О семействах гиперплоскостей, разделяющих полиэдры, заданные на неотрицательном ортанте

А.И. Голиков
Вычислительный центр им А.А.Дородницына РАН, Москва
e-mail: gol@ccas.ru

Рассматривается задача о численном нахождении семейства гиперплоскостей, разделяющих два непересекающихся непустых полиэдра (многограные множества), которые заданы с помощью систем неравенств с неотрицательными переменными. Для этого случая обобщается теорема И.И. Еремина о гиперплоскости, разделяющей полиэдры, заданные системами неравенств на всем пространстве (теорема 10.1 в [1]). Нормаль и сдвиг разделяющей гиперплоскости выражаются через произвольное решение некоторой системы, являющейся альтернативной к несовместной системе. Эта несовместная система состоит из двух совместных подсистем, каждая из которых определяет непустой полиэдр. Система несовместна, так как эти полиэдры не пересекаются. Построение разделяющих гиперплоскостей существенно опирается на теоремы об альтернативах. По теореме И.И. Еремина любое решение альтернативной системы определяет *одно* семейство разделяющих гиперплоскостей для двух полиэдров, заданных на всем пространстве. В случае же полиэдров, заданных с помощью системы линейных неравенств на неотрицательном ортанте, любое решение альтернативной системы определяет уже *два различных* семейства разделяющих гиперплоскостей. Итак, пусть два полиэдра представлены системами неравенств на неотрицательном ортанте, т.е. заданы два непустые множества

$$X_1 = \{x \in R^n : A_1 x \geq b_1,\ x \geq 0_n\},\ \ X_2 = \{x \in R^n : A_2 x \geq b_2,\ \ x \geq 0_n\}$$

такие, что $X = X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Будем говорить, что гиперплоскость $c^\top x - \gamma = 0$, где вектор нормали $c \in R^n$, $\|c\| \neq 0$ и γ — скаляр, разделяет множества X_1 и X_2, если $c^\top x - \gamma \geq 0$ для всех $x \in X_1$, $c^\top x - \gamma \leq 0$ для всех $x \in X_2$. Если в этих выражениях знаки неравенств можно заменить на строгие, то гиперплоскость – строго разделяющая. В соответствии с теоремой об альтернативах для несовместной системы неравенств с неотрицательными переменными

$$A_1 x \geq b_1, \qquad A_2 x \geq b_2, \qquad x \geq 0_n$$

совместна следующая система:

$$A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 \le 0_n, \quad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho, \quad u_1 \ge 0_{m_1},\ u_2 \ge 0_{m_2}. \quad (1)$$

Здесь ρ — положительная константа.

Теорема 1. *Пусть два непустых, непересекающихся полиэдра заданы системами неравенств на неотрицательном ортанте. Тогда*
1. *для любого решения альтернативной системы (1) справедливо* $\|u_1\| \ne 0$, $\|u_2\| \ne 0$, $\|A_1^\top u_1\| \ne 0$ *и* $\|A_2^\top u_2\| \ne 0$*;*
2. *любое решение системы (1) определяет два различных семейства разделяющих гиперплоскостей*

$$\varphi_1(x,\alpha) = u_1^\top (A_1 x - b_1) + \alpha\rho = 0,$$
$$\varphi_2(x,\alpha) = -u_2^\top (A_2 x - b_2) - (1-\alpha)\rho = 0,$$

где $\alpha \in [0\ 1]$ *и для любого* $x \ge 0_n$ *имеет место* $\varphi_1(x,\alpha) \le \varphi_2(x,\alpha)$.

Итак, теорема 1 утверждает, что если найдено решение u_1, u_2 системы (1), то два семейства гиперплоскостей соответственно с векторами нормали $c = A_1^\top u_1$, $c = -A_2^\top u_2$ и $\gamma = b_1^\top u_1 - \alpha\rho$, $\gamma = -b_2^\top u_2 + (1-\alpha)\rho$ являются разделяющими.

Теорема 2. *Пусть гиперплоскость* $c^\top x - \gamma = 0$ *строго разделяет непустые непересекающиеся полиэдры* X_1 *и* X_2*. Тогда найдется решение* u_1, u_2 *системы (1) такое, что*

$$A_1^\top u_1 \le c, \quad A_2^\top u_2 \le -c, \quad \gamma = b_1^\top u_1 - \rho_1 = -b_2^\top u_2 + \rho_2,$$

где $\rho_1 + \rho_2 = \rho$, ρ_1, ρ_2 *– произвольные положительные константы.*

Теорема 2 устанавливает еще одно отличие полиэдров, заданных на всем пространстве, от полиэдров на неотрицательном ортанте. В ней утверждается, что в случае двух полиэдров, определяемых системами неравенств на неотрицательном ортанте, для заданной разделяющей гиперплоскости не всегда можно подобрать такие u_1 и u_2, удовлетворяющие совместной альтернативной системе (1), чтобы при этом выполнялось либо условие $c = A_1^\top u_1$, либо $c = -A_2^\top u_2$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № НШ-2240.2006.1 и 06-01-00547.

Литература

[1] *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998.