в [8, 9]. Оказалось, что проведённые эксперименты подтверждают выводы теории о зависимости дрейфа филаментов от изменения как толщины стенки сердца, так и угла  $\theta$  вращения волокна в стенке.

## Литература

- [1] *Pravdin S.F., Berdyshev V.I., Panfilov A.V., Katsnelson L.B.,*

- Solovyova O., Markhasin V.S.* Mathematical Model of the Anatomy and Fibre Orientation Field of the Left Ventricle of the Heart // Biomedical Engineering Online. 2013. Vol. 54, № 12. 21 p.
- [2] *Aliev R.R., Panfilov A.V.* A simple two-variable model of cardiac excitation // Chaos, Solitons and Fractals. 1996. Vol. 7, № 3. Pp. 293–301.
- [3] *Ten Tusscher K.H.W.J., Noble D., Noble P.J., Panfilov A.V.* A model for human ventricular tissue // Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol. 2004. Vol. 286. Pp. H1573–H1589.
- [4] *Правдин С.Ф., Панфилов А.В., Бердышев В.И., Кацнельсон Л.Б., Соловьёва О.Э., Мархасин В.С.* Математическая модель миокарда левого желудочка сердца человека: верификация и расчёт электрического возбуждения / в сб. «Современные проблемы математики», Тезисы докладов Междунар. (43-й Всеросс.) мол. школы-конференции. С. 383–385. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012.
- [5] *Правдин С.Ф., Кацнельсон Л.Б., Соловьёва О.Э., Мархасин В.С., Панфилов А.В.* Численное исследование влияния анизотропии миокарда на его электрофизиологические свойства / в сб. «Современные проблемы математики», Тезисы докладов Междунар. (44-й Всеросс.) мол. школы-конференции. С. 127–130. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013.
- [6] *Dierckx H., Verschelde H., Selsil O., Biktashev V.N.* Buckling of scroll waves // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109, № 17. P. 174102.
- [7] *Biktashev V.N., Holden A.V., Zhang H.* Tension of Organizing Filaments of Scroll Waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser A. 1994. Vol. 347. Pp. 611–630.
- [8] *Verschelde H., Dierckx H., Bernus O.* Covariant stringlike dynamics of scroll wave filaments in anisotropic cardiac tissue // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99, № 16. P. 168104.
- [9] *Dierckx H.* Dynamics of wave fronts and filaments in anisotropic cardiac tissue, PhD thesis in Physics, Ghent University, 2010.



## СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ ПУУ

Екатеринчук Е.Д., Рязанова Т.В.<sup>1,2</sup>

В данной работе рассматривается непрерывная модификация дискретной модели бизнес-циклов Пуу [1], которая задается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + (1 - a)\dot{x} + (1 + a)x^3 + bx = \varepsilon\dot{\omega}_1 + \sigma x\dot{\omega}_2, \quad (1)$$

где  $x$  – уровень дохода,  $a$  – акселераторное число,  $b$  – постоянный уровень сбережений,  $\omega$  – стандартный винеровский процесс,  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – интенсивности шума.

В детерминированном случае модели (1) ( $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = 0$ ) существует одна точка покоя  $M(0, 0)$ . Локальные фазовые портреты в зависимости от параметров модели представлены в сводной бифуркационной диаграмме.

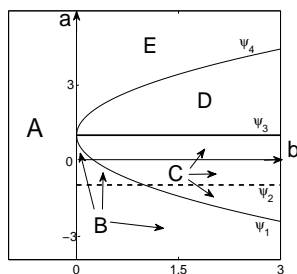


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма

На рис. 1 изображены следующие зоны: А – седло, В – устойчивый узел, С – устойчивый фокус, D – неустойчивый фокус, Е – неустойчивый узел. Границы, разделяющие зоны, имеют следующие аналитические представления

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-31210мол\_а и АВЦП № 1.1099.2011.

$$\psi_1 = 1 - 2\sqrt{b}, \psi_2 = -1, \psi_3 = 1, \psi_4 = 1 + 2\sqrt{b}.$$

Три из четырех границ  $\psi_1, \psi_3, \psi_4$  были найдены аналитически при исследовании системы первого приближения. Граница  $\psi_3$  соответствует бифуркационной кривой, отвечающей потере устойчивости равновесий и рождению предельного цикла. Граница  $\psi_2$  также представляет собой найденную аналитически, методом ван дер Поля кривую, которая соответствует исчезновению неустойчивого предельного цикла [3].

Под действием случайных возмущений траектории стохастической системы ( $\varepsilon \neq 0, \sigma \neq 0$ ) покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него пучок случайных состояний. Для изучения влияния аддитивного шума на детерминированное равновесие используется матрица стохастической чувствительности [2], которая находится аналитически. В случае параметрического шума данный метод подходит только для малых интенсивностей, поэтому для изучения его влияния используется матрица вторых моментов.

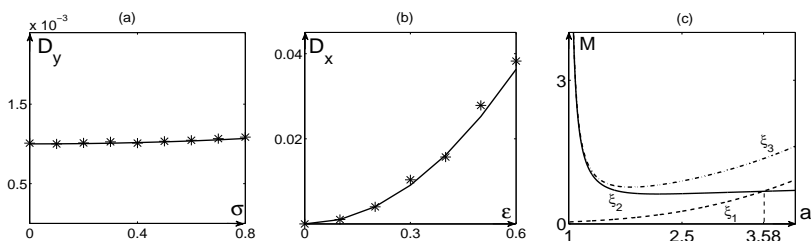


Рис. 2: Теоретическая (сплошная) и эмпирическая (снежинки) дисперсия при  $a = -3, b = 1$  а) по оси  $Ox$  для  $\sigma = 0.3$ , б) по оси  $Oy$  для  $\varepsilon = 0.1$ , в) коэффициент стохастической чувствительности цикла при  $b = 1$  к аддитивному шуму (сплошная), параметрическому (пунктир), аддитивному и параметрическому одновременно (штрихпунктир)

Для проверки корректности данной матрицы проведен сравнительный анализ аналитической и эмпирической дисперсии (рис. 2а, б). Хорошее наложение аналитически найденной дисперсии (элементы матрицы вторых моментов) и эмпирической дисперсии позволяет

сделать вывод о согласованности построенной теории эмпирическим данным.

В случае когда аттрактором является предельный цикл, функция стохастической чувствительности не имеет аналитического представления и может быть найдена численно [2].

На рис. 2с сплошной линией представлена чувствительность цикла к аддитивному шуму ( $\xi_2$ ), пунктирной – к параметрическому шуму ( $\xi_1$ ), штрих-пунктир – к аддитивному и параметрическому шуму одновременно ( $\xi_3$ ). При увеличении параметра  $a$  чувствительность цикла на вносимый аддитивный шум уменьшается (график монотонно убывает), что связано с увеличением устойчивости цикла. Для параметрического шума наблюдается обратное. При увеличении параметра  $a$  кривая  $\xi_1$  монотонно возрастает и, начиная со значения  $a_* = 3.58$ , становится выше графика  $\xi_2$ . В свою очередь, кривая  $\xi_3$  (одновременно влияние аддитивного и параметрического шума) имеет немонотонный характер.

Для значения параметра системы  $1 < a < a_*$  большее влияние на цикл оказывает аддитивный шум. При  $a > a_*$  чувствительность на параметрический шум увеличивается и он становится доминирующим. Легко заметить, что чувствительность к двум типам случайных возмущений одновременно складывается из чувствительности отдельно к аддитивному и параметрическому шуму. Однако, рассмотрение чувствительности раздельно позволяет сделать вывод о зонах параметров доминирующего влияния каждого типа шума.

## Литература

- [1] Dongwei Huang, Hongli Wang, Yingfei Yi. Bifurcations in a stochastic business cycle model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2010. Vol. 20. 9 pp.
- [2] Башкирцева И.А., Екатеринчук Е.Д., Рязанова Т.В., Сысолятина А.А. Математическое моделирование стохастических равновесий и бизнес-циклов модели Гудвина // Компьютерные исследования и моделирование. № 1, Т. 5. С. 107–118. 2013.
- [3] Екатеринчук Е.Д., Рязанова Т.В. Анализ стохастических аттракторов модели экономической динамики / сб. научных тру-

дов «III Информационная школа молодого ученого». С. 317–323.  
– Екатеринбург, 2013.

## МЕТОД ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ В АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ЦИКЛАМИ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ

Кошелев Г.Н.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим трехмерную детерминированную систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x). \quad (1)$$

Предположим, что система (1) имеет два периодических решения  $\xi_{1,2}$ , образующих в фазовом пространстве предельные циклы  $\gamma_{1,2}$ . Рассмотрим соответствующую системе (1) стохастическую систему:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}. \quad (2)$$

Здесь  $w(t)$  – трехмерный винеровский процесс, а  $\sigma(x)$  – матричная функция возмущений с интенсивностью  $\varepsilon > 0$ .

Случайные траектории стохастической системы (2) при малой интенсивности  $\varepsilon$  покидают детерминированные циклы  $\gamma_{1,2}$ , образуя стохастические циклы вокруг них. С увеличением интенсивности  $\varepsilon$  возникают переходы между бассейнами притяжения сосуществующих аттракторов, образуя таким образом сложный стохастический аттрактор вокруг циклов  $\gamma_{1,2}$ .

Для анализа таких переходов будем использовать матричную функцию стохастической чувствительности  $W(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Матрица  $W(t)$  является решением уравнения Ляпунова [1]:

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t),$$

с условиями

$$W(T) = W(0), W(t)r(t) \equiv 0.$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа выполнена при частичной поддержке АВЦП 1.1099.2011.

Здесь  $F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))$ ,  $S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^T(\xi(t))$ ,  $r(t) = f(\xi(t))$ ,  $P = I - \frac{rr^T}{r^Tr}$ . Пусть  $\lambda_{1,2}(t)$  и  $\mathbf{v}_{1,2}(t)$  – собственные числа и соответствующие собственные вектора матрицы  $W(t)$ . Тогда в секущей плоскости  $\alpha$ , ортогональной детерминированному циклу в некоторой точке  $\xi = \xi(t_\alpha)$ , доверительный эллипс будет задаваться уравнением

$$y_1^2/\sigma_1 + y_2^2/\sigma_2 = 2k^2,$$

где  $(y_1, y_2)$  – координаты точек эллипса в плоскости  $\alpha$  в базисе  $\mathbf{v}_{1,2}(t_\alpha)$ . Здесь  $\sigma_{1,2} = \varepsilon^2 \cdot \lambda_{1,2}(t_\alpha)$  – дисперсии вдоль направлений  $\mathbf{v}_{1,2}(t_\alpha)$ . Параметр  $k$  задает доверительную вероятность  $P = 1 - e^{-k^2}$ .

Таким образом, при построении доверительных эллипсов в сечении Пуанкаре в зоне переходов между циклами  $\gamma_{1,2}$  можно прогнозировать возникновение таких переходов по взаимному расположению доверительных эллипсов.

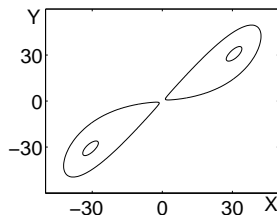


Рис. 1: Проекция предельных циклов на плоскость  $XY$  при  $b = 41$  (большие циклы) и  $b = 45.4$  (малые циклы).

Рассмотрим стохастическую систему Чена:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot (x_2 - x_1) + \varepsilon \cdot \dot{w}_1, \\ \dot{x}_2 = (c - a) \cdot x_1 - x_1 \cdot x_3 + c \cdot x_2 + \varepsilon \cdot \dot{w}_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 \cdot x_2 - b \cdot x_3 + \varepsilon \cdot \dot{w}_3, \end{cases} \quad (3)$$

где  $a = 35$ ,  $c = 28$  и  $b \in (40.9, 45.5)$  – параметры системы,  $w_i$  – независимые винеровские процессы,  $\varepsilon$  – интенсивность случайных возмущений. На выбранном интервале изменения параметра  $b$  в системе (3) при  $\varepsilon = 0$  наблюдается пара предельных циклов  $\gamma_{1,2}$  (см. рис. 1).

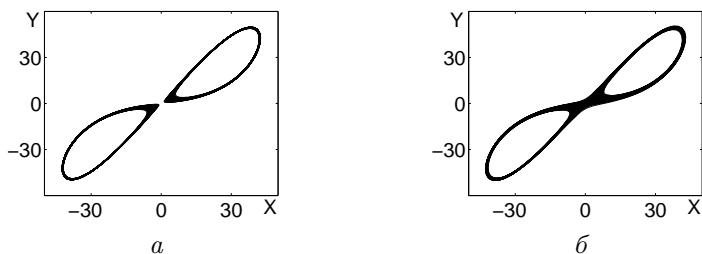


Рис. 2: Стохастические траектории при  $b = 41.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$  (а) и  $\varepsilon = 0.7$  (б).

На рис. 2 представлены стохастические траектории при  $b = 41.5$  и различных значениях интенсивности шума. На рис. 2а при малом значении шума  $\varepsilon = 0.3$  стохастических переходов нет, а на рис. 2б представлены стохастические траектории при  $\varepsilon = 0.7$  – переходы есть.

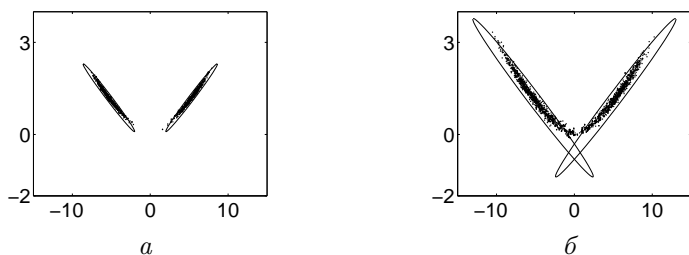


Рис. 3: Доверительные эллипсы с доверительной вероятностью  $P = 0.999$  при  $b = 41.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$  (а) и  $\varepsilon = 0.7$  (б).

На рис. 3 представлены доверительные эллипсы в сечении плоскостью  $x - y = 0$  с доверительной вероятностью  $P = 0.999$  при  $b = 41.5$  и различных значениях интенсивности шума. На рис. 3а при  $\varepsilon = 0.3$  доверительные эллипсы расположены далеко друг от друга, а на рис. 3б при  $\varepsilon = 0.7$  доверительные эллипсы пересекаются, что соответствует стохастическим переходам между аттракторами.

## Литература

- [1] *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles. Mathematics and Computers in Simulation. 2004. Vol. 66. Pp. 55–67.

## СХЕМА С ВЕСАМИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Лекомцев А.В.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим  $p$ -мерное уравнение теплопроводности с эффектом запаздывания вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(t) \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1)$$

здесь  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \overline{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq X_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$  – пространственная и  $t \in [t_0, \theta]$  – временная независимые переменные;  $u(x, t)$  – искомая функция;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  – функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  – величина запаздывания. Пусть заданы начальные и граничные условия

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in \overline{G}, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad \Gamma - \text{граница области } G. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) представляет собой простейшую краевую задачу для  $p$ -мерного уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида для случая переменного коэффициента теплопроводности. Будем предполагать, что коэффициент  $a^2(t)$  удовлетворяет условию

$$0 < c_1 \leq a^2(t) \leq c_2, \quad t \in [t_0, \theta].$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00089 и АВЦП 1.994.2011.

Также будем считать, что функции  $a(t)$ ,  $\varphi(x, t)$  и функционал  $f$  таковы, что эта задача имеет единственное решение  $u(x, t)$ , понимаемое в классическом смысле. Отметим, что случай постоянного коэффициента теплопроводности рассмотрен в работе [1].

Обозначим через  $Q = Q[-\tau, 0)$  множество функций  $u(s)$ , кусочно-непрерывных на полуинтервале  $[-\tau, 0)$ , с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, имеющих конечный левый предел в нуле. Определим норму функции на  $Q$  соотношением  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{-\tau \leq s < 0} \|u(s)\|$ . Дополнительно будем пред-

полагать, что функционал  $f(x, t, u, v)$  определен на  $\bar{G} \times [t_0, \theta] \times R \times Q$  и липшицев по двум последним аргументам [2].

Без ограничения общности будем считать, что  $p = 3$ .

Разобьём отрезки изменения пространственных переменных  $[0, X_1]$ ,  $[0, X_2]$ ,  $[0, X_3]$  на части с шагами  $h_1 = X_1/N_1$ ,  $h_2 = X_2/N_2$ ,  $h_3 = X_3/N_3$  соответственно, введя точки  $x_{i_1 i_2 i_3} = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ , где  $x_{i_1} = i_1 h_1$ ,  $i_1 = \overline{0, N_1}$ ;  $x_{i_2} = i_2 h_2$ ,  $i_2 = \overline{0, N_2}$ ;  $x_{i_3} = i_3 h_3$ ,  $i_3 = \overline{0, N_3}$ , и разобьём отрезок изменения временной переменной  $[t_0, \theta]$  на части с шагом  $\Delta > 0$ , введя точки  $t_k = t_0 + k\Delta$ ,  $k = \overline{0, M}$ . Будем считать, что величина  $\tau/\Delta = m$  – целое число.

Приближения функций  $u(x_{i_1 i_2 i_3}, t_k)$ ,  $a(t_k)$  в узлах будем обозначать через  $u_k^{i_1 i_2 i_3}$  и  $a_k$  соответственно. При всяких фиксированных  $i_1 = \overline{0, N_1}$ ,  $i_2 = \overline{0, N_2}$ ,  $i_3 = \overline{0, N_3}$  введём дискретную предысторию к моменту  $t_k$ ,  $k = \overline{0, M}$ :  $\{u_l^{i_1 i_2 i_3}\}_k = \{u_l^{i_1 i_2 i_3}, k - m \leq l \leq k\}$ .

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовём отображение  $I : \{u_l^{i_1 i_2 i_3}\}_k \rightarrow v^{i_1 i_2 i_3}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ .

Для  $0 \leq s \leq 1$  рассмотрим семейство методов

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2 i_3} - u_k^{i_1 i_2 i_3}}{\Delta} &= s a_{k+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1+1 i_2 i_3} - 2u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2 i_3} + u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1-1 i_2 i_3}}{h_1^2} + \\ &+ (1-s) a_{k+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_k^{i_1+1 i_2 i_3} - 2u_k^{i_1 i_2 i_3} + u_k^{i_1-1 i_2 i_3}}{h_1^2} + F_k^{i_1 i_2 i_3}(v^{i_1 i_2 i_3}(\cdot)), \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3} - u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2 i_3}}{\Delta} &= s a_{k+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2+1 i_3} - 2u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3} + u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2-1 i_3}}{h_2^2} + \\ &+ (1-s) a_{k+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2+1 i_3} - 2u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2 i_3} + u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2-1 i_3}}{h_2^2} + F_k^{i_1 i_2 i_3}(v^{i_1 i_2 i_3}(\cdot)), \quad (5) \end{aligned}$$



$$\frac{u_{k+1}^{i_1 i_2 i_3} - u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3}}{\Delta} = s a_{k+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_{k+1}^{i_1 i_2 i_3+1} - 2u_{k+1}^{i_1 i_2 i_3} + u_{k+1}^{i_1 i_2 i_3-1}}{h_3^2} +$$

$$+ (1-s) a_{k+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3+1} - 2u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3} + u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3-1}}{h_3^2} + F_k^{i_1 i_2 i_3}(v^{i_1 i_2 i_3}(.)), \quad (6)$$

где  $i_1 = \overline{1, N_1 - 1}$ ,  $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ ,  $i_3 = \overline{1, N_3 - 1}$ ,  $k = \overline{0, M - 1}$ , с начальными и граничными условиями

$$u_0^{i_1 i_2 i_3} = \varphi(x_{i_1 i_2 i_3}, t_0), \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad (7)$$

$$v^{i_1 i_2 i_3}(t) = \varphi(x_{i_1 i_2 i_3}, t), \quad t < t_0, \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}, \quad i_3 = \overline{0, N_3}, \quad (8)$$

$$u_k^{i_1 i_2 i_3}|_{\Gamma} = 0, \quad u_{k+\frac{1}{3}}^{i_1 i_2 i_3}|_{\Gamma} = 0, \quad u_{k+\frac{2}{3}}^{i_1 i_2 i_3}|_{\Gamma} = 0, \quad k = \overline{0, M}. \quad (9)$$

В качестве функционала  $F_k^{i_1 i_2 i_3}(v^{i_1 i_2 i_3}(.))$  будем рассматривать  $f(x_{i_1 i_2 i_3}, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{k+\frac{1}{2}}^{i_1 i_2 i_3}, v_{k+\frac{1}{2}}^{i_1 i_2 i_3}(.))/3$ . Отметим, что значение функционала  $F_k^{i_1 i_2 i_3}(v^{i_1 i_2 i_3}(.))$  вычисляется явно за счет интерполяции и экстраполяции.

**Теорема.** Пусть выполняется условие  $s \geq \frac{1}{2} - \frac{\min(h_1^2, h_2^2, h_3^2)}{4c_2\Delta}$ .

Пусть также погрешность аппроксимации метода [2] имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3} + h_3^{p_4}$ , функции  $F_k^{i_1 i_2 i_3}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_0}$  на точном решении [2]. Тогда метод сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3} + h_3^{p_4}$ . Также метод устойчив по начальным данным и по правой части.

С помощью данной теоремы получаем, что схема с весами (4)–(9) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок  $\Delta + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ .

Нами был проведен ряд численных экспериментов, результаты которых показывают соответствие полученным теоретическим оценкам.

## Литература

- [1] Лекомцев А.В., Пименов В.Г. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности

с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 102–118.

- [2] Ким А.В., Пименов В.Г. *i*-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. – М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

## АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХИНДМАРШ–РОЗЕ

Ряшко Л.Б., Слепухина Е.С.<sup>1,2</sup>

Рассматривается стохастическая система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 + I - z + \varepsilon \dot{w}, \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} &= r(s(x - x_0) - z),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x$  – мембранный потенциал,  $y$ ,  $z$  – переменные, описывающие активацию и дезактивацию быстрого натриевого и медленно калиевого токов соответственно,  $I$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $x_0$  – параметры модели,  $0 < r \ll 1$  – определяет временные масштабы,  $I$  – описывает внешний ток,  $w$  – стандартный винеровский процесс с параметрами  $E(w(t) - w(s)) = 0$ ,  $E(w(t) - w(s))^2 = |t - s|$ ,  $\varepsilon$  – интенсивность возмущений. Детерминированный вариант системы (при  $\varepsilon = 0$ ) представляет собой модель нейронной активности Хиндмарш–Розе (ХР), описывающую пачечные колебания [1].

При  $r = 0$  в системе (1) выделяется быстрая подсистема. Введем новый параметр  $W = z - I$ . Рассмотрим динамику детерминированного варианта ( $\varepsilon = 0$ ) быстрой подсистемы при изменении  $W$ . На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма быстрой подсистемы модели (1).

В быстрой подсистеме наблюдаются следующие режимы динамики: при  $W < W_0 \approx -11.5932$  – единственное равновесие является устойчивым; при  $W_0 < W < W_1 = \frac{5}{27} \approx -0.1852$  – предельные циклы вокруг неустойчивого равновесия ( $W = W_0$  – мягкая бифуркация

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа частично поддержана грантом АВЦП (1.1099.2011).

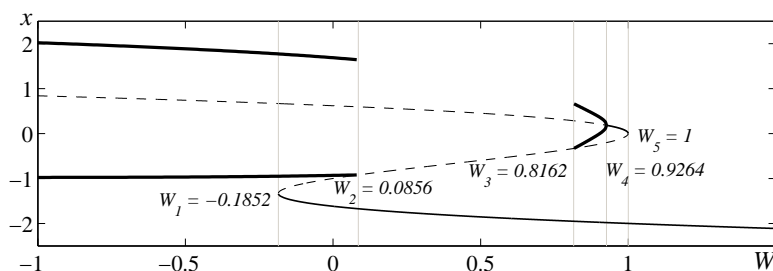


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма быстрой подсистемы ХР. Сплошными линиями обозначены устойчивые равновесия, пунктиром — неустойчивые, жирными линиями — экстремумы предельных циклов системы.

Андропова–Хопфа); при  $W_1 < W < W_2 \approx 0.0856$  — сосуществование устойчивого предельного цикла и устойчивого равновесия, разделенных сепаратрисой седла ( $W = W_1$  — седло-узловая бифуркация); при  $W_2 < W < W_3 \approx 0.8162$  — одно устойчивое и два неустойчивых равновесия ( $W = W_2$  — гомоклиническая бифуркация седла, «вливание» предельного цикла в петлю сепаратрисы и потеря его устойчивости); при  $W_3 < W < W_4 \approx 0.9264$  — сосуществование устойчивого предельного цикла и устойчивого равновесия ( $W = W_3$  — гомоклиническая бифуркация седла); при  $W_4 < W < W_5 = 1$  — сосуществование двух устойчивых равновесий, разделенных сепаратрисой седла ( $W = W_4$  — бифуркация Андронова–Хопфа); при  $W > W_5$  — единственное устойчивое равновесие ( $W = W_5$  — седло-узловая бифуркация).

Рассмотрим поведение быстрой подсистемы в присутствии случайных возмущений. В зоне параметров  $W \in [W_1, W_2]$ , соответствующей сосуществованию предельного цикла и устойчивого равновесия, наблюдается явление вызванных шумом переходов от одного аттрактора к другому. На рис. 2а и 2б изображены фазовые портреты быстрой подсистемы при  $W = -0.18$  для  $\varepsilon = 0.05$  и  $\varepsilon = 0.1$ . При достаточно малом шуме траектории, выпущенные из бассейна притяжения устойчивого равновесия, локализуются в некоторой его окрестности (см. рис. 2а). При значениях интенсивности шума, больших некоторого порогового значения, случайные траектории мо-

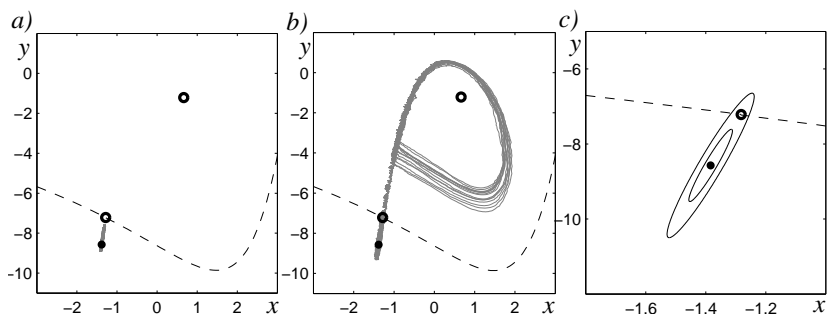


Рис. 2: Вызванный шумом переход от равновесия к предельному циклу при  $W = -0.18$ : *a)* фазовый портрет при  $\varepsilon = 0.05$ ; *b)* фазовый портрет при  $\varepsilon = 0.1$ ; *c)* доверительные эллипсы для  $\varepsilon = 0.05$  (внутренний) и  $\varepsilon = 0.1$  (внешний),  $P = 0.95$ .

гут пересечь сепаратрису и попасть в бассейн притяжения предельного цикла (см. рис. 2*b*).

Исследуем данное явление с помощью метода доверительных эллипсов, опирающегося на функции стохастической чувствительности [2]. На рис. 2*c* изображены доверительные эллипсы для  $W = -0.18$ ,  $\varepsilon = 0.05$  и  $\varepsilon = 0.1$  при доверительной вероятности  $P = 0.95$ . При  $\varepsilon = 0.05$  доверительный эллипс полностью принадлежит бассейну притяжения равновесия и соответствующие случайные траектории концентрируются около равновесия. При увеличении интенсивности шума доверительный эллипс расширяется, пересекает сепаратрису и начинает занимать бассейн притяжения предельного цикла. Это означает, что соответствующие случайные траектории могут с высокой вероятностью покинуть бассейн притяжения равновесия и сформировать стохастический аттрактор около предельного цикла. С помощью доверительных эллипсов можно оценить критическое значение интенсивности шума  $\varepsilon^*$ , при котором случайные траектории начинают покидать бассейн притяжения равновесия. Это интенсивность шума, при которой эллипс касается сепаратрисы. Для  $W = -0.18$  получаем  $\varepsilon^* = 0.07$ .

## Литература

- [1] *Hindmarsh J.L., Rose R.M.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc. R. Soc. London, Ser. B 221. 1984. Pp. 87–102.
- [2] *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Math. and Comp. in Simulat. 2004. Vol. 66. Pp. 55–67.

## АНАЛОГ МЕТОДА ЛАКСА–ВЕНДРОФФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Свиридов С.В.<sup>1</sup>

### 1. Введение.

Для уравнения переноса с запаздыванием общего вида строится аналог метода Лакса–Вендроффа. На тестовых примерах проводится сравнение с ранее построенными методами.

### 2. Постановка задачи.

Рассматривается уравнение переноса с запаздыванием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)). \quad (1)$$

Здесь  $x \in [0, +\infty)$  – пространственная и  $t \in [t_0; \theta]$  – временная независимые переменные;  $u(x, t)$  – искомая функция;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  – функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau > 0$  – величина запаздывания;  $a > 0$  – коэффициент.

Заданы также начальное условие

$$u(t, x) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, +\infty], \quad t \in [t_0 - \tau; t_0] \quad (2)$$

и граничное условие

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in [t_0; \theta]. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>УрФУ

Предполагается, что функционал  $f$ , функции  $\varphi, g$  таковы, что у задачи (1)–(3) имеется единственное решение. Вопросы существования и единственности решения поставленной краевой задачи рассматривались в [1].

### 3. Алгоритм Лакса–Вендроффа.

Зафиксируем  $X > 0$ . Будем искать решение (1)–(3) в области  $[0, X] \times [t_0, \theta]$ . Разобьем интервал по пространственной переменной на части с шагом  $h = X/N$ ,  $x_i = ih, i = \overline{0, N}$ , а отрезок изменения временной переменной  $[t_0; \theta]$  – на части с шагом  $\Delta$ , введя точки  $t_j = t_0 + j\Delta, j = \overline{0, M}$ . Будем считать, что величина  $\tau/\Delta = m$  – натуральное число. Приближения функции  $u(x_i, t_j)$  в узлах обозначим как  $u_j^i$ .

Алгоритм Лакса–Вендроффа для решения уравнения переноса использует четырехточечную схему, изображенную на рисунке 1. Поэтому для решения задачи необходимо найти значения  $u_j^i$  на трапециевидной области (см. рис. 2).

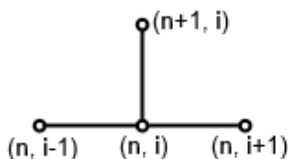


Рис. 1: Четырехточечная схема

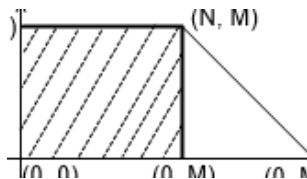


Рис. 2: Схема Лакса–Вендроффа для решения задачи (1)–(3) на прямоугольной области

Аналог разностной схемы метода Лакса–Вендроффа для решения поставленной задачи имеет следующий вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f(x_m, t_n, u_m^n, u_t(x_m, \cdot)), \quad (4)$$

$u_t(x_m, \cdot)$  – результат действия кусочно-линейной интерполяции.

Методами, подобными [4], можно доказать, что этот алгоритм имеет порядок сходимости  $O(h^2 + \Delta^2)$ , если выполнено условие устойчивости:  $\frac{a\Delta}{h} < 1$ .

### 4. Сравнение полученного метода с аналогами. Примеры.

В рамках работы также реализованы методы, рассмотренные в [2]

и [3].

Рассмотрим типовой пример работы указанных методов с различными значениями  $\Delta$  и  $h$ .

**Пример 1.**  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \sin \pi x + \pi t \cos \pi x - (t - \frac{1}{2}) \sin \pi x + u(x, t - \frac{1}{2})$ ,

$t \in [0, 1], x \in [0, +\infty], X = 2$

$u(t, x) = t \sin \pi x, t \in [-\frac{1}{2}, 0]$

$u(0, t) = 0, t \in [0, 1]$

**Точное решение:**  $u(t, x) = t \sin \pi x$

В таблице ниже указаны максимальные значения абсолютной погрешности для соответствующих методов и значений  $\Delta$  и  $h$ .

| $\Delta, h$ / Метод ...        | Лакса–Вендроффа (4) | [2]     | [3]     |
|--------------------------------|---------------------|---------|---------|
| $h = 0.5, \Delta = 0.125$      | 0.34786             | 0.64489 | 0.78950 |
| $h = 0.125, \Delta = 0.125$    | 0.02512             | 0.47211 | 0.17015 |
| $h = 0.125, \Delta = 0.03125$  | 0.03062             | 0.24322 | 0.76279 |
| $h = 0.0625, \Delta = 0.01042$ | 0.00791             | 0.11935 | 0.85389 |
| $h = 0.025, \Delta = 0.005$    | 0.00127             | 0.05186 | 0.84510 |
| $h = 0.01, \Delta = 0.00167$   | 0.00020             | 0.02011 | 0.87663 |

## 5. Выводы.

Тестовый пример показывает, что при выполнении условия устойчивости аналог метода Лакса–Вендроффа сходится гораздо быстрее, чем известные методы.

## Литература

- [1] *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations / New York: Springer–Verlag, 1996.
- [2] *Солодушкин С.И.* Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. № 10. 2013. С. 77–82.
- [3] *Волканин Л.С.* Численное решение уравнения переноса с эффектом наследственности // Тр. конф. «Теория управления и математическое моделирование», Ижевск, 15–18 мая 2012. С. 12–14.
- [4] *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностная схема численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 17, № 1. 2011. С. 178–189.

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ КЛЕТОЧНЫХ ПОПУЛЯЦИЙ, СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПО ВОЗРАСТУ И ФАЗЕ КЛЕТОЧНОГО ЦИКЛА

Солодушкин С.И., Юманова И.Ф.<sup>1,2</sup>

Системы функционально-дифференциальных уравнений с частными производными возникают при моделировании клеточных популяций, структурированных по возрасту, размеру и фазе клеточного цикла [1–4].

Рассмотрим популяцию, в которой клетки могут находиться либо в фазе активной пролиферации, либо в фазе созревания. Функцию плотности пролиферирующих и созревающих клеток обозначим соответственно  $U(m, t)$  и  $P(m, t)$ , где  $t > 0$  – время,  $m \in (0, \tau)$  – степень зрелости. Обозначим  $\bar{U}(t) = \int_0^\tau U(m, t) dm$  – общее число клеток в фазе созревания в момент  $t$ . Клетки обоих типов (пролиферирующие и созревающие) созревают со скоростью  $V(m)$ .

В [3] показано, что динамика популяции может быть описана уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(VU)}{\partial m} = & -(\delta(m) + \beta(\bar{U}, m))U + \\ & + 2 \int_0^\tau U(\pi_\tau x, t - \tau) \beta(\bar{U}(t - \tau), \pi_\tau x) \phi(x, \tau) k(x, m) dx, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial(VP)}{\partial m} = -\gamma(m)P + \beta(\bar{U}, m)U + U(\pi_\tau x, t - \tau) \beta(\bar{U}(t - \tau), \pi_\tau x), \quad (2)$$

где  $\gamma, \delta, \beta, \pi, \phi, k$  – функции нужной степени гладкости, характеризующие скорости гибели на фазе пролиферации и созревания, перехода в фазу пролиферации, созревания и т.п.

Вместе с системой (1), (2) заданы соответствующие начальные условия  $U(0, t)$ ,  $P(0, t)$ ,  $t \in [0, \theta]$ , и граничные условия  $U(m, 0)$ ,  $P(m, 0)$ ,  $m \in [0, \tau]$ .

---

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00089, программой АВИЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем» и Соглашением № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013 г.



Существование, единственность и глобальная устойчивость решения системы (1), (2) показана в [3].

В [5] построена разностная схема для уравнения переноса с постоянным коэффициентом  $a$  и запаздыванием общего вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (3)$$

где  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  – функция-предыстория иско-  
мой функции  $u$  к моменту  $t$ ;  $\tau > 0$  – величина запаздывания.

Для системы (1), (2), решаемой на конечном временном проме-  
жутке  $[0, \theta]$ , метод, предложенный в [5], обобщим на случай пере-  
менного коэффициента  $V(m)$ , который, согласно [3], удовлетворяет  
условиям  $V(0) = V(\tau) = 0$ .

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной  $[0, \tau]$   
на части с шагом  $h = \tau/N$ , введя точки  $m_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ , и  
разобьем отрезок изменения временной переменной  $[0; \theta]$  на части с  
шагом  $\Delta$ , введя точки  $t_j = j\Delta$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Приближения функции  $U(m_i, t_j)$  в узлах обозначим  $u_j^i$ . Значение  
функционала правой части (1), вычисленное в точке  $(m_i, t_j)$ , обо-  
значим  $\mathfrak{U}_j^i$ . Для вычисления функционала  $\mathfrak{U}_j^i$  необходимо знать зна-  
чения функции  $U(m, t)$  между узлами сетки. Будем делать кусочно-  
линейную интерполяцию. Оператором интерполяции-экстраполяции  
назовем оператор, определенный на множестве всех допустимых  
предысторий и действующий по правилу  $I : \{u_{j-1}^i, u_j^i\} \rightarrow v^{i,j}(\cdot) \in$   
 $Q[-\tau, \Delta)$ , где  $Q = Q[-\tau, \Delta)$  – множество функций, кусочно-непре-  
рывных на  $[-\tau, \Delta)$  с конечным числом точек разрыва первого рода,  
в которых функция непрерывна справа.

Для  $0 \leq s \leq 1$  рассмотрим семейство методов  $j = 0, \dots, M - 1$

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^1 - u_j^1}{\Delta} - s \left( f_{j+1}^0 - \frac{dU(0, t_{j+1})}{dt} \right) - (1-s) \left( f_j^0 - \frac{dU(0, t_j)}{dt} \right) &= \mathfrak{U}_j^1, \\ \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \left( s \frac{-u_{j+1}^{i-2} + 4u_{j+1}^{i-1} - 3u_{j+1}^i}{2h} + \right. & \\ \left. + (1-s) \frac{-u_j^{i-2} + 4u_j^{i-1} - 3u_j^i}{2h} \right) &= \mathfrak{U}_j^i, \quad i = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\frac{dU(0, t_j)}{dt}$  – производная граничной функции по  $t$ , вычисленная в точке  $t_j$ .

Обозначим  $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

**Определение.** Метод сходится, если  $\varepsilon_j^i \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  и  $\Delta \rightarrow 0$  для всех  $i = 0, \dots, N$  и  $j = 0, \dots, M$ . Метод сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , что  $\|\varepsilon_j^i\| \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, \dots, N$  и  $j = 0, \dots, M$ .

Применяя тот же метод проверки устойчивости и доказательства сходимости с порядком, что и в [5] для уравнения с постоянным коэффициентом, устанавливаем, что справедлива

**Теорема.** Пусть выполнены условия устойчивости  $s \geq \frac{1}{2}$ , применяется кусочно-линейная интерполяция, тогда метод (4) сходится, причем порядок сходимости  $h^2 + \Delta$ .

## Литература

- [1] Mackey M.C., Rey A. Multistability and boundary layer development in a transport equation with retarded arguments // Can. Appl. Math. Quart. 1993. Vol. 1. Pp. 1–21.
- [2] Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication // J. Math. Biol. 1994. Vol. 33. Pp. 89–109.
- [3] Pujol-Menjouet L., Rudnicki R. Global stability of cellular populations with unequal division // Can. Appl. Math. Quart. 2000. Vol. 8, № 2. Pp. 185–202.
- [4] Mostafa Adimy, Crauste F. Global Stability of a Partial Differential Equation with Distributed Delay due to Cellular Replication // Nonlinear Analysis. 2002. Vol. 54. № 8. Pp. 1469–1491.
- [5] Солодушкин С.И. Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последствием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 10. С. 77–82.

## ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РАВНОВЕСИЙ И ЦИКЛОВ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ КАЛДОРА

Сысолятина А.А., Ряшко Л.Б.<sup>1,2</sup>

В данной работе рассмотрен стохастический вариант дискретной макроэкономической модели Калдора в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \alpha(-0.6k_t - 0.8y_t + \arctg(y_t - 100) + 320) + \varepsilon\xi_{1,t}, \\ k_{t+1} &= 0.2k_t + \arctg(y_t - 100) + 320 + \varepsilon\xi_{2,t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметр  $\alpha$  определяет характер реализующегося в системе режима,  $\varepsilon$  – интенсивность вносимого шума,  $\xi_{1,t}$ ,  $\xi_{2,t}$  – последовательности независимых гауссовых случайных величин.

На рис. 1 изображены бифуркационная диаграмма детерминированной системы ( $\varepsilon = 0$ ) и соответствующие значения показателя Ляпунова, которые позволяют оценить регулярность поведения системы, точки бифуркации и области хаоса.

В зоне 1 наблюдается единственное равновесие типа устойчивый узел; в зоне 2 – устойчивый фокус; в зонах 3 – предельные непрерывные циклы; в зонах 4 – устойчивые циклы различной кратности.

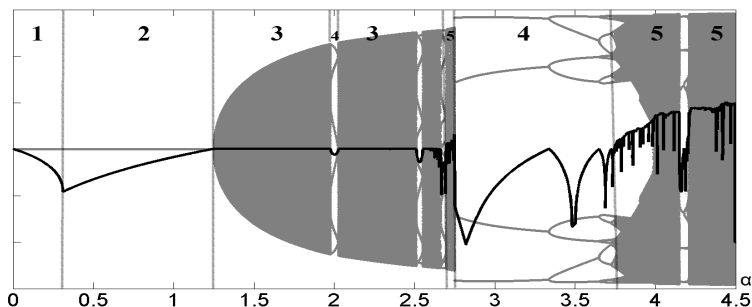


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма (серый) и показатель Ляпунова (черный)

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-31210.

По мере прохождения бифуркационных значений картина усложняется, затем цикл теряет устойчивость, и следует зона 5 хаоса. Аттракторы в этом случае начинают выглядеть как множества, состоящие из сплошных интервалов. В зоне хаоса видны и просветы, где возникают кратные циклы. Например, при  $\alpha = 4.2$  система имеет цикл кратности 6.

В присутствии стохастических возмущений случайные траектории системы (1) покидают детерминированные аттракторы, формируя стационарные распределения. Для описания распределения случайных состояний используется функция стохастической чувствительности (ФСЧ) [2]. На рис. 2а представлены графики элементов  $w_{ij}$  матрицы стохастической чувствительности  $W$  для точек покоя системы (1); на рис. 2б – собственные числа  $\lambda_1^W, \lambda_2^W$ ; на рис. 2в представлены графики элементов  $w_{ij}$  матрицы  $W_1$  для первой точки четырехцикла; на рис. 2г – собственные числа  $\lambda_1^{W_1}, \lambda_2^{W_1}$ .

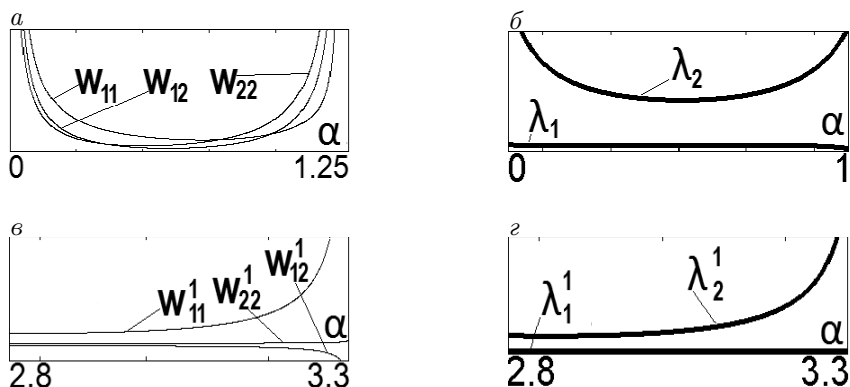


Рис. 2: Элементы и собственные числа матрицы стохастической чувствительности: а, б) для равновесий, в, г) для 4-цикла

Матрица  $W$  характеризует стохастическую чувствительность аттракторов системы. Можно проследить следующие закономерности: при увеличении  $\alpha$  разброс случайных состояний системы увеличивается, при увеличении разницы между величинами собственных чисел матрицы стохастической чувствительности увеличивается зона рас-

сеивания состояний системы как в случае устойчивого равновесия, так и в случае устойчивого цикла.

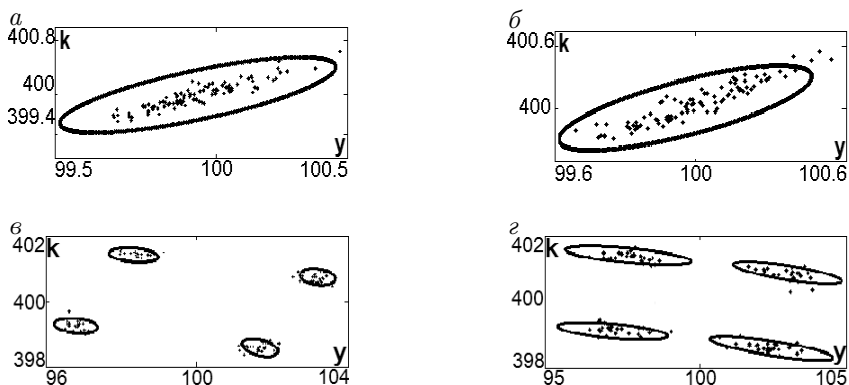


Рис. 3: Случайные состояния системы и эллипсы рассеивания

Полученные матрицы чувствительности позволили построить эллипсы рассеивания случайных состояний системы вокруг детерминированного равновесия и каждой точки  $X_i$   $k$ -цикла при заданном уровне шума. Уравнения эллипса представимы в виде

$$(X - (X_i))^T W_i^{-1} (X - (X_i)) = 2c^2 \varepsilon^2,$$

где  $c = \log(1 - P)$ ,  $P$  – доверительная вероятность. На рис. 3 показаны случайные состояния и эллипсы рассеивания системы (1) при  $\varepsilon = 0.1$ : для равновесия  $\alpha = 0.5$  и  $P = 0.7$  (а),  $P = 0.9$  (б); для 4-цикла  $P = 0.9$  и  $\alpha = 2.8$  (в),  $\alpha = 3.3$  (г). Эллипсы рассеивания хорошо соответствуют результатам прямого моделирования и дают наглядное представление пространственной неоднородности отклонений возмущенных траекторий от аттрактора.

## Литература

- [1] *G. I. Bischi, R. Dieci, G. Rodano, E. Saltary.* Multiple attactors and bifurcation in a Kaldor-type business cycle model // *Evaluationary Economics*. 1951. Vol. 11. Pp. 527–554.

- [2] *Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I.* Sensitivity analysis of the stochastic discrete systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. 2010. № 17. Pp. 501–515.

## ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Таныгина А.Н.<sup>1,2</sup>

В настоящей работе проводится сравнительный анализ обобщенного условия Гёльдера и условия регулярной гладкости, предложенного А. Гальпериным и З. Ваксманом [1, 2], для приближенного решения методом Ньютона–Канторовича операторных уравнений вида

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где  $f : X \rightarrow Y$  – нелинейный оператор, дифференцируемый в каждой внутренней точке замкнутого шара  $\overline{B}(x_0, R) \subset X$ ;  $X, Y$  – банаховы пространства;  $x_0$  – известное начальное приближение. Последовательные приближения по методу Ньютона–Канторовича задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2)$$

Обобщенным условием Гёльдера для оператора  $f$  называется условие вида

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega(\|x'' - x'\|), \quad \forall x', x'' \in \overline{B}(x_0, R), \quad (3)$$

где  $\omega$  – возрастающая положительная функция, для которой  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$ . В частности, при  $\omega(t) = ct$  ( $c > 0$ ) условие (3) представляет собой условие Липшица, при  $\omega(t) = ct^p$  ( $c > 0, 0 < p < 1$ ) – классическое условие Гёльдера.

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф13М–036).

В работе [3] была доказана теорема о сходимости метода (2) к точному решению уравнения (1) при условии (3), а также получены оценки скорости сходимости. Однако, как отмечают авторы работ [1, 2], условие (3) представляет собой слишком «грубый» инструмент для анализа сходимости метода (2), в связи с чем ими было введено новое понятие гладкости оператора  $f$ , названное *регулярной гладкостью*. Использование такого ограничения на оператор  $f$  позволило получить более точные оценки скорости сходимости метода (2) к решению уравнения (1) по сравнению с известными ранее. Тем не менее, смысл этого условия является довольно трудным для понимания и в ходе рассуждений в указанных работах на самом деле используется другое, вытекающее из него, условие. Выпишем это условие в явном виде и приведем модифицированную формулировку основного результата о сходимости метода (2).

**Определение.** Пусть  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  – непрерывная строго возрастающая вогнутая функция, причем  $\omega(0) = 0$ . Без ограничения общности будем считать, что  $f'(x_0) = I$ . Обозначим  $h(f) = \inf\{\|f'(x)\| : x \in \overline{B(x_0, R)}\}$ . Согласно [2], оператор  $f$  называется  $\omega$ -регулярно гладким на  $\overline{B(x_0, R)}$ , если существует число  $h \in [0, h(f)]$  такое, что для любых  $x', x'' \in \overline{B(x_0, R)}$  имеет место неравенство

$$\omega^{-1}(h_f(x', x'')) + \|f'(x'') - f'(x')\| - \omega^{-1}(h_f(x', x'')) \leq \|x'' - x'\|, \quad (4)$$

где  $h_f(x', x'') = \min\{\|f'(x')\|, \|f'(x'')\|\} - h$ . Оператор  $f$  называется *регулярно гладким* на  $\overline{B(x_0, R)}$ , если он является  $\omega$ -регулярно гладким на  $\overline{B(x_0, R)}$  для некоторого  $\omega$  с указанными выше свойствами.

Условие (4) можно переписать в виде

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+ + \|x'' - x'\|) - \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+), \quad (5)$$

где  $\chi = \omega^{-1}(1 - h)$ ,  $r = \|x' - x_0\|$ ,  $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$ .

Пусть  $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ ,  $a = \|f(x_0)\|$ ,  $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$  – некоторая постоянная,  $\Phi$  – функция числового аргумента  $t \in [0, \chi]$ :

$$\Phi(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - t(1 - \omega(\chi)). \quad (6)$$

Определим числовую последовательность  $\{t_n\}$  следующим рекуррентным соотношением ( $n = 0, 1, \dots$ ) :

$$t_{n+1} = t_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n(1 - \omega(\chi))}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]}, \quad t_0 = 0. \quad (7)$$

**Теорема.** Пусть существует постоянная  $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$  такая, что выполнено неравенство

$$a \leq \Omega(\chi) - \chi\omega(\chi) + \chi, \quad (8)$$

оператор  $f$  удовлетворяет на  $\overline{B(x_0, R)}$  условию (5) с таким  $\chi$  и функция (6) имеет единственный нуль  $t_* \leq R$  на отрезке  $[0, \chi]$ . Тогда

1) уравнение (1) имеет единственное решение  $x_*$  в шаре  $\overline{B(x_0, t_*)}$ ;

2) последовательные приближения (2) определены для всех  $n = 0, 1, \dots$ , принадлежат шару  $\overline{B(x_0, t_*)}$  и сходятся к  $x_*$ ;

3) для всех  $n = 0, 1, \dots$  справедливы оценки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad \|x_* - x_n\| \leq t_* - t_n,$$

где последовательность  $\{t_n\}$  определена по правилу (7), монотонно возрастает и сходится к  $t_*$ .

Улучшение оценок скорости сходимости метода (2) в работах [1, 2] получается за счет того факта, что в силу выбора постоянной  $\chi$ , удовлетворяющей неравенству (8), и свойств последовательности  $\{t_n\}$  величина  $\chi - r - \|x'' - x'\|$  в условии (5) оказывается положительной. В случае, когда  $\chi - r - \|x'' - x'\| \leq 0$ , условие (5) превращается в условие гладкости (3), рассмотренное в [3], и улучшения оценок скорости сходимости не происходит. С другой стороны, условие (5) является более жестким требованием гладкости оператора  $f$ , чем условие (3). Поэтому вполне естественно, что оценки скорости сходимости метода (2), полученные в работах [1, 2], оказываются более точными.

## Литература

- [1] Galperin A., Waksman Z. Newton's method under a weak smoothness assumption // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. Pp. 207–215.



- [2] Galperin A., Waksman Z. Regular smoothness and Newton's method // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, № 7&8. Pp. 813–858.
- [3] Лысенко Ю.В. Новые условия сходимости метода Ньютона–Канторовича и некоторые их приложения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. – Минск, 1993.

## СЕТОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Таширова Е.Е.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим волновое уравнение с эффектом последействия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)), \quad (1)$$

$t_0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq X$ ,  $0 \leq y \leq Y$  с граничными условиями  $u(0, y, t) = g_1(y, t)$ ,  $u(X, y, t) = g_2(y, t)$ ,  $0 \leq y \leq Y$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ ;  $u(x, 0, t) = g_3(x, t)$ ,  $u(x, Y, t) = g_4(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq X$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , и начальными условиями  $u(x, y, t) = \varphi(x, y, t)$ ,  $0 \leq x \leq X$ ,  $0 \leq y \leq Y$ ,  $t_0 - \tau \leq t < t_0$ .

Здесь  $u(x, y, t)$  – искомая функция,  $u_t(x, y, \cdot) = \{u(x, y, t+s), -\tau \leq s \leq 0\}$  – функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ,  $\tau$  – величина запаздывания;  $f(t, x, y, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot))$  – функционал, определённый на  $[t_0, T] \times [0, X] \times [0, Y] \times R \times Q$ ,  $Q = Q[-\tau, 0)$  – множество функций  $u(s)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0)$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{s \in [-\tau, 0)} |u(s)|$ . Будем предполагать, что задача имеет единственное решение. Задача с одной пространственной переменной рассматривалась в [2].

Разобьем отрезок  $[0, X]$  на части с шагом  $h_1 = X/N_1$ ,  $[0, Y]$  – на части с шагом  $h_2 = Y/N_2$  где  $N_1, N_2$  – некоторые целые числа. Введем точки  $x_i = ih_1$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $y_k = kh_2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_2$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на части с шагом  $\Delta$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = -m, \dots, M$ . Обозначим приближение точного решения  $u(x_i, y_k, t_j)$  через  $u_{i,k}^j$ .

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00089 и АВИЦП 1.994.2011

Введем дискретную предысторию к моменту  $t_j$  при фиксированных  $i, k$ :  $\{u_{i,k}^l\}^j = \{u_{i,k}^l : j - m \leq l \leq j\}$ . Оператором интерполяции-экстраполяции назовем отображение:  $I : \{u_{i,k}^l\}^j \rightarrow v_{i,k}^j(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ .

Для  $0 \leq s \leq 1$  рассмотрим семейство методов с весами:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^j + u_{i,k}^{j-1}}{\Delta^2} = \\ & = sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i+1,k}^{j+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,k-1}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i,k+1}^{j+1}}{h_2^2} \right) + \\ & + sa^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i+1,k}^{j-1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,k-1}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i,k+1}^{j-1}}{h_2^2} \right) + \\ & + (1-2s)a^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i+1,k}^j}{h_1^2} + \frac{u_{i,k-1}^j - 2u_{i,k}^j + u_{i,k+1}^j}{h_2^2} \right) + \\ & + F_{i,k}^j(v_{i,k}^j(\cdot)), i = 1, \dots, N_1 - 1, k = 1, \dots, N_2 - 1, j = 0, \dots, M - 1, \quad (2) \end{aligned}$$

с граничными условиями  $u_{0,k}^j = g_1(y_k, t_j)$ ,  $u_{N_1,k}^j = g_2(y_k, t_j)$ ,  $u_{i,0}^j = g_3(x_i, t_j)$ ,  $u_{i,N_2}^j = g_4(x_i, t_j)$  и начальными условиями  $u_{i,k}^j = \varphi(x_i, y_k, t_j) : -m \leq j \leq 0$ ;  $F_{i,k}^j(v(\cdot))$  – некоторый функционал, определенный на функциях  $v(\cdot) = v_{i,k}^j(\cdot) = I(\{u_{i,k}^l\}^j) \in Q[-\tau, \Delta]$ , связанный с функционалом  $f(x_i, y_k, t_j, u_{i,k}^j, v_{i,k}^j(\cdot))$  и липшицевый по переменной  $v(\cdot)$ .

При  $s = 0$  получается явная схема, при других  $s$ ,  $0 < s \leq 1$ , при каждом фиксированном  $j$  получаем систему уравнений. Для того чтобы свести решение системы к решению методом прогонки, перейдем к факторизованной схеме [1]. В результате получается система, которая эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений  $x$  и  $y$ .

Невязкой метода назовем разницу между левой и правой частями (2), где вместо  $u_{i,k}^j$  подставлено  $u(x_i, y_k, t_j)$ .

Будем говорить, что невязка имеет порядок  $h_1^p + h_2^r + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , что  $|\psi_{i,k}^j| \leq C(h_1^p + h_2^r + \Delta^q)$  для всех  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $k = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ .

**Теорема 1.** Если для точного решения задачи (1) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_{i,k}^j(v_{i,k}^j(\cdot)) = f(x_i, y_k, t_j, u_{i,k}^j, v_{i,k}^j(\cdot))$ , то для любого  $0 \leq s \leq 1$  невязка имеет порядок  $h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2$ .

Зафиксируем  $\sigma_1 = a^2 \Delta^2 / h_1^2$  и  $\sigma_2 = a^2 \Delta^2 / h_2^2$ . Будем предполагать, что выполнено условие

$$(1 - 4s)(\sigma_1 + \sigma_2) < 1. \quad (3)$$

Будем говорить, что метод сходится с порядком  $h_1^p + h_2^r + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , что выполняется неравенство

$$|u(x_i, y_k, t_j) - u_{i,k}^j| \leq C(h_1^p + h_2^r + \Delta^q)$$

для всех  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $k = 0, \dots, N_2$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие устойчивости (3), невязка имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функционалы  $F_{i,k}^j$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении [2], стартовые значения [2] имеют порядок  $\Delta^{p_4} + h_1^{p_5} + h_2^{p_6}$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зафиксированы. Тогда метод сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}} + h_1^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_5\}} + h_2^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_6\}}$ .

## Литература

- [1] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [2] Ким А.В., Пименов В.Г.  $i$ -гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнения. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
- [3] Пименов В.Г., Таширова Е.Е. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 222–231.

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВЕГСТЕЙНА К ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юманова И.Ф.<sup>1,2</sup>

Рассмотрим задачу о неподвижной точке

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}),$$

где  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – некоторое непрерывное нелинейное отображение.

Основной итерационный процесс для аппроксимации неподвижных точек отображения  $\Phi$  будет описываться совокупностью формул

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} &= (E - \Lambda^{(k)})\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} + \Lambda^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \Phi(\tilde{\mathbf{x}}^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\Lambda^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_1^{(k)}}, \frac{1}{1 + \lambda_2^{(k)}}, \dots, \frac{1}{1 + \lambda_n^{(k)}} \right\}$  – диагональная

матрица, в которой параметры  $\lambda_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определяются следующим образом:

$$\lambda_i^{(k)} = \begin{cases} \eta_i^{(k)}, & \text{если } \text{sgn}(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = \text{sgn}(\tilde{x}_i^{(k-1)} - \tilde{x}_i^{(k)}), \\ -\eta_i^{(k)}, & \text{если } \text{sgn}(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = \text{sgn}(\tilde{x}_i^{(k)} - \tilde{x}_i^{(k-1)}), \end{cases}\tag{2}$$

где

$$\eta_i^{(k)} = \frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|\tilde{x}_i^{(k-1)} - \tilde{x}_i^{(k)}|} \quad (i = 1, \dots, n).\tag{3}$$

Рассмотренный метод (1) с фиксированием параметра  $\lambda^{(k)} = (\lambda_i^{(k)})$  по формулам (2), (3) является обобщением метода Вегстейна [1] в форме итераций Манна на  $n$ -мерный случай.

<sup>1</sup>УрФУ

<sup>2</sup>Работа поддержана программой АВИП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем» и Соглашением № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013 г.

**Теорема.** Пусть отображение  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является нерастягивающим на замкнутом выпуклом множестве  $D_0 \subset D$ . Пусть также выполнены условия:

1.  $\Phi D_0 \subset D_0$ , множество  $D_0$  содержит хотя бы одну неподвижную точку отображения  $\Phi$ ;

$$2. \|E - \Lambda^{(k)}\|_\infty + \|\Lambda^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда последовательность  $(\tilde{x}^{(k)})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , генерируемая процессом (1), (2), (3), начиная с  $x^{(0)} \in D_0$ , сходится к неподвижной точке отображения  $\Phi$  в  $D_0$ .

Применим рассмотренный метод для идентификации параметров в системах обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным наблюдениям. В качестве примера возьмем модель взаимодействия иммунной системы и ВИЧ [2], которая описывается задачей Коши:

$$\begin{cases} \dot{T} = s(t) - \mu_T T(t) + r \frac{T(t)V(t)}{C + V(t)} - k_V T(t)V(t), \\ \dot{I} = k_V T(t)V(t) - \mu_I I(t) - r \frac{I(t)V(t)}{C + V(t)}, \\ \dot{V} = Nr \frac{I(t)V(t)}{C + V(t)} - k_T T(t)V(t) + \frac{g_V V(t)}{b + V(t)}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T, I, V$  – число неинфицированных  $CD4^+$ , инфицированных  $CD4^+$  и ВИЧ на мл крови соответственно;  $T(0) = T_0$ ,  $I(0) = 0$ ,  $V(0) = V_0$  – начальные условия.

Пусть  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$  – моменты наблюдений за системой. Обозначим  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (T(t), I(t), V(t))$ ,  $\mathbf{a}^* = (a_1, \dots, a_p)$ ,  $1 \leq p \leq 10$  – вектор параметров, подлежащих оценке,  $\mathbf{x}(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(t; \mathbf{a})$  – решение системы (4) при заданных параметрах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}_k(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(t_k; \mathbf{a})$ . Пусть даны измерения  $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}(t_k)$ ,  $|y_{i,k} - x_{i,k}| \leq \xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\xi_i$  – точность измерений. Требуется оценить параметры  $\mathbf{a}^*$  на основе заданного начального приближения  $\mathbf{a}^0 = (a_1^0, \dots, a_p^0)$ .

Рассмотрим функционал рассогласования

$$\Phi(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\xi_i} (x_{i,k}(\mathbf{a}) - y_{i,k})^2. \quad (5)$$

Заменяем задачу минимизации функционала рассогласования (5) задачей решения нелинейного уравнения

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{a})}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\xi_i} (x_{i,k}(\mathbf{a}) - y_{i,k}) u_{i,k}(\mathbf{a}), \quad (6)$$

где  $u_{i,k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial x_{i,k}(\mathbf{a})}{\partial a_i}$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

Уравнение (6) решается с помощью адаптивного алгоритма на базе метода Вегстейна, предложенного автором в работе [3]. Пользуясь априорной информацией, задаем начальное приближение  $\mathbf{a}^0$ . Для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений будем применять неявный метод Рунге–Кутты, требующий решения нелинейного уравнения с использованием этого алгоритма.

Преимущество предложенного метода решения нелинейных уравнений в том, что на каждом итерационном шаге производится одно вычисление функции, не требуется вычисление производной и обращение матриц. В одномерном случае предложенный метод имеет квадратичную сходимость [4], а в  $n$ -мерном случае, согласно результатам численных экспериментов, не уступает по скорости сходимости методу Ньютона.

## Литература

- [1] *Wegstein J.H.* Accelerating convergence of iterative processes // Communications of the ACM. 1958. Vol. 12, № 6. Pp. 9–13.
- [2] *Kirschner D.* Using mathematics to understand HIV immune dynamics // Notices of the AMS. February 1996. Pp. 191–202.
- [3] *Юманова И.Ф.* О применении метода Вегстейна к нелинейным системам // в сб. «Современные проблемы математики», Тезисы международной (44-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. С. 166–169. – Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2013.
- [4] *Вержбицкий В.М., Юманова И.Ф.* О квадратичной сходимости  $\Delta^2$ -процесса Эйткена // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 10. С. 1770–1774.

## Содержание

|   |          |
|---|----------|
| <b>1. Алгебра и дискретная математика</b>   | <b>3</b> |
| 1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. О графе частичных порядков . . . . .  | 3        |
| 2. Байкалов А.А. О пересечении сопряженных нильпотентных подгрупп в разрешимых группах . . . . .  | 6        |
| 3. Верников Б.М., Гусев С.В. Характеризация многообразий эпигрупп конечной степени . . . . .  | 7        |
| 4. Вечтомов Е.М., Петров А.А. Некоторые многообразия коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец . . . . .   | 10       |
| 5. Вечтомов Е.М., Петухова Я.В. Полутела обобщенных матриц . . . . .  | 13       |
| 6. Вечтомов Е.М., Шалагинова Н.В. О частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций . . . . .  | 16       |
| 7. Гаврилюк А.Л., Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Храпцов И.В. О реализуемости конечного графа с небольшим числом вершин как графа Грюнберга–Кегеля подходящей конечной группы . . . . . | 19       |
| 8. Демина Е.Н., Маслова Н.В. О неабелевых композиционных факторах конечной группы, в которой каждая максимальная подгруппа непримарного индекса разрешима . . . . .                     | 22       |
| 9. Кайгородов И.Б. Консервативные «алгебры» 2-мерных алгебр . . . . .   | 23       |
| 10. Ковалева В.А. Характеризации конечных групп с $n$ -максимальными $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами . . . . .   | 25       |
| 11. Колпакова В.А., Кондратьев А.С. О конечных почти простых 6-примарных группах . . . . .  | 26       |
| 12. Лукин М.А. Строение полуколец, в которых решетка идеалов и решетка конгруэнций изоморфны . . . . .  | 29       |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 13.       | Марков Р.В. Некоторые применения пирсовских цепей полуколец . . . . .  | 32        |
| 14.       | Махнев А.А., Падучих Д.В., Пономарев Д.Н. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (392, 115, 18, 40) . . . . .     | 35        |
| 15.       | Махнев А.А., Самойленко М.С. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами (115, 18, 1, 3) и (276, 75, 10, 24) . . . . . | 37        |
| 16.       | Мурсеева А.И. Стандартные представления групп лиевского типа . . . . .   | 39        |
| 17.       | Нестеров М.Н. О $p$ -дополнениях в конечных группах . . . . .  | 41        |
| 18.       | Пастухова Г.В. О строении конечных групп заданного порядка . . . . .   | 42        |
| 19.       | Рацеев С.М. Об экспонентах некоторых алгебр Пуассона . . . . .   | 44        |
| 20.       | Рацеев С.М., Череватенко О.И. О конструкциях некоторых PI-алгебр . . . . .   | 46        |
| 21.       | Сидоров В.В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуполей непрерывных функций . . . . .   | 49        |
| 22.       | Старолетов А.М. О множестве коммутаторов в совершенной группе . . . . .  | 51        |
| 23.       | Тимофеев И.А. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле типа $G_2$ над кольцом целых чисел . . . . .                          | 53        |
| 24.       | Циовкина Л.Ю. Новое бесконечное семейство дистанционно регулярных графов диаметра 3, связанное с группами $U_3(q)$ . . . . .   | 54        |
| 25.       | Shlyopkin A.A. About Shunkov groups saturated by full linear groups of dimension two on finite fields . . . . .                | 55        |
| <b>2.</b> | <b>Математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры</b>   | <b>57</b> |
| 1.        | Авербух Ю.В. Детерминированные игры среднего поля . . . . .  | 57        |



|   |    |
|---|----|
| 2. Бакланов А.П. Асимптотическая эквивалентность различных вариантов релаксации ограничений в одной задаче на максимин . . . . .                                | 60 |
| 3. Банников А.С. Об одной оценке в линейных нестационарных дифференциальных играх со многими убегающими . . . . .   | 63 |
| 4. Гребенникова И.В. Аппроксимация управления динамической системой с запаздыванием . . . . .   | 66 |
| 5. Жаринов А.Н., Кумков С.С. Геометрический метод построения множеств достижимости управляемой системы на плоскости . . . . .                                   | 69 |
| 6. Кандоба И.Н., Костоусов В.Б., Козьмин И.В., Ложников А.Б. Оптимальное выведение ракеты-носителя на околоземную орбиту с учетом фазовых ограничений . . . . . | 72 |
| 7. Коробицина Н.С. Асимптотическое представление решения сингулярной задачи оптимального управления с интегральным критерием качества . . . . .                 | 75 |
| 8. Крупенников Е.А. О продолжимости движений для задачи идентификации макроэкономической модели . . . . .   | 78 |
| 9. Ларина Я.Ю. Статистически инвариантные множества для периодических систем . . . . .  | 81 |
| 10. Паршиков Г.В. Метод притягивания ко множеству разрешимости в задаче о сближении . . . . .   | 84 |
| 11. Плаксин А.Р. Оптимизация гарантии в линейных системах нейтрального типа . . . . .   | 87 |
| 12. Родин А.С. О структуре кусочно-гладкого решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана . . . . .   | 90 |
| 13. Сахаров Д.В. Одна задача группового преследования в примере Понтрягина . . . . .  | 93 |
| 14. Тарасьев А.М., Усова А.А. Ступенчатые аппроксимации в задаче оптимизации продуктивности природных ресурсов . . . . .  | 96 |

|  |            |
|--|------------|
| 15. Щелчков К.А. Уклонение от многих преследователей в нестационарных дифференциальных играх с простой матрицей и фазовыми ограничениями . . . . .   | 99         |
| <b>3. Топология и геометрия</b>  | <b>102</b> |
| 1. Акимова А.А. Гомологии Хованова для узлов в утолщенном торе . . . . .   | 102        |
| 2. Кулакова А.М. Доказательство теоремы Шуберта . .  | 103        |
| 3. Маслей А.В. О числах Йоргенсена и Геринга–Мартина–Тана групп трехмерных многообразий и орбифолдов . . . . .   | 106        |
| 4. Овчинников М.А. Специальные спайны трехмерных многообразий и орбиэдры . . . . .   | 109        |
| 5. Хромова О.П. Об обобщенных деформациях оператора кривизны 4-мерных римановых многообразий . . . .   | 111        |
| <b>4. Компьютерные науки и информационная безопасность</b>   | <b>115</b> |
| 1. Берсенёв А.Ю. Обеспечение счета сверхдлинных задач на кластере «Уран» . . . . .   | 115        |
| 2. Кумков С.С., Шмаков Е.Ю. Разработка библиотеки обработки входных данных счётных программ . . . .  | 118        |
| 3. Кучукова Н.Н., Кучуков В.А. Применение полей Галуа в решении вопроса о построении метода периодического обновления секрета . . . . .  | 121        |
| 4. Рацеев С.М. О совершенных шифрах . . . . .  | 124        |
| 5. Убалехт И.П. Применение интерактивного языка, использующего двухстрочные отношения и реляционное исчисление для формализации связей между атрибутами при формировании схем баз данных . . . . . | 127        |
| <b>5. Приближение функций</b>  | <b>130</b> |
| 1. Барабашкин Н.Д. О приближении непрерывных вектор-функций ломаными . . . . .   | 130        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 2.        | Габдуллин М.Р. Об одном результате Б. Боянова . . .  | 132        |
| 3.        | Дубосарский Г.А. Гармонические всплески и их приложения к решению задач математической физики .                                  | 134        |
| 4.        | Кошелев А.А. Вариант аддитивного неравенства Колмогорова для оператора Лапласа и его второй степени                              | 137        |
| 5.        | Куклин Н.А. Задача Дельсарта в трехмерном пространстве . . . . .   | 140        |
| 6.        | Леонтьева А.О. Оценка норм некоторых линейных операторов в $L_0$ . . . . .   | 142        |
| 7.        | Логвинова Т.О. Дискретизация эллиптически симметричных всплесков и всплеск-преобразований . . . . .                              | 144        |
| 8.        | Серков А.О. Экстремальные полиномы в одном неравенстве Тайкова . . . . .   | 146        |
| 9.        | Серкова А.В. Неравенство Бернштейна для производных дробного порядка тригонометрических полиномов                                | 148        |
| 10.       | Симонов И.Е. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в интегральной норме с ультрасферическим весом . . . . .                  | 150        |
| 11.       | Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т. Локальные экспоненциальные сплайны с произвольным расположением узлов . . . . .                    | 153        |
| 12.       | Тихановцева К.С. Порядок поведения меры множества неотрицательности многочленов с нулевым средним значением на отрезке . . . . . | 155        |
| <b>6.</b> | <b>Математическое программирование и анализ данных</b>   | <b>158</b> |
| 1.        | Бедин Д.А. Оценивание систематических ошибок РЛС без использования заданной пространственной модели                              | 158        |
| 2.        | Бочаров А.А. Автоматический анализ стихотворений   | 161        |
| 3.        | Вакула И.А., Леонова С.И. О построении графиков прокатки . . . . .   | 164        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 4.        | Иванов Д.В. Идентификация линейных ARX систем нецелого порядка с помехой во входном сигнале . . .  | 166        |
| 5.        | Исмагилов Н.С. Об одном детерминированном методе в модели стохастического оптимального управления производством . . . . .  | 170        |
| 6.        | Кобылкин К.С. Приближаемость некоторых задач комитетной отделимости . . . . .  | 172        |
| 7.        | Кошелева М.С., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в модельной задаче о демонтаже . . . . .  | 175        |
| 8.        | Логинов Н.А. Использование методов машинного обучения для задачи определения авторства русских текстов . . . . .   | 178        |
| 9.        | Незнахина Е.Д. PTAS для некоторых обобщений евклидовой задачи TSP . . . . .  | 181        |
| 10.       | Ручай А.Н. Разработка прототипа централизованной системы разграничения прав доступа на основе избирательной многофакторной биометрической аутентификации . . . . . | 183        |
| 11.       | Усталов Д.А. Изучение стиля текста при помощи теоретико-графовых методов . . . . .   | 186        |
| 12.       | Шангин Р.Э. Точный алгоритм решения дискретной задачи Вебера для простого цикла . . . . .  | 189        |
| <b>7.</b> | <b>Техническое зрение, робототехника и параллельные вычисления</b>   | <b>193</b> |
| 1.        | Игумнов Г.А. О результатах обработки реальных данных гидролокатора бокового обзора . . . . .   | 193        |
| 2.        | Корнилов Ф.А. Поиск прямоугольных контуров на изображениях с помощью преобразования Хафа . . .   | 195        |
| 3.        | Костоусов К.В. О задаче обнаружения и локализации прямоугольных объектов на изображении . . . . .  | 198        |
| 4.        | Лиханов А.Д. Алгоритм спектрального морфинга звуковых сигналов . . . . .   | 202        |

|  |            |
|--|------------|
| 5. Овчинников М.М., Кумков С.И. Управление движением самолётов в двухвсерной схеме ожидания . . . . .  | 205        |
| 6. Перевалов Д.С. Предельная теорема для смещенной метрики Хэмминга в задаче классификации с известным уровнем структурного шума . . . . .                 | 208        |
| 7. Черноскутов М.А. Оптимизация производительности в GPU-реализации алгоритма поиска в ширину на графе   | 212        |
| 8. Юферева О.О. Вращение треугольника Пенроуза . .   | 214        |
| <b>8. Функциональный анализ и уравнения в частных производных</b>  | <b>217</b> |
| 1. Балтаева У.И., Бабажанов Х. Об одной задаче со смещением для нагруженного уравнения третьего порядка  | 217        |
| 2. Имомкулов С.А., Расулов У.Х., Мирсанов У.М. Критерий рациональности аналитических функций многих переменных в терминах коэффициентов Тейлора . . .      | 219        |
| 3. Кузнецов П.А., Казаков А.Л. О краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой цилиндрической поверхности . . . . .     | 222        |
| 4. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Границы квадратичной числовой области значений одной операторной матрицы $2 \times 2$ . . . . .                           | 225        |
| 5. Расулов Т.Х., Умарова И.О. Существенный и дискретный спектры одной блочно-операторной матрицы $3 \times 3$  | 228        |
| 6. Расулова З.Д. Спектр обобщенной модели Фридрихса с возмущением ранга не более чем 4 . . . . .   | 231        |
| 7. Родионова Н.В. К вопросу о точном решении одной задачи оптимизации, порожденной простейшим волновым уравнением . . . . .                                | 234        |
| 8. Рузакова О.А., Золотарёва Е.А. Об управляемости начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа с сильно $(L, p)$ -радиальным оператором . . . | 237        |

9. Соболева Е.О. Метод регуляризации Тихонова в пространстве Липшица для операторного уравнения первого рода . . . . . 239

## 9. Численные методы 242

1. Асламов Г.С., Башкирцева И.А. Исследование аттракторов дискретной модели Рулькова нейронной активности . . . . . 242
2. Батагаева Т.А., Казаков А.Л. О поведении числа обусловленности квазитеплицевой трехдиагональной матрицы при неограниченном возрастании размерности . . . . . 245
3. Башкирцева И.А., Фоминых П.М. Управление проточным химическим реактором при случайных возмущениях . . . . . 248
4. Глушенкова В.В., Красовский А.Б., Ким А.В. О моделировании динамики ВИЧ . . . . . 251
5. Диркс Х., Правдин С.Ф., Панфилов А.В. Численное исследование динамики филаментов в модели левого желудочка сердца . . . . . 254
6. Екатеринчук Е.Д., Рязанова Т.В. Стохастический анализ модели Пуу . . . . . 257
7. Кошелев Г.Н. Метод доверительных областей в анализе стохастических переходов между циклами трехмерных систем . . . . . 260
8. Лекомцев А.В. Схема с весами для численного решения многомерного уравнения теплопроводности с запаздыванием для случая переменного коэффициента теплопроводности . . . . . 263
9. Ряшко Л.Б., Слепухина Е.С. Анализ стохастической модели Хиндмарш–Розе . . . . . 266
10. Свиридов С.В. Аналог метода Лакса–Вендроффа для решения уравнения переноса с запаздыванием . . . . . 269

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 11. | Солодушкин С.И., Юманова И.Ф. Численный анализ динамики клеточных популяций, структурированных по возрасту и фазе клеточного цикла . . . . . | 272 |
| 12. | Сысолятина А.А., Ряшко Л.Б. Чувствительность равновесий и цикла дискретной модели Калдора . . . . .  | 275 |
| 13. | Таныгина А.Н. Об условиях сходимости метода Ньютона–Канторовича для приближенного решения нелинейных операторных уравнений . . . . .         | 278 |
| 14. | Таширова Е.Е. Сеточные схемы для решения двумерного волнового уравнения с последствием . . . . .   | 281 |
| 15. | Юманова И.Ф. О применении метода Вегстейна к идентификации параметров в системах обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .           | 284 |

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ  
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ

Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции,  
посвященной 75-летию В.И. Бердышева

Рекомендовано к изданию  
Ученым советом  
Института математики и механики УрО РАН

---

Подписано в печать 15.01.2014.

Формат 60×84/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Тираж 132 экз.

Усл. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 13.

Заказ № 4994

---

620990 Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16,  
Институт математики и механики УрО РАН.

620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19,  
Уральский федеральный университет.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии  
ООО «Издательство Учебно-методический центр УПИ»  
620002 Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226