

Динамика систем и процессы управления

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 90-летию со дня рождения
академика Н.Н. Красовского



Abstracts of International Conference dedicated
to the 90th Anniversary of Academician N.N. Krasovskii

Systems Dynamics
and Control Processes

**Systems Dynamics
and Control Processes
SDCP'2014**

Abstracts of International Conference dedicated
to the 90th Anniversary of Academician N.N. Krasovskii

Ekaterinburg, Russia
September 15–20, 2014

Ekaterinburg
2014

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. Н. КРАСОВСКОГО
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ В. Н. ЕЛЬЦИНА

Динамика систем и процессы управления

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 90-летию со дня рождения
академика Н. Н. Красовского

Екатеринбург, Россия
15–20 сентября 2014 г.

Екатеринбург
ИММ УрО РАН · УРФУ
2014

УДК 517.9 + 519.63
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

*Конференция проводится в рамках программы Президиума РАН
«Динамические системы и теория управления», при финансовой
поддержке УрФУ (программа повышения конкурентноспособности
и программа развития), Российского фонда фундаментальных
исследований (проект 14-01-20115 Г) и ФАНО*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

В. С. Пацко (отв. редактор)

М. И. Гусев, А. Г. Иванов, М. И. Логинов, Н. Ю. Лукоянов,
В. И. Максимов, Н. Н. Субботина, А. М. Тарасьев, В. Н. Ушаков,
А. Г. Ченцов, Г. С. Шелементьев

Динамика систем и процессы управления: Тез. докл.
Междунар. конференции, посвященной 90-летию со дня рождения
акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября
2014 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ. 2014. 268 с.

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории устойчи-
вости, математической теории управления и оценивания, теории обобщён-
ных решений уравнений Гамильтона – Якоби. Представлены следующие
научные направления: устойчивость и стабилизация, управление и оце-
нивание для динамических систем в условиях неопределенности, диффе-
ренциальные игры, управление распределенными системами и обратные
задачи динамики, обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби,
численные методы теории управления и приложения.

УДК 517.9 + 519.63
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

ISBN 978-5-8295-0285-0

© ИММ УрО РАН, 2014
© УрФУ, 2014

Содержание

<i>Авербух Ю. В.</i>	
Неантагонистические игры и стратегии управления с поводырем	27
<i>Агеев А. Л., Антонова Т. В., Курликовский Д. В.</i>	
Локализация линий разрыва функции двух переменных	29
<i>Азамов А. А.</i>	
Метод DN -слежения в качественной теории динамических систем	31
<i>Ананьев Б. И.</i>	
Об оценивании обратных разностных уравнений со статистически неопределёнными возмущениями	32
<i>Ананьевский И. М.</i>	
Управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия	34
<i>Андреев А. С., Перегудова О. А., Кудашова Е. А.</i>	
О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа	35
<i>Банников А. С.</i>	
К линейным нестационарным дифференциальным играм группового преследования	37
<i>Башкирцева И. А.</i>	
Среднеквадратичный анализ стохастических циклов дискретных систем с параметрическими шумами	38
<i>Башкирцева И. А., Екатеринчук Е. Д., Рязанова Т. В.</i>	
Сравнительный анализ стохастического воздействия на модель Гудвина	40
<i>Бедин Д. А., Иванов А. Г., Федотов А. А.</i>	
Определение систематических ошибок радиолокаторов по их совместным измерениям	42
<i>Благодатский А. И.</i>	
Групповое преследование при наличии защитников убегающего	44
<i>Близорукова М. С.</i>	
О реконструкции входных воздействий в системе с последствием в управлении	46

<i>Васильев С. Н., Дружинин А. Э.</i>	
О модельных аналогиях и многорежимных системах . . .	47
<i>Воронов В. А.</i>	
Модифицированный метод последовательной линеаризации в задаче управления избыточной системой силовых гироскопов	49
<i>Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.</i>	
Переориентация асимметричного твердого тела посредством двигателей-маховиков при игровой модели помех	50
<i>Гасников А. В., Двуреченский П. Е.</i>	
Методы оптимизации для задач с неточным оракулом в гильбертовом пространстве	52
<i>Гомоюнов М. И., Лукоянов Н. Ю.</i>	
Численное решение задач управления на минимакс-максимин позиционного функционала	54
<i>Горнов А. Ю., Зароднюк Т. С.</i>	
Вычислительные технологии поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления со свободным правым концом	55
<i>Гороховик В. В., Трофимович М. А.</i>	
Банаховы пространства положительно однородных функций в негладком анализе и оптимизации	57
<i>Гребеничиков Б. Г., Ложников А. Б.</i>	
Алгоритм стабилизации одной системы нейтрального типа	59
<i>Гусев М. И.</i>	
Аппроксимации множеств достижимости нелинейных управляемых систем с фазовыми ограничениями	61
<i>Данилин А. Р.</i>	
Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральными ограничениями и критерием качества	63
<i>Данилов Л. И.</i>	
Многозначные рекуррентные отображения и их сечения	64

<i>Дзуреченский П. Е., Иванов Г. Е.</i>	
Операторы Минковского и их применение в дифференциальных играх	66
<i>Дмитрук Н. М.</i>	
Оптимальное управление многосвязными объектами с возмущениями	68
<i>Долгий Ю. Ф.</i>	
Оптимальная стабилизация систем дифференциальных уравнений с последствием нейтрального типа	70
<i>Думшова Т. Д., Кандоба И. Н., Козьмин И. Н., Костоусов В. Б., Костоусова Е. К., Ложников А. Б., Починский В. И.</i>	
Исследование оптимальных межорбитальных переходов разгонного блока	72
<i>Дыхта В. А.</i>	
Бипозиционные лагранжианы и двойственность в невыпуклых задачах оптимального управления	74
<i>Дыхта В. А., Самсонок О. Н.</i>	
Неравенства Гамильтона – Якоби и условия оптимальности для импульсных управляемых систем	76
<i>Егоров А. И., Знаменская Л. Н.</i>	
Управление с минимальной энергией в краевых задачах для уравнения параболического типа	78
<i>Еграшкина Ж. Е., Седова Н. О.</i>	
Нечеткие системы Такаги – Сугено в исследовании устойчивости нелинейных дифференциальных систем	80
<i>Екатеринчук Е. Д., Ряшко Л. Б.</i>	
Анализ стохастической модели Ферхюльста с запаздыванием	82
<i>Жаринов А. Н., Кумков С. С.</i>	
Сходимость алгоритмов построения границ множеств достижимости в задачах управления на плоскости	83
<i>Жуковский В. И.</i>	
Равновесие по Бержу при неопределенности	85
<i>Жуковский Е. С., Поносов А. В.</i>	
К теории функционально-дифференциальных уравнений	87

<i>Зайцев В. А.</i>	
Достаточные условия стабилизации дискретных стационарных аффинных управляемых систем	89
<i>Зеликин М. И., Осипов Ю. С.</i>	
Многомерные вариационные задачи	91
<i>Зимовец А. А., Матвийчук А. Р.</i>	
Об эффективных сеточных методах построения интегральных воронок динамических систем	92
<i>Ильин Е. Д., Ширяев В. И.</i>	
О гарантированном оценивании некоторых видов возмущений в линейной динамической системе	94
<i>Калинин А. И., Лавринович Л. И.</i>	
Асимптотически субоптимальный синтез в сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления	96
<i>Калитин Б. С.</i>	
Развитие идеи Барбашина–Красовского в прямом методе Ляпунова	98
<i>Казаков А. Л., Лемперт А. А.</i>	
О волновом подходе к решению задач оптимизации логистической инфраструктуры	100
<i>Каюмов Р. И.</i>	
О дифференциальных включениях, содержащих малый параметр при производной	102
<i>Кириллова Ф. М., Дмитрук Н. М., Габасов Р.</i>	
Синтез оптимальных систем и оптимальное управление в реальном времени	104
<i>Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.</i>	
Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией CES	106
<i>Клейменов А. Ф.</i>	
Равновесные решения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре в классах чистых стратегий	108

<i>Колпакова Е. А.</i>	
Обобщенные решения системы уравнений Гамильтона – Якоби	109
<i>Корнев Д. В.</i>	
О численном решении дифференциальных игр на минимакс позиционного функционала в классах смешанных стратегий	111
<i>Короткий А. И., Стародубцева Ю. В.</i>	
Восстановление граничных управлений по граничным наблюдениям в системах реакции-конвекции-диффузии	113
<i>Костоусова Е. К.</i>	
О полиэдральном синтезе управлений в многошаговых системах в условиях неопределенности и фазовых ограничений	115
<i>Красовский А. Н., Бочаров Г. А., Ким А. В., Глушенкова В. В., Сафронов М. А.</i>	
Управление и стабилизация математических моделей ВИЧ динамики (процессов)	118
<i>Красовский Н. А., Тарасьев А. М.</i>	
Алгоритмы построения равновесных траекторий в динамических биматричных играх	119
<i>Кругликов С. В.</i>	
Априорное моделирование пространственного движения объектов с ограниченной маневренностью	121
<i>Кудрявцев К. Н., Стабулит И. С.</i>	
Об одной задаче дискретного управления рекламой	123
<i>Кукункина Е. В.</i>	
Канонические аппроксимации в задаче стабилизации автономных функционально-разностных уравнений	125
<i>Кумков С. С., Пацко В. С.</i>	
Максимальные стабильные мосты в задачах преследования с двумя догоняющими и одним убегающим	127
<i>Куржанский А. Б.</i>	
Теория трубок траекторий в задачах группового управления	129

<i>Лебедев П. Д., Казаков А. Л.</i>	
Наилучшие аппроксимации множеств конечными наборами кругов	129
<i>Лукоянов Н. Ю., Плаксин А. Р.</i>	
Конечномерные моделирующие поводьри конфликтно-управляемых систем нейтрального типа	131
<i>Лутманов С. В.</i>	
Об одном способе построения компромиссных наборов стратегий в дифференциальных играх нескольких лиц	133
<i>Максимов В. И.</i>	
Об отслеживании траекторий динамических систем методами экстремального управления	134
<i>Никольский М. С.</i>	
К вопросу об изучении одного варианта управляемой модели Солоу	135
<i>Павленко В. Н.</i>	
Теоремы неединственности для периодических параболических задач с разрывными нелинейностями . . .	137
<i>Панасенко Е. А., Тонков Е. Л.</i>	
Распространение теоремы Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые системы на гладких многообразиях	139
<i>Петров Н. Н., Виноградова М. Н., Соловьева Н. А.</i>	
О некоторых нестационарных задачах группового преследования	141
<i>Петросян Л. А.</i>	
Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх	143
<i>Пименов В. Г.</i>	
Численные методы моделирования управляемого уравнения переноса с запаздыванием	145
<i>Погодаев Н. И.</i>	
Об одной задаче управления для квазилинейного уравнения первого порядка	147

<i>Подивилова Е. О., Ширяев В. И.</i>	
Аппроксимация информационных множеств в задаче минимаксной фильтрации с использованием систем линейных неравенств	148
<i>Половинкин Е. С.</i>	
Необходимые условия оптимальности в задачах с дифференциальными включениями	150
<i>Попова С. Н., Банщикова И. Н.</i>	
О глобальной приводимости дискретных почти периодических систем	152
<i>Потапов М. М., Дряженков А. А.</i>	
Задачи граничного управления для волнового уравнения с терминальными условиями, порождающими целевой функционал и ограничение	153
<i>Родин А. С.</i>	
О структуре сингулярного множества минимаксного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана . . .	155
<i>Родина Л. И.</i>	
Инвариантные множества управляемой системы со случайными коэффициентами	157
<i>Розенберг В. Л.</i>	
Реконструкция параметров линейного стохастического уравнения в условиях дефицита информации	159
<i>Ряшко Л. Б.</i>	
Метод функций стохастической чувствительности в анализе индуцированных шумами явлений для нелинейных динамических систем	161
<i>Саматов Б. Т.</i>	
Дифференциальные игры с линейными ограничениями по управлению	162
<i>Серков Д. А.</i>	
О неуплучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата	165
<i>Сесекин А. Н.</i>	
Вырожденная линейно-квадратичная задача для системы с линейным запаздыванием	167

<i>Слепухина Е. С., Ряшко Л. Б.</i>	
Анализ стохастической возбудимости в модели нейрона Хиндмарш – Розе	169
<i>Соколов В. Ф.</i>	
Адаптивная стабилизация минимально-фазового объекта с липшицевой неопределенностью и ограниченным внешним возмущением	170
<i>Солодушкин С. И., Сагоян А. А.</i>	
Численное исследование управляемого гиперболического уравнения первого порядка с запаздыванием и сдвигом по координатам	172
<i>Старицын М. В., Сорокин С. П.</i>	
Вариационное условие оптимальности с позиционными управлениями для линейной по состоянию задачи импульсного управления	174
<i>Стрекаловский А. С.</i>	
Теория и методы решения невыпуклых задач оптимального управления	175
<i>Стружанов В. В., Бурмашева Н. В.</i>	
Метод простой итерации и устойчивость положений равновесия нелинейных градиентных механических систем	177
<i>Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б.</i>	
Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных	178
<i>Сумин В. И., Чернов А. В.</i>	
Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем	180
<i>Сумин М. И.</i>	
Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении распределенными системами	182
<i>Сурков П. Г.</i>	
Об одной некорректной задаче прогнозирования для линейной автономной системы с запаздыванием	185

<i>Тарасьев А. М., Усова А. А.</i>	
Модель развития ресурсозависимой экономики	187
<i>Тимофеева Г. А., Тимофеев Н. А.</i>	
Формализация задачи управления марковской цепью в условиях неполной информации	189
<i>Толстоногов А. А.</i>	
Компактность в пространстве многозначных отобра- жений с замкнутыми неограниченными значениями и ее приложения	191
<i>Тхай В. Н.</i>	
Условия устойчивости связанной линейной системы . .	192
<i>Тхай В. Н., Барабанов И. Н.</i>	
Стабилизация колебаний в модели, содержащей свя- занные подсистемы	194
<i>Успенский А. А., Ушаков А. В.</i>	
Моделирование решений дифференциальных игр в од- ном классе невыпуклых множеств с гладкой границей	195
<i>Ухоботов В. И., Измestьев И. В.</i>	
Однотипные дифференциальные игры с терминаль- ным множеством в форме кольца	197
<i>Ушаков В. Н., Брыкалов С. А., Паршиков Г. В.</i>	
Наборы дифференциальных включений и унификация наборов	199
<i>Филиппова Т. Ф.</i>	
Оценки множеств достижимости нелинейной динами- ческой системы с неопределенностью	201
<i>Финогенко И. А.</i>	
Предельные дифференциальные включения и устой- чивость неавтономных систем	203
<i>Хлопин Д. В.</i>	
Теоремы тауберова типа для конфликтно-управляе- мых систем	204
<i>Ченцов А. Г.</i>	
Расширения абстрактных задач о достижимости	206
<i>Чернов А. В.</i>	
О тотальном сохранении разрешимости управляемой задачи Дирихле для эллиптического уравнения	208

<i>Чикрий А. А.</i>	
О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения	210
<i>Шагалова Л. Г.</i>	
О применении метода характеристик для построения обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями	211
<i>Шананин А. А.</i>	
Обратные задачи в моделях распределения ресурсов .	213
<i>Шевченко И. И.</i>	
Формирование гарантирующих стратегий уклонения с памятью в играх одного убегающего и нескольких преследователей	215
<i>Шевченко Р. И.</i>	
Численное исследование устойчивости обобщенного течения Колмогорова	217
<i>Шелудько А. С., Ширяев В. И.</i>	
Применение гарантированного подхода при парамет- рической идентификации модели динамической системы с хаотическими решениями	218
<i>Шориков А. Ф.</i>	
Задача двухуровневого минимаксного программного управления процессом сближения для дискретной динамической системы	220
<i>Щеглова А. А.</i>	
Об исследовании качественных свойств нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений	222
<i>Allgöwer F.</i>	
Industry 4.0: Challenges and opportunities for optimization-based control	224
<i>Aseev S. M., Veliov V. M.</i>	
Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions	226
<i>Botkin N. D., Turova V. L.</i>	
Application of Krasovskii’s unification method to simulation of acoustic waves in anisotropic media	228

<i>Bravyi E. I.</i>	
On conditions for solvability of the periodic problem for the second order functional differential equations under uncertainty	230
<i>Chernousko F.</i>	
Locomotion control and optimization for multibody systems	232
<i>Davydov A.A., Nassar A.F.</i>	
Stationary state of exploited population with hierarchical intraspecific competition	233
<i>Dontchev A. L.</i>	
Some inverse function theorems	235
<i>Finkelstein E. A., Gornov A. Yu.</i>	
Algorithm library in the software package OPTCON-MD for reachable set approximation of a nonlinear system . .	235
<i>Gornov A. Yu., Anikin A. S., Andrianov A. N.</i>	
Some difficulties in numerical solution of optimization problems with billions of variables	237
<i>Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh. G.</i>	
On properties of trajectories set of control system described by an affine integral equation	239
<i>Kalyakin L.</i>	
Stability of autoresonance under persistent perturbation by white noise	240
<i>Krasinskiy A. Ya., Krasinskaya E. M.</i>	
On method for investigation of some class stabilization problems with incomplete state information	241
<i>Krasovskii A. A., Khabarov N. V., Reuter W. H., Obersteiner M.</i>	
An optimization model linking electricity prices, CO ₂ prices, and REDD+ options	243
<i>Krejčí P., Timoshin S. A.</i>	
Coupled ODEs control system with unbounded hysteresis region	245
<i>Krener A. J.</i>	
Al'brecht's method for optimal stabilization and its extensions	247

<i>Krupennikov E. A.</i>	
Dynamic reconstruction of a macroeconomic model . . .	248
<i>Kryazhimskiy A. V.</i>	
Non-anticipatory control strategies: from differential games to incomplete state information	250
<i>Melnikov N. B., O'Neill B. C., van Ruijven B. J., Dalton M. G.</i>	
Downscaling heterogeneous household outcomes in dynamic CGE models	250
<i>Ovsyannikov D. A.</i>	
Mathematical control models in problems of beam dynamics optimization	253
<i>Pereira F. L.</i>	
A maximum principle for an infinite horizon optimal control problem	255
<i>Reshmin S. A.</i>	
The simplest structure of the time-optimal feedback control for single-DOF systems	255
<i>Rozanova O. S.</i>	
Constructing steady states for the 2D compressible Euler equations	258
<i>Sivergina I. F.</i>	
Relaxation and dynamic estimation in a hybrid system .	259
<i>Sousa J. B.</i>	
Dynamic optimization challenges in networked vehicle systems	260
<i>Zubarev A. Yu., Abu-Bakr A. F.</i>	
Mathematical model of hyperthermia effect produced by magnetic particles	260

Contents

<i>Averboukh Yu.</i>	
Non-zero sum differential games and control with guide strategies	27
<i>Ageev A. L., Antonova T. V., Kurlikovskii D. V.</i>	
Localization of lines of discontinuity for function of two variables	29
<i>Azamov A. A.</i>	
DN-tracking method in a quality theory of dynamic systems	31
<i>Ananyev B. I.</i>	
On estimation of inverse difference equations with statistically uncertain disturbances	32
<i>Ananyevskiy I. M.</i>	
Control of underactuated mechanical systems near equilibrium position	34
<i>Andreev A. S., Peregudova O. A., Kudashova E. A.</i>	
On stabilization of mechanical system motions by use of various types of controls	35
<i>Bannikov A. S.</i>	
On linear non-stationary differential games of group pursuit	37
<i>Bashkirtseva I. A.</i>	
Mean-square analysis of stochastic cycles for discrete systems with parametric noises	38
<i>Bashkirtseva I. A., Ekaterinchuk E. D., Ryazanova T. V.</i>	
Comparative analysis of stochastic effect on the Goodwin model	40
<i>Bedin D. A., Ivanov A. G., Fedotov A. A.</i>	
Identification of systematic errors of radars on the basis of their joint measurements	42
<i>Blagodatskikh A. I.</i>	
Group pursuit under presence of defenders of the evader	44
<i>Blizorukova M. S.</i>	
On reconstruction of input actions in a system with delay in control	46
<i>Vasilyev S. N., Druzhinin A. E.</i>	
On model analogies and multi regime systems	47

<i>Voronov V. A.</i>	
The modified method of sequential linearization for control problem of redundant moment gyros	49
<i>Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.</i>	
Reorientation of an asymmetric rigid body by means of the engine-flywheels under the game model of noises . . .	50
<i>Gasnikov A. V., Dvurechensky P. E.</i>	
Optimization methods for problems with inexact oracle in Hilbert space	52
<i>Gomoyunov M. I., Lukoyanov N. Yu.</i>	
Numerical solution of control problems for the maxmin- minmax of a positional functional	54
<i>Gornov A. Yu., Zarodnyuk T. S.</i>	
Computing technologies for global extremum search in an optimal control problem with a free right end	55
<i>Gorokhovik V. V., Trafimovich M. A.</i>	
Banach spaces of positively homogeneous functions in nonsmooth analysis and optimization	57
<i>Grebenschikov B. G., Lozhnikov A. B.</i>	
A stabilization algorithm for a system of neutral type . .	59
<i>Gusev M. I.</i>	
Approximation of reachable sets of nonlinear control systems with state constraints	61
<i>Danilin A. R.</i>	
Asymptotics of the solution of a singularly perturbed optimal control problem with integral constraints and the given criterion of quality	63
<i>Danilov L. I.</i>	
Multivalued recurrent mappings and their selectors . . .	64
<i>Dvurechensky P. E., Ivanov G. E.</i>	
Minkowski operators and their application to differential games	66
<i>Dmitruk N. M.</i>	
Optimal control of interacting systems with disturbances	68
<i>Dolgii Yu. F.</i>	
Optimal stabilization of systems of differential equations with aftereffect of neutral type	70

<i>Dumsheva T. D., Kandoba I. N., Koz'min I. V., Koustousov V. B., Koustousova E. K., Lozhnikov A. B., Pochinskii V. I.</i>	
Optimal orbit transfers of a carrier rocket	72
<i>Dykhta V. A.</i>	
Bipositional Lagrangians and duality in nonconvex optimal control problems	74
<i>Dykhta V. A., Samsonyuk O. N.</i>	
Hamilton–Jacobi inequalities and optimality conditions for impulse control systems	76
<i>Egorov A. I., Znamenskaya L. N.</i>	
Control with minimal energy for boundary problems with parabolic equation	78
<i>Egrashkina J. E., Sedova N. O.</i>	
Fuzzy T-S systems in stability analysis for nonlinear differential systems	80
<i>Ekaterinchuk E. D., Ryashko L. B.</i>	
Analysis of Verhulst stochastic model with delay	82
<i>Zharinov A. N., Kumkov S. S.</i>	
Convergence of algorithms for constructing boundaries of reachability sets in control problems in the plane	83
<i>Zhukovskiy V. I.</i>	
Berge equilibrium under uncertainty	85
<i>Zhukovskiy E. S., Ponosov A. V.</i>	
On the theory of functional-differential equations	87
<i>Zaitsev V. A.</i>	
Sufficient conditions for stabilization of discrete-time stationary affine control systems with time-invariant coefficients	89
<i>Zelikin M. I., Osipov Yu. S.</i>	
Multi-dimensional variation problems	91
<i>Zimovets A. A., Matviychuk A. R.</i>	
On effective grid methods for integral funnels construction in dynamic systems	92
<i>Ilin E. D., Shiryayev V. I.</i>	
On guaranteed estimation of some kinds of disturbances in linear dynamic system	94

<i>Kalinin A. I., Lavrinovich L. I.</i>	
Asymptotically suboptimal feedback synthesis in singularly perturbed linear-quadratic optimal control problem	96
<i>Kalitin B. S.</i>	
Development of the by Barbashin – Krasovskii idea in the Lyapunov direct method	98
<i>Kazakov A. L., Lempert A. A.</i>	
On a wave approach to solving optimization problems of logistic infrastructure	100
<i>Kayumov R. I.</i>	
On singularly perturbed differential inclusions	102
<i>Kirillova F. M., Dmitruk N. M., Gabasov R.</i>	
Synthesis of optimal systems and optimal control in real time	104
<i>Kiselev Yu. N., Avvakumov S. N., Orlov M. V.</i>	
Optimal resource distribution problem in a two-sector economic model with production function of CES type .	106
<i>Kleimenov A. F.</i>	
Equilibrium solutions of non-antagonistic positional differential game in classes of pure strategies	108
<i>Kolpakova E. A.</i>	
Generalized solutions of Hamilton – Jacobi equations system	109
<i>Kornev D. V.</i>	
On numerical solving of differential games on minimax of a positional functional in classes of mixed strategies . . .	111
<i>Korotkii A. I., Starodubtseva Yu. V.</i>	
Reconstruction of boundary controls from boundary observations in the reaction-convection-diffusion systems	113
<i>Koustousova E. K.</i>	
On polyhedral control synthesis for discrete-time systems under uncertainties and state constraints	115
<i>Krasovskii A. N., Bocharov G. A., Kim A. V., Glushenkova V. V., Safronov M. A.</i>	
Control and stabilization of mathematic HIV models (processes)	118

<i>Krasovskiy N. A., Tarasyev A. M.</i>	
Algorithms for construction of equilibrium trajectories in dynamic bimatrix games	119
<i>Kruglikov S. V.</i>	
A priori simulation of spacial motion for a group of objects with restricted maneuverability	121
<i>Kudryavtsev K. N., Stabulit I. S.</i>	
On a problem of advertising discrete control	123
<i>Kukushkina E. V.</i>	
Canonical approximation in problem of stabilization for autonomous functional-differential equations	125
<i>Kumkov S. S., Patsko V. S.</i>	
Maximal stable bridges in pursuit problems with two pursuers and one evader	127
<i>Kurzhanski A. B.</i>	
Theory of trajectory tubes in problems of group control	129
<i>Lebedev P. D., Kazakov A. L.</i>	
The best approximations of sets by the finite sets of circles	129
<i>Lukoyanov N. Yu., Plaksin A. R.</i>	
Finite-dimensional modelling guides for conflict-control systems of neutral type	131
<i>Lutmanov S. V.</i>	
About one method of construction of compromise sets of strategies in differential games of several persons	133
<i>Maksimov V. I.</i>	
On tracking trajectories of dynamical systems by the extremal control methods	134
<i>Nikolskii M. S.</i>	
On study of a controlled model by Solow	135
<i>Pavlenko V. N.</i>	
Non-uniqueness theorems for periodic parabolic problems with discontinuous non-linearities	137
<i>Panasenko E. A., Tonkov E. L.</i>	
Extension of E.A. Barbashin and N.N. Krasovskii theorem onto controllable systems on smooth manifolds	139

<i>Petrov N. N., Vinogradova M. N., Solovyeva N. A.</i>	
On some non-stationary problems of group pursuit	141
<i>Petrosyan L. A.</i>	
Two-stage cooperation in coalitional differential games . .	143
<i>Pimenov V. G.</i>	
Numerical method for modelling controlled advection equation with delay	145
<i>Pogodaev N. I.</i>	
On one control problem for scalar quasilinear equations .	147
<i>Podivilova E. O., Shiryayev V. I.</i>	
Information set approximation in minimax filtration problem using linear inequalities systems	148
<i>Polovinkin E. S.</i>	
Necessary conditions for optimality in problems with differential inclusions	150
<i>Popova S. N., Banshchikova I. N.</i>	
On global reducibility of discrete almost periodic systems	152
<i>Potapov M. M., Dryazhenkov A. A.</i>	
Boundary control problems for wave equation with terminal conditions generating the cost function and constraint	153
<i>Rodin A. S.</i>	
On structure of a singular set of the minimax solution for the Hamilton – Jacobi – Bellman equation	155
<i>Rodina L. I.</i>	
Invariant sets of control system with random coefficients	157
<i>Rozenberg V. L.</i>	
Parameters reconstruction of a linear stochastic equation under conditions of information shortage	159
<i>Ryashko L. B.</i>	
Stochastic sensitivity functions technique for analysis of noise-induced phenomena in nonlinear dynamic systems .	161
<i>Samatov B. T.</i>	
Differential games with linear constraints on controls . .	162

<i>Serkov D. A.</i>	
On non-improvability of full-memory strategies in problems of the guaranteed result optimization	165
<i>Sesekin A. N.</i>	
Degenerate linear-quadratic problem for system with linear delay	167
<i>Slepukhina E. S., Ryashko L. B.</i>	
Analysis of stochastic excitability in Hindmarsh–Rose neuron model	169
<i>Sokolov V. F.</i>	
Adaptive stabilization of minimum-phase plant under Lipschitz uncertainty and bounded outer disturbance . . .	170
<i>Solodushkin S. I., Sagoyan A. A.</i>	
Numerical investigation of a controlled first order hyperbolic equation with time delay and retardation in state variable	172
<i>Staritsyn M. V., Sorokin S. P.</i>	
Variational optimality condition with positional controls for a state-linear problem of impulse control	174
<i>Strekalovsky A. S.</i>	
Theory and methods for solving nonconvex optimal control problems	175
<i>Struzhanov V. V., Burmasheva N. V.</i>	
Method of a simple iteration and stability of equilibria of mechanical nonlinear gradient systems	177
<i>Subbotina N. N., Tokmantsev T. B.</i>	
Studies on solutions stability of inverse problems of dynamics for controlled systems w.r.t. perturbations of input data	178
<i>Sumin V. I., Chernov A. V.</i>	
Volterra functional-operator equations in the optimal control theory of distributed systems	180
<i>Sumin M. I.</i>	
Stable sequential Pontryagin maximum principle in optimal control of distributed systems	182

<i>Surkov P. G.</i>	
On one ill-posed problem of forecasting for a linear autonomous system with delay	185
<i>Tarashev A. M., Usova A. A.</i>	
Model of development for resource-dependent economics	187
<i>Timofeeva G. A., Timofeev N. A.</i>	
Formalization of Markov chain control problem under incomplete information	189
<i>Tolstonogov A. A.</i>	
Compactness in the space of multivalued mappings with closed unbounded values and its applications	191
<i>Tkhai V. N.</i>	
Stability conditions for coupled linear system	192
<i>Tkhai V. N., Barabanov I. N.</i>	
Stabilization of oscillations in model containing coupled subsystems	194
<i>Uspenskii A. A., Ushakov A. V.</i>	
The modelling of solutions of differential games in one class of nonconvex sets with smooth border	195
<i>Ukhobotov V. I., Izmetev I. V.</i>	
One-type differential games with terminal set in form of a ring	197
<i>Ushakov V. N., Brykalov S. A., Parshikov G. V.</i>	
Collections of differential inclusions and unification of collections	199
<i>Filippova T. F.</i>	
Estimates of reachable sets of nonlinear dynamic system with uncertainty	201
<i>Finogenko I. A.</i>	
The limit differential inclusions and stability of nonautonomous systems	203
<i>Khlopin D. V.</i>	
Tauberian-type theorem for conflict-controlled systems	204
<i>Chentsov A. G.</i>	
Extension of abstract attainability problems	206

<i>Chernov A. V.</i>	
On total preservation of solvability of controlled Diriclet problem for elliptic equation	208
<i>Chikrii A. A.</i>	
On sufficient conditions for solvability of game-approach problems	210
<i>Shagalova L. G.</i>	
On application of the characteristics method to construction generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation with phase-state constraints	211
<i>Shananin A. A.</i>	
Inverse problem in model of resources distribution	213
<i>Shevchenko I. I.</i>	
Construction of guaranteed avoidance strategies with memory for one evader-several pursuers games	215
<i>Shevchenko R. I.</i>	
Numeric research of stability of the generalized Kolmogorov flow	217
<i>Sheludko A. S., Shiryayev V. I.</i>	
Parameter identification for chaotic dynamic systems: a guaranteed approach	218
<i>Shorikov A. F.</i>	
Two-level minimax program control problem of approach process for discrete-time dynamic system	220
<i>Shcheglova A. A.</i>	
On investigation of qualitative properties of nonlinear differential-algebraic equations	222
<i>Allgöwer F.</i>	
Industry 4.0: Challenges and opportunities for optimization-based control	224
<i>Aseev S. M., Veliov V. M.</i>	
Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions	226
<i>Botkin N. D., Turova V. L.</i>	
Application of Krasovskii’s unification method to simulation of acoustic waves in anisotropic media	228

<i>Bravyi E. I.</i>	
On conditions for solvability of the periodic problem for the second order functional differential equations under uncertainty	230
<i>Chernousko F.</i>	
Locomotion control and optimization for multibody systems	232
<i>Davydov A.A., Nassar A.F.</i>	
Stationary state of exploited population with hierarchical intraspecific competition	233
<i>Dontchev A. L.</i>	
Some inverse function theorems	235
<i>Finkelstein E. A., Gornov A. Yu.</i>	
Algorithm library in the software package OPTCON-MD for reachable set approximation of a nonlinear system . .	235
<i>Gornov A. Yu., Anikin A. S., Andrianov A. N.</i>	
Some difficulties in numerical solution of optimization problems with billions of variables	237
<i>Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh. G.</i>	
On properties of trajectories set of control system described by an affine integral equation	239
<i>Kalyakin L.</i>	
Stability of autoresonance under persistent perturbation by white noise	240
<i>Krasinskiy A. Ya., Krasinskaya E. M.</i>	
On method for investigation of some class stabilization problems with incomplete state information	241
<i>Krasovskii A. A., Khabarov N. V., Reuter W. H., Obersteiner M.</i>	
An optimization model linking electricity prices, CO ₂ prices, and REDD+ options	243
<i>Krejčí P., Timoshin S. A.</i>	
Coupled ODEs control system with unbounded hysteresis region	245
<i>Krener A. J.</i>	
Al'brecht's method for optimal stabilization and its extensions	247

<i>Krupennikov E. A.</i>	
Dynamic reconstruction of a macroeconomic model . . .	248
<i>Kryazhimskiy A. V.</i>	
Non-anticipatory control strategies: from differential games to incomplete state information	250
<i>Melnikov N. B., O'Neill B. C., van Ruijven B. J., Dalton M. G.</i>	
Downscaling heterogeneous household outcomes in dynamic CGE models	250
<i>Ovsyannikov D. A.</i>	
Mathematical control models in problems of beam dynamics optimization	253
<i>Pereira F. L.</i>	
A maximum principle for an infinite horizon optimal control problem	255
<i>Reshmin S. A.</i>	
The simplest structure of the time-optimal feedback control for single-DOF systems	255
<i>Rozanova O. S.</i>	
Constructing steady states for the 2D compressible Euler equations	258
<i>Sivergina I. F.</i>	
Relaxation and dynamic estimation in a hybrid system .	259
<i>Sousa J. B.</i>	
Dynamic optimization challenges in networked vehicle systems	260
<i>Zubarev A. Yu., Abu-Bakr A. F.</i>	
Mathematical model of hyperthermia effect produced by magnetic particles	260

Неантагонистические игры и стратегии управления с поводырем

Ю. В. Авербух¹

Доклад посвящен исследованию равновесия по Нэшу в случае, когда игроки используют стратегии управления с поводырем. Целью работы является построение универсального равновесия по Нэшу, т. е. набора стратегий, обеспечивающих равновесие независимо от начальной позиции. Стратегии с поводырем были предложены Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным и обобщают понятие позиционных стратегий. Неформально различие между позиционными стратегиями и стратегиями управления с поводырем можно описать следующим образом: если игрок использует позиционную стратегию, ему необходимы лишь измерительные инструменты: игрок, применяющий стратегию управления с поводырем, нуждается и в измерительных инструментах, и в компьютере для построения модели движения системы.

Рассматриваются дифференциальные игры многих лиц с динамикой, описываемой уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_i), \quad t \in [0, T], \quad x_i \in \mathbb{R}^d, \quad u_i \in P_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Каждый игрок стремится к максимизации выигрыша $\sigma_i(x_1(T), \dots, x_n(T))$. В дальнейшем будем использовать обозначение $x = (x_1, \dots, x_n)$. Если u_i — программное управление игрока i , (t^*, x^*) — начальная позиция, то обозначим через $x(\cdot, t^*, x^*, u_1, \dots, u_n)$ соответствующее движение.

Пусть игроки используют стратегию управления с поводырем. В этом случае стратегия игрока i представляет собой тройку $U_i =$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

$(u_i(t, x, w_i), \psi_i(t_+, t, x, w_i), \chi_i(t^0, x^0))$. Здесь $w_i \in \mathbb{R}^m$ — положение поводыря. Предполагаем, что управление постоянно между двумя моментами коррекции t и t_+ управления. Если в момент t положение системы есть x , а положение поводыря w_i , то функция u_i задает управление игрока i , а функция $\psi_i(t_+, t, x, w_i)$ — положение поводыря в момент t_+ . Функция $\chi_i(t^0, x^0)$ задает начальное положение поводыря в момент t^0 при условии того, что положение системы есть x^0 .

Пусть (t^0, x^0) — начальная позиция. Мы рассматриваем два случая. В первом случае все игроки используют стратегии из набора $\bar{U} = (U_1, \dots, U_n)$ и корректируют свое управление в моменты разбиения $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^r$. Соответствующее движение обозначим через $x[\cdot, t^0, x^0, \bar{U}, \Delta]$. Во втором случае один из игроков — игрок j — отклоняется и использует управление u_j , в то время как остальные игроки используют стратегии из набора \bar{U} и корректируют управления в моменты разбиения Δ . Соответствующее движение обозначим через $x[\cdot, t^0, x^0, \bar{U}|u_j, \Delta]$.

Будем говорить, что набор стратегий управления с поводырем \bar{U}^* доставляет равновесие по Нэшу на множестве $G \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, если для всех $(t^0, x^0) \in G$, $j \in \overline{1, n}$ и управлений u_j выполнены неравенства

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \{\sigma_j(x[T, t^0, x^0, \bar{U}|u_j, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta\} \leq \liminf_{\delta \downarrow 0} \{\sigma_j(x[t^0, t^0, x^0, \bar{U}, \Delta]) : d(\Delta) \leq \delta\}.$$

Пусть $\text{Sol}^{[j]}(t^0, x^0; u_j^*) \triangleq \text{cl}\{x(\cdot, t^0, x^0, u^1, \dots, u_j^*, \dots, u_n) : u_i \text{ измеримо, } i \neq j\}$, $\text{Sol}(t^0, x^0) \triangleq \text{cl}\{x(\cdot, t^0, x^0, u) : u \text{ измеримо}\}$.

Теорема 1. Пусть многозначная функция $S : [0, T] \times \mathbb{R}^{dn} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $S(T, x) = \{\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)\}$;
2. для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ \in [t, T]$, $J \in S(t, x)$, $j \in \overline{1, n}$ и $u_j \in P_j$ существуют $y^{[j]}(\cdot) \in \text{Sol}^{[j]}(t, x; u_j)$ и $J' \in S(t_+, y^{[j]}(t_+))$ такие, что $J_j \geq J'_j$;
3. для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$, $t_+ \in [t, T]$, $J \in S(t, x)$ существует движение $y^c(\cdot) \in \text{Sol}(t, x; u_j)$ такое, что $J \in S(t_+, y^c(t_+))$.

Тогда для любого компакта $G \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{dn}$ и любого селектора $\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_n)$ многозначного отображения S существует равновесие в классе стратегий с поводырем на G . Соответствующий выигрыш игрока i в позиции $(t^0, x^0) \in G$ есть $\hat{J}_i(t^0, x^0)$.

Теорема 2. Существует многозначное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы 1.

Локализация линий разрыва функции двух переменных

А. Л. Агеев¹, Т. В. Антонова¹, Д. В. Курликовский¹

Необходимость локализовать (т. е. определить положение) линии разрыва функции двух переменных $f(x, y)$ возникает в различных приложениях, например, при обработке изображений. Поэтому актуальной задачей является построение и исследование методов локализации на устойчивость к возмущениям входных данных, чему посвящен этот доклад. Для прикладных задач в разных постановках предложено большое количество алгоритмов (см., например, [1, 2]), позволяющих локализовать линии разрыва, но прикладные алгоритмы часто не сопровождаются строгим теоретическим исследованием на устойчивость к шуму.

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, имеющую линии разрыва $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots, l$; вне линий разрыва функция $f(x, y)$ гладкая. В полосе $D = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}\}$ кривые Γ_i заданы функциями $x = \gamma_i(y)$. Предполагается, что точная функция f неизвестна, а известна возмущенная функция f^δ и уровень погрешности δ такие, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Исследуется задача локализации по функции f^δ и уровню погрешности δ точек $x_i, i = 1, 2, \dots, l$, пересечения линий разрыва Γ_i с прямой $y = \bar{y}$.

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

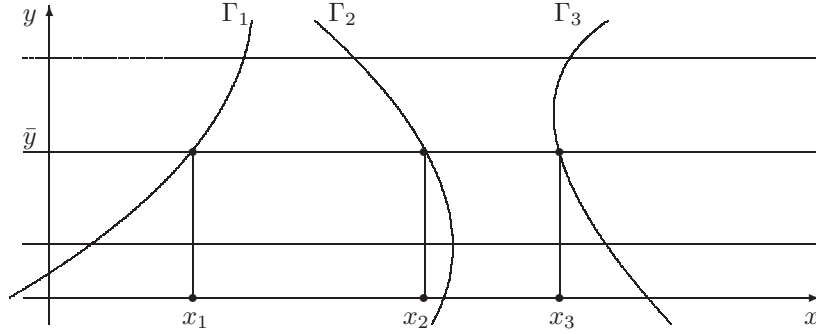


Рис. 1.

В работах [3, 4] данная задача рассматривается при разных функциональных условиях на функцию $f(x, y)$. Предполагается, что условия на функцию $f(x, y)$ заданы в полосе D , т. е. локально. В работах [3, 4] предложены локальные регулярные методы, которые определяют количество особенностей l и находят приближения $x_i^\delta, i = 1, 2, \dots, l$, для точек $x_i, i = 1, 2, \dots, l$, с оценками точности аппроксимации $|x_i - x_i^\delta| \leq C\delta$.

Также рассмотрена задача локализации линий разрыва функции $f(x, y)$, являющейся решением интегрального уравнения первого рода

$$Af \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - x', y - y') f(x', y') dx' dy' = g^\delta(x, y),$$

по приближенным данным $g^\delta: \|g - g^\delta\|_{L_2} \leq \delta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» (проект 12-П-1-1022) и РФФИ (проект 12-01-00106).

- [1] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
- [2] Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Ред. Я. А. Фурман М.: Физматлит, 2002.
- [3] Агеев А.Л., Антонова Т.В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журнал индустр. математики. 2012. Т. XV, № 1(49). С. 3–13.

- [4] Антонова Т.В. Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.

Метод DN -слежения в качественной теории динамических систем

А. А. Азамов¹

Качественная теория (называемая также геометрической теорией) динамических систем остается одной из бурно развивающихся областей современной математики. Подвергнута глубокой разработке (см. [1]) теория динамических систем на плоскости (вообще на двумерных многообразиях), чему способствует наличие теоремы Жордана (по крайней мере, локально). Несмотря на это, даже для плоского случая многие вопросы (включая 16-проблему Гильберта) остаются открытыми. В случае многомерных систем задачи существенно усложняются. Например, присутствие хаотической траектории в системе Лоренца до сих пор строго не доказано.

Основываясь на идее, высказанной в монографии [1] (VI.14.4), предложен метод, названный дискретно-численным слежением (кратко DN -слежения), который при определенных условиях (и удачном стечении обстоятельств, связанных с данной системой), оказывается вполне эффективным инструментом доказательства наличия: а) замкнутых траекторий (независимо от порядка системы); б) бифуркаций гомоклинической петли седла (на плоскости) и петли седла-антиседла (в пространстве); в) бифуркации удвоения периода; г) бифуркации гетероклинических траекторий; д) инвариантных торов.

Метод основан на построении отображения Пуанкаре, используя слежение за реальной траекторией посредством дискретной траектории по схеме Рунге – Кутты и численной (компьютерной) траекторией. Попутно показывается, что без должного обоснования неправо-

¹Институт математики Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент

мерно сделать какие-либо заключения об исходной системе, опираясь только на компьютерные вычисления.

- [1] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука. 1966. 568 с.

Об оценивании обратных разностных уравнений со статистически неопределёнными возмущениями

Б. И. Ананьев¹

Рассматривается задача оценивания финального состояния обратного разностного стохастического уравнения (ОРСУ) вида

$$x_t(\omega) = f(x_{t-1}(\omega); \omega, t, z_t) + z_t(\omega), \quad t \in 1 : T, \quad x_T(\omega) = \xi(\omega). \quad (1)$$

Подобные уравнения возникают, например, при аппроксимации обратных дифференциальных стохастических уравнений (ОДСУ)

$$dX_t(\omega) = -F(\omega, t, X_t(\omega), Z_t(\omega))dt + Z_t(\omega)dW_t(\omega), \quad X_b(\omega) = \xi(\omega),$$

путём разбиения $\pi = \{0 < t_1 < \dots < t_T = b\}$ отрезка интегрирования $[0, b]$. ОДСУ, впервые рассмотренные при обосновании стохастического принципа максимума, широко используются в моделях механики, финансовой математики и экономики. Разностные уравнения (1) имеют, кроме того, и самостоятельное значение. Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ с $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, где $\mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$, $t \in 1 : T$. Символом $L_n^p(\mathcal{F}_t)$ обозначим множество всех n -мерных и \mathcal{F}_t -измеримых случайных функций, интегрируемых в степени p . Введём множество $\mathcal{M}_t^p = \{z \in L_n^p(\mathcal{F}_t) \mid \mathbf{E}(z|\mathcal{F}_{t-1}) = 0\}$, $t \in 1 : T$, состоящее из n -мерных мартингальных разностей, где \mathbf{E} — математическое ожидание.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Теорема 1. Пусть 1) $f(x(\cdot); \cdot, t, z) \in L_n^p(\mathcal{F}_{t-1})$ для $\forall x \in L_n^p(\mathcal{F}_{t-1})$, $\forall t \in 1 : T$ и $\forall z \in \mathcal{M}_t^p$; 2) $1_A f(x; \omega, t, z) = 1_A f(x; \omega, t, 1_A z)$ для $\forall x \in R^n$, $\forall z \in \mathcal{M}_t^p$ и $\forall A \in \mathcal{F}_{t-1}$, где 1_A — характеристическая функция; 3) отображение $f(\cdot; \omega, t, z) : R^n \rightarrow R^n$ является биекцией с обратным $f^{-1}(\cdot; \omega, t, z)$, также удовлетворяющим условию 1). Тогда для $\forall \xi \in L_n^p(\mathcal{F}_T)$ существует единственное решение — пара $(x_t, z_t) \in L_n^p(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{M}_t^p$, $t \in 1 : T$, $x_T(\omega) = \xi(\omega)$.

В задаче оценивания процесс x_t ненаблюдаем, и измерению доступна лишь m -мерная функция

$$y_t(\omega) = g(x_{t-1}(\omega); \omega, t) + \eta_t(\omega), \quad t \in 1 : T, \quad (2)$$

со статистически неопределённой помехой η_t , стеснённой вместе с параметрами уравнения (1) ограничением

$$J(x_0, \eta, z) = \mathbf{E} \left\{ F(x_0) + \sum_{t \in 1:T} \{ Q_1(\eta_t(\omega), t) + Q_2(z_t(\omega), t) \} \right\} \leq 1, \quad (3)$$

где неотрицательные борелевские функции $F(\cdot), Q_1(\cdot, \cdot), Q_2(\cdot, \cdot)$ могут допускать бесконечные значения, а $\eta_t \in L_m^p(\mathcal{F}_{t-1})$. Для учёта дополнительной информации о состоянии ξ считаем, что задана под- σ -алгебра $\tilde{\mathcal{F}}_T \subset \mathcal{F}_T$ такая, что $\xi \in L_n^p(\tilde{\mathcal{F}}_T)$. Для помехи η также может быть задана ограничивающая информация в виде возрастающего потока $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ такого, что $\eta_t \in L_m^p(\mathcal{H}_{t-1})$, $t \in 1 : T$.

Задача. Пусть наблюдаемый процесс (2) реализуется при $\xi^* \in L_n^p(\tilde{\mathcal{F}}_T)$ и $\eta_t^* \in L_m^p(\mathcal{H}_{t-1})$. Нужно определить случайное информационное множество (далее СИМ) $\mathcal{X}(T, y)$, состоящее из всех векторов $\xi \in L_n^p(\tilde{\mathcal{F}}_T)$, для которых найдется помеха $\eta_t \in L_m^p(\mathcal{H}_{t-1})$ такая, что имеет место неравенство (3) и выполняется равенство (2) P -н.н. $\forall t \in 1 : T$.

Рассматривается также определение оптимальных оценок $\xi_T^0 \in \mathcal{X}(T, y)$, при которых $J(x_0, \eta, z)$ имеет минимальное значение. Приведены примеры решения упомянутых задач в нелинейном случае. Отдельно, как в [1], изучен линейно-квадратичный случай.

Рассмотрен вопрос о сходимости СИМ к детерминированному ИМ [2] при малых случайных возмущениях. А именно, пусть ограничения (3) имеют вид $J^q(\eta, z) = \mathbf{E} \sum_{t \in 1:T} \{ \eta_t R \eta_t + q |z_t|^2 \} \leq 1$, где R — матрица, $R' = R > 0$, $q > 0$, точка — скалярное произведение.

Теорема 2. Пусть функции f и g в (1), (2) не зависят явно от ω и непрерывны, а также выполняются условия теоремы 1 при $p = 2$.

Предположим, что $\forall q > 0 \exists$ -ет тройка (η, z, ξ) , реализующая сигнал y в силу уравнений (1), (2) при ограничениях $J^q(\eta, z) \leq 1$. Обозначим $\mathcal{J}^q(\xi, y) = J^q(y - g(x_{-1}, \cdot), z)$, $\bar{\mathcal{J}}(\xi, y) = J^0(y - g(x_{-1}^0, \cdot), 0)$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ -ет $q(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall q > q(\varepsilon)$ имеем $\sup_{\xi \in \mathcal{X}^q(T, y)} (\bar{\mathcal{J}}(\xi, y) - \mathcal{J}^q(\xi, y)) \leq \varepsilon$.

Из теоремы 2 вытекает оценка сверху для СИМ $\mathcal{X}^q(T, y) \subset \{\xi; \bar{\mathcal{J}}(\xi, y) < 1 + \varepsilon\}$, $\forall q > q(\varepsilon)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00120, и программы УрО РАН, проект 12-П-1-1019.

- [1] *Ananyev B.I.* State Estimation for Linear Stochastic Differential Equations with Uncertain Disturbances via BSDE approach // AIP, Conference Proceedings. 2012. Vol. 1487. P. 143–150.
- [2] *Кощеев А.С., Куржанский А.Б.* Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределённости // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 72–93.

Управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия

И. М. Ананьевский¹

Развивается подход к построению управления для нелинейных механических систем, у которых число степеней свободы превосходит размерность вектора обобщенных управляющих сил. Основное внимание уделяется маятниковым системам. В частности, рассматриваются такие системы, как многозвенный перевернутый маятник, управляемый моментом, приложенным в первом шарнире; совокупность двузвенных маятников, управляемых одним моментом, и ряд других. Задача состоит в построении ограниченного по модулю управления в форме обратной связи, приводящего систему из

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

окрестности произвольного положения равновесия в это положение равновесия за конечное время.

В основе предлагаемого решения данной задачи лежит метод синтеза управления для линеаризованной системы, полученный с использованием техники линейных матричных неравенств [1]. Необходимым условием его применимости является полная управляемость линеаризованной системы. В докладе устанавливаются условия полной управляемости линейных моделей рассматриваемых систем.

Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована с помощью численного моделирования динамики ряда маятниковых систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 14-01-00356а и № 14-01-00476а, и в рамках гранта поддержки ведущих научных школ № НШ-2710.2014.1.

- [1] *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады академии наук. 2010. Т. 434, № 3. С. 319–323.

О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа

А. С. Андреев¹, О. А. Перегудова¹, Е. А. Кудашова¹

Рассматривается задача о стабилизации программных движений механических систем вида

$$A(q)\ddot{q} = \{\dot{q}'C(q)\dot{q}\} + Q + U, \quad (1)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)' \in R^n$ есть вектор координат, $A \in R^{n \times n}$ является положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой матрицей, $\{\dot{q}'C(q)\dot{q}\}$ — набор n квадратичных форм с совокупностью n симметричных матриц $C = (C_{(1)}, C_{(2)}, \dots, C_{(n)})'$, $Q = Q(t, q, \dot{q})$ —

¹Ульяновский государственный университет

вектор обобщенных неуправляемых сил, $U \in R^n$ — вектор управления.

Задача решается на основе принципа сравнения с построением соответствующих векторных функций и функционалов Ляпунова посредством непрерывных и релейных управлений, дискретных ПИ- и ПИД-регуляторов. При этом учитываются нелинейность системы, действие неуправляемых сил, запаздывание в цепи обратной связи, условия робастности управления по отношению к инерционным параметрам системы и программного движения.

Пусть $X = \{(q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t)) : [t_0, +\infty) \rightarrow R^{2n}\}$ — заданное множество программных движений, ограниченных областью

$$G_0 = \{(q, \dot{q}) \in R^{2n} : \|q\| \leq g_0 = \text{const} > 0, \quad \|\dot{q}\| \leq g_1 = \text{const} > 0\}.$$

Пусть $(q^{(0)}, \dot{q}^{(0)}) \in X$ есть движение, осуществляемое посредством программного управления $U = U^{(0)}(t)$, так что выполнено тождество

$$A^{(0)}(t)\ddot{q}^{(0)}(t) - (\{\dot{q}^{(0)}(t)\}'C^{(0)}(t)\dot{q}^{(0)}(t)\} + Q^{(0)}(t) + U^{(0)}(t)) \equiv 0,$$

где $A^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))$, $C^{(0)}(t) = C(q^{(0)}(t))$, $Q^{(0)}(t) = Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$.

Введем возмущение $x = q - q^{(0)}(t)$ и управляющее воздействие $U^{(1)} = U - U^{(0)}(t)$. Тогда уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + Q^{(1)}(t, x) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) + U^{(1)}.$$

Здесь $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$, $C^{(1)}(t, x) = C(q^{(0)}(t) + x)$, $Q^{(1)}(t, x) = (A^{(0)}(t) - A^{(1)}(t, x))\ddot{q}^{(0)}(t) + (\dot{q}^{(0)}(t))'(C^{(1)}(t, x) - C^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) + Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) - Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$, $Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) - Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) + (\dot{q}^{(0)}(t))'C^{(1)}(t, x)\dot{x} + \dot{x}C^{(1)}(t, x)\dot{q}^{(0)}(t)$.

Заметив, что $Q^{(1)}(t, 0) \equiv 0$, $Q^{(2)}(t, x, 0) \equiv 0$, допустим, что в соответствии с наложенными связями и действующими силами имеют место следующие представления силы $Q^{(1)}$ через нелинейность $p(t, x)$ и силы $Q^{(2)}$ с выделенной линейной по \dot{x} частью:

$$Q^{(1)}(t, x) = F(t, x)p(t, x), \quad Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = D(t, x)\dot{x} + \{\dot{x}'S(t, x)\dot{x}\},$$

где $F \in R^{n \times n}$, $D \in R^{n \times n}$, $S\{\dot{x}'S(t, x)\dot{x}\}$ — совокупность n квадратичных форм; вектор-функция $p(t, x)$ такова, что $p \in C^1$, $p(t, 0) \equiv 0$, $\|p(t, x)\| \geq p_0(x)$, при этом, $p_0(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$.

В частности, решена задача о стабилизации программного движения системы (1) при ограничениях на управление $\|U\| \leq c_0 = \text{const} > 0$. Пусть $\|U^{(0)}(t)\| \leq c_0 - \nu_0$, $\nu_0 = \text{const} > 0$ ($\nu_0 < c_0$). Обозначим $\nu_1 = \text{const} > 0$ ($\nu_1 < \nu_0$) и положим, что $U^{(1)}(t, x)$ определяется соотношением

$$U^{(1)}(t, x, \dot{x}) = \begin{cases} \frac{\nu_0}{\nu_1} B(t, x)(\dot{x} + p(t, x)), & \text{если } \|B(t, x)(\dot{x} + p(t, x))\| \leq \nu_1, \\ \frac{\nu_0}{\|B(t, x)(\dot{x} + p(t, x))\|} B(t, x)(\dot{x} + p(t, x)), & \text{если } \|B(t, x)(\dot{x} + p(t, x))\| > \nu_1 \end{cases}$$

где $B \in R^{n \times n}$ есть матрица коэффициентов усиления в структуре обратной связи.

В качестве конкретных задач решаются задачи об управлении манипуляторами и колесными мобильными роботами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-33082мол_а_вед и Минобрнауки России в рамках базовой части (код проекта 2097).

К линейным нестационарным дифференциальным играм группового преследования

А. С. Банников¹

Рассматривается линейная нестационарная задача преследования несколькими объектами одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников.

Предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы некоторого заданного выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью; терминальные множества — выпуклые компакты; множество, ограничивающее управление игроков — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

В терминах начальных условий и параметров процесса получены достаточные условия окончания игры в паре контрстратегии преследователей — позиционные стратегии убегающего. Показано, что если преследование может быть завершено за конечное время в классе контрстратегий, то при информированности преследователей только о позиции игры, оно может быть закончено за то же самое время в сколь угодно малой окрестности терминального множества.

Также рассмотрена задача уклонения, для которой приведены достаточные условия разрешимости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 12-01-00195, 14-01-31176.

Среднеквадратичный анализ стохастических циклов дискретных систем с параметрическими шумами

И. А. Башкирцева¹

Рассматривается стохастическая система

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sum_{i=1}^m g_i(x_t) \xi_t^i. \quad (1)$$

Здесь x — n -вектор, $f(x)$, $g_i(x)$ — гладкие n -вектор-функции, ξ_t^i — некоррелированные случайные скалярные процессы с параметрами $E\xi_t^i = 0$, $E(\xi_t^i)^2 = 1$, $t = 0, 1, \dots$

Предполагается, что соответствующая (1) детерминированная система ($g_i = 0$) имеет экспоненциально устойчивый k -цикл Γ . Точки множества $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ связаны равенствами

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Для отклонений $z_t = x_t - \bar{x}_t$ состояний x_t системы (1) от точек \bar{x}_t детерминированного цикла Γ можно записать систему первого при-

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

ближения

$$z_{t+1} = F_t z_t + \sum_{i=1}^m (S_{0,i,t} + S_{1,i,t} z_t) \xi_t^i, \quad (2)$$

где

$$F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t), \quad S_{0,i,t} = g_i(\bar{x}_t), \quad S_{1,i,t} = \frac{\partial g_i}{\partial x}(\bar{x}_t)$$

являются k -периодическими функциями.

Рассмотрим первые моменты $m_t = \mathbb{E} z_t$, $M_t = \mathbb{E} z_t z_t^\top$. Благодаря устойчивости цикла, $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (M_t - \bar{M}_t) = 0$, где \bar{M}_t — k -периодическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$M_{t+1} = \mathcal{B}_t[M_t] + S_{0,t}. \quad (3)$$

Для исследования вопросов существования, единственности и устойчивости \bar{M}_t , рассмотрим отклонения $\Delta_t = M_t - \bar{M}_t$, удовлетворяющие однородной системе

$$\Delta_{t+1} = \mathcal{B}_t[\Delta_t]. \quad (4)$$

Это уравнение описывает динамику вторых моментов $\Delta_t = \mathbb{E} y_t y_t^\top$ решений y_t линейного однородного стохастического уравнения

$$y_{t+1} = F_t y_t + \sum_{i=1}^m S_{1,i,t} y_t \xi_t^i. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{S}_t[M] = \sum_{i=1}^m S_{1,i,t} M S_{1,i,t}^\top$, $S_{0,t} = \sum_{i=1}^m S_{0,i,t} S_{0,i,t}^\top$, $\mathcal{F}_t[M] = F_t M F_t^\top$, $\mathcal{B}_t = \mathcal{F}_t + \mathcal{S}_t$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_1$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{B}_2 \cdot \mathcal{B}_1$, $\mathcal{S} = \mathcal{B} - \mathcal{F}$, $\mathcal{P} = (\mathcal{I} - \mathcal{F})^{-1} \mathcal{S}$, $\rho(\mathcal{F})$ — спектральный радиус оператора \mathcal{F} .

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) Система (3) имеет единственное k -периодическое экспоненциально устойчивое решение \bar{M}_t ;
- (б) Решение $\Delta_t \equiv 0$ системы (4) является экспоненциально устойчивым;
- (в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (5) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;
- (г) Выполняется неравенство $\rho(\mathcal{B}) < 1$;
- (д) Выполняются неравенства $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

В докладе рассматривается алгоритм построения k -периодического решения \bar{M}_t системы (3), аппроксимирующего дисперсии случайных состояний стохастического цикла.

Эффективность теоретических результатов демонстрируется на примере популяционной модели Рикера с эффектом Олли [1]. Показано, что построенные аппроксимации не только хорошо согласуются с данными прямого численного моделирования, но и позволяют проводить конструктивный параметрический анализ индуцированных шумом переходов, порождающих вымирание популяции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00181.

- [1] *Bashkirtseva I.* Analysis of limit cycles response on parametrical noise in one-dimensional discrete-time systems // *Fluctuation and Noise Letters*. 2013. Vol. 12, №. 3, 1350009 (12 pages).

Сравнительный анализ стохастического воздействия на модель Гудвина

И. А. Башкирцева¹, Е. Д. Екатеринчук¹, Т. В. Рязанова¹

В работе рассматривается стохастическая интерпретация экономической модели Гудвина — модель нелинейного акселератора-мультипликатора [1]. В детерминированной модели исследована динамика решений, результаты проиллюстрированы в сводной бифуркационной диаграмме. В зоне устойчивых равновесий обнаружено жесткое рождение полуустойчивого цикла, который распадается на устойчивый и неустойчивый. Неустойчивый цикл является сепаратрисой, ограничивающей бассейны притяжения цикла и равновесий. Исследованы устойчивость и размеры аттракторов в зависимости от одного из параметров системы.

Анализ стохастической модели опирается на технику функции стохастической чувствительности. Под воздействием шума стохастическая траектория образует пучок вокруг детерминированного аттрактора. В работе представлены результаты исследования влияния двух видов шумов (аддитивного и параметрического), описаны

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

отличия в их воздействии на динамику модели. Для исследования чувствительности к аддитивным возмущениям на равновесия аналитически получена матрица стохастической чувствительности, собственные векторы которой задают главные направления отклонений, а собственные значения — величину этих отклонений. В случае цикла матрица стохастической чувствительности является матричной функцией от времени вдоль цикла, поэтому чувствительность считается численно. При увеличении интенсивности возмущений дисперсия отклонений случайных состояний от аттрактора увеличивается и, начиная с некоторого значения, наблюдаются индуцированные шумом переходы. В зоне сосуществования устойчивых равновесий и устойчивого цикла с помощью метода доверительных областей получены критические значения интенсивностей, начиная с которых происходят переходы между бассейнами притяжений аттракторов.

При изучении влияния параметрических возмущений также найдены матрицы стохастической чувствительности для аттракторов и исследована зависимость их компонент от параметра системы. Аналогично случаю аддитивного шума получены критические значения интенсивностей, при которых начинаются переходы между бассейнами притяжения аттракторов. Анализ показывает, что влияние параметрического шума качественно не отличается от воздействия аддитивного шума. Однако в случае параметрического шума, внесенного в один из трех параметров, в системе индуцируется хаос.

- [1] *Goodwin R.M.* The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles // *Econometrica*, Vol. 19, No. 1 (Jan., 1951), 1–17.
- [2] *Башикирцева И.А., Екатеринчук Е.Д., Рязанова Т.В., Сысолятина А.А.* Математическое моделирование стохастических равновесий и бизнес-циклов модели Гудвина // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2013, № 1, Т. 5. С. 107–118.

Определение систематических ошибок радиолокаторов по их совместным измерениям

Д. А. Бедин¹, А. Г. Иванов^{1,2}, А. А. Федотов¹

Рассматривается задача нахождения систематических ошибок нескольких радиолокаторов (РЛС) по их совместным измерениям положения воздушных судов (ВС). Предполагается, что известна информация от большого количества ВС в течение достаточно долгого (сутки) промежутка времени. Каждая РЛС независимо друг от друга со своим тактом по времени измеряет наклонную дальность до ВС и азимут. Измерения производятся с погрешностью: выделяют случайную и систематическую составляющую. Систематическая ошибка РЛС приводит к пространственному смещению наблюдаемого трека ВС.

Задача определения и последующей коррекции систематических ошибок для практических приложений стала актуальной достаточно давно. По данной теме существует большое количество зарубежных работ [1, 2]. Среди российских работ отметим [3]. Практически во всех работах в качестве методов определения систематических ошибок используются методы параметрического оценивания с некоторой заданной, достаточно простой моделью наблюдения, в которую включено влияние систематических ошибок.

Авторами разработаны три алгоритма определения систематических ошибок (их общее описание дано в [4]). Все эти алгоритмы используют избыточность информации, поступающей от разных РЛС при наблюдении за одним и тем же движением ВС, и работают в режиме апостериорной обработки, используя данные по многим ВС.

Первый алгоритм основан на потраекторной обработке: для каждой траектории определяются систематические ошибки на основе заданной модели, которая может быть достаточно сложной. Затем производится статистическая обработка результатов. Алгоритм корректно учитывает нелинейный характер наблюдений при помощи РЛС, а также технические и физические ограничения на пара-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

метры задачи. Алгоритм базируется на процедуре многомерной конечномерной минимизации.

Второй алгоритм основан на идее локальной аппроксимации. Показано, что задача локальной аппроксимации значений векторного поля систематических ошибок является некорректной. Предложен способ регуляризации, выделяющий наиболее «плавно изменяющееся» в пространстве решение. Наиболее полно алгоритм описан в [5].

Третий алгоритм предназначен для использования в условиях сильного искажения времени, приписываемого измерению. Он основан на обработке треков от разных РЛС как геометрических фигур: выделяются одинаковые фигуры, относящиеся к наблюдению одного и того же ВС, и анализируется их пространственное смещение.

В настоящее время все алгоритмы имеют рабочую реализацию и опробованы на реальных данных траекторного наблюдения.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта УрО и СО РАН, проект № 12-С-1-1017.

- [1] *Renes J.J., Kraan P. v.d., Eymann C.* Flightpath Reconstruction and Systematic Radar Error Estimation from Multi-Radar Range-Azimuth Measurements // 24th IEEE Conf. on Decision and Control, 1985. V. 24, part 1. P. 1282–1285.
- [2] *Garcia Herrero J., Portas J.A.B., Casar Corredera J.R.* On-line multi-sensor registration for data fusion on airport surface // IEEE Tr. on Aer. and Electr. Sys. 2007. V. 43, no. 1. P. 356–370.
- [3] *Курсанов А.П.* Оценивание систематических ошибок измерений подвижной РЛС при одновременном определении координат воздушных объектов двумя РЛС // Радиотехника. 2011. № 8. С. 105–110.
- [4] *Бедин Д.А., Беляков А.В., Ганебный С.А., Иванов А.Г., Строков К.В., Федотов А.А.* Совместная обработка данных от нескольких РЛС для выявления систематических ошибок по азимуту и дальности // «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC*2013): Сб. докл. XIX межд. науч.-тех. конф. Воронеж: «САКВОЕ», 2013. Т. 3. С. 1567–1578.
- [5] *Бедин Д.А.* Оценивание векторного поля систематических ошибок нескольких РЛС по результатам траекторных наблюдений // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделир. и прогр. 2014. Т. 7, № 1. С. 5–15.

Групповое преследование при наличии защитников убегающего

А. И. Благодатских¹

В пространстве R^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + r + 1$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n , убегающего E и r защитников (убегающего) D_1, \dots, D_r с законами движения

$$\begin{aligned} P_i &: \dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in V, & x_i(t_0) &= X_i^0, & i &\in I(n), \\ E &: \dot{y} = v, \quad v \in V, & y(t_0) &= Y^0, \\ D_j &: \dot{z}_j = w_j, \quad w_j \in V, & z_j(t_0) &= Z_j^0 \in S(Y^0, L), & j &\in I(r), \end{aligned}$$

где $x_i, y, z_j \in R^k$, V — строго выпуклый компакт в R^k с гладкой границей и непустой внутренностью, $I(q) = \{1, \dots, q\}$ для всех $q \geq 1$, $S(a, b)$ — шар в R^k с центром в точке a радиуса b . Начальные позиции X_i^0 преследователей P_i и Y^0 убегающего E фиксированы и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник $D_j, j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения конфликтно управляемой системы, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$.

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями в множестве V будем называть допустимыми. Квази-стратегией преследователя P_i называем отображение

$$u_i(t) = U_i(t, X_i^0, Y^0, v(s), t_0 \leq s \leq t),$$

квазистратегией защитника D_j — отображение

$$Z_j^0 = W_j(t_0, X_i^0, Y^0); \quad w_j(t) = W_j(t, X_i^0, Y^0, u_i(s), v(s), t_0 \leq s \leq t).$$

При совпадении геометрических координат $d \geq 1$ защитников D_j и $p \geq 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\}$ защитников и столько же преследователей. Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно. Если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞ .

Для каждого $q = 1, \dots, n$ введём множество

$$\Omega(q) = \{\{i_1, \dots, i_q\} : i_1 < \dots < i_q, \quad i_1, \dots, i_q \in I(n)\}.$$

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

Определение. В игре Γ возможна одновременная m -кратная поимка ($m \geq 1$), если существуют такие момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y^0)$ и квазистратегии U_i преследователей P_i , что для любых допустимого управления $v(t)$ убегающего E и квазистратегий W_j защитников D_j найдутся множество $\Lambda \in \Omega(m)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых выполнены условия

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \quad \tau < T(P_\alpha), \quad x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ для всех } s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеются три центра управления (I управляет убегающим, II — преследователями, III — защитниками), общая цель I и III центров — уклонение убегающего от одновременной поимки, цель II центра противоположна; кроме того, в ходе игры у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае нескольких преследователей первый из них «защищает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется.

Теорема. В игре Γ возможна одновременная m -кратная поимка тогда и только тогда, когда $Y^0 \in \text{Int co}\{X_q^0, q \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - m - r + 1)$.

- [1] Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [2] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
- [3] Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
- [4] Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во «Удмурт. ун-т», 2009.
- [5] Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.
- [6] Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440.

О реконструкции входных воздействий в системе с последствием в управлении

М. С. Близорукова¹

Задачи нахождения соответствующих характеристик изучаемого объекта по доступной, но неточной информации, поступающей в процессе специально организованных наблюдений, часто называют задачами реконструкции. Один из методов решения подобного типа задач, основанный на принципах позиционного управления и методах решения некорректных задач, сводит задачу реконструкции к задаче управления вспомогательной динамической системой, называемой моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени попадает под условия какого-либо принципа регуляризации; последнее обеспечивает устойчивость алгоритма. При этом регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе выбора позиционного управления в системе-модели. В настоящем сообщении этот метод применен к исследованию задачи реконструкции в нелинейной системе с запаздыванием в управлении.

Рассматривается управляемая система вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, u_t(s), x_t(s)) + f_2(t, x_t(s))u(t),$$

$$u_{t_0}(s) = u_0(s) \in C([- \tau^u, 0]; R^{n_1}), \quad x_{t_0}(s) = x_0(s) \in C([- \tau^x, 0]; R^{n_2}),$$

где t — время из некоторого фиксированного отрезка $T = [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < +\infty$); $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{n_2}(t))$ — фазовое состояние системы; $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{n_1}(t))$ — вектор управления; символы $x_t(s)$ и $u_t(s)$ означают функции $x_t(s) = x(t+s)$ при $s \in [-\tau^x, 0]$, $u_t(s) = u(t+s)$ при $s \in [-\tau^u, 0]$. Задача состоит в построении алгоритма, который позволяет синхронно с развитием процесса функционирования системы по результатам неточных измерений состояний $x(\tau_i)$ (в достаточно частые моменты τ_i) восстанавливать неизвестный вход.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00175-а.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

О модельных аналогиях и многорежимных системах

С. Н. Васильев¹, А. Э. Дружинин²

При преобразованиях математических моделей возникают вопросы о *модельных аналогиях*, понимаемых в докладе как переносимость исследуемого свойства хотя бы в одном направлении. В докладе рассматривается общий случай, когда для связи моделей используются *отношения связи* на множествах допустимых значений модельных переменных. Если в случае функциональности этих отношений все функции связи направлены в одну сторону и переносимость свойства имеет место в том же (соотв. обратном) направлении, то говорим о *прямом* (соответственно, *обратном*) *сохранении* свойства.

В динамике систем, в проблематике эквивалентности моделей относительно изучаемого свойства (прямого и одновременно обратного сохранения), требуется априорное условие траекторного гомоморфизма, а дополнительным условием часто является условие гомеоморфизма (L. Cesari, 1959, J. Thomas, 1964, А.В. Кавинов, А.П. Крищенко, 2007). Другого типа априорное условие задействуется для обратного сохранения динамических свойств при функциях связи в форме векторных функций Ляпунова (ВФЛ) и состоит в мажорировании ВФЛ вдоль решений изучаемой модели соответствующими решениями второй модели. При этом тоже требуются дополнительные условия (в случае устойчивости — положительная определенность ВФЛ и др.). Их получение для довольно широкого класса динамических свойств систем, охватываемых концепцией систем процессов, алгоритмизировано в методе сравнения (В.М. Матросов, 1974). Этому предшествовала теорема Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского (1952) об асимптотической устойчивости (со знакопостоянной производной функции Ляпунова). Ввиду нераспространяемости её на неавтономный случай, В.М. Матросов и ввел вторую вспомогательную функцию для «выбрасывания» траекторий из «плохих» множеств.

В докладе впервые рассматривается задача регулярного получе-

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

²Санкт-Петербургский государственный университет

ния условий переносимости свойств моделей в терминах отношений связи без априорных условий. Соответствующая задача как задача абдуктивного вывода сводится к решению логических уравнений, но известные итерационные и другие методы их решения (А.И. Таутс, 1964; J. McCarthy, 2003; G. Mints & N. Hoshi, 2007) здесь неприменимы ввиду специфики задачи о модельных аналогиях. Предлагаемые в докладе алгоритмы решают эту задачу, во-первых, для разных математических моделей, что демонстрируется не только на примерах динамических и алгебраических систем (в частности, многоосновных алгебр, к которым сводимы и некоторые задачи динамики и управления), а во-вторых, — без существенных ограничений на класс свойств, переносимость которых изучается. Они позволяют получать условия переносимости в общей форме, а в качестве следствий — разные варианты этих условий, в частности, с координатными и другими модельными связями по состоянию, времени, управлению и возмущению.

Рассматриваются примеры применения разработанных алгоритмов в нелинейном анализе динамических систем, в том числе в анализе динамических свойств, сложных по своим определениям и характерных, например, для инспекционных миссий информационных роботов. В частности, демонстрируется получение условий устойчивости на конечном интервале, диссипативности и управляемости с дополнительными требованиями удовлетворения фазовым ограничениям и другим критериям качества управления, когда возможны контролируемые или неконтролируемые смены режимов, вплоть до переключений модели объекта управления. Некоторые из этих условий использованы в управлении группировками движущихся объектов (формаций), в том числе автономных подводных аппаратов (С.Н. Васильев, Р.И. Козлов, С.А. Ульянов, 2014).

Разработанные алгоритмы применены для исследования динамики гибридных систем, а в сочетании с методами дедуктивного вывода и для автоматизации планирования переключения режимов в случае, когда дискретная часть модели задана набором логических правил с некоторым механизмом поиска выводов.

**Модифицированный метод
последовательной линеаризации
в задаче управления избыточной системой
силовых гироскопов**

В. А. Воронов¹

Эффективные методы вычисления допустимых управлений для системы силовых гироскопов (СГ) имеют большое значение при разработке систем ориентации космических аппаратов (КА). В последние годы СГ с управляемой скоростью вращения ротора применяются на малых КА, где они, дополнительно к основным функциям, играют роль электромеханического аккумулятора. Относительно недавно появились проекты космических манипуляторов, в которых каждое звено несет СГ и управляется за счет перераспределения кинетического момента [1].

В докладе рассматривается двухэтапный алгоритм расчета программных управлений для системы силовых гироскопов, основанный на методе последовательной линеаризации [2] с некоторыми изменениями [3]. Начальное приближение строится либо с использованием обратной связи, либо путем приближенного решения обратной задачи динамики.

Пусть управляемое вращение КА вокруг центра масс описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1)$$

Задано время перехода T , ограничения $-c_j \leq u_j(t) \leq c_j$, граничные условия $x(0) = x_0$, $x(t) \in P_T$, причем множество P_T описывается системой линейных неравенств. Требуется найти допустимое управление, на котором норма

$$F[u] = \max_{0 \leq t \leq T; 1 \leq j \leq m} u_j(t)$$

имеет локальный минимум.

Следует отметить, что при построении алгоритма существенную роль играет специфика конкретных задач. В частности, может быть

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

использовано семейство систем различной размерности, правые части которых аппроксимируют правую часть системы (1), и размерность аппроксимирующей системы на текущем шаге метода последовательной линеаризации может выбираться в зависимости от достигнутой точности. Кроме того, в рассматриваемых приложениях вспомогательная задача линейного программирования достаточно тривиальна.

Приведены результаты, полученные при решении ряда практических задач: управление переориентацией нежесткого КА с дискретизацией управляющих сигналов; управление манипулятором КА; управление электромеханическим аккумулятором КА.

- [1] *Brown D.* Control Moment Gyros as Space-Robotics Actuators. AIAA 2008-7271 // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. 18 – 21 August 2008, Honolulu, Hawaii.
- [2] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
- [3] *Воронов В.А., Дружинин Э.И.* Прецизионное программное наведение нежесткого орбитального телескопа // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 3. С. 121–134.

Переориентация асимметричного твердого тела посредством двигателей-маховиков при игровой модели помех

В. И. Воротников¹, Ю. Г. Мартышенко¹

Решается задача трехосной переориентации асимметричного твердого тела (космического аппарата) посредством управляющих моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками. На управляющие моменты накладываются заданные геометрические ограничения. В процессе переориентации учитываются внешние неконтролируемые помехи, статистическое описание которых отсутствует.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

Рассматриваемый процесс управления моделируется нелинейной конфликтно-управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей уравнения движения основного тела (динамические уравнения Эйлера и кинематические уравнения в переменных Родрига – Гамильтона), а также уравнения вращения маховиков. Для этой системы ставится соответствующая игровая задача управления по части переменных (по переменным, определяющим состояние основного тела): задача гарантированного перевода системы из одного состояния равновесия в другое за конечное время при любых допустимых реализациях помех. Реализации управляющих моментов и помех считаются измеримыми функциями, решения изучаемой системы понимаются в смысле А.Ф. Филиппова.

Управляющие моменты формируются по принципу обратной связи как нелинейные функции (разрывные) фазовых переменных рассматриваемой конфликтно-управляемой системы. Выбор таких функций определяется следующими обстоятельствами:

- 1) решение исходной нелинейной игровой задачи переориентации можно свести к решению линейных игровых антагонистических задач с нефиксированным временем окончания (для вспомогательных линейных конфликтно-управляемых систем второго порядка, определяющих динамику переменных Родрига – Гамильтона);
- 2) при отсутствии помех управляющие моменты являются субоптимальными по быстродействию;
- 3) переориентация достигается одним пространственным разворотом без дополнительных ограничений на характер результирующего движения.

Указана оценка допустимых уровней неконтролируемых помех в зависимости от заданных ограничений на управляющие моменты. Данная оценка является достаточным условием, при котором обеспечивается гарантированное решение рассматриваемой задачи переориентации за конечное время посредством предложенной конструкции управляющих моментов, и улучшает ранее полученный результат авторов [1].

Дается итерационный алгоритм нахождения гарантированного времени переориентации.

- [1] *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 5. С. 412–418.

Методы оптимизации для задач с неточным оракулом в гильбертовом пространстве

А. В. Гасников¹, П. Е. Двуреченский²

Известно [1], что для оптимизации в бесконечномерных пространствах можно использовать градиентный метод. В последние десятилетия были разработаны новые эффективные методы конечномерной выпуклой оптимизации, например, быстрый градиентный метод и различные его модификации (с неточным оракулом, со стохастическим оракулом). В конечномерной выпуклой оптимизации оказывается, что при высокой размерности задачи и невысоких требованиях к точности решения эффективными оказываются методы первого порядка, в оценки скорости сходимости которых обычно явно не входит размерность пространства. Все это приводит к идее применения методов конечномерной выпуклой оптимизации первого порядка для решения выпуклых задач в бесконечномерных пространствах (см., например, [2]). Во многих методах первого порядка в конечномерной оптимизации в пространстве E на каждой итерации необходимо решать задачу вида (градиентное отображение)

$$\min_{x \in Q \subseteq E} \{ \langle g, x \rangle + \alpha d(x) + \beta h(x) \},$$

где Q — выпуклое множество, g — элемент сопряженного пространства, $\langle g, x \rangle$ — значение линейного функционала g в точке x , $d(x)$ — сильно выпуклая относительно выбранной нормы функция, $h(x)$ — выпуклая функция простой структуры, α, β — неотрицательные числа. В конечномерной оптимизации можно ожидать, что такая задача решается в явном виде. Конструкция легко переносится на случай, когда E — гильбертово пространство. При этом для решения указанной вспомогательной задачи можно применять вспомогательный метод, например, связанный с дискретизацией. При решении вспомогательной задачи неизбежно появление ошибки, которая будет влиять на оценку скорости сходимости метода оптимизации в целом.

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный

²Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва

В этой связи полезным оказывается понятие стохастического неточного оракула, рассмотренное, например, в [3]. Приведем его здесь для случая гильбертова пространства H . Пусть $f(x) : H \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклый функционал на множестве $Q \subseteq H$, $\|\cdot\|$ — норма в H , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Будем говорить, что $f(x)$ наделена (δ, L) -оракулом, если для любого $x \in Q$ найдутся такие $f_{\delta,L}(x)$ и $g_{\delta,L}(x)$, что

$$0 \leq f(y) - f_{\delta,L}(x) - \langle g_{\delta,L}(x), y - x \rangle \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2 + \delta, \quad \forall y \in Q.$$

Стохастичность заключается в том, что вместо значения оракула $(f_{\delta,L}(x), g_{\delta,L}(x))$ мы можем вычислить только его стохастическую аппроксимацию $(F_{\delta,L}(x, \xi), G_{\delta,L}(x, \xi))$, матожидание которой по случайной величине ξ равно значению оракула в точке x , а дисперсия $G(x, \xi)$ равна σ^2 . В докладе планируется обсудить перенос стохастического промежуточного градиентного метода для конечномерных задач выпуклой оптимизации со стохастическим неточным оракулом на случай выпуклых задач в гильбертовом пространстве. Это позволит получить метод оптимизации в гильбертовых пространствах со скоростью сходимости $O\left(\frac{LR^2}{k^p} + \frac{\sigma R}{\sqrt{k}} + k^{p-1}\delta\right)$, где R — расстояние от точки старта до решения, k — номер итерации, параметр $p \in [1, 2]$.

Авторы выражают огромную благодарность Ю.Е. Нестерову за плодотворные обсуждения.

Работа была частично поддержана лабораторией структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании МФТИ (грант правительства РФ № 11.G34.31.0073), РФФИ (проект №14-01-00722 А), грантом Президента РФ № МК-5285.2013.9

- [1] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
- [2] *Dvurechensky P., Nesterov Yu., Spokoiny V.* Primal-dual methods for solving infinite-dimensional games // JOTA, 2014 (accepted).
- [3] *Devolder O.* Stochastic First Order Methods in Smooth Convex Optimization, CORE Discussion Paper 2011/70, 2011.

Численное решение задач управления на минимакс-максимин позиционного функционала

М. И. Гомоюнов¹, Н. Ю. Лукоянов¹

Исследуется задача об управлении по принципу обратной связи движением линейной динамической системы в условиях помех. Качество процесса управления оценивается позиционным функционалом в виде нормы совокупности отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целей. В рамках теоретико-игрового подхода [1, 2] задача вкладывается в позиционную дифференциальную игру на минимакс-максимин этого функционала. Для вычисления цены игры и построения минимаксного и максиминного законов управления рассматривается процедура попятного построения выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций [1, 3]. Обсуждается устойчивость получаемых разрешающих конструкций к вычислительным и информационным погрешностям и численный метод их реализации, базирующийся на «пиксельной» аппроксимации областей определения овыпукляемых функций и приближенном построении выпуклой сверху оболочки функции как нижней огибающей конечного набора опорных гиперплоскостей к ее подграфику.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00290-а).

- [1] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [2] *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.
- [3] *Лукоянов Н.Ю.* К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Вычислительные технологии поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления со свободным правым концом

А. Ю. Горнов¹, Т. С. Зароднюк¹

Задача оптимального управления нелинейной системой с терминальным функционалом и свободным правым концом траектории (далее ЗОУСК) является одной из основных задач теории управления. При реализации алгоритмов численного решения задач более сложных классов — с терминальными и фазовыми ограничениями, на быстродействие, с интегральными функционалами и других — ЗОУСК выступает во многих случаях в качестве вспомогательной задачи, решение которой требуется производить многократно на итерациях методов. Можно утверждать, что эта задача является «входными воротами» на пути исследования большого круга задач актуальных классов.

Большинство результатов, известных из теоретических исследований, направлено на поиск локального экстремума в ЗОУСК. Однако как логика развития теории управления, так и требования практических приложений диктуют необходимость решения многоэкстремальных задач динамической оптимизации.

В работе рассматривается несколько семейств алгоритмов решения невыпуклых ЗОУСК. Одним из самых надежных и информативных алгоритмов авторы считают метод мультистарта (многократный спуск со случайно сгенерированных начальных управлений), позволяющий, помимо нахождения глобального оптимума, строить также аппроксимацию множества достижимости системы и оценивать области притяжения различных экстремумов [1]. Алгоритмы, основанные на нелокальном принципе максимума, демонстрируют высокую эффективность в задачах небольшой размерности. Методы криволинейного поиска, базирующиеся на квадратичных и кубических вариациях управления, во многих случаях способны достаточно быстро достигать глобально оптимального решения [2]. Методы туннельного типа, основанные на идее перехода от одного локального экстремума к другому, также могут быть отнесены к разряду конкурентоспособных [3]. Для ЗОУСК с релейными управляющими воздействиями

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

предложены специализированные алгоритмы, основанные на конечном поиске в пространстве точек переключения управлений: алгоритмы случайных покрытий [4], алгоритмы генетического поиска, алгоритмы, основанные на операторе Шепарда [5] и другие. Для исследования свойств предложенных алгоритмов разработана и регулярно пополняется коллекция тестовых ЗОУСК, включающая к настоящему времени более 100 модельных примеров. С применением реализованных алгоритмов решен ряд прикладных задач из областей квантовой физики, химической кинетики, робототехники, медицинской экологии, электроэнергетики и других. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 12-01-00193, и интеграционного проекта СО РАН № 81.

- [1] *Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu.* Computing technique based on multistart method for obtaining global extremum in optimal control problems // J. Glob. Optim. 2014. (In print).
- [2] *Зароднюк Т.С.* Алгоритм численного решения многоэкстремальных задач оптимального управления с параллелепипедными ограничениями // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 2. С. 46–54.
- [3] *Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S.* Tunneling algorithm for solving nonconvex optimal control problems // Optimization, Simulation, and Control, Springer Optimization and Its Applications. 2013. Vol. 76. P. 289–299.
- [4] *Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С.* Метод случайных покрытий для задачи оптимального управления // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 31–42.
- [5] *Veyalko I.A., Gornov A.Yu.* The global extremum searching algorithm for bangbang optimal control problem based on the Shepard operator // Studia Informatica Universalis. 2011. № 3. P. 91–104.

Банаховы пространства положительно однородных функций в негладком анализе и оптимизации

В. В. Гороховик¹, М. А. Трофимович²

Основные результаты, представленные в данном сообщении, касаются положительно однородных функций, определенных на конечномерном векторном пространстве \mathbb{R}^n . Интерес к положительно однородным функциям обусловлен в значительной мере потребностями анализа негладких функций, т. е. функций, которые не являются дифференцируемыми в классическом смысле.

Наибольшее применение в негладком анализе и оптимизации находят такие подпространства пространства положительно однородных функций $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, как подпространство непрерывных положительно однородных функций $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$, подпространство липшицевых положительно однородных функций $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$, подпространство разностно-сублинейных функций $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$, подпространство кусочно-линейных функций $\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n)$, связанные между собой следующей цепочкой включений

$$\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

На подпространствах $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ введены соответственно нормы

$$\|p\|_C = \max_{x \in S} |p(x)|,$$

$$\|p\|_L = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|p(x) - p(y)|}{\|x - y\|},$$

$$\|p\|_{DC} = \inf\{\|\underline{p}\|_C + \|\overline{p}\|_C \mid \underline{p} - \overline{p} = p, \underline{p}, \overline{p} - \text{сублинейные функции}\},$$

относительно которых пространства $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$ являются банаховыми.

Доказаны неравенства

$$\|p\|_C \leq \|p\|_L \quad \forall p \in \mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n),$$

¹Институт математики НАН Беларуси, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

$$\|p\|_L \leq \|p\|_{DC} \quad \forall p \in \mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n),$$

которые показывают, что пространство $(\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_L)$ вложено в пространство $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$, а пространство $(\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_L)$ вложено как в пространство $(\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_L)$, так и в пространство $(\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$.

Во второй части сообщения представлены результаты исследований исчерпывающих семейств верхних выпуклых аппроксимаций (прямых верхних экзостеров) и исчерпывающих семейств нижних вогнутых аппроксимаций (прямых нижних экзостеров) положительно однородных функций. Установлены [1] характеристические свойства прямых верхних экзостеров и прямых нижних экзостеров, которые позволяют определить принадлежность соответствующих им положительно однородных функций пространству липшицевых положительно однородных функций, а также пространствам разностно-сублинейных и кусочно-линейных функций

Представлен [2] метод преобразования (конвертирования) верхнего (нижнего) прямого экзостера непрерывной положительно однородной функции в нижний (верхний) прямой экзостер этой же функции. В основу метода положена процедура представления непрерывной положительно однородной функции в виде поточечной верхней (нижней) грани возрастающего (убывающего) однопараметрического семейства липшицевых положительно однородных функций.

В заключительной части сообщения обсуждаются некоторые приложения приведенных выше результатов к различным задачам оптимизации, в частности, к задачам векторной оптимизации с негладким показателем качества и нетранзитивным отношением предпочтения.

- [1] *Гороховик В.В., Старовойтова М.А.* Характеристические свойства прямых экзостеров различных классов положительно однородных функций // Труды Института математики (НАН Беларуси). 2011. Т. 19, № 2. С. 12–25.
- [2] *Гороховик В.В., Трофимович М.А.* Метод конвертирования прямых экзостеров непрерывных положительно однородных функций // Доклады НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 5. С. 28–36.

Алгоритм стабилизации одной системы нейтрального типа

Б. Г. Гребенщиков¹, А. Б. Ложников^{1,2}

Рассматривается управляемая линейная система m -го порядка:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + B_1x(\mu_1t) + B_2x(\mu_2t) + R_1dx(\mu_1t)/dt + \\ &+ R_2dx(\mu_2t)/dt + Du(t), \quad t \geq t_0 > 0, \quad \mu_i = \text{const} \quad (i = 1, 2), \\ 0 < \mu_1 < \mu_2 < 1, \quad x(\eta) &= \phi(\eta) : \quad \eta \in [\mu_1t_0, t_0]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь A, B_i, R_i ($i = 1, 2$) — постоянные матрицы размерности $m \times m$, D — постоянная матрица размерности $m \times r$, $r \leq m$, $u(t)$ — r -мерная вектор-функция управляющего воздействия, $x(t)$ определена на интервале $[\mu_1t_0, t_0]$ начальной вектор-функцией $\phi(\eta)$ с ограниченной вариацией. Полагаем, что собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, матрицы R_j имеют обратные. Далее, считаем, что при $u(t) \equiv 0$ нулевое решение системы (1) неустойчиво, или устойчиво, но не асимптотически. Наряду с этим полагаем, что неустойчивы (или устойчивы, но не асимптотически) решения $\{\bar{y}_n, \bar{z}_n\}^T$ следующих разностных систем:

$$\bar{y}_{n+1} = \mu_1 R_1 \bar{y}_n, \quad \bar{z}_{n+1} = \mu_2 R_2 \bar{z}_n. \quad (2)$$

В случае асимптотической устойчивости системы без нейтральных членов стабилизируем «нейтральную» часть данной системы, для этого стабилизируем системы с одним запаздыванием

$$\hat{y}(\tau) = \mu_1 R_1 \hat{y}(\tau - \sigma_1) + Dv(\tau), \quad \hat{z}(\tau) = \mu_2 R_2 \hat{z}(\tau - \sigma_2) + Dw(\tau), \quad (3)$$

$$\sigma_j = -\ln(\mu_j) \quad (j = 1, 2), \quad \tau = \ln(t)$$

в соответствии с [1, с. 106], выбирая в них управления $v(\tau)$ и $w(\tau)$:

$$v(\tau) = - (E_r + D^T \Gamma_1 D)^{-1} D^T \Gamma_1 \mu_1 R_1 \hat{y}(\tau - \sigma_1) = P_1 \hat{y}(\tau - \sigma_1) \quad (4)$$

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

$$w(\tau) = - (E_r + D^T \Gamma_2 D)^{-1} D^T \Gamma_2 \mu_2 R_2 \hat{z}(\tau - \sigma_2) = P_2 \hat{z}(\tau - \sigma_2). \quad (5)$$

Здесь E_r — единичная матрица размерности $r \times r$, Γ_j — определенно положительные матрицы размерности $m \times m$, которые являются решениями соответствующих матричных уравнений

$$\Gamma_j^{-1} + DD^T = \frac{1}{\delta_j} \mu_j^2 R_j \Gamma_j^{-1} (R_j)^T, \quad j = 1, 2, \quad \delta_j > 0 \quad (6)$$

(величинами δ_j можем распоряжаться).

Рассмотрим функционально-разностную систему

$$\bar{x}(\tau) = P_1 \bar{x}(\tau - \sigma_1) + P_2 \bar{x}(\tau - \sigma_2). \quad (7)$$

Если ввести функции Ляпунова

$$V(\tau, \bar{x}(\tau)) = \sqrt{\sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \bar{x}_k^2(\tau) + \sum_{k=1}^m \bar{x}_k^2(\tau)}$$

($\bar{\lambda}_j$ — собственные значения матрицы $\Gamma_1^{-1} \Gamma_2$), то на решениях системы (7) имеем неравенство

$$V(\tau, \bar{x}(\tau)) < \bar{\delta} [V(\tau, \bar{x}(\tau - \sigma_1)) + V(\tau, \bar{x}(\tau - \sigma_2))], \quad \bar{\delta} = \sqrt{\delta_1 \max_j \bar{\lambda}_j} + \sqrt{\delta_2}.$$

При $0 < \bar{\delta} < 0.5$ из этого неравенства методами, аналогичными приведенным Н.Н. Красовским в [2, с. 184], доказывается, что решение системы (7) экспоненциально устойчиво.

Полагая теперь в системе (1) управление $u(t) = \frac{1}{\mu_1} DP_1 \dot{x}(\mu_1 t) + \frac{1}{\mu_2} DP_2 \dot{x}(\mu_2 t)$ ($\dot{x} = dx/dt$), получаем, что «нейтральная» часть системы (1) асимптотически устойчива при $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$.

Для иллюстрации эффективности метода стабилизации авторами была составлена программа для численного решения систем нейтрального типа и проведены вычислительные эксперименты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 13-01-00089 и 14-01-00065.

- [1] *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.
- [2] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

Аппроксимации множеств достижимости нелинейных управляемых систем с фазовыми ограничениями

М. И. Гусев¹

В работе предлагается метод приближенного построения областей достижимости нелинейной управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$ с фазовыми ограничениями, заданными в виде $x(t) \in S$, где множество S — непустое компактное множество, представимое в виде $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$, $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Рассматриваемый метод можно считать аналогом метода внутренних штрафных функций. Он основан на замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений посредством сужения множества скоростей исходной системы вблизи границы фазовых ограничений. Правая часть вспомогательной системы зависит от скалярного параметра штрафа $k > 0$ и определяется следующим образом:

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad u(t) \in U_k(x) = \{u \in U : \nabla g^\top(x) f(x, u) \leq -kg(x)\}.$$

Отметим, что способ снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости и траекторных трубок для дифференциального включения был предложен в [1]. В указанной работе множества достижимости дифференциального включения предлагалось аппроксимировать сверху множествами достижимости семейства дифференциальных включений без фазовых ограничений, зависящих от матричного параметра штрафа. При выполнении некоторых условий показано, что пересечение пучков траекторий семейства по матричному параметру дает пучок траекторий исходного дифференциального включения, удовлетворяющих фазовым ограничениям. В докладе рассматриваются способы построения аппроксимирующих систем со скалярным параметром штрафа, доказана сходимость аппроксимирующих множеств достижимости в хаусдорфовой метрике.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Управляемая система рассматривается при стандартных предположениях о правой части: $f(x, u)$ непрерывна и липшицева по x , U — компакт, $f(x, U)$ — выпукло. Ключевую роль при обосновании сходимости областей достижимости играет следующее условие: для всех граничных точек $x \in S$ имеет место неравенство

$$\min_{u \in U} \nabla g(x)^\top f(x, u) < 0.$$

Это условие обеспечивают слабую инвариантность множества S и, следовательно, непустоту множеств достижимости для любого начального состояния из S .

При указанных условиях: 1) многозначные отображения $F_k(x) = f(x, U_k(x))$ являются липшицевыми на S при достаточно большой величине k ; 2) имеет место сходимость аппроксимирующих областей $G_k(\theta)$ в хаусдорфовой метрике к областям достижимости $G(\theta)$ исходной системы при стремлении параметра штрафа к бесконечности; 3) справедливы включения $G_{k_1}(\theta) \subset G_{k_2}(\theta) \subset G(\theta)$ при $k_1 < k_2$; 4) справедливы оценки скорости сходимости вида $h(G_k(\theta), G(\theta)) \leq M/k$ для хаусдорфова расстояния h . Доказательство приведенных результатов опирается на теоремы об аппроксимации траекторий в системах с фазовыми ограничениями (NFT theorems) [2, 3]. Результаты обобщаются на случай систем с фазовыми ограничениями, заданными системами неравенств [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00261-а.

- [1] Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
- [2] Frankowska H., Vinter R.B. Existence of Neighboring Feasible Trajectories: Applications to Dynamic Programming for State-Constrained Optimal Control Problems // JOTA. 2000. V. 104, no. 1. P. 21–40.
- [3] Stern R.J. Characterization of the State Constrained Minimal Time Function // SIAM J. Control and Optimization. 2004. V. 43, no. 2. P. 697–707.
- [4] Гусев М.И. Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.

**Асимптотика решения сингулярно
возмущенной задачи оптимального управления
с интегральными
ограничениями и критерием качества**

А. Р. Данилин¹

Рассматривается задача оптимального управления [1, 2]

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + b(x)z_\varepsilon' + a(x)z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in [0, 1], z \in H_0^1(0; 1),$$

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(0; 1) : \|u(\cdot)\| \leq 1\},$$

$$J := \|z_\varepsilon(\cdot) - z_d(\cdot)\|^2 + \nu^{-1}\|u(\cdot)\|^2 \rightarrow \inf.$$

Здесь $\|u(\cdot)\|$ — норма в $L_2(0; 1)$, $H_0^1(0; 1)$ — соболевское пространство функций с нулевыми значениями на границе, $\nu > 0$ — заданное число.

На данную задачу можно смотреть и как на частный случай общих задач управления, описанных в [3].

При выполнении условий

$$a(\cdot), b(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty[0; 1],$$

$$\forall x \in [0; 1] \ a(x) \geq \alpha > 0, \ b(x) \geq \alpha, \ b'(x) \leq 0$$

получены общие теоремы об аппроксимации оптимального решения и построено полное асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00322.

- [1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов М.: Физматгиз, 1961.
- [2] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [3] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972.

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Многозначные рекуррентные отображения и их сечения

Л. И. Данилов¹

Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $(C(\mathbb{R}, U), d_U)$ — метрическое пространство непрерывных функций $f : \mathbb{R} \rightarrow U$ с метрикой Бебутова d_U . На пространстве $(C(\mathbb{R}, U), d_U)$ определяется динамическая система сдвигов: $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Через $CR(\mathbb{R}, U)$ обозначим подмножество пространства $C(\mathbb{R}, U)$, состоящее из рекуррентных функций (для них движение $t \mapsto f(\cdot + t)$ рекуррентно), $\mathcal{R}^p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, — множество (сильно измеримых) функций $f : \mathbb{R} \rightarrow U$, для которых преобразование Бохнера $t \mapsto f(\cdot|_{[0,1]} + t)$ принадлежит $CR(\mathbb{R}, L^p([0, 1], U))$ (Stepanov-like recurrent functions), $\mathcal{R}(\mathbb{R}, U) \doteq \mathcal{R}^1(\mathbb{R}, (U, \rho'))$, где (U, ρ') — метрическое пространство U с метрикой $\rho'(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$, $x, y \in U$.

Для функции $f \in CR(\mathbb{R}, U)$ обозначим $\Gamma_C(f; \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : d_U(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Аналогично определяются множества $\Gamma_p(f; \varepsilon)$ и $\Gamma(f; \varepsilon)$ для преобразования Бохнера функций f из $\mathcal{R}^p(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ соответственно (с заменой метрики d_U на метрики $d_{L^p([0,1], U)}$ и $d_{L^1([0,1], (U, \rho'))}$). Для многозначных отображений $(0, +\infty) \ni \varepsilon \mapsto \Gamma_j(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, используется обозначение $\Gamma_1(\cdot) \prec \Gamma_2(\cdot)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\Gamma_1(\varepsilon) \supseteq \Gamma_2(\delta)$.

Пусть $(cl_b U, \text{dist})$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства U с метрикой Хаусдорфа dist , $\text{comp } U$ — совокупность компактных множеств из $cl_b U$. Многозначные отображения $t \mapsto F(t) \in cl_b U$ рассматриваются как функции со значениями в метрическом пространстве $(cl_b U, \text{dist})$.

Теорема 1. Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, cl_b U)$, $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ и при всех $\varepsilon > 0$ множества $\Gamma(F; \varepsilon) \cap \Gamma(f; \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ относительно плотны. Тогда для любой неубывающей функции $[0, +\infty) \ni \xi \mapsto \eta(\xi) \in [0, +\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, найдется функция $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ такая, что

- (1) $g(t) \in F(t)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$,
- (2) $\rho(f(t), g(t)) \leq \rho(f(t), F(t)) + \eta(\rho(f(t), F(t)))$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$,

¹Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск

$$(3) \Gamma(g; \cdot) \prec \Gamma(F; \cdot) \cap \Gamma(f; \cdot).$$

Более того, если $F \in \mathcal{R}^p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ для некоторого $p \geq 1$, то $g \in \mathcal{R}^p(\mathbb{R}, U)$ (и $\Gamma_p(g; \cdot) \prec \Gamma(g; \cdot)$).

Существование функций $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$, удовлетворяющих условиям (1) и (2) из теоремы 1 (но без выполнения условия (3)), было доказано в [1].

Для измеримых (по Лебегу) множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa(T) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{mes}[t, t+1] \cap T,$$

где mes — мера Лебега на \mathbb{R} . Далее предполагается, что $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство. Следующая теорема является обобщением теоремы Лузина для многозначных рекуррентных отображений.

Теорема 2. Пусть \mathcal{B} — вещественное банахово пространство, $F \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \text{comp } \mathcal{B})$. Тогда для любых чисел $\varepsilon_j \in (0, 1]$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\varepsilon_{j+1} < \varepsilon_j$ и $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$, существуют множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$ и семейства рекуррентных функций $\mathfrak{F}_j \subset CR(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

(1) $\chi_{T_j} \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\Gamma_1(\chi_{T_j}; \cdot) \prec \Gamma(F; \cdot)$, $T_{j+1} \subseteq T_j$ и $\varkappa(T_j) < \varepsilon_j$, при этом, если отображение $F(\cdot)$ не является п.в. постоянным, то можно считать, что T_j — открытые множества,

(2) \mathfrak{F}_j — компактные множества в пространстве ограниченных непрерывных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ с sup -нормой,

(3) $\bigcap_{f \in \mathfrak{F}_j} \Gamma_C(f; \cdot) \prec \Gamma(F; \cdot)$ (из (2) и (3) следует, что функции $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathcal{F}_j(t) \doteq \bigcup_{f \in \mathfrak{F}_j} \{f(t)\} \subset \mathcal{B}$ принадлежат пространству $CR(\mathbb{R}, \text{comp } \mathcal{B})$ и $\Gamma_C(\mathcal{F}_j; \cdot) \prec \Gamma(F; \cdot)$),

(4) $F(t) = \mathcal{F}_j(t)$ при всех $t \in \mathbb{R} \setminus T_j$,

(5) $\{f(\cdot|_{\mathbb{R} \setminus T_j}) : f \in \mathfrak{F}_{j+1}\} = \{f(\cdot|_{\mathbb{R} \setminus T_j}) : f \in \mathfrak{F}_j\}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00195.

- [1] Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 2. С. 19–51.

Операторы Минковского и их применение в дифференциальных играх

П. Е. Двуреченский¹, Г. Е. Иванов²

В работе введены понятия операторов Минковского, обобщающие понятия суммы и разности Минковского на случай, когда одно из множеств-слагаемых суммы (разности) зависит от элемента другого слагаемого.

Определение 1. Пусть E — линейное пространство. Суммой и разностью Минковского множеств $X \subset E$ и $Y \subset E$ называются соответственно множества

$$X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}, \quad X \overset{*}{-} Y = \{x \in E \mid x+Y \subset X\}.$$

Определение 2. Операторами Минковского многозначного отображения $G : E \rightarrow 2^E$ называются операторы $A_G : 2^E \rightarrow 2^E$ и $B_G : 2^E \rightarrow 2^E$, заданные формулами

$$A_G S = \bigcup_{x \in S} (x + G(x)), \quad B_G S = E \setminus (A_G(E \setminus S))$$

для любого множества $S \subset E$.

Известно, что сумма Минковского и алгоритмы ее вычисления широко применяются во многих разделах прикладной математики, таких как вычислительная геометрия (см. www.cgal.org), системы числового программного управления (numerical control), планирование движения роботов (motion planning), теория оптимального управления (optimal control theory) и др. В данной работе рассматривается применение операторов Минковского в нелинейных дифференциальных играх.

В работе предложены алгоритмы вычисления значений операторов Минковского $A_G S$ и $B_G S$ при выполнении следующих предположений: пространство E двумерно; S — простой (вообще говоря, невыпуклый) многоугольник; $G(x)$ — выпуклый многоугольник.

¹Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва

²Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный

Предложенные алгоритмы представляют собой развитие известного алгоритма вычисления суммы Минковского двух невыпуклых многоугольников, основанного на построении *конволюты* [1]. Для предложенных алгоритмов получены оценки погрешности.

Алгоритмы вычисления значений операторов Минковского использованы для построения эpsilon-оптимальных стратегий управления в нелинейной дифференциальной игре с невыпуклым целевым множеством на плоскости. Рассмотрены как игры с фиксированным моментом окончания, так и игры быстрогодействия. Получены детальные оценки погрешностей предложенных алгоритмов вычисления стратегий. Проведены численные расчеты для нескольких задач, в том числе для известного примера «шофер-убийца». В работе [3] предложен алгоритм, оценка погрешности которого имеет вид $c_1\tau + c_2h/\tau + c_3\delta$, где c_1, c_2, c_3 — константы зависящие только от задачи, τ — параметр дискретизации по времени, h — параметр дискретизации по пространству фазовой переменной, δ — параметр дискретизации по пространствам управлений. В отличие от него предложенный в данной работе алгоритм имеет оценку погрешности вида $c_1\tau + c_2h + c_3\delta$, что позволяет для получения лучшей точности уменьшать параметр h со скоростью, пропорциональной τ , а не τ^2 .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00295 А.

- [1] *Guibas L.J., Ramshaw L., Stolfi J.* A kinetic framework for computational geometry // Proc. of the 24th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'83). Tucson, Arizona. 1983, pp. 100–111.
- [2] *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритм вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54, № 2, С. 224–255.
- [3] *Иванов Г.Е.* Алгоритм построения оптимальной стратегии управления в нелинейной дифференциальной игре с липшицевой финитной платой // Дифференц. уравнения, Т. 48, № 4, 2012. С. 551–564.

Оптимальное управление многосвязными объектами с возмущениями

Н. М. Дмитрук¹

Рассматривается взаимосвязная система, в которой поведение i -ой подсистемы, $i \in I = \{1, 2, \dots, q\}$, описывается уравнением

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij} x_j + B_i u_i + M_i w_i, \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (1)$$

Здесь $x_i = x_i(t) \in R^{n_i}$ — состояние i -ой подсистемы в момент времени t ; $u_i = u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{r_i}$ — значение ограниченного управления; $w_i = w_i(t) \in W_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$ — неизвестное кусочно-непрерывное возмущение; U_i и W_i — заданные выпуклые компакты; $A_i, B_i, M_i, A_{ij}, j \in I_i = I \setminus i$ — заданные матрицы соответствующих размерностей. Для управления используются дискретные управляющие воздействия с периодом квантования h : $u_i(t) \equiv u_i(s), t \in [s, s+h], s \in T_h = \{t_0, t_0+h, \dots, t_f-h\}, h = (t_f - t_0)/N, N \in \mathbb{N}$.

В моменты $s \in T_c \subseteq T_h \cup t_f$ заданы связи на состояния подсистем:

$$\sum_{k \in I} H_k(s) x_k(s) \leq \alpha(s), \quad s \in T_c, \quad (2)$$

где $H_k(s) \in \mathbb{R}^{m \times n_k}, k \in I, \alpha(s) \in \mathbb{R}^m$. Поскольку (1) содержат возмущения, ограничения (2) требуется выполнить с гарантией.

Целью управления является минимизация гарантированного значения терминального критерия качества $J(u) = \max_w \sum_{k \in I} c'_k x_k(t_f)$.

В докладе рассматриваются два способа управления в реальном времени объектами (1), $i \in I$. При централизованном управлении общий регулятор на каждом промежутке $[\tau, \tau+h], \tau \in T_h$, по имеющейся информации о текущем состоянии $x^*(\tau) = (x_k^*(\tau), k \in I)$ вырабатывает управляющее воздействие $u^*(t) = (u_k^*(t), k \in I), t \in [\tau, \tau+h]$, для всей системы в целом. При децентрализованном управлении [1] каждая i -ая подсистема имеет свой локальный регулятор, который строит управляющее воздействие $u_i^*(t), t \in [\tau, \tau+h], \tau \in T_h$, только для своего объекта на основе информации о собственном текущем состоянии $x_i^*(\tau)$ и информации, получаемой от остальных объектов.

¹Белорусский государственный университет, Минск

Предполагается, что в канале обмена информацией между подсистемами имеется запаздывание равное h .

Для вычисления $u_i^*(\cdot)$ регулятор i -ой подсистемы в каждый момент времени $\tau \in T_h$ решает локальную задачу оптимального управления $\mathcal{P}_i(\tau)$. Ее программное решение $u_i^d(\cdot|\tau) = (u_i^d(t|\tau), t \in [\tau, t_f])$ используется для управления i -ым объектом на промежутке $[\tau, \tau+h]$: $u_i^*(t) = u_i^d(\tau|\tau)$, $t \in [\tau, \tau+h]$.

Предложена следующая формулировка локальной задачи оптимального управления:

$$\mathcal{P}_i(\tau) : \quad J_i(\tau) = \min_{u_i} \max_{w_i} \sum_{k \in I} c_k^T x_k(t_f),$$

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij} x_j + B_i u_i + M_i w_i, \quad x_i(\tau) = x_i^*(\tau),$$

$$\dot{x}_k = A_k x_k + \sum_{j \in I_k} A_{kj} x_j, \quad x_k(\tau) = 0, \quad k \in I_i,$$

$$\sum_{k \in I} H_k(s) x_k(s) \leq \alpha_i(s|\tau), \quad s \in T_c, \quad u_i(t) \in U_i, \quad w_i(t) \in W_i, \quad t \in [\tau, t_f],$$

где

$$\alpha_i(s|\tau) = g_i^d(s|\tau) + \Omega_i(s|\tau)[\alpha(s) - \sum_{k \in I} g_k^d(s|\tau)],$$

$$g_i^d(s|\tau) = \Phi_i(s, \tau) x_i^d(\tau|\tau-h) + \int_{\tau}^s \Phi_i(s, t) B_i u_i^d(t|\tau-h) dt ;$$

$\Phi(s, t) = (\Phi_k(s, t), k \in I) = H(s)e^{A(s-t)}$; $x_i^d(\tau|\tau-h)$ — состояние системы в момент τ при $x(\tau-h) = x^*(\tau-h)$, $u(\cdot) = u^d(\cdot|\tau-h)$, $w(\cdot) = 0$; $\Omega_i(s|\tau)$ — диагональные матрицы весовых коэффициентов, $\sum_{i \in I} \Omega_i(s|\tau) = E$.

В докладе доказывается, что при условии начальной (в момент $\tau = t_0$) разрешимости централизованной задачи оптимального управления, децентрализованная программа $u^d(\cdot|\tau) = (u_k^d(\cdot|\tau), k \in I)$, в каждый момент времени $\tau \in T_h \setminus t_0$ является допустимой (с гарантией удовлетворяет групповым ограничениям (2)) и субоптимальной в задаче централизованного управления взаимосвязной системой (1). При определенном выборе весовых коэффициентов $\Omega_i(s|\tau)$ гарантировано, в отличие от [1], существование решений всех локальных задач $\mathcal{P}_i(\tau)$, $i \in I$, $\tau \in T_h \setminus t_0$, и невозрастание критерия качества $J^d(\tau) = \sum_{i \in I} J_i(\tau)$, $\tau \in T_h$.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф14МС-005).

- [1] Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51. № 7. С. 1209–1227.

Оптимальная стабилизация систем дифференциальных уравнений с последствием нейтрального типа

Ю. Ф. Долгий^{1,2}

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с последствием нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(Dx_t) = \int_{-r}^0 d\eta(\vartheta)x_t(\vartheta) + Bu, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty). \quad (1)$$

Здесь $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $x : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; $D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — устойчивый оператор, $D\varphi = \varphi(0) - \int_{-r}^0 d\mu(s)\varphi(s)$, $\varphi \in \mathbb{C}$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; матричнозначные функции η , μ имеют ограниченные вариации на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$, $\mu(-0) = \mu(0) = 0$, B — постоянная матрица, $r > 0$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1) и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} (x^\top(t)C_x x(t) + u^\top(t)C_u u(t)) dt,$$

где C_x и C_u — положительно определенные матрицы.

Для решения задачи оптимальной стабилизации линейной системы дифференциальных уравнений с последствием запаздывающего типа Н.Н. Красовский разработал аппроксимационные методы и

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

метод квадратичных функционалов [1, 2]. Их модификации применялись при решении задач оптимальной стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с последствием нейтрального типа [3, 4]. Процедуры решения задач оптимальной стабилизации используют предложенное Н.Н. Красовским описание дифференциальных уравнений с последствием в функциональном пространстве состояний. Переход от систем дифференциальных уравнений с последствием запаздывающего типа к системам уравнений нейтрального типа усложняет представления квадратичных функционалов в принципе динамического программирования Беллмана.

В настоящей работе рассматривается постановка задачи оптимальной стабилизации линейной системы с последствием нейтрального типа в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^0 \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$. Использование гильбертового пространства упрощает описание квадратичного функционала и позволяет выписать систему определяющих уравнений для нахождения его коэффициентов и коэффициентов оптимального стабилизирующего уравнения. Предложен метод преобразования сложной системы определяющих уравнений к краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения, что является модификацией метода преобразования, предложенного ранее автором при решении задачи оптимальной стабилизации линейной системы дифференциальных уравнений с последствием запаздывающего типа [5].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1019), а также при поддержке РФФИ (13-01-00094-а).

- [1] *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // ПММ. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
- [2] *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
- [3] *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations // JOTA. 1976. V. 20, № 2. P. 191–204.
- [4] *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последствием. М.: Наука, 1992.

- [5] Долгий Ю.Ф. К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // АиТ. 2007. № 10. С. 92–105.

Исследование оптимальных межорбитальных переходов разгонного блока

Т. Д. Думшева¹, И. Н. Кандоба¹, И. В. Козьмин¹,
В. Б. Костоусов¹, Е. К. Костоусова¹, А. Б. Ложников¹

В. И. Починский²

Рассматривается задача построения оптимального управления разгонным блоком для новой перспективной двухступенчатой модификации ракеты-носителя Союз-2 — носителя легкого класса, предназначенного для вывода полезной нагрузки на низкие околоземные орбиты. Носитель может оснащаться дополнительной третьей ступенью — разгонным блоком (РБ), который используется для вывода расположенной на нем полезной нагрузки на более высокие орбиты. Конструктивные особенности РБ диктуют ряд требований к допустимому управлению и траектории его движения. Эти требования приводят к возникновению в задаче ограничений на управление и текущее фазовое состояние. Задача заключается в построении допустимого управления РБ, обеспечивающего перевод им с одной орбиты (опорной) на другую более высокую (целевую) орбиту полезной нагрузки максимальной массы. При этом считается, что опорная и целевая орбиты являются эллиптическими, непересекающимися и компланарными. Исходная постановка характеризуется сложной нелинейной динамикой.

Движение РБ (как твердого тела) описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{x} = v, \quad \dot{v} = W_R(E, m, U, u) + g(x), \quad \dot{\omega} = \Lambda(\omega, m) + M(m, U, u), \\ \dot{E} = -A(\omega) \cdot E, \quad \dot{m} = -\mu^\top u, \quad t \in [t_0, t_f], \end{aligned}$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Научно-производственное объединение автоматики имени академика Н.А. Семихатова, Екатеринбург

где $x, v \in \mathbb{R}^3$ — координаты и скорости центра масс РБ; $\omega \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость; $E \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — матрица поворота; m — масса РБ. Управлениями служат $U(t) \in \mathbb{R}^2$ и $u(t) \in \mathbb{R}^9$, где U_i , $i = 1, 2$, — углы поворота сопла маршевого двигателя (МД), $|U_i(t)| \leq U_i^{\max}$; $u_k(t) \in \{0, 1\}$ — функции типа включено/выключено, определяющие интервалы работы двигателей малой тяги ($k=1, \dots, 8$) и МД ($k=9$). Считаются заданными t_0 (момент выхода РН на опорную орбиту), начальные условия и значения параметров целевой орбиты. Требуется максимизировать $m(t_f)$. При этом момент t_f не фиксирован, а на движение РБ накладывается ряд дополнительных условий.

В работе исследуются «двухимпульсные» схемы выведения РБ для упрощенных моделей [1] и для моделей с «непрерывной тягой», где допускается двукратное включение МД. Разработаны алгоритмы построения оптимального орбитального перехода центра масс РБ с помощью импульсной тяги в условиях центрального и нормального гравитационных полей. Результаты численного моделирования показывают, что существует множество пар точек на этих орбитах, доставляющих оптимизируемому критерию значения близкие к оптимальному. Для случая «непрерывной тяги» опробован метод решения задачи управления центром масс РБ с помощью нелинейного программирования. Для полной модели реализованы алгоритмы построения допустимого управления, основанные на исследовании чувствительности параметров орбиты по отношению к специальным вариациям управления. Намечена схема решения, подобная предложенной в [2], с использованием вспомогательной задачи, где управляющими параметрами служат $U(\cdot)$ и моменты включения/выключения двигателей, а минимизируемый функционал содержит слагаемые, отвечающие за суммарную длительность работы двигателей, значения параметров целевой орбиты и другие ограничения. На основе известных и полученных новых результатов предложен способ построения содержательного первого приближения к решению исходной задачи.

Работа выполнена при поддержке программ фундаментальных исследований УрО РАН (проекты № 12-П-1-1022, № 13-1-012-НПО, № 12-П-1-1023) и интеграционного проекта УрО и СО РАН (№ 12-С-1-1017).

- [1] *Prado A.F.B.A., Broucke R.A.* The minimum delta-V Lambert's problem // *SBA Controle and Automacao*. 1996, Vol. 7, № 2. P. 84–90.

- [2] Думишева Т.Д., Костоусов В.Б., Костоусова Е.К., Починский В.И. О задачах выведения полезной нагрузки в заданную точку орбиты // АиТ. 2012. № 4. С. 18–31.

Бипозиционные лагранжианы и двойственность в невыпуклых задачах оптимального управления

В. А. Дыхта¹

Решение любой задачи оптимального управления необходимо искать среди экстремалей принципа максимума, если оптимальный процесс существует, или среди квазиэкстремалей, если предположение о существовании не выполнено. Поэтому естественно возникает идея рассмотрения задачи оптимизации непосредственно на множестве её экстремалей (квазиэкстремалей в общем случае). Она в определенной степени связана с решением задачи методом характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, но более реализуема, если не ставить вопрос о поиске оптимального синтеза.

Для частичной реализации описанного замысла применительно к задаче

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$J[x, u] = l(x(t_1)) \rightarrow \min \quad (2)$$

предлагается рассматривать модифицированный лагранжиан $K_S[\gamma]$, который зависит от выбора вспомогательной *бипозиционной функции* $S(t, x, \psi)$ и троек функций $\gamma = (x(\cdot), \psi(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих на отрезке T исходной и сопряженной системам. Для липшицевых функций S с непрерывными производными по x, ψ модифицированный *бипозиционный лагранжиан* определяется равенством

$$K_S[\gamma] = l(x(t_1)) - S(t, x(t), \psi(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_T \dot{S}(t, x(t), \psi(t), u(t)) dt, \quad (3)$$

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

где \dot{S} означает полную производную в силу канонической системы для пары (x, ψ) . Конструкция (3) включает в себя в качестве частных случаев стандартный лагранжиан ($S = \psi(t) \cdot x$, $\psi(\cdot)$ фиксирована) и функцию Кротова ($S = \varphi(t, x)$).

Множество D допустимых пар функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче (1), (2) естественным образом вкладывается в множество Γ введенных троек функций γ , и при этом $J[x, u] = K_S[\gamma]$ для любой функции S . Поэтому решение задачи (1), (2) можно искать среди оптимальных процессов следующей задачи сравнения

$$K_S[\gamma] \rightarrow \inf, \quad \gamma \in \Gamma \quad (4)$$

при подходящем выборе функции S . Единственное не включенное явно ограничением в задачу (4) условие экстремальности — максимум (или минимум) функции Понтрягина H по управлению $u \in U$ — содержится в необходимых условиях оптимальности задачи сравнения с разрешающей функцией S .

Поскольку универсального способа задания такой функции не существует, целесообразно конкретизировать метод бипозиционных лагранжианов для частных классов задач. В докладе эта конкретизация детально рассмотрена для двух классов невыпуклых задач — линейной по фазовой переменной (например, в билинейной управляемой системе) и линейно-квадратичной (с компактным множеством U). Примечательно, что в каждом из этих классов: 1) задача сравнения допускает декомпозицию с переходом к нестандартно двойственной, эквивалентной задаче на траекториях сопряженной системы или её модификации; 2) применение к ней *позиционного принципа минимума* [1] дает необходимое условие оптимальности, существенно усиливающее принцип максимума. Это условие естественным образом комбинируется с независимым позиционным принципом минимума в исходной задаче (линейной или квадратичной), причем оба критерия основаны на генерировании позиционных управлений спуска по функционалу через специальные суперрешения уравнений Гамильтона–Якоби. Данная комбинация конструктивна и приводит к итерационному алгоритму численного решения указанных невыпуклых задач оптимального управления.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00699, и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, проект № НШ-5007.2014.9.

- [1] *Dykhta V.A.* Weakly Monotone Solutions of the Hamilton–Jacobi Inequality and Optimality Conditions with Positional Controls // Automation and Remote Control. 2014. V. 75, № 5. P. 829–844.

Неравенства Гамильтона – Якоби и условия оптимальности для импульсных управляемых систем

В. А. Дыхта¹, О. Н. Самсонюк¹

Рассматривается нелинейная импульсная управляемая система вида

$$dx(t) \in f(t, x(t))dt + G(t, x(t))\pi(\mu), \quad (1)$$

$$\pi(\mu) \in \mathcal{W}(T, K). \quad (2)$$

Здесь $T = [a, b]$ — фиксированный промежуток времени, $K \subseteq R^m$ — выпуклый замкнутый конус, $f : T \times R^n \hookrightarrow R^n$, $G : T \times R^n \hookrightarrow R^{n \times m}$ — заданные многозначные отображения, $x(\cdot)$ — вектор-функция ограниченной вариации. Множество импульсных управлений $\mathcal{W}(T, K)$ состоит из элементов $(\mu, \gamma(\mu))$, где μ — K -значная ограниченная борелевская мера на T , а через $\gamma(\mu)$ обозначен набор $\{d_s, \omega_s(\cdot)\}_{s \in S}$, компонентами которого являются действительные числа d_s и измеримые функции $\omega_s(\cdot)$, $s \in S$, удовлетворяющие условиям

(а) S — не более чем счетное множество из T ,

$$S \supseteq S_d(\mu) := \{s \in T \mid \mu(\{s\}) \neq 0\};$$

(б) $\forall s \in S$

$$d_s \geq 0, \quad \omega_s : [0, d_s] \rightarrow \text{co } K_1,$$

$$d_s \geq \|\mu(\{s\})\|, \quad \int_0^{d_s} \omega_s(\tau) d\tau = \mu(\{s\});$$

(в)

$$\sum_{s \in S} d_s < \infty.$$

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Здесь $K_1 := \{v \in K \mid \|v\| = 1\}$, $\|v\| := \sum_{j=1}^m |v_j|$, со A — выпуклая оболочка множества A . Понятие решения системы (1), (2) является модификацией понятия обобщенного решения, рассматриваемого в [1], и примыкает к определению V -решения из работ [2, 3], данному при $K = \mathbb{R}^m$.

В докладе обсуждаются неравенства типа Гамильтона – Якоби, решения которых обладают свойствами сильной или слабой монотонности относительно управляемой системы (1), (2) и трактуются как функции типа Ляпунова [4]. Для задачи оптимального импульсного управления в системе (1), (2) представлены необходимые и достаточные условия оптимальности, включающие множества функций типа Ляпунова, в том числе составных. Эти результаты продолжают исследования, начатые в работах [5, 6]. Представленные результаты иллюстрируются на ряде примеров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00699.

- [1] *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
- [2] *Завалишин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991.
- [3] *Сесекин А.Н.* Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. С. 497–510.
- [4] *Самсоныук О.Н.* Функции типа Ляпунова для нелинейных импульсных управляемых систем // Известия ИГУ. Математика. 2014. Т. 7. С. 104–123.
- [5] *Самсоныук О.Н.* Составные функции типа Ляпунова в задачах управления импульсными динамическими системами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 170–178.
- [6] *Dykhta V., Samsonyuk O.* Some applications of Hamilton – Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems // European Journal of Control. 2011. Vol. 17, pp. 55–69.

Управление с минимальной энергией в краевых задачах для уравнения параболического типа

А. И. Егоров¹, Л. Н. Знаменская¹

Пусть D — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^n , а Ω — граница области D и $\overline{D} = D \cup \Omega$. Обозначим через $Q_T = \{(t, x) : 0 < t < T, x \in D\}$ ограниченный цилиндр и через $H_T = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, x \in \Omega\}$ — его боковую поверхность.

Рассматривается тепловой процесс, который описывается следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Lu(t, x) + f(t)v(x), \quad (t, x) \in Q_T; \quad (1)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in D; \quad (2)$$

$$Pu(t, x) = r(t)g(x), \quad (t, x) \in H_T, \quad (3)$$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u, \quad Pu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i) + hu.$$

Здесь a_{ij} , c , ($c(x) \leq 0$), g , h и v — заданные функции, а f и r — управления, причем $f, r \in L_2[0, T]$, \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к границе Ω области D .

Обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется такая функция $u = u(t, x)$ из $L_2(Q_T)$, имеющая обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(Q_T)$, $i = 1, \dots, n$, что

1) функция удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \int_D (\Psi u) \Big|_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_D \left[u \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} + f \Psi \right] dx dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \Psi [p - hu] d\Omega dt = 0 \end{aligned}$$

для всех функций $\Psi \in W_2^1(Q_T)$ и любых $t_0, t_1 \in [0, T]$;

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный

2) функция удовлетворяет начальному условию $u(0, x) = 0$ в том смысле, что $(u(t, x), \Psi(x)) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +0$, для любой $\Psi \in L_2(D)$.

Задача. Пусть процесс описывается краевой задачей (1)–(3), в которой $v(x) \equiv 0$. Требуется найти такое управление $r = r(t)$, чтобы соответствующее ему решение $u = u(t, x)$ краевой задачи (1)–(3) удовлетворяло условию $u(T, x) = \varphi(x)$, $x \in D$, и при этом функционал $J[r(t)] = \|r\|^2$ достигал своего наименьшего значения. Здесь $\varphi(x)$ — заданная функция из $L_2(D)$.

Пусть λ_n и ω_n , $n = 1, 2, \dots$, — собственные значения и соответствующие ортонормированные собственные функции краевой задачи $L\omega = -\lambda\omega$, $P\omega = 0$, $\varphi_n = (\varphi, \omega_n)$, $g_n = (g, \omega_n)_{L_2(\Omega)}$,

$$M = \{M_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{g_n g_k}{\lambda_n + \lambda_k} \left(1 - e^{-(\lambda_n + \lambda_k)T}\right) \right\}_{n,k=1}^{\infty}.$$

Доказаны следующие теоремы (частный случай теоремы 1 для уравнения теплопроводности см. в [1]).

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n}$ сходится, то задача имеет решение (причем единственное) тогда и только тогда, когда существует постоянная $N > 0$ такая, что выполнено условие

$$|(\varphi, \alpha)|^2 \leq N \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(g_n \alpha_n)(g_k \alpha_k)}{\lambda_n + \lambda_k} \left(1 - e^{-(\lambda_n + \lambda_k)T}\right)$$

для всех α из пространства l_2 .

Теорема 2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{\rho_n}$ сходятся, где ρ_n — собственные значения матрицы M , то задача имеет единственное решение и оптимальное управление представимо в виде $r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n(t-T)}$, где $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots\}$ — решение уравнения $M\alpha = z$ с правой частью $z = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$.

Аналогичные результаты получены в случае, когда управлением в краевой задаче является $f(t)$, а $r(t) \equiv 0$. Проанализированы способы приближенного решения задач.

[1] Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.

**Нечеткие системы Такаги – Сугено
в исследовании устойчивости
нелинейных дифференциальных систем**

Ж. Е. Еграшкина¹, Н. О. Седова¹

Рассматривается непрерывная динамическая система Такаги – Сугено, которая задается правилами вида

$$\begin{aligned} \text{ЕСЛИ } z_1(t) \text{ есть } M_{i1} \text{ и } \dots \text{ и } z_p(t) \text{ есть } M_{ip}, \\ \text{ТО } \dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (1)$$

где r — число нечетких правил, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$ — постоянные матрицы, вектор $z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t))$ состоит из функций фазовых переменных, характеризуемых лингвистической переменной «величина», M_{ij} — значение переменной «величина», выбираемое из j -го множества терминов (это значение является символом некоторого нечеткого множества и в обозначениях обычно отождествляется с этим множеством), $x(t) \in R^n$ — фазовый вектор.

Каждому i -му правилу соответствует функция принадлежности $\mu_i(z) = \prod_{k=1}^p \mu_{ik}(z_k)$, где $\mu_{ik}(z_k)$ — степень принадлежности переменной z_k множеству M_{ik} . Пусть для переменной z_k соответствующее множество терминов состоит из v_k элементов. Обозначим $\mu_k^j(z_k)$ функцию принадлежности j -му из этих множеств. Предполагается, что для каждого k функции принадлежности удовлетворяют условиям $\mu_k^j(z_k) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{v_k} \mu_k^j(z_k) = 1$ и аналогичные условия выполняются для функций $\mu_i(z)$. Тогда в результате дефазификации система (1) представляется в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (2)$$

В общем случае устойчивость или неустойчивость нулевого решения для локальных подсистем не гарантирует аналогичного свойства для всей системы. В связи с этим возникает задача получения условий устойчивости для нулевого решения нечеткой системы (2).

¹Ульяновский государственный университет

Наиболее известным и используемым методом решения этой задачи является построение квадратичных функций Ляпунова с определенными свойствами. Помимо классических функций Ляпунова, можно применять также функции с «ослабленными» свойствами. Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что существует положительно определенная матрица P такая, что $A_i^T P + P A_i \leq -C_i$, где C_i — положительно полуопределенная матрица для всех $i \in \{1, \dots, r\}$, кроме того, $\forall x \neq 0$ выполняется условие $\frac{\partial z}{\partial x} \sum_{i=1}^r \mu_i(z) A_i x \neq 0$, для некоторого $k \in \{1, \dots, r\}$ из условий $C_k A_k^m x = 0$, $m = 0, 1, \dots, l$, $\mu_j(z) C_j x = 0$, $j = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \mu_i(z) C_k A_k^l A_i x = 0$ следует $C_k A_k^{l+1} x = 0$ для всех $l = 0, 1, \dots, n-2$ и пара (C_k, A_k) наблюдаема. Тогда нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво.*

В получаемых таким методом результатах проверка условий устойчивости сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений и линейных матричных неравенств — вычислительным процедурам, реализуемым широко распространенными программными средствами.

Рассмотрен класс нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представимых в виде (2) — для таких систем исследование устойчивости нулевого решения сводится к упомянутым вычислительным процедурам. Если же точное представление построить не удастся, но правая часть исходной системы дифференцируема в некоторой области, содержащей начало координат, то можно построить аппроксимацию вида (2). В этом случае исследование свойств устойчивости исходной нелинейной системы сводится к анализу системы (1) с возмущением. Условия устойчивости при этом зависят от вида и свойств возмущения, которые, в свою очередь, определяются способом аппроксимации.

- [1] Tanaka K., Wang H.O. Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach. A Wiley-Interscience publication, 2001.

Анализ стохастической модели Ферхюльста с запаздыванием

Е. Д. Екатеринчук¹, Л. Б. Ряшко¹

Работа посвящена исследованию модели Ферхюльста с запаздыванием в присутствии внешних случайных возмущений. Исходная модель учитывает ограниченность ресурсов (пищевых, территориальных) и, как следствие, внутривидовую конкуренцию.

В любой реальной биологической системе всегда присутствуют случайные факторы, которые могут оказать существенное влияние на ее поведение, поэтому необходимо исследовать модель под воздействием случайных возмущений.

Исследована динамика фазовых портретов детерминированной модели в зависимости от параметра. На бифуркационной диаграмме явно выделяются три области регулярной динамики: зона равновесий, зона замкнутых инвариантных кривых, зона дискретного 7-цикла и зона, содержащая хаотические режимы. Устойчивость аттракторов данной модели иллюстрирует показатель Ляпунова. Построена зависимость числа вращения в зоне замкнутых инвариантных кривых от параметра, объясняющая появление дискретного 7-цикла.

Под влиянием шума стохастическая траектория покидает детерминированный аттрактор и образует вокруг него облако случайных состояний. Анализ влияния распределения случайных возмущений опирается на теорию функции стохастической чувствительности [1]. Детально исследована стохастическая чувствительность аттракторов модели и конфигурация эллипсов рассеивания в зоне равновесий и дискретных циклов. Также в модели исследованы индуцированные шумом переходы в зоне дискретных циклов с помощью метода гистограмм.

- [1] Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Цветков И.Н. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов дискретных нелинейных динамических систем // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления», 2009, № 4.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

**Сходимость алгоритмов
построения границ множеств достижимости
в задачах управления на плоскости**

А. Н. Жаринов¹, С. С. Кумков¹

Рассматривается задача управления и соответствующее дифференциальное включение на плоскости:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad \dot{x} \in F(t, x) = \operatorname{co} f(t, x, P), \\ t &\in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad x(t_0) \in M. \end{aligned} \quad (1)$$

Для таких задач весьма важным объектом является набор множеств достижимости $\{G(t) : t \in [t_0, T]\}$. Интерес представляет развитие численных методов их построения.

«Фольклорной» является идея геометрического алгоритма, основанного на пересчёте границы множества. Начальное множество M подменяется многоугольным множеством, граница которого состоит из одной или нескольких замкнутых *простых ломаных* (то есть, замкнутых ломаных с конечным числом вершин без самопересечений). Выпуклый компакт P также подменяется выпуклым многоугольником. Для каждой точки границы определена внешняя нормаль (или конус нормалей, если точка — вершина ломаной). Из всех точек границы на небольшом промежутке времени выпускаются движения, экстремальные на векторах внешних нормалей. Концы таких движений, выпущенных из каждого простого куска границы, собираются в некоторую кривую, после обработки которой получаем новую ломаную, приближающую соответствующую часть границы множества достижимости в следующий момент времени.

Авторам неизвестны работы, связанные с обоснованием сходимости этого алгоритма в общем случае. Вариант задачи, когда вектограммы скоростей являются отрезками, рассматривается в работе [1].

В докладе приводятся результаты обоснования сходимости «фольклорного» алгоритма. В процессе обоснования вводятся теоретические схемы с дискретизацией по времени (схема Эйлера), с дискретизацией по пространству (с полигонализацией начального мно-

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

жества и многозначного отображения правой части включения — полигональная схема) и с устранением возможных неодносвязностей полигональной схемы (схема с «закрашиванием»). В предположении односвязности множеств достижимости системы (1) обосновывается сходимость множеств, порождаемых теоретическими схемами, к множествам достижимости задачи (1) при измельчении параметров дискретизации.

Доказывается, что при выполнении определённых условий для построения множеств в схеме с закрашиванием на каждом шаге по времени достаточно рассматривать только точки границы текущего множества. Предлагается теоретическая схема построения границы текущего множества на основе точек границы предыдущего множества. Доказывается сходимость этой схемы. Оценивается погрешность «фольклорного» алгоритма построения границы относительно этой теоретической схемы; обосновывается сходимость «фольклорного» алгоритма.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта УрО и СО РАН, проект № 12-С-1-1017.

- [1] *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255.

Равновесие по Бержу при неопределенности

В. И. Жуковский¹

Рассматривается бескоалиционная игра при неопределенности (БИН)

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$, стратегии i -го игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, ситуация $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$, чистые неопределенности $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, функция выигрыша i -го игрока $f_i(x, y)$; «информированные» неопределенности $y(\cdot) : X \rightarrow Y$ и $y(\cdot) \in C(X, Y)$. Используем обозначения $x = (x_i || x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}})$, $x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} \in X_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} = \prod_{j \in \mathbb{N}, j \neq i} X_j$, а также смешанные стратегии (вероятностные меры) $\nu_i(dx_i) \in \{\nu_i\}$ для i -го игрока; ситуации в смешанных стратегиях $\nu(dx)$. Аналогом максимина для Γ является

Определение 1. Пару $(\bar{x}^B, \bar{f}^S) \in X \times \mathbb{R}^N$ назовем *сильно гарантированным равновесием по Бержу*, если

1) удалось найти N вектор-функций $y^{(i)}(\cdot) \in C(X, Y)$ ($i \in \mathbb{N}$), для которых

$$\min_{y \in Y} f_i(x, y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) = f_i[x] \quad \forall x \in X \quad (i \in \mathbb{N});$$

2) в бескоалиционной «игре гарантий»

$$\Gamma^g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

существует ситуация $x^B \in X$, удовлетворяющая

$$f_i[x^B] = \max_{x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} \in X_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}} f_i(x_i^B || x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(множество ситуаций x^B обозначим через X^B);

3) ситуация \bar{x}^B максимальна по Слейтеру в N -критериальной задаче $\Gamma_N = \langle X^B, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$, а вектор $\bar{f}^S = (\bar{f}_1^S, \dots, \bar{f}_N^S)$, где $\bar{f}_i^S = f_i[\bar{x}^B]$ ($i \in \mathbb{N}$).

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

«Игре гарантий» Γ^g поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma}^g = \langle \mathbb{N}, \{\nu_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\tilde{f}_i[\nu] = \int_X f_i[x] \nu(dx)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

Ситуация в смешанных стратегиях $\nu^B(\cdot)$ равновесна по Бержу в $\tilde{\Gamma}^g$, если

$$\max_{\nu_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}} f_i[\nu_i^B | \nu_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}] = f_i[\nu^B] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Определение 2. Пару $(\bar{\nu}^B(\cdot), \bar{f}^S) \in \{\nu\} \times \mathbb{R}^N$ назовем *сильно гарантированным равновесием по Бержу в смешанных стратегиях* для игры Γ , если наряду с требованием 1) определения 1 2') существует равновесная по Бержу ситуация $\nu^B(\cdot)$ в игре $\tilde{\Gamma}^g$ (множество их обозначим $\{\nu\}^B$); 3') ситуация $\bar{\nu}^B(\cdot) \in \{\nu\}^B$ максимальна по Слейтеру в задаче $\langle \{\nu\}^B, \{f_i[\nu]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$ и N -вектор $\bar{f}^S = f[\bar{\nu}^B]$.

Теорема. Пусть в игре Γ

- 1) множества $X_i \in \text{comp } \mathbb{R}^{n_i}$ ($i \in \mathbb{N}$), $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$ и Y — выпукло;
- 2) непрерывная на $X \times Y$ функция $f_i(x, y)$ строго выпукла по $y \in Y$ для каждого $x \in X$ ($i \in \mathbb{N}$).

Тогда в игре Γ существует сильно гарантированное равновесие по Бержу в смешанных стратегиях.

Доказательство основывается на исследованиях [2, 3].

В заключение рассмотрено приложение теоремы для бескоалиционных дифференциальных игр при неопределенности с разделенной динамикой и терминальными функциями выигрыша.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-90408 Укр а.

- [1] Colman A.M., Körner T.W., Musy T. and Tazdeit T. Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria // Journal of Mathematical Psychology. Article in Press. 2011. doi: 10. 1016/j. jmp. 2011.02.001. pp. 1–10.
- [2] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S. The Berge equilibrium. Preprint. Tbilisi: Institute of control systems, 1994.
- [3] Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности: Равновесие по Бержу – Вайсману. М.: URSS, КРАСАНД, 2010.

К теории функционально-дифференциальных уравнений

Е. С. Жуковский¹, А. В. Поносов²

Многие нелинейные дифференциальные уравнения, в том числе: обыкновенные, с сосредоточенным и распределенным отклонением аргумента, предполагающие непрерывные решения и решения, подвергающиеся импульсным воздействиям, некоторые важные виды стохастических дифференциальных уравнений, а также разностные уравнения могут быть записаны в виде обобщенного функционально-дифференциального уравнения, которое рассматривается в докладе.

Пусть на минимальной σ -алгебре \mathfrak{L} подмножеств отрезка $[0, T]$, включающей измеримые по Борелю множества, задана конечная σ -аддитивная полная мера μ . Обозначаем $L = L([0, T], \mathbf{R}^n, \mu)$ — пространство интегрируемых относительно меры μ функций $y : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ с нормой $\|y\|_L = \int_{[0, T]} |y(s)| \mu(ds)$; $AC = AC([-0, T], \mathbf{R}^n, \mu)$ — пространство абсолютно непрерывных относительно меры μ на $[0, T]$ функций, т. е. $x \in AC$ тогда и только тогда, когда

$$\exists y \in L \quad \exists \alpha \in \mathbf{R}^n \quad \forall t \in [0, T] \quad x(t) = \alpha + \int_{[0, t]} y(s) \mu(ds), \quad (1)$$

и дополненных значением, которое будем обозначать $x(-0)$. Каждая функция $x \in AC$ непрерывна справа и имеет левосторонние пределы в любой точке $t \in [0, T]$, величина скачка $x(t) - x(t-0) = y(t)\mu\{t\}$.

Соотношение (1) каждому $x \in AC$ ставит в соответствие пару $(\alpha, y) \in \mathbf{R}^n \times L$. Это соответствие взаимно однозначно, отображение $x \mapsto \alpha$ есть функционал $x(-0)$, отображение $x \mapsto y$ будем обозначать символом δ_μ . Используя (1), определим норму в AC формулой $\|x\|_{AC} = |x(-0)|_{\mathbf{R}^n} + \|\delta_\mu x\|_L$. Пространства AC и $\mathbf{R}^n \times L$ теперь изометрические. В частном случае, когда $\mu = \text{mes}$ — мера Лебега, $\delta_{\text{mes}} x = \dot{x}$ — «обычная» производная от функции x , тогда $x(-0) = x(0)$ и рассматриваемое пространство — «стандартное», пространство абсолютно непрерывных функций $AC([0, T], \mathbf{R}^n, \text{mes})$.

¹Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

²Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway

Исследуется функционально-дифференциальное уравнение

$$(\delta_\mu x)(t) = (Fx)(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $F : AC \rightarrow L$ — заданное (нелинейное) отображение.

Формализация различных дифференциальных уравнений в виде функционально-дифференциального уравнения (2) в пространстве $AC([0, T], \mathbf{R}^n, \text{mes})$ абсолютно непрерывных относительно меры Лебега функций предложена Н.В. Азбелевым, в работах математиков его школы разработана теория таких уравнений (см. [1]). В связи с исследованием стохастических дифференциальных уравнений и импульсных систем в работе [2] предложено использовать произвольную определенную на \mathfrak{L} меру μ , получены условия разрешимости уравнения (2) в случае, когда F — аффинный вольтерров оператор.

При исследовании нелинейного уравнения (2) считаем, что оператор F является вольтерровым, т. е. при любом $t \in [0, T]$ таком, что $\mu([0, t]) > 0$, из равенства аргументов $x(s) = \hat{x}(s)$ на $[-0, t)$ следует равенство образов $(Fx)(s) = (F\hat{x})(s)$ на отрезке $[0, t]$. Формулируются утверждения о разрешимости и однозначной разрешимости задачи Коши, о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров уравнения. Доказательства основаны на результатах [3] об обобщенных вольтерровых операторах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00877, и РНФ.

- [1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
- [2] Litsyn E., Ponomov A. Equations with the unknown functions under the differential. 1: Existence and uniqueness results // Dynamics of continuous discrete and impulsive systems. V. 6. Iss. 4. P. 615–638.
- [3] Жуковский Е.С. Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве // Известия вузов. Математика. 2005. № 10. С. 17–28.

Достаточные условия стабилизации дискретных стационарных аффинных управляемых систем

В. А. Зайцев¹

Рассмотрим стационарную аффинную управляемую систему с дискретным временем

$$x(t+1) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^1 -гладкая функция, $f(0) = 0$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — непрерывная функция. Требуется построить обратную связь $\hat{u}(x)$, $\hat{u}(0) = 0$, в системе (1) такую, что решение $x = 0$ системы (1), замкнутой управлением $u(t) = \hat{u}(x(t))$, является асимптотически устойчивым (локально или глобально). Достаточные условия локальной и глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения замкнутой системы (1) были получены в работе [1]. Здесь получены новые достаточные условия стабилизации, которые развивают результаты [1].

Обозначим $A(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $f^0(x) = x$, $f^i(x) = f(f^{i-1}(x))$, $i \geq 1$. Построим следующие матрицы: $N_1(x) = g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$$N_{i+1}(x) = [A(f^i(x)) \cdot N_i(x), g(f^i(x))] \in \mathbb{R}^{n \times (i+1)m}, \quad i \geq 1.$$

Теорема 1. Пусть в некоторой окрестности $S \subset \mathbb{R}^n$ нуля существует положительно определенная C^2 -функция $V: S \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $V(f(x)) \leq V(x)$, $x \in S$;
- 2) $V(f(x) + g(x)u)$ — квадратичная по u .

Пусть для любого $x \in S \setminus \{0\}$ существует $\nu \geq 1$ такое, что

$$\text{rank } N_\nu(x) = n. \quad (2)$$

Тогда нулевое решение (замкнутой) системы (1) локально асимптотически стабилизируемо.

Если дополнительно выполнены следующие условия: 3) $S = \mathbb{R}^n$; 4) $V(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$; 5) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$; то нулевое решение глобально асимптотически стабилизируемо.

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

Следуя [1], скажем, что функция $f(x)$ является слабым сжатием в области $S \subset \mathbb{R}^n$, если для некоторой нормы $\|x\|_P^2 := \langle x, Px \rangle$, где $P > 0$, выполнено неравенство $\|f(x)\|_P^2 \leq \|x\|_P^2$ для всех $x \in S$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ является слабым сжатием в некоторой окрестности $S \subset \mathbb{R}^n$ нуля и для любого $x \in S \setminus \{0\}$ выполнено условие (2) для некоторого $\nu \geq 1$. Тогда нулевое решение (замкнутой) системы (1) локально асимптотически стабилизируемо. Если $S = \mathbb{R}^n$, то нулевое решение глобально асимптотически стабилизируемо.

Рассмотрим систему (1) с линейной невозмущенной частью

$$x(t+1) = Ax(t) + g(x(t))u(t), \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Следствие 1. Пусть невозмущенная система $x(t+1) = Ax(t)$ устойчива по Ляпунову и для любого $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует $\nu \geq 0$ такое, что

$$\text{rank}[A^\nu g(x), A^{\nu-1}g(Ax), A^{\nu-2}g(A^2x), \dots, g(A^\nu x)] = n.$$

Тогда нулевое решение системы (3) глобально асимптотически стабилизируемо.

Из следствия 1 вытекает следствие о глобальной асимптотической стабилизации билинейной стационарной системы

$$x(t+1) = Ax(t) + [B(x(t)) + D]u(t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $B(x) = [B_1x, \dots, B_mx]$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Замечание 1. Во всех утверждения стабилизирующее управление имеет вид, указанный в [1]. Доказательства основаны на применении теоремы Барбашина–Красовского для дискретных автономных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00195) и Минобрнауки России в рамках базовой части.

- [1] Byrnes C.I., Lin W., Ghosh B.K. Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback // System & Control Letters. 1993. Vol. 21, Issue 3. P. 255–263.

Многомерные вариационные задачи

М. И. Зеликин¹, Ю. С. Осипов¹

Найдено нетривиальное обобщение теоремы Якоби [1] об огибающей однопараметрического семейства кривых, которые являются оптимальными решениями классической задачи оптимального управления. В работе речь идет о том, как правильно разгибать многомерное многообразие, вложенное в риманово пространство, на множество касающихся его оболочек. Оказывается, что имеется много различных естественных способов такого разгибания. Каждый из них определяется своим конкретным полем геодезических на многообразии. Начиная с линий уровня поля, эти геодезические продолжаются геодезическими объемлющего многообразия. В результате получается аналог понятия эволюты и эвольвенты, где вместо длины дуги огибающей возникают сохраняющиеся в процессе огибания интегральные инварианты соответствующей гамильтоновой системы. Эта конструкция дает, в частности, множество различных полей решения задачи об обходе препятствия.

Эйлеровыми эластиками [2] называются кривые, которые минимизируют интеграл от квадрата кривизны кривой. Для этой задачи найдено явное аналитическое решение уравнения Риккати, коэффициентами которого служат эллиптические функции. Полученное решение дало возможность доказать новое достаточное условие оптимальности для эйлеровых эластиков. Многомерным обобщением эйлеровых эластиков служит задача об упругих оболочках. Ранее основное внимание уделялось оболочкам, которые минимизируют интеграл от квадрата средней кривизны. Помимо вопросов, связанных с теорией упругости, такие оболочки естественно изучать с точки зрения теории минимальных многообразий, которые определяются тем, что их средняя кривизна равна нулю. Этой задаче и ее многомерным обобщениям на гармонические поверхности посвящено огромное количество работ (Р.Брайан, К.Уленбек, Ф.Гриффитс и др.). Широкую известность получила гипотеза Виллмора о торических минимальных оболочках. Несмотря на усилия крупнейших математиков, она оставалась недоказанной около 50 лет и была доказана только совсем недавно, в 2012 году, молодыми Бразильскими математиками

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Маркесом и Неве, за что им была присуждена премия Рамануджана. Однако оболочки, минимизирующие интеграл от квадрата Гауссовой кривизны, оставались неисследованными. Они важны с точки зрения теории упругости, когда модуль упругости на растяжение существенно больше, чем модуль упругости на изгиб. В докладе получено точное решение задачи минимизации интеграла от квадрата Гауссовой кривизны в классе оболочек, являющихся поверхностями вращения.

- [1] *Osipov Ju.S., Zelikin M.I.* Multidimensional Generalization of Jacobi's Envelope Theorem // RJMP. Vol. 19, no 1, (2012), pp. 101–106.
- [2] *Osipov Ju.S., Zelikin M.I.* Higher-Order Elastics and Elastic Hulls // RJMP. Vol. 19, no 2, (2012), pp. 234–243.

Об эффективных сеточных методах построения интегральных воронок динамических систем

А. А. Зимовец¹, А. Р. Матвийчук¹

В работе исследуется n -мерная ($n \leq 3$) управляемая система вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in P, \quad (1)$$

где P — компакт в R^p . На систему накладываются стандартные условия существования, единственности и продолжимости решений на весь промежуток времени $[t_0, \vartheta]$. Работа является продолжением исследований [1–4].

Для системы (1) рассматривается ряд численных методов приближенного построения интегральных воронок, использующих классический подход, при котором интегральная воронка аппроксимируется набором приближенно вычисленных множеств достижимости $X(t_i, t_0, X_0)$ управляемой системы (1) в моменты времени $t_i, i = \overline{0, N}$, некоторого разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_N = \vartheta\}$, (см., например, [2]).

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Построение множеств достижимости осуществляется поэтапно с использованием рекуррентного соотношения $X(t_{i+1}, t_0, X_0) = X(t_{i+1}, t_i, X(t_i, t_0, X_0))$ (см. [3]). На каждом этапе выполняется следующая последовательность шагов:

- 1) построение для каждой точки $x \in \tilde{X}_i$ множества $\tilde{X}(t_{i+1}, t_i, x)$, где \tilde{X}_i и $\tilde{X}(t_{i+1}, t_i, x)$ — аппроксимации множеств $X(t_i, t_0, X_0)$ и $X(t_{i+1}, t_i, x)$ соответственно конечным набором точек;
- 2) объединение всех полученных множеств $\tilde{X}(t_{i+1}, t_i, x)$, $x \in \tilde{X}_i$ в множество

$$\tilde{X}_{i+1} = \bigcup_{x \in \tilde{X}_i} \tilde{X}(t_{i+1}, t_i, x);$$

- 3) прореживание множества \tilde{X}_{i+1} ;
- 4) сохранение множества \tilde{X}_{i+1} на диск.

При таком подходе особо остро стоит проблема эффективности вычислений: без стадии прореживания количество обесчитываемых точек при переходе от этапа к этапу нарастает лавинообразно, но даже с прореживанием объем вычислений получается очень большим. В результате, процесс расчета интегральных воронок во многих случаях требует как значительного количества времени, так и значительного объема памяти ЭВМ. Это вынуждает искать подходы, позволяющие сократить время счета интегральных воронок, при этом умеренно используя память ЭВМ.

В работе рассматриваются два подхода, направленных на сокращение времени счета. Первый подход основан на уменьшении объема вычислений за счет сокращения числа рассматриваемых точек (см. [4]) и позволяет в большинстве случаев до некоторой степени сократить и время вычислений, и объем потребляемой памяти. Второй подход состоит в использовании возможностей современных многопроцессорных ЭВМ и их многоядерных процессоров для распараллеливания вычислений.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», программы УрО РАН (12-П-1-1002) и РФФИ (гранты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

- [1] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [2] Матвейчук А.Р., Ушаков В.Н. О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями.

ми // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 5–20.

- [3] Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О приближенном построении интегральных воронок дифференциальных включений // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34, № 7. С. 965–977.
- [4] Зимовец А.А. Метод приграничного слоя для приближенного построения множеств достижимости управляемых систем // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2013. Т. 5, № 1. С. 18–25.

О гарантированном оценивании некоторых видов возмущений в линейной динамической системе

Е. Д. Ильин¹, В. И. Ширяев¹

Оценка внешних воздействий является важной задачей при построении динамических систем [3]. С помощью этой информации можно обнаружить разладку системы, а также улучшить адаптивные способности алгоритма идентификации системы [1]. Большой интерес представляет оценка внешних воздействий в задаче оценивания и управления в гарантированной постановке:

$$x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k, \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

где $x_k \in R^n$, $y_{k+1} \in R^m$ — векторы состояния системы и измерений $n > m$; w_k и v_k — векторы возмущений и ошибок измерений соответственно; A, Γ, G, H — известные матрицы. Относительно вектора начального состояния x_0 и векторов w_k и v_k известно лишь, что они могут принимать любое значение из заданных выпуклых множеств:

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V. \quad (2)$$

¹Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск

Задача оценивания решается путем построения на каждом шаге информационного множества \overline{X}_{k+1} , которое гарантированно содержит в себе истинное значение x_{k+1} [2], [4]:

$$\overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

$X_{k+1/k} = A\overline{X}_k + \Gamma W$, $X[y_{k+1}] = \{x \in R^n | Gx_{k+1} + Hv = y_{k+1}, v \in V\}$, где $X_{k+1/k}$ — множество прогнозов; $X[y_{k+1}]$ — множество, совместимое с измерениями y_{k+1} . Все операции производятся над множествами: линейное преобразование, пересечение множеств, сумма множеств понимается в смысле Минковского.

Априорные оценки множеств X_0 , W , V могут оказаться сильно завышенными для конкретной реализации процесса, например,

$$w_k = w + \omega_k, \quad (4)$$

где w — неизвестная константа, а $\omega_k \in \Omega$; при этом множество Ω значительно меньше множества W . В этом случае уточнение множества W в зависимости от реальной ситуации позволит повысить точность оценивания вплоть до получения точных гарантированных оценок.

При решении этой задачи вместо ограничений (2) используем их аппроксимацию сверху линейными неравенствами с учетом (4):

$$A_x x_k \leq b_x, \quad A_w w \leq b_w, \quad A_v v_k \leq b_v, \quad A_\omega \omega_k \leq b_\omega. \quad (5)$$

Для получения оценки w решаем задачи линейного программирования при ограничениях (1), (4) и (5):

$$\langle c, w \rangle \rightarrow \min_{w \in W}.$$

Здесь c — вектор, задающий направление поиска границы множества W . Для улучшения оценки следует составить систему (5) за несколько шагов $k = k1, \dots, k2$.

Предложен вычислительно простой способ оценивания постоянной составляющей вектора возмущений w_k с помощью решения задач линейного программирования. Установлено, что оценка получается состоятельной, если для конкретно заданной реализации происходит взаимное уточнение множества прогнозов $X_{k+1/k}$ и множества $X[y_{k+1}]$, совместного с измерениями.

- [1] *Бассвиль М., Вилски А., Банвенист А.* Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. М.: Мир, 1989.
- [2] *Кац И.Я., Куржанский А.Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределённых ситуациях // *АиТ.* 1978. № 11. С. 79–87.
- [3] *Осипов Ю.С., Кряжиский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
- [4] *Ширяев В.И., Ильин Е.Д., Подивилова Е.О.* Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности // *Мехатроника и робототехника.* 2011. С. 101–110.

Асимптотически субоптимальный синтез в сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления

А. И. Калинин¹, Л. И. Лавринович¹

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

Доклад посвящен построению асимптотических приближений (в виде программы и обратной связи) к решению следующей задачи оптимального управления линейной системой с достаточно гладкими коэффициентами:

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*, y(t^*) = 0,$$

$$\mu \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, z(t^*) = 0,$$

¹Белорусский государственный университет, Минск

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y' M(t) y + \mu z' N(t) z + u' P(t) u) dt \rightarrow \min.$$

Здесь μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — n -вектор медленных переменных, z — m -вектор быстрых переменных, u — r -вектор управления, $M(t)$, $N(t)$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы, а $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны. Суть предлагаемого асимптотического метода решения рассмотренной задачи состоит в построении асимптотики начальных значений сопряженных переменных (множителей Лагранжа) в виде разложений по целым степеням малого параметра. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, y(t_*) = y_*, y(t^*) = 0,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y' M(t) y + u' P(t) u) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$. Вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, z(0) = -A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*),$$

$$z(-\infty) = 0, J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u'(s)P(t^*)u(s))ds \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $u^0(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, — оптимальное управление в вырожденной задаче. Предполагается, что динамические системы в задачах (1), (2) являются управляемыми [1]. Такое предположение гарантирует существование решений этих задач.

- [1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Развитие идеи Барбашина – Красовского в прямом методе Ляпунова

Б. С. Калитин¹

В докладе представляется обзор результатов, выполненных в Белоруссии за последние 35 лет, по второму методу Ляпунова [1] с использованием знакопостоянных вспомогательных функций. Подчеркивается преемственность формирования достаточных условий устойчивости, отмеченных в работах Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского [1–3].

Как известно, метод функций Ляпунова базируется на простых геометрических соображениях:

А) для непрерывной определено положительно функции $V(x)$ (в общем случае положительная функция относительно компактного инвариантного множества M фазового пространства X , так что $V(x) = 0 \forall x \in M$) при всех достаточно малых $c > 0$ множество $\{x \in X : V(x) \leq c\}$ задает компактную окрестность K_c для M ;

В) при выполнении условия монотонности функции V вдоль движений $t \rightarrow x(x_0, t_0, t)$ динамической системы (т. е. производная по времени $\dot{V}(x)$ знакопостоянная) окрестности K_c положительно инвариантны. Свойства А) и В) составляют основу достаточного условия устойчивости M в методе функций Ляпунова;

С) если изменение функции V вдоль движений строго монотонно и начальное состояние x_0 принадлежит границе K_c , то $x(x_0, t_0, t) \in \text{int } K_c, \forall t > t_0$. Свойства А) и С) определяют достаточное условие асимптотической устойчивости M .

В работах [2–4] ослаблено требование С) к производной $\dot{V}(x)$. Здесь в теоремах об асимптотической устойчивости (локальной и глобальной), а также в теореме о неустойчивости Н.Н. Красовского [3] производная допускается знакопостоянной, а не знакоопределенной с множеством нуля, не содержащем нетривиальных положительных полутраекторий. Соответствующие результаты были представлены в [3] для автономных и периодических по времени систем дифференциальных уравнений, а также для уравнений с отклоняющимся по времени аргументом.

¹Белорусский государственный университет, Минск

Дальнейшее развитие второго метода по аналогии с идеей Барбашина – Красовского относительно $\dot{V}(x)$ связано с ослаблением требования A), т. е. с использованием не знакоопределенных ($V(x) > 0$, $x \neq M$), а знакопостоянных функций Ляпунова ($V(x) \geq 0$) [5]. В этой работе доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом для систем автономных дифференциальных уравнений. Позднее были приведены различные варианты теорем о неасимптотической устойчивости и неустойчивости.

К настоящему времени теория прямого метода с использованием знакопостоянных функций разработана для широкого класса динамических процессов (динамические и полудинамические системы, системы автономных, почти периодических и неавтономных дифференциальных уравнений, дискретные системы (автономные и неавтономные), системы Пфаффа, системы дифференциально-функциональных включений). Большая часть этих результатов приведена в монографиях [6–9]. Кроме того, использование знакопостоянных функций Ляпунова для систем неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с конечным и бесконечным запаздыванием представлены в монографиях [10, 11].

Совокупность работ [2–11] подчеркивает общие закономерности развития идей метода функций Ляпунова по следующей схеме: знакоопределенные функции \Rightarrow знакоопределенные функции со знакопостоянной производной по времени \Rightarrow знакопостоянные функции. Формулировки соответствующих утверждений прямого метода Ляпунова в каждом из трех подходов естественным образом обобщаются в том же направлении.

- [1] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
- [2] *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Доклады АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
- [3] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959.
- [4] *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [5] *Булгаков Н.Г., Калитин Б.С.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 1. Теория // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978. № 3. С. 32–36.

- [6] *Булгаков Н.Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Минск: Изд. Университетское, 1984.
- [7] *Калитин Б.С.* Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова). Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
- [8] *Калитин Б.С.* Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова). Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
- [9] *Калитин Б.С.* Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений. Минск: БГУ, 2013.
- [10] *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
- [11] *Павликов С.В.* Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации. Набережные Челны: Институт управления, 2010.

О волновом подходе к решению задач оптимизации логистической инфраструктуры

А. Л. Казаков¹, А. А. Лемперт¹

В докладе рассматриваются две классические задачи инфраструктурной логистики: задача об оптимальном размещении обслуживающих центров на некоторой территории с определением их «областей притяжения» (логистических зон обслуживания) и тесно связанная с ней задача об оптимальной организации коммуникаций. При этом потребители могут быть как распределены непрерывно по рассматриваемой территории, так и сосредоточены в некоторых наперед заданных точках. Для указанных задач построен ряд математических моделей в виде задач вариационного исчисления [1,2]. Приведем одну из них.

Пусть в ограниченной области $D \subseteq R^2$ заданы точки $A_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, m}$, и кусочно-непрерывная функция $\gamma \geq f(x, y) \geq 0$, определя-

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

ющая, например, стоимость прокладки коммуникаций в точке (x, y) . Необходимо определить «кратчайшее» (минимальной стоимости) дерево, связывающее точки A_k :

$$T(i, k) = \min_{\Gamma_{i,k}} \int_{\Gamma_{i,k}} f(x, y) d\Gamma,$$

$$\sum_{i \in I, k \in K} T(i, k) \rightarrow \min.$$

Здесь $\Gamma_{i,k} \in G_{i,k}$ — непрерывная кривая, связывающая точки A_i и A_k , $I \cup K = \{1, \dots, m\}$, $G_{i,k}$ — множество всевозможных кривых, соединяющих точки A_i и A_k .

Предложенный авторами численный метод решения данной задачи основан на комбинированном применении оптико-геометрического подхода (который базируется на аналогии между распространением света в оптически неоднородной среде и минимизацией интегрального функционала [3,4]) и алгоритма Дейкстры [5].

Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению модельных и прикладных задач.

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, проект № НШ-5007.2014.9 и РФФИ, проекты №№ 14-07-00222, 13-06-00653.

- [1] Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // *АиТ*. 2013. № 6. С. 87–100.
- [2] Журавская М.А., Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. О методе решения задачи оптимальной прокладки высокоскоростных железнодорожных магистралей с учетом региональных особенностей // *Транспорт: наука, техника, управление*. 2012. № 2. С. 41–44.
- [3] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Мир, 1965.
- [4] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 3: Излучение. Волны. Кванты. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
- [5] Dijkstra E.W. A note on two problems in connexion with graphs // *Numerische Mathematik*. 1959. V. 1. P. 269–271.

О дифференциальных включениях, содержащих малый параметр при производной

Р. И. Каюмов¹

Исследуются сингулярно возмущенные дифференциальные включения с малым параметром при производных. Приведены условия, при которых классическая теорема Тихонова [1] для дифференциальных уравнений распространяется на дифференциальные включения.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\mu \dot{x} \in F(x, t). \quad (1)$$

Здесь $x \in R^n$, $F(x, t): R^n \times R \rightarrow \Omega(R^n)$ — многозначное отображение, $\Omega(R^n)$ — метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с хаусдорфовой метрикой h . Начальное условие $x(0, \mu) = x^0 \in X^0$, где X^0 — компакт в R^n .

Пусть выполнены следующие условия.

1. Многозначное отображение $F(x, t)$ непрерывно в некоторой открытой области G пространства переменных (x, t) и удовлетворяет условию продолжимости решений

$$\|y\| \leq k_1(t)\|x\| + k_2(t), \quad \forall y \in F(x, t),$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ — функции, суммируемые на любом конечном интервале времени.

2. Включение $0 \in F(x, t)$ имеет в некотором ограниченном замкнутом множестве $\bar{D} \subset R^1$ решение $X = \Phi(t)$, такое что

1) $t \rightarrow \Phi(t)$ — непрерывное многозначное отображение в \bar{D} , $\Phi(t)$ — компакт в R^n ;

2) $(\Phi(t), t) \subset G$ при $t \in \bar{D}$;

3) решение $X = \Phi(t)$ является изолированным в \bar{D} , т. е. существует такое $\eta > 0$, что $0 \notin F(x, t)$ при $0 < h(x, \Phi(t)) < \eta$, $t \in \bar{D}$.

Введем так называемую присоединенную систему

$$d\tilde{x}/d\tau \in F(\tilde{x}, t) \quad (\tau \geq 0), \quad (2)$$

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

в которой t рассматривается как параметр.

3. Множество $\Phi(t)$ является асимптотически устойчивым [2] для уравнения (2) равномерно относительно $t \in \bar{D}$.

Рассмотрим присоединенную систему (2) при $t = 0$

$$d\tilde{x}/d\tau \in F(\tilde{x}, 0) \quad (\tau \geq 0), \quad (3)$$

с начальным условием $\tilde{x}(0) = x^0 \in X^0$.

4. Пусть для каждого из решений $\tilde{x}(\tau)$ задачи (3) с начальным условием $\tilde{x}(0) = x^0 \in X^0$

1) $h(\tilde{x}(\tau), \Phi(0)) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$;

2) $(\tilde{x}(\tau), 0) \in G$ при $\tau \geq 0$.

Предположим, что существует отрезок $[0, T] \subseteq D$, где D — множество внутренних точек множества \bar{D} .

Обозначим через $X_\mu(t)$ область достижимости дифференциального включения (1) в момент t .

Теорема. При выполнении условий 1–4 существует постоянная $\mu_0 > 0$ такая, что при $0 < \mu < \mu_0$ каждое из решений $t \rightarrow x(t, \mu)$ дифференциального включения (1) с начальным условием $x(0, \mu) = x^0 \in X^0$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} h(x(t, \mu), \Phi(t)) = 0 \quad \text{при } 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Условия выполнения сформулированных предположений и близкие результаты обсуждались в [3].

- [1] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31, № 3. С. 575–586.
- [2] Филиппов А.Ф. Устойчивость для дифференциальных уравнений с разрывными и многозначными правыми частями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 6. С. 1018–1027.
- [3] Каюмов Р.И. Дифференциальные включения, содержащие малый параметр при производной // Деп. в ВИНТИ 21 августа 1990, № 4713–В90.

Синтез оптимальных систем и оптимальное управление в реальном времени

Ф. М. Кириллова¹, Н. М. Дмитрук², Р. Габасов²

В докладе рассматривается проблема оптимального управления линейными системами. Под управлением понимается процесс, в котором в каждый текущий момент времени формируются целенаправленные (управляющие) воздействия на объект управления по принятой математической модели и информации о поведении объекта, поступившей от измерительных устройств к текущему моменту. Задачи управления рассматриваются в классе дискретных управляющих воздействий, что существенно для предлагаемого подхода к проблеме синтеза оптимальных систем.

Сначала рассматривается простейшая классическая задача оптимального управления

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad (1)$$

$$g_* \leq Hx(t^*) \leq g^*, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T = [t_*, t^*],$$

Пусть в каждый момент $\tau \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}$ ($h = (t^* - t_*)/N$, $N \in \mathbb{N}$) известно состояние $x^*(\tau)$ объекта. Задача (1) погружается в семейство

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(\tau) = z, \quad (2)$$

$$g_* \leq Hx(t^*) \leq g^*, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*],$$

зависящее от $\tau \in T_h$ и $z \in \mathbb{R}^n$. Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (2) для позиции (τ, z) ; X_τ — множество состояний z , для которых существуют программные решения задачи (2).

Функция $u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z)$, $z \in X_\tau$, $\tau \in T_h$, называется оптимальной (дискретной) обратной связью (позиционным решением задачи (1)).

Процесс управления объектом с помощью позиционного решения начинается в момент t_* с подачи на вход объекта управляющего воздействия $u^*(t) = u^0(t_*, x_0)$, $t \geq t_*$. В произвольный момент $\tau \in T_h$

¹Институт математики НАН Беларуси, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

становится известным состояние $x^*(\tau)$ и до поступления следующего измерения на вход объекта подается $u^*(t) = u^0(\tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h[$. В результате получается последовательность управляющих воздействий

$$u^*(t) = u^0(\tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h, \quad (3)$$

которая называется *реализацией оптимальной обратной связи* в рассматриваемом процессе управления.

Поведение объекта управления, замкнутого оптимальной обратной связью $u^0(\tau, z)$, $z \in X_\tau$, $\tau \in T_h$, описывается нелинейным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t, x) + w(t), \quad x(t_*) = x_0,$$

где $w(t)$, $t \in T$, — реализующееся возмущение. Под траекторией замкнутой системы понимается решение линейного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + w(t), \quad x(t_*) = x_0, \quad u(t) \equiv u^0(t, x(t)), \quad t \in T.$$

Классическим методом построения оптимальных обратных связей является динамическое программирование, при использовании которого основная работа выполняется до начала процесса и состоит в табулировании функций $(n+1)$ переменной. В процессе управления никакие вычисления не проводятся. В предлагаемом методе управления основная работа проводится в процессе управления и состоит в коррекции текущих оптимальных программ. Этим самым удастся избежать «проклятия размерности». Для коррекции программ разработан специальный двойственный метод.

Далее в докладе рассматриваются задачи управления линейными системами в условиях неопределенности, которая имеется в математических моделях и измерительных устройствах. Для решения новых задач оптимального управления расширяется класс позиционных решений. Основное внимание уделяется размыкаемым обратным (прямым и комбинированным) связям и приводятся результаты по управлению с помощью замыкаемых и замкнутых связей.

**Задача распределения ресурсов
в двухсекторной экономической модели
с производственной функцией CES**

Ю. Н. Киселёв¹, С. Н. Аввакумов¹, М. В. Орлов¹

Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = uF(x), & x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = (1-u)F(x), & x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv x_2(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}, & u \in [0, 1], \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где x_1, x_2 — фазовые переменные, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$, u — одномерное управление с геометрическим ограничением $0 \leq u \leq 1$, производственная функция

$$F(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} \right)^{-1} \quad (2)$$

типа CES (положительно однородная измерения 1, вогнутая на \mathbb{R}_+^2) — частный случай двухфакторной производственной функции

$$F(x) = A(\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho})^{-\frac{\sigma}{\rho}}, \quad A > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (3)$$

типа CES при $A = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma = \rho = 1$. Предполагается, что

$$x_{10} = x_{20} = 1. \quad (4)$$

Длительность $T > 0$ процесса управления является заданной, конечной, «достаточно» большой. В задаче оптимального управления (1), (2) возможен особый режим, характеризуемый соотношениями

$$x_1 = x_2 > 0, \quad u = u_{\text{снг}} = 1/2.$$

Основной результат: в задаче оптимального управления (1), (2), (4) оптимальная программа управления имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{снг}} = 1/2, & 0 \leq t \leq \theta, \\ 0, & \theta < t \leq T, \end{cases}$$

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

где длительность $T - \theta$ финального участка времени определяется равенством

$$T - \theta = 2 + \ln 3 \equiv \bar{T}, \quad T - \bar{T} = \theta > 0.$$

Схема решения задачи содержит следующие этапы: вычисление возможных особых режимов, составление краевой задачи принципа максимума, нахождение экстремальной тройки, обоснование оптимальности экстремального решения на основе специального интегрального представления приращения функционала [1–3]. Отмеченная схема применялась ранее при изучении аналогичных задач с производственной функцией Кобба – Дугласа [2,3]. В данном случае при построении экстремального решения привлекается специальная функция $y = \text{LambertW}(x)$ ($ye^y = x$). Для начальных состояний, не лежащих на особом луче $L_{\text{sng}} = \{x_1 = x_2 > 0\}$, оптимальный режим содержит три участка: *начальный* — движение к L_{sng} , *особый* — движение вдоль L_{sng} , *финальный* — движение с управлением $u = 0$.

Аналогичные результаты могут быть получены для задачи оптимального управления (1), (3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00175.

- [1] *Киселёв Ю.Н.* Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Моск. обл. М: МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.
- [2] *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба – Дугласа // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46, № 12. С. 1749–1765.
- [3] *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба – Дугласа при различных коэффициентах амортизации // Дифф. уравнения. 2012. Т. 47, № 11. С. 1603–1611.

Равновесные решения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре в классах чистых стратегий

А. Ф. Клейменов¹

В докладе рассматривается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра (НПДИ) двух лиц с нелинейной динамикой, для которой не выполняется условие седловой точки в маленькой игре [1, 2]. Для такой игры известно (см., например, [3]), что в зависимости от того, какого типа принимаются предположения об информированности игроков о текущих значениях управления партнера, равновесные решения в НПДИ могут быть описаны в следующих трех основных случаях: {чистая стратегия первого игрока – контрстратегия второго игрока}, {смешанная стратегия первого игрока – смешанная стратегия второго игрока}, {контрстратегия первого игрока – чистая стратегия второго игрока}. При этом структура равновесных решений предусматривает гипотетическое наказание предполагаемого уклониста в классе тех действий, которые доступны его партнеру.

Изучается вопрос, каким образом трансформируются вычисленные в упомянутых трех основных случаях множества равновесных решений, если оба игрока действуют в классах чистых позиционных стратегий.

Результаты исследования иллюстрируются на следующем примере. Динамика игры двух лиц описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= (u_1 - v_1)^2, \quad |u_1| \leq 1, \quad |v_1| \leq 1, \\ \dot{\varphi} &= u_2 + v_2, \quad |u_2| \leq 1, \quad |v_2| \leq 1\end{aligned}\tag{1}$$

и соотношениями

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \\ t &\in [0, \vartheta], \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$ – фазовый вектор системы, $u = (u_1, u_2)$ – управление первого игрока, $v = (v_1, v_2)$ – управление второго игрока. Це-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

ли первого и второго игроков заключаются в максимизации терминальных показателей I_1 и I_2 соответственно, где

$$I_i(u(\cdot), v(\cdot)) = \langle l^{(i)}, x(\vartheta) \rangle, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

векторы $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ заданы.

В игре (1)–(3) построено множество равновесных решений в классах чистых стратегий игроков. Приводятся результаты для следующих числовых значений параметров: $\rho_0 = 1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{8}$, $l^{(1)} = (1, 1)$, $l^{(2)} = (-1, 1)$.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (грант 12-01-00290).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [3] Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.

Обобщенные решения системы уравнений Гамильтона – Якоби

Е. А. Колпакова¹

Рассмотрим задачу Коши для системы из двух уравнений Гамильтона – Якоби

$$\varphi_t + f(\varphi_x) = 0, \quad \psi_t + \psi_x g(\varphi_x) = 0, \quad (1)$$

с краевым условием

$$\varphi(T, x) = \varphi_T(x), \quad \psi(T, x) = \psi_T(x). \quad (2)$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Здесь $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$. Предполагаем, что функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ дифференцируемы и обладают подлинейным ростом. Функция $g(\cdot)$ не убывает, функции $\varphi_T(\cdot)$, $\psi_T(\cdot)$ липшицевы.

Определение 1. *Обобщенным решением* системы уравнений (1), (2) называется многозначное отображение $(\varphi, \psi) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times 2^{\mathbb{R}}$, где функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ является минимаксным/вязкостным решением первого уравнения системы (1) с краевым условием $\varphi(T, x) = \varphi_T(x)$, а функция $\psi(\cdot, \cdot)$ является М-решением второго уравнения системы (1) с краевым условием $\psi(T, x) = \psi_T(x)$.

Напомним (в нужных нам обозначениях) предложенное А.И. Субботиним [1] понятие многозначного М-решения для уравнения Гамильтона–Якоби с разрывным гамильтонианом.

Определение 2. *М-решением* задачи

$$\psi_t + \psi_x g(\varphi_x(t, x)) = 0, \quad \psi(T, x) = \psi_T(x) \quad (3)$$

называется замкнутое множество $W \subset [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, слабо инвариантное относительно характеристического дифференциального включения (см. [1, с. 452])

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in E(t, x, p), \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

т. е. для любых $(t_0, x_0, z_0) \in (0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{R}$ существует $\tau \in (t_0, T)$ и траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ этого дифференциального включения с начальным условием $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$, удовлетворяющая условию $(t, x(t), z(t)) \in W$ при всех $t \in [t_0, \tau]$.

При сделанных предположениях существует единственное минимаксное/вязкостное решение $\varphi(\cdot, \cdot)$ первого уравнения системы (1), (2). Из работы [2] следует, что функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ является липшицевой и супердифференцируемой, т. е. почти всюду существует $\varphi_x(\cdot, \cdot)$. Из работы [3] следует, что решение $\varphi(\cdot, \cdot)$ недифференцируемо на множестве точек (t, x) , которые лежат на линиях Ранкина–Гюгонио и число этих линий не более, чем счетно. Подставим разрывную функцию $\varphi_x(\cdot, \cdot)$ во второе уравнение системы (1).

Из оговоренных в рассматриваемой задаче предположений и результатов работы [1] следует, что М-решение в задаче (3) существует.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Обобщенное решение задачи (1), (2) существует.*

Предложен алгоритм построения обобщенного решения задачи (1),(2), использующий характеристики каждого из уравнений системы (1).

Рассмотренная задача имеет содержательный смысл в теории иерархических дифференциальных игр, где система уравнений (1),(2) описывает оптимальные результаты двух игроков: лидера и ведомого. Используя понятие обобщенного решения задачи (1),(2), можно построить оптимальные стратегии игроков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 14-01-00168) и проектов УрО РАН 12-П-1-1002, 12-П-1-1012.

- [1] *Лазтин А.С., Субботин А.И.* Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка // Доклады академии наук. 1998. Т. 359, № 4. С. 452–455.
- [2] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.
- [3] *Олейник О.А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Доклады академии наук. 1954. Т. 95, № 3. С. 451–454.

О численном решении дифференциальных игр на минимакс позиционного функционала в классах смешанных стратегий

Д. В. Корнев¹

В рамках теоретико-игрового подхода [1–6] рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой динамическая система, подверженная управляющим воздействиям первого и второго игроков, описывается обыкновенными дифференциальными

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

уравнениями линейными по фазовому вектору. Воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления задан в виде позиционного [3] функционала и оценивает норму совокупности отклонений траектории движения в наперед заданные моменты времени от заданных целевых точек. Первый игрок нацелен минимизировать этот показатель, второй — максимизировать.

В случае, когда выполнено условие седловой точки в маленькой игре [2], исследуемая игра имеет цену и седловую точку в классах чистых позиционных стратегий управления игроков [3]. Для нахождения функции цены игры в [5, 6] предложена процедура, базирующаяся на попятном построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из метода стохастического программного синтеза [2]. В [7] на основе этой процедуры и правила экстремального сдвига [2, 3] разработан численный метод решения данной игры.

Настоящий доклад посвящен случаю, когда условие седловой точки в маленькой игре может быть не выполнено. Тогда в рассматриваемой дифференциальной игре цена и седловая точка существуют в классах стратегии–контрстратегии [2], а также в классах смешанных стратегий [3, 4]. Применимость методов из [5–7] для решения игры в классах стратегии–контрстратегии обоснована в [8]. Здесь показывается, что после введения вспомогательной системы-поводыря, методы из [5–7] также применимы и для решения игры в классах смешанных стратегий. При построении оптимальных стратегий правило экстремального сдвига обеспечивает необходимые гарантии качества управления поводырем, близость движений исходной системы и поводыря достигается при помощи конструкций из [9]. Обсуждается программная реализация развиваемого численного метода, приводятся результаты моделирования.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке гранта РФФИ 14-01-31319-мол_а.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
- [3] Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.

- [4] Красовский А.Н. Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.
- [5] Лукоянов Н.Ю. Одна дифференциальная игра с нетерминальной платой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 85–90.
- [6] Лукоянов Н.Ю. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.
- [7] Корнев Д.В. О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // АиТ. 2012. № 11. С. 60–75.
- [8] Гомоюнов М.И., Корнев Д.В. К вопросу вычисления цены дифференциальной игры в классе контрстратегий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 59–68.
- [9] Красовский А.А., Красовский А.Н. Нелинейная позиционная дифференциальная игра в классе смешанных стратегий / Математическая теория управления и дифференциальные уравнения: сб. статей к 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 144–151.

Восстановление граничных управлений по граничным наблюдениям в системах реакции-конвекции-диффузии

А. И. Короткий¹, Ю. В. Стародубцева¹

Рассматривается управляемая система, состояние которой характеризуется функцией $T = T(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, удовлетворяющей краевой задаче [1–3]

$$\nabla \cdot (k \nabla T) - \vec{v} \cdot \nabla T - qT = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

$$T = u, \quad x \in \Gamma_1; \quad T = w, \quad x \in \Gamma_2, \quad (2)$$

где $k = k(x)$, $q = q(x)$, $f = f(x)$ — заданные функции переменной $x \in \Omega$; $\vec{v} = \vec{v}(x)$ — заданная m -мерная векторная функция переменной $x \in \Omega$, такая что $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ в Ω и $\vec{v} = 0$ на границе Γ области Ω ; u — граничное управление на части Γ_1 границы Γ , принадлежащее множеству допустимых управлений U ; w — граничное управление на части Γ_2 границы Γ , принадлежащее множеству допустимых управлений W ; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; \vec{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω . В содержательных приложениях [1–3] T имеет смысл концентрации (температуры), k — коэффициент диффузии (теплопроводности), \vec{v} — вектор скорости движения среды, функция q характеризует скорость химической реакции, f — плотность производства вещества (тепла) в области Ω .

Пусть управление w неизвестно. Требуется найти это управление по наблюдениям

$$T = u, \quad k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \varphi, \quad x \in \Gamma_1.$$

Если A — оператор решения краевой задачи (1), (2)

$$A: w \rightarrow k \frac{\partial T[w]}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где $T = T[w]$ — решение краевой задачи (1), (2), соответствующее управлению $w \in W$, то решение рассматриваемой задачи наблюдения сводится к нахождению решения операторного уравнения

$$Aw = \varphi. \quad (3)$$

Указаны условия на параметры краевой задачи (1), (2), при которых для любых $u \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, $f \in L_2(\Omega)$ задача имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, непрерывно зависящее от граничных данных и правой части уравнения (1). Исследована гладкость этого решения в зависимости от гладкости исходных данных.

Установлено, что рассматриваемая задача реконструкции является некорректной (неустойчивой по граничным данным) или, другими словами, операторное уравнение (3) некорректно на соответствующей паре пространств.

Авторами разработаны регуляризирующие методы и алгоритмы решения задачи реконструкции, из которых отметим вариационный метод, метод квазиобращения, модификации известных методов

Ньютона – Канторовича, Ландвебера, Левенберга – Марквардта [4,5]. Приводятся результаты численного моделирования решения задачи реконструкции с граничными режимами различной степени гладкости.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 14-01-00155).

- [1] Самарский А.А., Вабичев П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003.
- [2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [3] Короткий А.И. Оптимальное граничное управление в модели реакции-конвекции-диффузии. Вест. Тамбовского ун-та. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5. С. 2558–2560.
- [4] Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.
- [5] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

О полиэдральном синтезе управлений в многошаговых системах в условиях неопределенности и фазовых ограничений

Е. К. Костоусова¹

Рассматриваются задачи терминального целевого управления по принципу обратной связи для линейных и билинейных многошаговых систем в условиях неопределенности и фазовых ограничений.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Известны подходы к решению задач такого рода, в том числе методы для дифференциальных систем, основанные на построении трубок разрешимости [1, 2]. Поскольку практическое нахождение трубок решимости может быть затруднительно, предложены различные численные методы их построения. В частности, в рамках линейных систем были развиты методы решения, основанные на использовании областей некоторой фиксированной формы, таких как эллипсоиды и параллелепипеды (см. например, [2–5] и для многошаговых систем — [6, 7]). Основное преимущество подобных методов состоит в том, что они позволяют получать решения относительно простыми средствами.

Работа посвящена развитию методов синтеза управлений в многошаговых системах с использованием полиэдральных (параллелотопозначных) трубок разрешимости. Для систем с линейной / билинейной структурой рассмотрены два типа задач синтеза управлений: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Исследованы случаи как без неопределенностей, так и с таковыми, включая аддитивные неопределенности с параллелотопозначными ограничениями и неопределенности интервального типа в матрице системы. Для каждого из вышеупомянутых случаев найдены нелинейные рекуррентные соотношения, описывающие полиэдральные трубки разрешимости. В случае без неопределенностей в матрице указанные соотношения задаются явными формулами. В противном случае, при некоторых предположениях (которые естественным образом выполняются, например, для многошаговых систем, полученных из дифференциальных систем с помощью аппроксимаций Эйлера) решения могут быть найдены с использованием последовательных приближений. Рассмотрены также аналогичные, но более сложные, системы при наличии ограничений на состояние. Фазовые ограничения описываются в терминах пересечений гиперполос. Найдены соответствующие рекуррентные соотношения для полиэдральных трубок разрешимости. Предложены стратегии управления, которые (в отличие от рассмотренных в [7]) могут быть вычислены по явным формулам на основе этих трубок. Представлены результаты численного моделирования.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 12-П-1-1019), РФФИ (проект № 12-01-00043) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2692.2014.1).

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференци-

альные игры. М.: Наука, 1974.

- [2] *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [3] *Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.* О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 6. С. 849–881.
- [4] *Дарьин А.Н., Куржанский А.Б.* Параллельный алгоритм вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределенных возмущениях // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, № 1. С. 47–57.
- [5] *Kostousova E.K.* Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 2001. Vol. 14, no. 4. P. 267–310.
- [6] *Важнецов А.Ю.* О внутренних эллипсоидальных аппроксимациях для задач синтеза управления при ограниченных координатах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 70–77.
- [7] *Костоусова Е.К.* О полиэдральных оценках в задачах синтеза стратегий управления в линейных многошаговых системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. Вып. 9. С. 84–105.

Управление и стабилизация математических моделей ВИЧ динамики (процессов)

А. Н. Красовский¹, Г. А. Бочаров², А. В. Ким³,
В. В. Глушенкова³, М. А. Сафронов³

В докладе обсуждаются вопросы управления математическими моделями, описывающими ВИЧ динамику. Обсуждаются общие вопросы постановки задач управления ВИЧ динамикой и подходы, основанные на методах, разработанных в рамках свердловской математической школы по теории управления: программные управления и позиционные стратегии управления, основанные на методах теории позиционных дифференциальных игр. Соответствующие алгоритмы управления проиллюстрированы на задачах управления и стабилизации HIV Callaway – Perelson model.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00065, 14-01-00477, 13-01-00110, 13-01-00089), программы президиума РАН «Фундаментальные науки — медицине» и Урало-сибирского междисциплинарного проекта.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Burkhauser, 1994.
- [3] Ким А.В., Красовский А.Н. Математическое и компьютерное моделирование систем с последствием // Екатеринбург. УГТУ-УПИ, 2011.
- [4] Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. Некоторые задачи игрового управления. Екатеринбург: УрГСХА, 2012.
- [5] Glushenkova V.V., Kim A.V. Mathematical and computer modeling of a mathematical immune model / Proceedings of the Russia-Korea workshop on advanced computer and information technologies. 2012.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт вычислительной математики РАН, Москва

³Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

- [6] Косова А.А., Ким А.В., Ким П.С., Ан Р.Н., Глушенкова В.В., Новоселов А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых биомедицинских процессов. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013.
- [7] Ким А.В., Кормышев В.М., Сафронов М.А. Моделирование и стабилизация распространения ВИЧ в организме человека // Аграрный вестник Урала, № 11(117). 2013. С. 9–12.

Алгоритмы построения равновесных траекторий в динамических биматричных играх

Н. А. Красовский¹, А. М. Тарасьев²

В рамках теории дифференциальных игр [1] рассматривается модель эволюционной игры с ненулевой суммой между двумя группами участников. Используются некоторые идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр [2]. Исследуются конструкции и методы анализа эволюционных игр, предложенные в работе [3]. Внимание сконцентрировано на построении динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрыша. Строятся разрешающие траектории, обеспечивающие результат лучший по сравнению с классическими моделями, например, моделями с репликаторной динамикой.

Динамика игрового взаимодействия соответствует дифференциальным играм [1–3] и эволюционным игровым моделям. Предполагается, что случайные взаимодействия между участниками представлены управляемым динамическим процессом, при котором соответствующие вероятности формируют фазовый вектор. Роль управляющих параметров играют информационные сигналы для участников. Такая динамика может быть интерпретирована как обобщение известных уравнений Колмогорова с управляющими параметрами.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Выигрыши участников в каждом раунде специфицируются матрицей выигрышей. Рассматриваются различные типы средних значений выигрышей групп: терминальные — для фиксированного времени и мультитерминальные — для предела на бесконечном интервале времени.

Для построения равновесного решения предлагается подход, основанный на концепции «гарантии» и обеспечивающий лучшие результаты нежели классические решения эволюционных игр. Новые решения генерируются в рамках теории позиционных дифференциальных игр и вовлекают гарантирующие обратные связи во вспомогательных играх с нулевой суммой [1, 2]. Игры с нулевой суммой рассматриваются в рамках теории минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби [4, 5]. Проводятся аналитические построения для функции цены и проверяются необходимые и достаточные условия, которые формулируются в терминах сопряженных производных [5].

Качественное поведение равновесных решений, порожденных гарантирующим синтезом, существенно отличается от траекторий эволюционных игр, представленных в классических моделях. Новые равновесные решения не являются гладкими и имеют переключения по характеристикам уравнений Гамильтона–Якоби. В отличие от классических траекторий они расположены в пересечении областей, для которых величины выигрышей игроков лучше соответствующих величин выигрышей, рассчитанных для статического равновесия по Нэшу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00486а), проектов УрО РАН (12-П-1-1002, 12-С-1-1017), Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург, Наука, 1993.
- [3] Кряжсимский А.В., Осипов Ю.С. О дифференциально-эволюционных играх // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
- [4] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука. 1991.

- [5] *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, З. С. 559–564.

Априорное моделирование пространственного движения объектов с ограниченной маневренностью

С. В. Кругликов¹

Рассматриваются алгоритмы решения априорных задач прокладки маршрута группы объектов на основе структурных свойств (дuality, разделения) задач управления и оценивания в гарантированной постановке [1]. Исследуемые задачи мотивированы проблемами навигации, прокладки маршрута, регулирования [2] и смежными математическими задачами планирования движения группы объектов.

Разработана структура семейства согласованных алгоритмов, обеспечивающих априорное построение сети локально линейных трубок траекторий при наличии внешних ограничений. В состав семейства входят алгоритмы: обработки массивов картографической информации, представляемой согласно международным стандартам; конструктивного описания препятствий на основе системы невыпуклых и несвязных множеств; формирования по заданной паре терминальных позиций сети типовых оптимальных маршрутов. Рассмотрены несколько вариантов формализации внешних ограничений для моделирования семейства невыпуклых и несвязных препятствий. Сформулированы конструктивные условия, определяющие выбор варианта формализации семейства внешних ограничений, упорядоченных по уровням и масштабам иерархических систем, описывающих проходы. За основу принято согласование масштабов представления картографической информации и параметров, описывающих характеристики маневренности объектов, а следовательно, трубок возможных маршрутов.

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

(1) Стандартное для морских навигационных карт представление внешних ограничений предполагает исследование конечного семейства замкнутых невыпуклых непересекающихся полигонов. Разработаны конструктивные условия распараллеливания вычислительных алгоритмов, анализирующие пересечение контуров, построение выпуклых оболочек и комбинации выпуклых множеств, описывающих проходы. За основу принят параллельный алгоритм построения выпуклой оболочки с наперед заданной точностью по множеству крайних точек плоского контура.

(2) Существенный частный случай составляет конструктивное описание внешних ограничений на основе конечного семейства порождающих замкнутых шаров.

Прокладка набора маршрутов в обход сухопутных образований вида (1) показала необходимость предварительного выделения системы двойственных объектов, не зависящих от конкретной постановки, так называемых сложных препятствий. Возможность распараллеливания расчетных алгоритмов прокладки маршрута исследована на основе структурных соотношений, связывающих задачи априорной прокладки сети трубок постоянного сечения [3] и оптимизации блочно-диагональной структуры дискретного семейства матрично-значных функций, описывающего включения проекций невыпуклых и несвязных множеств.

Разработанные алгоритмы обеспечивают возможность динамического моделирования изменения обстановки за счет включения новых объектов или возникновения структурных связей между ранее выявленными объектами. Полученные результаты могут применяться для разработки блоков априорной прокладки маршрутов в перспективных системах управления безэкипажными катерами и платформами морского базирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00043.

- [1] *Kurzhanski A.B., Mitchel I.M., Varaiya P.* Optimization techniques for state-constrained control and obstacle problems // JOTA, 2006. Vol. 128(3), pp. 499–521.
- [2] *Sharma Sk., Sutton R., Roberts G.* A local control network autopilot for an unmanned surface vehicle // Manoeuvring and Control of Marine Craft: Proc. 9th IFAC Conference, Arenzano, Italy. Sept. 2012.

- [3] *Kruglikov S.V., Kruglikov A.S.* An a priori planning of joint motions for USV as a problem of guaranteed control/estimation // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vols. 494–495, pp. 1110–1113.

Об одной задаче дискретного управления рекламой

К. Н. Кудрявцев¹, И. С. Стабулит²

Во многих отраслях конкуренция между компаниями за долю рынка происходит, прежде всего, на основе рекламы. Типичными примерами здесь являются рынки прохладительных напитков, пива, сигарет. Воздействие рекламы на таких рынках описывается динамическими моделями (Sorger [1], Sethi [2] и др.). Как правило, это модели непрерывного времени. Однако сами рекламные акции по сути дискретны.

В работе рассматривается дискретная задача оптимального планирования рекламного бюджета в дуополии, математическая модель которой представляет собой многошаговую позиционную бескоалиционную игру двух лиц

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i \in \{1, 2\}}, \{\mathcal{J}_i(U_1, U_2, x_0)\}_{i \in \{1, 2\}} \rangle \quad (1)$$

с начальной позицией $(0, x_0)$.

В выражении (1) цифры 1 и 2 — порядковые номера игроков; Σ — управляемая дискретная система, изменение ее в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots, T-1$ описывается системой двух разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\delta)x_1(t) + \rho_1 u_1[t]\sqrt{x_2} - \rho_2 u_2[t]\sqrt{x_1} + \frac{\delta}{2}, \\ x_2(t+1) &= (1-\delta)x_2(t) - \rho_1 u_1[t]\sqrt{x_2} + \rho_2 u_2[t]\sqrt{x_1} + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $x_i(t)$ — доля рынка, принадлежащая игроку i в момент времени t ; при этом в любой момент времени t соблюдается равенство $x_1(t) + x_2(t) = 1$.

¹Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск

²Челябинская государственная агроинженерная академия

Символом \mathfrak{A}_i в (1) обозначено множество позиционных стратегий

$$U_i = (U_i(0), U_i(1), \dots, U_i(T-1))$$

i -го игрока. Значение стратегии U_i ($i = 1, 2$) в момент k отождествляется с функцией $u_i(k, x)$, зависящей от позиции (k, x) ; $u_i[k]$ — реализация использованных игроками стратегий, $u_i[0] = u_i(0, x_0)$, $u_i[t] = u_i(t, x(t)) \forall t = 1, \dots, T-1$.

Последнее обозначение $\mathcal{J}_i(U_1, U_2, x_0)$ в (1) — функция выигрыша i -го игрока, определяемая функционалом

$$\mathcal{J}_i(U_1, U_2, x_0) = \frac{m_i x_i(T)}{(1+r)^T} + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{m_i x_i(k) - c_i u_i^2[k]}{(1+r)^k}, \quad (2)$$

значение которого (*выигрыш*) оценивает качество функционирования игрока i в игре (1); функция выигрыша (2) формируется на трех последовательностях

$$\{x(k) \mid k = 0, 1, \dots, T\}, \quad \{u_i[k] \mid k = 0, 1, \dots, T-1\} \quad (i \in \{1, 2\})$$

и определяется стратегиями U_1, U_2 , выбранными игроками.

В (2) постоянная r представляет собой коэффициент дисконтирования, а константы m_i, c_i — параметры, «оценивающие» долю рынка и силу воздействия рекламы i -го игрока соответственно.

Используя модификацию метода динамического программирования Беллмана из [3], для игры (1) построен явный вид ситуаций равновесия по Нэшу и равновесных выигрышей. Исследован кооперативный вариант игры.

- [1] *Sorger G.* Competitive dynamic advertising: A modification of the Case game // *Journal of Economics Dynamics and Control.* 1989. № 13. P. 55–80.
- [2] *Naik P.A., Prasad A., Sethi S.P.* Building brand awareness in dynamic oligopoly markets // *Management Science.* 2008. V. 54, № 1. P. 129–138.
- [3] *Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.* Уравновешивание конфликтов и приложения. М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012.

Канонические аппроксимации в задаче стабилизации автономных функционально-разностных уравнений

Е. В. Кукушкина¹

Рассматривается автономная система функционально-разностных уравнений

$$x(t) = \int_{-r}^0 d\eta(\vartheta) x(t + \vartheta) + Bu, \quad (1)$$

где $x \in [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, η — матричнозначная функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-r, 0]$, $\eta(0) = \eta(-0) = 0$, B — постоянная матрица.

Канонические аппроксимации применялись при нахождении стабилизирующих управлений для систем с последействием в работах Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова, L. Pandolfi и других авторов [1–3]. В этих работах при решении задачи стабилизации использовалось пространство состояний $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и координатное описание канонических аппроксимаций.

Удобно перейти от конечномерной к бесконечномерной постановке задачи. При фиксированном $t \geq 0$ в качестве элемента решения системы (1) будем рассматривать отрезок решения [4]

$$x_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi), \quad -r \leq \vartheta \leq 0,$$

$$\begin{aligned} x_t(\cdot, \varphi) &\in \tilde{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{C}}([-r, 0], \mathbb{R}^n) = \\ &= \left\{ z : z \in \mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n), z(0) = \int_{-r}^0 d\eta(\vartheta) z(\vartheta) \right\}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

В функциональном пространстве состояний $\tilde{\mathbb{C}}$ системе (1) соответствует дифференциальное уравнение с замкнутым неограниченным оператором $A : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$, определенным в работе [5].

При построении канонических аппроксимаций в задаче стабилизации системы функционально-разностных уравнений используется

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

схема проекционного метода, в которой проекционные операторы определяются формулами

$$\mathbf{P}_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} R(\lambda; A) d\lambda,$$

где Γ_N — замкнутый спрямляемый контур, лежащий в резольвентном множестве $\rho(A)$, содержащий внутри себя множество $\sigma_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \sigma(A)$ и не содержащий точки $\sigma(A) \setminus \sigma_N$. Ориентация контура Γ_N выбрана так, что при его обходе множество σ_N остается слева. Резольвента $R(\lambda; A)$ определена в работе [6], в которой также доказано, что она может быть продолжена из $\tilde{\mathbb{C}}([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ на пространство $\mathbb{L}_2([-r, 0], \mathbb{C}^n)$.

Предложены и численно реализованы конструктивные алгоритмы канонической схемы аппроксимации задачи стабилизации автономных систем функционально-разностных уравнений. При реализации указанного подхода используются результаты работ [6, 7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00094-а.

- [1] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
- [2] Маркушин Е.М., Шиманов С.Н. Приближенное решение задачи аналитического регулятора для систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026.
- [3] Pandolfi L. Canonical realizations of systems with delays // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 4. P. 598–613.
- [4] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
- [5] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
- [6] Dolgii Yu.F., Kukushkina E.V. Construction of the approximate characteristic equations for autonomous systems of functional-difference equations // Funct. Different. Equat. 2008. Vol. 15, no. 3–4. P. 183–198.
- [7] Быков Д.С., Долгий Ю.Ф. Канонические аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 20–34.

Максимальные стабильные мосты в задачах преследования с двумя догоняющими и одним убегающим

С. С. Кумков¹, В. С. Пацко¹

В докладе представлены результаты построения множеств уровня функции цены (максимальных стабильных мостов [1]) для следующей дифференциальной игры. Три точки (два преследователя P_1 , P_2 и один убегающий E) передвигаются по прямой. Динамика движения объектов описывается в векторной форме соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{P_i} &= A_{P_i} \mathbf{z}_{P_i} + B_{P_i} u_{P_i}, \\ \mathbf{z}_{P_i} &\in R^{n_{P_i}}, \quad u_{P_i} \in \mathcal{P}_i \subset R^{p_i}, \quad i = 1, 2; \\ \dot{\mathbf{z}}_E &= A_E \mathbf{z}_E + B_E v, \\ \mathbf{z}_E &\in R^{n_E}, \quad v \in \mathcal{Q} \subset R^q.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь A_{P_1} , A_{P_2} , A_E — квадратные матрицы соответствующих размеров; B_{P_1} , B_{P_2} — матрицы размеров $n_{P_1} \times p_1$ и $n_{P_2} \times p_2$, B_E — матрица размера $n_E \times q$. Компоненты векторных управлений u_{P_i} преследователей, $i = 1, 2$, и v убегающего ограничены по модулю, т. е., компакты \mathcal{P}_i , \mathcal{Q} являются прямоугольными параллелепипедами в своих пространствах.

Пусть z_{P_i} , z_E — первые компоненты векторов \mathbf{z}_{P_i} , $i = 1, 2$, \mathbf{z}_E , соответствующие геометрическим координатам объектов на прямой.

В назначенный заранее момент T_1 измеряется расстояние $r_1(T_1) = |z_{P_1}(T_1) - z_E(T_1)|$ между преследователем P_1 и убегающим E . Аналогично, в назначенный момент T_2 измеряется расстояние $r_2(T_2) = |z_{P_2}(T_2) - z_E(T_2)|$ между P_2 и E . Платой в игре является минимум из этих двух расстояний:

$$\varphi = \min\{r_1(T_1), r_2(T_2)\}.\tag{2}$$

Первый игрок, объединяющий преследователей P_1 и P_2 , минимизирует значение платы. Второй игрок, отождествляемый с убегающим E , старается максимизировать плату.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Ранее авторы исследовали [2–4] задачу (1), (2) для частного случая динамики объектов. Однако разработанные алгоритмы построения максимальных стабильных мостов позволяют провести численное исследование мостов и закономерностей их структуры для более широкого класса динамик. Этому посвящён доклад.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта УрО и СО РАН, проект № 12-С-1-1017.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Le Ménec S. Linear differential game with two pursuers and one evader / Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 11: Advances in Dynamic Games. Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games. M. Breton, K. Szajowski (Eds.). Boston: Birkhauser, 2011, pp. 209–226.
- [3] Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Ménec S., Patsko V.S. Model problem in a line with two pursuers and one evader // Dynamic Games and Applications. 2012. No. 2, pp. 228–257.
- [4] Ganebny S.A., Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. Model differential game with two pursuers and one evader / Contributions to game theory and management. Vol. V. Collected papers presented on the Fifth International Conference “Game Theory and Management”, Leon A. Petrosyan, Nikolay A. Zenkevich (Eds), Saint-Petersburg: Graduate School of Management SPbU, 2012, pp. 83–96.

Теория трубок траекторий в задачах группового управления

А. Б. Куржанский¹

Приведена общая схема решения задачи целевого управления стаей систем, совершающих совместное движение в условиях препятствий, с использованием теории трубок траекторий. Обсуждается перечень промежуточных задач, на которые предлагается разбить решение основной задачи. Указаны методы решения таких задач и средств их координации, развитые под влиянием работ Н.Н. Красовского и его последователей.

Наилучшие аппроксимации множеств конечными наборами кругов

П. Д. Лебедев², А. Л. Казаков³

В задачах теории оптимального управления [1] часто требуется проводить замену множеств со сложной геометрией более удобными в работе конструкциями. На плоскости одним из самых легко реализуемых и одновременно сохраняющим информацию способов аппроксимации является подмена исходного множества объединением конечного числа кругов равного радиуса [2, 3]. Близкие задачи об аппроксимации плоских фигур эллипсами рассматривались в работах А.Б. Куржанского и его учеников [4]. Вопросы существования и единственности оптимальных покрытий множеств шарами равного радиуса в различных евклидовых пространствах были изучены А.Л. Гаркави [5] и Е.Н. Сосовым [6]. Основным элементом их построения является отыскание наилучшей n -сети множества M , которая

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

³Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

является обобщением понятия чебышевского центра [5] для случая нескольких точек.

В некоторых случаях движения динамических систем происходят на замкнутой поверхности в трехмерном пространстве. Возникает необходимость наилучшей аппроксимации множеств на поверхности некоторыми аналогами кругов на ней. Авторами рассмотрены покрытия множеств на сфере единичного радиуса сферическими круговыми сегментами. Близкая по своей математической постановке задача возникает при проектировании систем охраны подводных объектов [7].

Кроме задач оптимального управления, другим направлением практического применения наилучших n -сетей и оптимальных покрытий является построение транспортных сетей и размещение логистических центров обслуживания [8].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002); при поддержке интеграционного проекта УрО и СО РАН, проект (12-С-1-1017); при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Лебедев П.Д., Бухаров Д.С. Аппроксимация многоугольников наилучшими наборами кругов // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. «Математика». 2013. № 3. С. 72–87.
- [3] Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств наборами кругов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 88–99.
- [4] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser. 1997.
- [5] Гаркави А.Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 1. С. 87–106.
- [6] Сосов Е.Н. Метрическое пространство всех N -сетей геодезического пространства // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2009. Т. 15. Вып. 4. С. 136–149.

- [7] Бычков И.В., Максимкин Н.Н., Хозяинов И.С., Киселев Л.В. О задаче патрулирования границы акватории, охраняемой группой подводных аппаратов // Технические проблемы освоения мирового океана: материалы 5-ой Всерос. науч.-техн. конф. Владивосток. 2013. С. 424–429.
- [8] Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // АиТ. 2013. № 6. С. 87–100.

Конечномерные моделирующие поводьры конфликтно-управляемых систем нейтрального типа

Н. Ю. Лукоянов¹, А. Р. Плаксин¹

Рассматривается конфликтно-управляемый объект, движение которого описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла [1]:

$$\frac{d}{dt} \left(x[t] - g(t, x_t[\cdot]) \right) = f(t, x_t[\cdot], u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1)$$

$$x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент t ; $h = \text{const} > 0$; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке $[t-h, t]$, причем $x_t[\zeta] = x[t+\zeta]$, $\zeta \in [-h, 0]$; u — управляющее воздействие; v — противодействие (воздействие неконтролируемой помехи); \mathbb{U} и \mathbb{V} — известные компакты конечномерных пространств.

Для этой системы строится моделирующий объект-поводьрь с управляющими воздействиями $\tilde{u} \in \mathbb{U}$ и $\tilde{v} \in \mathbb{V}$. Движение моделирующего объекта описывается при помощи аппроксимирующей уравнение (1) системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, подобной [2–6]. Указывается правило формирования

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

управляющих воздействий u и \tilde{v} в дискретной по времени цепи обратной связи. Согласно этому правилу между исходным объектом и моделирующим поводырем, по сути, осуществляется процедура взаимного прицеливания [7].

Основным результатом работы является доказательство того, что при подходящем выборе моделирующей системы, при осуществлении указанной процедуры взаимного прицеливания, для любых допустимых реализаций управляющего воздействия \tilde{u} и противодействия v движения исходной и моделирующей систем будут близки в равномерной метрике. Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (14-01-31319 мол_а).

- [1] *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations, New York, Springer, 1977.
- [2] *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
- [3] *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // ПММ. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
- [4] *Куржанский А.Б.* К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. С. 2094–2107.
- [5] *Matvii O.V., Cherevko I.M.* On approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations // Nonlinear Oscillations, Vol. 10, no. 3, 2007. P. 330–338.
- [6] *Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Конечномерные моделирующие поводьры в системах с запаздыванием // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2013. Т. 19, № 1. С. 182–195.
- [7] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

**Об одном способе построения
компромиссных наборов стратегий
в дифференциальных играх нескольких лиц**

С. В. Лутманов¹

В докладе рассматривается игра нескольких лиц, в которой интерес каждого игрока, помимо минимизации своей платы, состоит еще и в том, чтобы любой из его оппонентов не мог получить результат лучший (меньший) некоторой заданной величины. При этом собственный результат игрока должен быть не хуже (не больше) другой заданной величины. В работе принимается, что рациональное поведение участников описанного конфликта состоит в выборе компромиссного набора стратегий, обеспечивающего каждому игроку значение платы не хуже (не больше) верхней оценки платы. При этом никакое единоличное уклонение игрока от стратегии, предписываемой компромиссным набором, не позволяет ему получить значение платы лучше (меньше) нижней оценки платы. Формальное определение компромиссного набора стратегий приводится ниже.

Определение. Ситуация $W^{comp} \in \{W\}$ называется компромиссной по отношению к оценкам S_*, S^* , если для всех $i \in K$ справедливы неравенства

$$S_{i*} \leq \min_{U_i \in \{U_i\}} I_i(U_1^{comp}, \dots, U_{i-1}^{comp}, U_i, U_{i+1}^{comp}, \dots, U_k^{comp}) \leq$$

$$I_i(U_1^{comp}, \dots, U_{i-1}^{comp}, U_i^{comp}, U_{i+1}^{comp}, \dots, U_k^{comp}) \leq S_i^*$$

Построение компромиссного набора стратегий осуществляется для дифференциальной игры нескольких лиц, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \dots, u_k).$$

Здесь $t \in [t_0, T] \subset R^1$ — текущее время, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ — фазовый вектор объекта, $u_i \in P_i \subset R^{r_i}$ — вектор управляющих параметров i -го игрока, множества P_i , $i \in K$, компактны. Плата i -го игрока является терминальной и определяется формулой

$$I_i = \sigma_i(x(T)),$$

¹Пермский государственный национальный исследовательский университет

где $\sigma_i : R^n \rightarrow R^1$, $i \in K$, — некоторая заданная непрерывная функция, $x(\cdot)$ — реализация фазового вектора объекта, T — момент окончания игры. Игра формализуется в классе конструктивных движений [1]. Принимается, что физическая реализация управляющих воздействий игроков происходит в согласованные (в одни и те же для всех игроков) моменты времени. При дополнительных предположениях относительно динамики игры в работе приводится один способ построения компромиссного набора позиционных стратегий. Рассматривается модельный пример, иллюстрирующий данный подход.

- [1] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

Об отслеживании траекторий динамических систем методами экстремального управления

В. И. Максимов¹

Доклад посвящен обсуждению задач отслеживания решений управляемых систем с помощью метода экстремального сдвига. Рассматриваются различные типы систем: системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями с последствием, уравнениями с распределенными параметрами. Предполагается, что входная информация (результаты измерения текущих фазовых положений) неточна и поступает по ходу процесса. Суть задач состоит в построении алгоритмов управления по принципу обратной связи, которые гарантировали бы заданное качество управляемого процесса, например, отслеживание траекторией заданной управляемой системы предписанной траектории некоторой эталонной системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Методы решения подобного типа задач хорошо известны и излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления. В настоящем сообщении обсудим алгоритмы решения задач, имеющих ряд особенностей. В частности, рассмотрим случай, когда система

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями и измеряются не все, а часть фазовых координат. Кроме того, рассмотрим ситуацию, когда относительно возмущения, действующего на эталонную систему, известно лишь, что оно является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т. е. может быть неограниченным. Учитывая данные особенности, сконструируем устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмы решения, которые основаны на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 13-01-12446-офиМ2.

К вопросу об изучении одного варианта управляемой модели Солоу

М. С. Никольский¹

Среди часто изучаемых моделей математической экономики привлекают определенный интерес оптимизационные задачи, связанные с управляемой моделью Солоу (см., например, в [1] разделы 4.1 и 4.3, а также статью [2] и др.). Настоящая работа продолжает исследования работы [2].

В нашей работе динамика управляемой системы в удельных показателях описывается одномерным нелинейным уравнением, в котором фазовой переменной является удельный капитал, а роль управления играет удельное потребление на одного работника, на которое накладываются смешанные ограничения. Управляемый процесс протекает на отрезке времени $[0, T]$ под воздействием измеримого управления и начинается из заданного начального состояния. Также фиксируется терминальное состояние управляемой системы в конечный момент T .

Качество допустимого управления оценивается интегральным функционалом, описывающим дисконтированную полезность от потребления, который надо максимизировать. Таким образом, рассмат-

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

ривается некоторый вариант задачи об оптимальном росте для односекторной замкнутой экономической системы с конечным горизонтом управления и положительной нормой дисконтирования.

Большую сложность в рассмотрении [2] вызывает наличие смешанных ограничений на управление. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина в форме, например, [3] вызывает большие трудности. Мы предлагаем использовать переход к новой, эквивалентной оптимизационной задаче, в которой ограничения на управление имеют традиционный вид, и дальше применить обычный принцип максимума Понтрягина. В рассматриваемой оптимизационной задаче такой переход удобно осуществить с помощью несложной замены управления. На этом пути удалось получить простое аналитическое описание множеств достижимости исследуемого управляемого объекта и установить общие условия существования оптимального управления. Также были получены эффективные достаточные условия, обеспечивающие непрерывность оптимального управления и отсутствие особых режимов.

Благодарю Н.Л. Григоренко за предоставленные материалы и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 12-01-00506, 12-01-00175-а, 13-01-00685, 13-01-12446 офи-м2.

- [1] *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: Юнити, 2005.
- [2] *Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н.* Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс. 2013. № 44. С. 5–21.
- [3] *Seierstad A., Sydsaeter K.* Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1987.

**Теоремы неединственности
для периодических параболических задач
с разрывными нелинейностями**

В. Н. Павленко¹

Исследуется разрешимость периодической по t задачи

$$\begin{aligned} Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x,t)u_{x_j} + c(x,t)u = \\ = g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u(x,0) = u(x,T), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω — ограниченная в \mathbb{R}^n область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, функция $g(x,t,u) = g_2(x,t,u) - g_1(x,t,u)$, $g_1(x,t,u)$ — каратеодориева, $g_2(x,t,u)$ — суперпозиционно измеримая и обе неубывающие по u . Оператор L равномерно параболический в Q_T , его коэффициенты a_{ij} , b_j , c и производные $(a_{ij})_{x_j}$ принадлежат $L^\infty(Q_T)$.

Определение 1. Функция $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ называется *сильным решением задачи (1)–(2)*, если для неё выполнено условие (2) и почти всюду на Q_T она удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Функция \bar{u} (\underline{u}) из $W_2^{2,1}(Q_T)$ называется *верхним (нижним) решением задачи (1)–(2)*, если

$$\text{а) } L\bar{u} \geq g(x,t,\bar{u}(x,t)), \quad \left(L\underline{u} \leq g(x,t,\underline{u}(x,t)) \right);$$

$$\text{б) } \bar{u}|_{S_T} \geq 0, \quad \left(\underline{u}|_{S_T} \leq 0 \right);$$

$$\text{в) } \bar{u}(x,0) \geq \bar{u}(x,T), \quad \left(\underline{u}(x,0) \leq \underline{u}(x,T) \right).$$

¹Челябинский государственный университет

Для задачи (1)–(2) получен принцип верхних и нижних решений существования сильных решений. С его помощью доказываются теоремы неединственности для задачи (1)–(2). Приведем основные результаты.

Теорема 1. *Предположим, что $q > n + 2$, λ_1 — минимальное собственное значение оператора L с условиями (2) и $\gamma < \lambda_1$. Пусть существуют положительные постоянные r_0, r_1 и k_1 такие, что почти всюду на Q_T*

$$1) \ g(x, t, u) \geq \lambda_1 u, \forall u \in (0, r_0], \left(g(x, t, u) \leq \lambda_1 u, \forall u \in [-r_0, 0) \right);$$

$$2) \ g(x, t, u) \leq \gamma u + k_1, \forall u \geq r_1, \left(g(x, t, u) \geq \gamma u - k_1, \forall u \leq -r_1 \right);$$

$$3) \ g(x, t, 0) = 0 \text{ на } Q_T \text{ и функции } g_i(x, t, \cdot), i = 1, 2, \text{ ограничены на отрезках полупрямой } \mathbb{R}_+ (\mathbb{R}_-) \text{ равномерно по } (x, t) \in Q_T.$$

Тогда задача (1)–(2) имеет сильное положительное (отрицательное) решение из $W_q^{2,1}(Q_T)$.

Теорема 2. *Пусть q и λ_1 те же, что и в теореме 1, $g(x, t, 0) = 0$ на Q_T и $g_i(x, t, \cdot), i = 1, 2$, ограничены на отрезках числовой прямой равномерно по $(x, t) \in Q_T$.*

Предположим, что

$$1) \text{ существует } r_0 > 0 \text{ такое, что для почти всех } (x, t) \in Q_T$$

$$\frac{g(x, t, u)}{u} \geq \lambda_1, \forall u \in [-r_0, r_0] \setminus \{0\};$$

$$2) \limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{g(x, t, u)}{u} \leq \gamma < \lambda_1 \text{ почти всюду на } Q_T.$$

Тогда задача (1)–(2) имеет положительное и отрицательное сильные решения из $W_q^{2,1}(Q_T)$.

**Распространение теоремы
Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского
об устойчивости на управляемые системы
на гладких многообразиях**

Е. А. Панасенко¹, Е. Л. Тонков²

Рассматривается *стандартная* управляемая система

$$\dot{x} = v(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times M \times U. \quad (1)$$

Фазовым пространством такой системы является гладкое многообразие M размерности n , удовлетворяющее ряду стандартных условий. Векторное поле v удовлетворяет локальному условию Липшица по x , непрерывно по u , U компактно в \mathbb{R}^m , и v , как функция t , локально интегрируема по Лебегу, ограничена и равномерно непрерывна в среднем на \mathbb{R} для всякого компакта K в M . Предполагается, кроме того, что для всякой гладкой кривой $t \rightarrow x(t) \in M$ имеет место *условие невырожденности*

$$v(t, x(t), U) \bigcap T_{x(t)} M \neq \emptyset.$$

Стандартная система (1) обладает следующим важным свойством: *всякая система, полученная из (1) замыканием множества сдвигов по переменной t в топологии равномерной сходимости на компактах в $[-\vartheta, \vartheta] \times K$, тоже стандартна и, более того, полученное множество управляемых систем компактно в этой топологии.*

Будем называть процесс $(\varphi(t), u(t)) \in M \times U$, состоящий из управления $u(t)$ и решения $\varphi(t)$ системы

$$\dot{x} = v(t, x, u(t)),$$

допустимым, если управление $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ удовлетворяет ряду условий, решение $\varphi(t)$ понимается в смысле Каратеодори, *определено на прямой*, ограничено на $[0, \infty)$ и $v(t, \varphi(t), u(t)) \in T_{\varphi(t)} M$.

Далее, функция $u : \mathbb{R} \times M \rightarrow U$ называется *допустимым позиционным управлением* системы (1), если для каждой точки $x \in M$

¹Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

²Удмуртский государственный университет, Ижевск

функция $t \rightarrow u(t, x)$ локально интегрируема по Лебегу, ограничена и равномерно непрерывна в среднем. Любая ограниченная область G многообразия M состоит из конечного числа областей G^i , в каждой из которых векторное поле

$$\dot{x} = v(t, x, u(t, x)), \quad (2)$$

локально липшицево по x и в каждой точке на границе областей G^i существует *конечный предел*. Кроме того, существует *допустимый процесс* $\xi(t) = (\varphi(t), u(t))$ системы (2), удовлетворяющий условию невырожденности.

Пусть $\varphi(t, x_1)$ — решение системы (2) с условием $\varphi(0, x_1) = x_1$. Множеством управляемости решения $\varphi^*(t)$ допустимого процесса $(\varphi^*(t), u^*(t))$ на $[0, \vartheta]$ называется множество

$$\mathcal{D}_\vartheta(\varphi^*) \doteq \left\{ x_1 \in M : \varphi(t, x_1)|_{t=\vartheta} = \varphi^*(t)|_{t=\vartheta} \right\},$$

а положительная полутраектория $\text{orb}_+(\varphi^*) = \{\varphi^*(\cdot + \tau) : \tau \geq 0\}$ решения $\varphi^*(t)$ называется *локально управляемой*, если для любого $\tau \geq 0$ найдутся такие положительные $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$, $\vartheta = \vartheta(\tau)$, что $O_\varepsilon(\varphi_\tau^*(0)) \subseteq \mathcal{D}_\vartheta(\varphi_\tau^*)$, где $\varphi_\tau^*(t) = \varphi^*(t + \tau)$. Далее, полутраектория $\text{orb}_+(\varphi^*)$ называется *равномерно локально управляемой*, если найдутся такие положительные ε, ϑ , что для всех $\hat{\varphi} \in \overline{\text{orb}_+(\varphi^*)}$ имеет место вложение $O_\varepsilon(\hat{\varphi}(0)) \subseteq \mathcal{D}_\vartheta(\hat{\varphi}^*)$.

Доклад посвящен обсуждению условий существования локально и равномерно локально управляемой полутраектории заданного допустимого процесса [1], применению аналогов функций Ляпунова к задачам управляемости и рассмотрению ряда прикладных задач с помощью полученных в этом докладе результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН (№ 12-П-1002), грантов РФФИ (12-01-00195, 14-01-00877, 14-01-97504), базовой части Минобрнауки России и госзадания № 2014/285 (проект № 2476).

- [1] *Тонков Е.Л.* Распространение теоремы Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые системы на гладких многообразиях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 185–201.

О некоторых нестационарных задачах группового преследования

Н. Н. Петров¹, М. Н. Виноградова¹, Н. А. Соловьева¹

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m с законами движения

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad \dot{y}_j = A(t)y_j + v_j, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad u_i, v_j \in V,$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $A(t)$ — непрерывная матричная функция, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Положим $z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0$.

Предположение 1. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$, является рекуррентной на $[t_0, \infty)$, а $\dot{\Phi}(t)$ равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

1. Преследование скоординированных убегающих. Предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление, условие поимки убегающего с номером q : $x_p(\tau) = y_q(\tau)$ при некоторых p, τ .

Теорема 1. Пусть $\text{Intco}\{x_1^0, \dots, x_n^0\} \cap \text{co}\{y_1^0, \dots, y_m^0\} \neq \emptyset$. Тогда в игре Γ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Теорема 2. Пусть $m = 2$, существуют множества $J_1, J_2 \subset I_0$, $I_1, I_2 \subset I_0 \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ такие, что наборы

$$\{z_{i1}^0, i \in J_1, -c\}, \quad \{z_{i2}^0, i \in J_2, c\},$$

$$\{z_{l1}^0, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{s2}^0, s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{\alpha 1}^0, \alpha \in I_1, z_{\beta 2}^0, \beta \in I_2\}$$

образуют положительный базис, причем

$$|J_1| \geq k, \quad |J_2| \geq k, \quad |J_1^0| + |J_2^0| \geq k + 1,$$

$$\text{где } c = y_1^0 - y_2^0, \quad I_0 = \{1, \dots, n\},$$

$$J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2), \quad J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2).$$

Тогда в игре Γ происходит поимка по крайней мере двух убегающих.

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

2. Поимка заданного числа убегающих. Цель группы преследователей — «поймать» не менее чем q ($m \geq q \geq 1$) убегающих, при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может «поймать» не более одного убегающего.

Считаем, что $n \geq q$.

Теорема 3. Пусть выполнено следующее условие: для каждого $s \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, для любого множества $N \subset \{1, \dots, n\}$, $|N| = n-s$, найдется такое множество $M \subset \{1, \dots, m\}$, $|M| = q-s$, что для всех $\beta \in M$ имеет место включение $0 \in \text{Intco}\{z_{\alpha\beta}^0, \alpha \in N\}$. Тогда в игре Γ происходит поимка не менее чем q убегающих.

Пример. Пусть $k = 2$, $t_0 = 0$, матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0; 4\pi), \\ \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, & t \geq 4\pi. \end{cases}$$

Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$ является рекуррентной на $[t_0, \infty)$.

Аналогичные задачи решены для дифференциальной игры $n+m$ лиц, в которой закон движения каждого из участников имеет вид

$$z^{(l)}(t) + a_{l-1}(t)z^{(l-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{z}(t) + a_0(t)z(t) = w(t),$$

где $z \in \mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$), $w \in V$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $a_p(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что выполнен некоторый аналог предположения 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00195 и Минобрнауки России в рамках базовой части.

Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх

Л. А. Петросян¹

Пусть дана дифференциальная игра $\Gamma(x_0, T - t_0)$ n лиц с предписанной продолжительностью $T - t_0$ и уравнениями движения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u_1, \dots, u_n), \quad u_i \in U_i \subset \text{comp } \mathbf{R}^l, \quad t \in [t_0, T], \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\quad (1)$$

Пусть N — множество игроков в $\Gamma(x_0, T - t_0)$. Для простоты предполагаем, что выигрыши игроков интегральные и имеют вид

$$K_i(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \int_{t_0}^T h_i(x(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

где $x(\tau)$ — решение задачи Коши (1). Пусть далее $S = \{S_1, \dots, S_l\}$ — коалиционное разбиение множества N , т. е. $\bigcup_{i=1}^l S_i = N$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$. Первый уровень кооперации соответствует кооперации между коалициями-игроками из S . При этом выигрыш коалиции S_k , $k = 1, \dots, l$, равен сумме выигрышей игроков из S_k , т. е.

$$H_{S_k}(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n) = \sum_{i \in S_k} \int_{t_0}^T h_i(x(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Здесь $x(\tau)$ — решение задачи Коши (1) при управлениях $u = (u_1, \dots, u_n)$ или $u = (u_{S_1}, \dots, u_{S_l})$, где $u_{S_k} = \{u_i : i \in S_k\}$.

На первом уровне кооперации игроки S_1, \dots, S_l (коалиции) максимизируют суммарный выигрыш

$$\sum_{k=1}^l H_{S_k}(x_0, T - t_0; u_1, \dots, u_n). \quad (4)$$

Предположим, что набор управлений $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = (\bar{u}_{S_1}, \dots, \bar{u}_{S_l})$ доставляет максимум в (4) и соответствующая траектория $\bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$, является решением задачи Коши (1) при

¹Санкт-Петербургский государственный университет

этих управлениях. Траекторию $\bar{x}(t)$ назовем «кооперативной траекторией». Введем характеристическую функцию $V(M; x_0, T - t_0)$, $M \subset S$, классическим образом (как значение неантагонистической игры между M и $S \setminus M$), и в качестве принципа оптимальности возьмем любой из известных в кооперативной теории (например, вектор Шепли). Пусть $Sh(x_0, T - t_0; S_k)$ — выигрыш, предписываемый коалиции $S_k \in S$ соответствующей компонентой вектора Шепли. Определим теперь порядок дележа величины $Sh(x_0, T - t_0; S_k)$ внутри коалиции S_k . Для этого введем характеристическую функцию $V(x_0, T - t_0; M)$ при $M \subset S_k$. Пусть, как и ранее, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = (\bar{u}_{S_1}, \dots, \bar{u}_{S_l})$ — кооперативное управление игроков, полученное на первом уровне кооперации. Положим

$$V(x_0, T - t_0; M) = \min_{u_i, i \in S_k \setminus M} \sum_{i \in M} K_i(x_0, T - t_0; \bar{u}_{(N \setminus S_k) \cup M}, u_i) \times \\ \times \frac{Sh(x_0, T - t_0; S_k)}{\sum_{i \in S_k} K_i(x_0, T - t_0; \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}. \quad (5)$$

Очевидно, что

$$V(x_0, T - t_0; S_k) = Sh(x_0, T - t_0; S_k),$$

и $V(x_0, T - t_0; M)$ супераддитивна по M .

Используя характеристическую функцию (5), можно построить любой принцип оптимальности кооперативной траектории на множестве игроков S_k , т. е. решить задачу второго уровня кооперации. Далее, используя процедуру распределения дележа (ПРД), можно провести регуляризацию игры, построив новые динамически устойчивые (состоятельные во времени) принципы оптимальности в дифференциальных играх с двухуровневой кооперацией.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-91160-ГФЕН_а, и СПбГУ, грант № 9.38.245.2014.

- [1] *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
- [2] *Shapley L.S.* A Value for n-person Games / Contributions to the Theory of Games, vol. II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. Annals of Mathematical Studies. Vol. 28, pp. 307–317. Princeton University Press, 1953.

Численные методы моделирования управляемого уравнения переноса с запаздыванием

В. Г. Пименов¹

Математические модели самых различных объектов содержат одновременно два эффекта: распределенность по состоянию и запаздывание по времени. При этом эффект запаздывания может наблюдаться и в частных производных, как по времени, так и по состоянию. Если рассматривать управление таким объектом по принципу обратной связи, то порождаемая управлением неоднородность будет иметь функциональный эффект наследственности по состоянию, например, распределенное запаздывание. Этот факт отмечался уже в первых работах по теории управления системами с последействием. В работе строится семейство сеточных численных схем с весами для управляемых уравнений переноса с эффектом запаздывания в частной производной по времени, получены условия устойчивости схем и приведена теорема сходимости.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t - \tau) = v. \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ — искомая функция, $x \in [0, X]$, $t \in [0, T]$, τ — величина запаздывания, управление v строится по известному закону $v = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))$, где $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t .

Заданы начальные условия: $u(x, t) = \varphi(x, t)$, $x \in [0, X]$, $t \in [-\tau, 0]$, и граничные условия: $u(0, t) = 0$, $t \in [0, T]$.

Будем предполагать, что функционал f и функция φ таковы, что задача имеет единственное решение. Считаем также, что $a > 0$.

Проведем дискретизацию задачи. Пусть $h = X/N$, введем $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$; пусть $\Delta = T/M$, $t_j = j\Delta$, $j = 0, \dots, M$, $\tau/\Delta = K$ — целое. Приближения функции $u(x, t)$ в узлах сетки (x_i, t_j) будем обозначать u_j^i .

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a(s \frac{u_{j+1}^i - u_{j+1}^{i-1}}{h} + (1-s) \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{h}) + \\ & + b \frac{u_{j+1-K}^i - u_{j-K}^i}{\Delta} = f_j^i, \quad f_j^i = f(x_i, t_i, u_j^i, w_j^i(\cdot)) \end{aligned} \quad (2)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями, $w_j^i(\cdot)$ — результат действия кусочно-линейной интерполяции дискретной предыстории.

Вопрос об устойчивости соответствующего однородного уравнения сводится к исследованию расположения корней характеристического уравнения

$$\lambda^{K+1} + (-1 + \frac{\sigma}{1+s\sigma})\lambda^K + b\lambda - b = 0, \quad \sigma = \frac{a\Delta}{h}. \quad (3)$$

Из результатов статьи [1] (на эту работу обратил наше внимание профессор М.М. Кипнис) вытекает, что разностное уравнение асимптотически устойчиво, если выполняется условие

$$\frac{\sigma}{1+s\sigma} < 2 - 2|b|. \quad (4)$$

Методами, подобными [2], доказывается утверждение.

Теорема. Пусть точное решение $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных и выполнено условие устойчивости (4). Тогда метод (2) сходится, т. е. существует константа C , такая что $|u(x_i, t_j) - u_j^i| \leq C(h + \Delta)$ для всех $i = 1, \dots, N$ и $j = 1, \dots, M$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00089, и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (постановление Правительства РФ № 211 от 16 марта 2013 г.).

- [1] Cermak J., Jansky J., Kundrat P. On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2012. V. 18, no. 11. P. 1781–1800.
- [2] Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 178–189.

Об одной задаче управления для квазилинейного уравнения первого порядка

Н. И. Погодаев¹

В докладе рассматривается управляемое квазилинейное уравнение

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div} f(t, x, \rho, p(t)) = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

где ρ_0 — неотрицательная функция с компактным носителем, f — гладкая функция, $p = p(t)$ — управление.

Функцию $\rho(t, \cdot)$ удобно считать плотностью некоторого распределения масс на \mathbb{R}^n , при этом эволюция распределения описывается уравнением (1). Требуется выбрать управление p так, чтобы к моменту времени T вся масса оказалась внутри заданного целевого множества A , то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A} \rho(T, x) dx = 0.$$

Будет показано, что при определенных условиях носитель функции $\rho(t, \cdot)$, т. е. наименьшее замкнутое множество $C(t)$ со свойством $\int_{\mathbb{R}^n \setminus C(t)} \rho(t, x) dx = 0$, содержится в множестве достижимости $R(t, p)$ некоторого дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x, p(t)), \\ x(0) \in \operatorname{spt} \rho_0. \end{cases}$$

Тем самым исходная задача сводится к так называемой задаче управления в условиях неопределенности. Для случая

$$f(t, x, \rho, p) = [v(t, x, p) + w(\rho)] \rho$$

будет указан возможный способ решения такой задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-31254 мол_а.

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Аппроксимация информационных множеств в задаче минимаксной фильтрации с использованием систем линейных неравенств

Е. О. Подвилова¹, В. И. Ширяев¹

Рассматривается построение гарантированных оценок состояния динамических систем в условиях неопределённости, когда статистическая информация о возмущениях и помехах отсутствует и известны только множества их возможных значений. Система описана уравнениями:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad (1)$$

где x_k, w_k, y_k, v_k — векторы состояния системы, возмущения, измерения, ошибок измерений на k -м шаге соответствующих размерностей; A, B, Γ, G, H — известные матрицы; u_k — заданное управление.

Минимаксная фильтрация заключается в построении последовательности информационных множеств \bar{X}_k [1], [3], т. е. множеств возможных значений вектора состояния на k -м шаге, когда известно:

$$x_0 \in \bar{X}_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

Здесь X_0, W, V — заданные выпуклые многогранники.

Минимаксный фильтр включает выполнение операций суммы множеств Минковского, линейного преобразования и пересечения множеств. При увеличении размерности задачи возникают проблемы в построении информационных множеств в реальном времени. В этом случае для уменьшения вычислительной сложности применяют различные аппроксимации информационных множеств, хотя при этом и происходит потеря точности [2].

В данной работе приведена процедура построения аппроксимации информационного множества многогранником любой формы без выполнения вычислительно затратных операций над множествами.

Для построения аппроксимирующего многогранника X_{k+1} информационного множества \bar{X}_{k+1} используется неявное задание последнего системами линейных неравенств, полученных из условий (2) и уравнений модели (1). Затем строится явное представление

¹Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск

аппроксимирующего многогранника X_{k+1} в виде системы линейных неравенств относительно переменной x_{k+1} , т. е. $A_{x_{k+1}} x_{k+1} \leq b_{x_{k+1}}$, где каждая строка матрицы $A_{x_{k+1}}$ является вектором нормали к грани аппроксимирующего многогранника, а для вычисления значения свободного члена b_{k+1} требуется решить ряд задач линейного программирования.

Поскольку форма информационного множества неизвестна, то выбирать следует такие грани аппроксимирующего многогранника, по направлению которых оценки значения координат вектора состояния являются значимыми. Наиболее простая аппроксимация — аппроксимация прямоугольным параллелепипедом, ориентированным параллельно координатным плоскостям, когда вычисляется диапазон возможных значений по каждой из координат вектора состояния x_k . Выбирая дополнительные грани аппроксимирующего многогранника, можно получить более точную оценку информационного множества. Также имеется возможность уточнения аппроксимации благодаря расширению системы, неявно задающей информационное множество, за счёт накопления данных с нескольких предыдущих шагов. По сравнению с аппроксимацией на основе текущего измерения, аппроксимация с использованием расширенной системы на некоторых итерациях позволяет увеличить точность аппроксимации.

Описанный алгоритм продемонстрирован на примере математической модели истребителя F-16, вектор состояния которого является шестимерным.

- [1] *Кац И.Я., Куржанский А.Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // *АиТ*. 1978. № 11. С. 79–87.
- [2] *Костоусова Е.К.* О полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // *Вычислительные технологии*. 2003. Т. 8. № 4. С. 55–74.
- [3] *Ширяев В.И.* Синтез управления линейными системами при неполной информации // *Изв. РАН. Техническая кибернетика*. 1994., № 3. С. 229–237.

Необходимые условия оптимальности в задачах с дифференциальными включениями

Е. С. Половинкин¹

В докладе излагается созданный автором прямой метод исследования оптимизационных задач в банаховых пространствах с дифференциальными включениями с неограниченной правой частью. Метод состоит в том, что любое дифференциальное включение в окрестности испытываемой траектории приближается более простым дифференциальным включением, график правой части которого является выпуклым конусом, измеримо зависящим от времени. В отличие от других аппроксимационных методов исследования таких негладких оптимизационных задач, указанный прямой метод позволяет получать необходимые условия с более точными сопряженными (полярыными) конусами.

Рассмотрены дифференциальные включения, удовлетворяющие локальным условиям в окрестности графика траектории, подозрительной на оптимальность, а именно, так называемые дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью. Для таких дифференциальных включений получены теорема существования решений задачи Коши с оценками уклонения от начального приближения [3] и теорема о релаксации [5], т. е. обобщение теорем А.Ф. Филиппова и А.Ф. Филиппова – Т. Важевского на случай измеримо-псевдолипшицевой правой части, причем в банаховых пространствах. Доказаны некоторые свойства множества решений указанных дифференциальных включений, являющиеся обобщением классических теорем о непрерывной зависимости и о дифференцировании решений по начальным данным. Изучены полярные конусы к множествам решений дифференциального включения, график правой части которого является выпуклым замкнутым конусом (см. [4]).

В итоге, получены необходимые условия оптимальности в ряде оптимизационных задач с дифференциальными включениями указанного вида [6].

Данная работа развивает цикл результатов (см., например, [1, 2]),

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный

касающихся качественных свойств решений дифференциальных включений и необходимых условий оптимальности в задачах с дифференциальным включением, со случая, когда правая часть включения удовлетворяла условию Липшица по фазовой переменной на измеримо-псевдолипшицевый случай, а также со случая, когда решения принадлежали конечномерному пространству \mathbb{R}^n , на случай рефлексивного банахова пространства (см. [3–5]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00295а.

- [1] *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* О задаче быстрогодействия для дифференциальных включений // Дифф. уравнения, т. 22, № 8, 1986. С. 1351–1365.
- [2] *Половинкин Е.С.* Необходимые условия оптимальности с дифференциальными включениями // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 211, 1995. С. 387–400.
- [3] *Половинкин Е.С.* Теорема существования решений дифференциального включения с псевдо-липшицевой правой частью // Нелинейный мир, т. 10, № 9. 2012. С. 571–578.
- [4] *Половинкин Е.С.* О вычислении полярного конуса ко множеству решений дифференциального включения // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова РАН, т. 278, 2012. С. 178–187.
- [5] *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова РАН, т. 283, 2013. С. 121–141.
- [6] *Половинкин Е.С.* Мнозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014, 600 с. (в печати).

О глобальной приводимости дискретных почти периодических систем

С. Н. Попова¹, И. Н. Банщикова¹

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

с дискретным временем, удовлетворяющую условиям:

- 1) последовательности матриц $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset M_n$ и $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset M_{nm}$ почти периодичны (M_{nm} — множество вещественных $n \times m$ -матриц, $M_n \doteq M_{nn}$);
- 2) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица A_k обратима, и последовательность $\{A_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ограничена.

Определение. Преобразование Ляпунова называется линейное преобразование фазового пространства вида $y_k = L_k x_k$, где последовательности $\{L_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset M_n$ и $\{L_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset M_n$ ограничены. Системы

$$x_{k+1} = A_k x_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n,$$

и

$$y_{k+1} = C_k y_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y_k \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

называются *асимптотически эквивалентными*, если существует связывающее их преобразование Ляпунова.

Теорема. Если система (1) равномерно вполне управляема, то для всякой почти периодической последовательности $\{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset M_n$, такой что последовательность $\{C_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ограничена, найдется почти периодическая последовательность $\{U_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset M_{mn}$, такая что система (1), замкнутая управлением $u_k = U_k x_k$, асимптотически эквивалентна системе (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00195.

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

**Задачи граничного управления
для волнового уравнения
с терминальными условиями,
порождающими целевой функционал
и ограничение**

М. М. Потапов¹, А. А. Дряженков¹

Для волнового уравнения с переменными коэффициентами

$$\rho(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x - q(x)y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$

рассматриваются задачи граничного управления с терминальным целевым состоянием и терминальным ограничением на скорость:

$$\|y(T, \cdot) - f(\cdot)\|_{H^1(E_1)} \rightarrow \inf, \quad \|y_t(T, \cdot) - g(\cdot)\|_{L^2(E_2)} \leq R, \quad (1)$$

или с заданной целевой скоростью и ограничением на состояние:

$$\|y_t(T, \cdot) - g(\cdot)\|_{L^2(E_2)} \rightarrow \inf, \quad \|y(T, \cdot) - f(\cdot)\|_{H^1(E_1)} \leq R. \quad (2)$$

Подмножества $E_1, E_2 \subset (0, l)$, функции $f(x) \in H^1(E_1)$, $g(x) \in L^2(E_2)$ и число $R > 0$ предполагаются заданными.

Задачи (1) и (2) относятся к классу задач квадратичной минимизации на эллипсоидальных множествах в гильбертовом пространстве и после соответствующих переобозначений записываются в виде

$$\|\mathcal{A}u - f\| \rightarrow \inf, \quad \|\mathcal{B}u - g\| \leq R. \quad (3)$$

Для численного решения задачи (3) предложен алгоритм, основанный на вариационном методе [1, 2]. Доказана устойчивость алгоритма к возмущениям исходных данных $\mathcal{A}, \mathcal{B}, f, g$ и R , причём малость возмущений в операторах понимается в смысле их сильной поточечной сходимости.

Одним из важных достаточных условий применимости этого алгоритма к задачам (1) и (2) является наличие конструктивных оценок типа непрерывной обратимости

$$\|\mathcal{A}^*v\|^2 \geq \mu\|v\|^2 \quad \text{или} \quad \|\mathcal{A}u\|^2 \geq \nu\|u\|^2 \quad (4)$$

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

с известными или вычислимыми значениями оценочных констант $\mu > 0$ и $\nu > 0$. Ряд таких оценок для волнового уравнения на временных промежутках докритической и сверхкритической длины был получен недавно в работах [3–5].

Представлены результаты работы алгоритма на тестовых примерах для волнового уравнения с постоянными коэффициентами.

- [1] *Потапов М.М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365, № 5. С. 596–598.
- [2] *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Приближённое решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.
- [3] *Потапов М.М., Дряженков А.А.* Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Труды МИАН. 2012. Т. 277. С. 215–229.
- [4] *Потапов М.М., Иванов Д.А.* Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщённых решений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 192–202.
- [5] *Дряженков А.А., Потапов М.М.* Конструктивные неравенства наблюдаемости для слабых обобщённых решений волнового уравнения с условием упругого закрепления // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54. № 6.

О структуре сингулярного множества минимаксного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана

А. С. Родин^{1,2}

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + H(t, x, s) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n. \quad (1)$$

Обозначим $\Pi_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in R^n\}$. Задача рассматривается при следующих предположениях:

A1 функция $H(t, x, s)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным и вогнута по переменной s ;

A2 функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

A3 функции $\frac{\partial H(t, x, s)}{\partial x_i}, \frac{\partial H(t, x, s)}{\partial s_j}, i, j \in \overline{1, n}$, обладают подлинейным ростом по x, s .

Задача (1) не имеет, как правило, классического решения. В работе рассматривается обобщенное кусочно-гладкое минимаксное решение [1]. Кусочная гладкость решения $\varphi(t, x)$ означает следующее:

$\Pi_T = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j, \quad i, j \in I, \quad I = 1, 2, \dots, N;$

M_i – дифференцируемые подмногообразия;

$J := \{i \in I : M_i - n + 1\text{-мерное многообразие}\}$

и $\forall (t, x) \in \Pi_T \quad J(t, x) := \{j \in J : (t, x) \in \overline{M_j}\},$ с условием $J(t_1, x_1) = J(t_2, x_2)$ при $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in M_i \quad \forall i \in I;$

сужение функции $\varphi(t, x)$ на многообразии $\overline{M_i}, i \in J$ является непрерывно дифференцируемым.

Определение. Множеством сингулярности Q обобщенного решения $\varphi(\cdot, \cdot)$ задачи (1) называется множество точек $(t, x) \in \Pi_T$, в которых функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ недифференцируема.

Условия A1 – A3 гарантируют существование, единственность и

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

продолжимость решений характеристической системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial s}, \quad \dot{s} = -\frac{\partial H(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial x}, \quad \dot{z} = \langle \tilde{s}, \frac{\partial H(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial s} \rangle - H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T, \xi) = D_x \sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T, \xi) = \sigma(\xi), \quad \forall \xi \in R^n. \quad (3)$$

Используя работы [2, 3], получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть в задаче (1) выполнены условия A1 – A3 и $(t, x) \in Q$. Тогда для того чтобы $(t, x) \in M_j$, $\dim M_j = n + 1 - k$, $k \in \overline{1, n}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали решения $\tilde{x}(\cdot, \xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot, \xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot, \xi_i)$ системы (2)–(3), $i \in \overline{1, r+1}$, такие что

$$\tilde{x}(t, \xi_i) = x, \quad \tilde{z}(t, \xi_i) = \varphi(t, x), \quad \tilde{s}(t, \xi_i) \neq \tilde{s}(t, \xi_j) \quad (4)$$

при $j \in \overline{1, r+1}$, $j \neq i$, и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} s_1^1 - s_2^1 & s_1^2 - s_2^2 & \dots & s_1^n - s_2^n & H_2 - H_1 \\ s_2^1 - s_3^1 & s_2^2 - s_3^2 & \dots & s_2^n - s_3^n & H_3 - H_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_r^1 - s_{r+1}^1 & s_r^2 - s_{r+1}^2 & \dots & s_r^n - s_{r+1}^n & H_{r+1} - H_r \end{pmatrix} \quad (5)$$

был равен k , где $(s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^n) = \tilde{s}(t, \xi_i)$, $H_i = H(t, \tilde{x}(t, \xi_i), \tilde{s}(t, \xi_i))$ и $k \leq r$.

Теорема 2. Если в задаче (1) выполнены условия A1–A3, $(t, x) \in Q$, $(t, x) \in M_i$, где $\dim M_i = n + 1 - k$ и $0 < k \leq n$, то не существует характеристики, удовлетворяющей условию (4), которая представима в виде выпуклой комбинации некоторых других $k+1$ характеристик, также удовлетворяющих условию (4).

Показано, что при ослаблении условий A1 – A2 существуют характеристики, графики которых лежат на многообразиях $M_i \in Q$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00168) и проектов УрО РАН № 12-П-1-1002, № 12-П-1-1012.

- [1] Субботин А.И. Обобщённые решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2003.

- [2] *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013.
- [3] *Колпакова Е.А.* Обобщённый метод характеристик в теории уравнений Гамильтона–Якоби и законов сохранения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 95–98.

Инвариантные множества управляемой системы со случайными коэффициентами

Л. И. Родина¹

Существуют различные модели популяционной динамики (например, модели с типовой или возрастной структурой), в которых предполагается, что переход из одного класса в другой носит скачкообразный характер и происходит в фиксированные моменты времени τ_k . Это модели с дискретно-непрерывным поведением траекторий, описываемые системой дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. В данной работе будем предполагать, что изменение размера популяции на интервалах (τ_k, τ_{k+1}) , в моменты τ_k , а так же сами эти моменты определяются различными случайными условиями. Поэтому рассматриваем управляемую систему со случайными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(h^t \sigma, x, u), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta x|_{t=\tau_k(\sigma)} = g(h^t \sigma, x, w), \\ (t, \sigma, x, u, w) &\in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \end{aligned} \quad (1)$$

порожденную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$ (которая описана в работе [1]). Здесь допустимые управления $u(t)$ — ограниченные измеримые функции со значениями в компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, w — управляющий вектор, влияющий на поведение системы в моменты времени τ_k и принимающий значения в множестве $W \subset \mathbb{R}^p$; функции $f(t, x, u)$ и $g(x, w)$ непрерывны.

¹Удмуртский государственный университет, Ижевск

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим множество $\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) : t \geq 0, x \in M(h^t \sigma)\}$, заданное непрерывной функцией $t \rightarrow M(h^t \sigma)$. Обозначим $O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$, $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$, $N^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ и построим множество

$$\mathfrak{N}^r(\sigma) = \{(t, x) : t \geq 0, x \in N^r(h^t \sigma)\}.$$

Определение. Скалярная функция $V(\sigma, x)$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$, если функция $(t, x) \rightarrow V(h^t \sigma, x)$ локально липшицева и удовлетворяет следующим условиям: 1) $V(h^t \sigma, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}(\sigma)$; 2) $V(h^t \sigma, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ и всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r(\sigma)$.

Функция Ляпунова $V(\sigma, x)$ называется *определенно положительной*, если для любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(h^t \sigma, x) > \delta$ для всех $(t, x) \notin \mathfrak{M}^\varepsilon(\sigma) \doteq \{(t, x) : t \geq 0, x \in M^\varepsilon(h^t \sigma)\}$ (см. [2]).

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсами

$$\dot{z} = q(h^t \sigma, z), \quad t \neq \tau_k(\sigma), \quad \Delta z|_{t=\tau_k(\sigma)} = l(z), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}, \quad (2)$$

порожденное динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$. Здесь $q(\sigma, 0) \equiv 0$, функция $L(z) \doteq l(z) + z$ возрастает, $L(0) = 0$ и $L(z) \geq 0$ при $z > 0$.

Множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *положительно инвариантным* относительно системы (1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ и любого решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0, \sigma, x_0) = x_0$, включение $(t, \varphi(t, \sigma, x_0)) \in \mathfrak{M}(\sigma)$ выполнено для всех $t \geq t_0$. Пусть $V_{\max}^o(\sigma, x)$ — верхняя производная в силу дифференциального включения, отвечающего системе $\dot{x} = f(h^t \sigma, x, u)$; $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Теорема. Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$, $q(\sigma, z)$ и $L(z)$ такие, что $V(\sigma, x)$ является определено положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+^n$ выполнены неравенства

$$V_{\max}^o(\sigma, x) \leq q(\sigma, V(\sigma, x)),$$

$$\sup_{\sigma \in \Sigma, w \in W} V(\sigma, x + g(x, w)) \leq \inf_{\sigma \in \Sigma} L(V(\sigma, x)).$$

Тогда, если тривиальное решение уравнения (2) устойчиво по Ляпунову, то множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ положительно инвариантно относительно системы (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00195.

- [1] *Родина Л.И.* О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.
- [2] *Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

Реконструкция параметров линейного стохастического уравнения в условиях дефицита информации

В. Л. Розенберг¹

Задача реконструкции неизвестного детерминированного возмущения, характеризующего уровень случайных помех, в линейном стохастическом дифференциальном уравнении исследуется с позиций подхода теории динамического обращения [1].

Рассматривается уравнение следующего вида:

$$dX(t, \omega) = A(t)X(t, \omega)dt + B(t)U(t)d\xi(t, \omega) + f(t)dt, \quad (1)$$

$$t \in T = [0, \vartheta], \quad X(0, \omega) = X_0, \quad X \in R^n, \quad \xi \in R^m.$$

Здесь X_0 — детерминированный или случайный (распределенный по нормальному закону) вектор начальных условий; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $f(t) \in R^n$ — непрерывная вектор-функция; $A(t)$ и $B(t)$ — заданные матричные функции размерности $n \times n$ и $n \times k$ с липшицевыми элементами; $U(t)$ — $k \times m$ -мерная матричная функция специального вида, характеризующая амплитуду случайной помехи и играющая роль неизвестного входного воздействия, $U(\cdot) \in L_2(T; R^{k \times m})$, $U(t) \in M \forall t \in T$, M — заданный компакт в $R^{k \times m}$; $\xi(t, \omega)$ — стандартный винеровский процесс (т. е. процесс с нулевым математическим ожиданием, матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица), и $\xi(0) = 0$).

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Уравнение (1) является символической записью следующего интегрального тождества:

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t (A(s)X(s, \omega) + f(s))ds + \int_0^t B(s)U(s)d\xi(s, \omega). \quad (2)$$

Последний интеграл в правой части равенства (2) является стохастическим и понимается в смысле Ито. Для любого $\omega \in \Omega$ сформулированная задача Коши имеет единственное решение и определяет реализацию случайного процесса $X(t, \omega)$, $t \in T$. Решение уравнения (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий тождеству (2) при любом t с вероятностью 1. При сделанных предположениях существует единственное решение, которое является нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями.

Задача в общей постановке состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l - 1]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций (части) координат случайного процесса. Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестной функции $U(t)$, причем отклонение приближения от $U(t)$ должно быть сколь угодно мало в метрике пространства $L_2(T; R^{k \times m})$ при достаточно большом N и согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

Рассматриваемая задача сводится к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют элементы ковариационной матрицы исходного процесса. В работе [2] для уравнения (1) изучен случай измерения реализаций всего фазового вектора, а в работе [3] решалась задача для системы второго порядка при измерении реализаций одной координаты. В докладе обсуждаются общие условия разрешимости задачи при неполной информации. Для конкретных постановок разработаны конструктивные конечношаговые алгоритмы, основанные на методе вспомогательных управляемых моделей. В условиях дополнительных предположений получены оценки точности восстановления относительно количества доступных измерению реализаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00110-а) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» (проект № 12-П-1-1019).

- [1] *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
- [2] *Розенберг В.Л.* Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом уравнении // *АиТ.* 2007. № 11. С. 76–87.
- [3] *Розенберг В.Л.* Задача реконструкции возмущения в линейном стохастическом уравнении: случай неполной информации // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2012. Т. 19, № 4. С. 214–221.

Метод функций стохастической чувствительности в анализе индуцированных шумами явлений для нелинейных динамических систем

Л. Б. Ряшко¹

Неизбежно присутствующие случайные воздействия, деформируя решения идеализированных невозмущенных динамических моделей, могут приводить к возникновению новых режимов, не имеющих аналогов в детерминированном случае. Действительно, сильная нелинейность исходной детерминированной динамической модели проявляется в высокой степени неоднородности фазового портрета, мультистабильности, существовании аттракторов сложных пространственных форм, наличии узких параметрических зон, сочетающих локальные и глобальные бифуркации с многократными переходами от порядка к хаосу.

В этих обстоятельствах даже малые случайные возмущения могут формировать переходы как между сосуществующими детерминированными аттракторами, так и между их отдельными пространственными фрагментами. В результате таких переходов зачастую наблюдаются стохастический резонанс, индуцированный шумом порядок и хаос, порождаемая шумом перемежаемость, стохастические бифуркации.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

В докладе излагается общий подход к анализу стохастических аттракторов нелинейных динамических систем, основанный на технике функции стохастической чувствительности и методе доверительных областей. Рассматриваются основные теоретические конструкции этой техники, обсуждаются алгоритмы ее реализации.

Конструктивность данного метода в параметрическом анализе индуцированных шумами явлений иллюстрируется на примере ряда динамических моделей естествознания.

В докладе обсуждаются возможности применения разработанного метода к решению задач управления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00181.

Дифференциальные игры с линейными ограничениями по управлению

Б. Т. Саматов¹

Вводится понятие линейного ограничения по управлению игроков в линейной дифференциальной игре преследования, которое обобщает в некотором смысле как интегральное, так и геометрическое ограничения. Для соответствующей задачи строятся оптимальные стратегии параллельного преследования (П-стратегии).

В евклидовом пространстве \mathbb{R}^n рассматривается дифференциальная игра, описываемая на промежутке $[0, T]$ уравнением

$$\dot{z} = kz + Bu - Cv, \quad z(0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь $z, u, v \in \mathbb{R}^n$; B и C — невырожденные квадратные матрицы порядка $n \times n$; k — неположительное число; z_0 — начальное состояние игры и $z_0 \neq 0$; u — параметр управления преследователя, v — параметр управления убегающего.

Как задача управления $\dot{z} = f(z, u)$, так и более общая дифференциальная игра $\dot{z} = f(z, u, v)$ обычно рассматриваются при «геометрическом» ограничении (налагаемом на векторы управления) вида $u \in \mathbf{P}$, $v \in \mathbf{Q}$, где \mathbf{P} и \mathbf{Q} — заданные подмножества евклидовых пространств соответствующей размерности.

¹Наманганский государственный университет, Узбекистан

В докладе рассматриваются так называемые *линейные ограничения по управлению* [1]. Для управления $u(\cdot)$ ограничение определяется неравенством

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $\varphi(t) = \alpha t + \rho$, α и ρ — неотрицательные числа. Аналогично, на управление $v(\cdot)$ накладывается ограничение

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где $\psi(t) = \beta t + \sigma$, β и σ — неотрицательные числа. Такие управления в дальнейшем будем называть допустимыми, а их совокупности обозначим для преследователя \mathbb{U} , а для убегающего \mathbb{V} .

Определение 1. Отображение $\mathbf{u} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ называется *стратегией преследователя*, если оно обладает следующим свойством вольтерровости: для любых $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in \mathbb{V}$ и $t \geq 0$ выполнение равенства $v_1(s) = v_2(s)$ п.в. на $[0, t]$ влечет равенство $u_1(s) = u_2(s)$ п.в. на $[0, t]$, где $u_i(\cdot) = \mathbf{u}[v_i(\cdot)]$, $i = 1, 2$.

Пусть заданы точка $z_0 \in \mathbf{R}^n$, стратегия преследователя \mathbf{u} и допустимое управление убегающего $v(\cdot)$. Тогда формула

$$z(t) = e^{kt} z_0 + \int_0^t e^{k(t-s)} [B\mathbf{u}(v(s)) - Cv(s)] ds$$

определяет траекторию $z(t)$, $t \geq 0$.

Определение 2. В дифференциальной игре (1)–(3) стратегия \mathbf{u} гарантирует завершение преследования на отрезке времени $[0, T]$, если для любого $v(\cdot) \in \mathbb{V}$ существует $t^* \in [0, T]$ такое, что $z(t^*) = 0$.

Положим $F = B^{-1}C$.

А. Пусть $\alpha \geq \|F\|^2 \beta$.

Определение 3. Если $\alpha \geq \|F\|^2 \beta$, то в дифференциальной игре (1)–(3) Π_A -стратегией преследователя назовем функцию $\mathbf{u}_A(t, v) = Fv - \lambda_A(t, v)\xi_0$, $t \geq 0$, $v \in \mathbf{R}^n$, где

$$\lambda_A(t, v) = \delta e^{-kt} + \langle \xi_0, Fv \rangle + \sqrt{(\delta e^{-kt} + \langle \xi_0, Fv \rangle)^2 + \alpha - \|F\|^2 \beta},$$

$$\xi_0 = B^{-1}z_0/|B^{-1}z_0|, \quad \delta = (\rho - \|F\|^2\sigma)/2|B^{-1}z_0|.$$

Теорема 1. Пусть выполнено хотя бы одно из условий: а) $\alpha > \|F\|^2\beta$, б) $\alpha = \|F\|^2\beta$ и $\rho > \|F\|^2\sigma + 2\sqrt{\alpha}|B^{-1}z_0|$. Тогда в дифференциальной игре (1)–(3) Π_A -стратегия порождает допустимые управления и гарантирует завершение преследования на конечном отрезке времени $[0, T_A]$, где T_A — первый положительный корень уравнения $\sqrt{\alpha t^2 + \rho t} - \|F\|\sqrt{\beta t^2 + \sigma t} = |B^{-1}z_0|$ относительно неизвестного t .

В. Пусть теперь $\alpha \leq 2\|F\|^2\beta$.
Обозначим $\nu = (\rho - 2\|F\|^2\sigma)/2|B^{-1}z_0|$.

Определение 4. Если $\alpha \leq 2\|F\|^2\beta$ и $\nu \geq \sqrt{2(2\|F\|^2\beta - \alpha)}$ то в дифференциальной игре (1)–(3) Π_B -стратегией преследователя назовем функцию $u_B(t, v) = Fv - \lambda_B(t, v)\xi_0$, $t \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, где

$$\lambda_B(t, v) = \nu e^{-kt} + \langle \xi_0, Fv \rangle + \sqrt{(\nu e^{-kt} + \langle \xi_0, Fv \rangle)^2 + \alpha - 2\|F\|^2\beta + |Fv|^2}.$$

Теорема 2. Если $\alpha \leq 2\|F\|^2\beta$ и $\nu \geq \sqrt{2(2\|F\|^2\beta - \alpha)}$, то в дифференциальной игре (1)–(3) Π_B -стратегия порождает допустимые управления и гарантирует завершение преследования на конечном отрезке времени $[0, T_B]$, где $T_B = 2|B^{-1}z_0|/[\nu + \sqrt{\nu^2 + 2(\alpha - 2\|F\|^2\beta)}]$.

- [1] Саматов Б.Т. П-стратегия в дифференциальной игре с линейными ограничениями по управлению // ПММ. 2014. Т. 78, № 3. С. 369–377.

О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата

Д. А. Серков¹

Работа примыкает к исследованиям по теории гарантирующего позиционного управления, проводимым школой Н.Н. Красовского (см. [1–3] и библи. в этих работах) и посвящена задаче управления с «нейтральной» помехой, то есть помехой, не связанной в своих проявлениях с действиями управляющей стороны и состоянием управляемой системы. В постановке задачи это свойство помехи выражается теми или иными дополнительными функциональными ограничениями. Простейшим примером такого ограничения является предположение о том, что помеха задана некоторой неизвестной фиксированной функцией времени.

Рассматривается система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением. Векторы управления и помехи в каждый момент времени лежат в известных компактных множествах. Реализации помехи, кроме того, стеснены некоторым неизвестным функциональным ограничением из заданного семейства функциональных ограничений. Реализации управления формируются позиционными стратегиями с полной памятью. Показатель качества, определенный на движениях управляемой системы, предполагается непрерывным на соответствующем пространстве непрерывных функций.

Задачи управления с функционально ограниченной помехой исследовались в работах [4, 5]. В работе А.В. Кряжмского [6] для одного класса систем, в предположении, что помеха содержится в некотором заранее не определенном множестве, компактном в L_p , было установлено равенство оптимальных гарантированных результатов, достигаемых в классах позиционных стратегий с полной памятью и квазистратегий — неупреждающих программных откликов на реализации помехи (см. [3, с. 24]). Для обозначения этого свойства позиционных стратегий с полной памятью в [6] был введен термин «неулучшаемость». В работе [7] было продолжено изучение задачи в постановке [6] и получены новые условия неулучшаемости.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Приводимый в данной работе результат усиливает утверждения из [6] (в части вопросов неувлучшаемости) и [7]: показано, что при помехах, стесненных компактными в L_p ограничениями, неувлучшаемость стратегий с полной памятью имеет место без каких-либо дополнительных ограничений на правую часть управляемой системы, отличных от классических условий существования единственности и продолжимости решений дифференциального уравнения.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект №12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (проект №12-01-00290-а).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука. 1985.
- [3] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
- [4] Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений // ПММ. 1970. Т. 34, № 5. С. 796–803.
- [5] Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // ПММ. 1971. Т. 35, № 3. С. 385–392.
- [6] Kryazhinskiy A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies / Constantin Caratheodory: An International Tribute, T.M. Rassias Ed., World Scientific. 1991, pp. 636–675.
- [7] Серков Д.А. Оптимизация гарантированного результата при функциональных ограничениях на динамическую помеху // Доклады Академии наук, 2013, Т. 450, № 3. С. 274–278.

Вырожденная линейно-квадратичная задача для системы с линейным запаздыванием

А. Н. Сесекин¹

Пусть объект управления описывается линейной системой с линейным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\mu(t)x(\mu t) + \int_\mu^1 G(t, s)x(st) ds + B\dot{v}(t). \quad (1)$$

Начальное условие имеет вид

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\mu t_0, t_0].$$

Здесь $A(t)$, $A_\mu(t)$, B — матрицы соответственно размерностей $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, причем компоненты двух первых матриц — непрерывные функции, $x \in R^n$, $\varphi \in R^n$, $v \in R^m$, $0 < \mu < 1$, $t_0 > 0$. Для определенности будем полагать, что $v(t_0) = 0$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\begin{aligned} J[v(\cdot)] = & x^\top(T)Sx(T) + \int_{t_0}^{t_f} \left[x^\top(t)\Phi_0(t)x(t) + x^\top(t) \int_\mu^1 \Phi_1(t, \theta)x(\theta t)d\theta + \right. \\ & + \int_\mu^1 x^\top(\theta t)\Phi_1^T(t, \theta)d\theta x(t) + \int_\mu^1 x^\top(st)\Phi_2(t, s)x(st)ds + \\ & \left. + \int_\mu^1 \int_\mu^1 x^\top(\theta t)\Phi_3(t, \theta, \rho)x(\rho t)d\theta d\rho + x^\top(\mu t)\Phi_4(t)x(\mu t) \right] dt, \quad (2) \end{aligned}$$

вдоль траекторий системы (1). В (2) S , $\Phi_0(t)$, $\Phi_2(t, s)$, $\Phi_4(t)$ — симметричные матрицы, $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t, \theta)$, $\Phi_2(t, s)$, $\Phi_3(t, \theta, \rho)$, $\Phi_4(t)$ — непрерывные матрицы-функции своих аргументов, размерность этих матриц — $n \times n$.

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

Данная задача является вырожденной [1] и в классе абсолютно непрерывных функций решения не имеет. Для построения оптимального решения осуществим расширение задачи путем введения импульсных управлений. Будем полагать, что $v(t)$, а следовательно, и $x(t)$ — функции ограниченной вариации, производные которых понимаются в обобщенном смысле [2]. Начальную функцию $\varphi(t)$ также будем считать функцией ограниченной вариации.

Для этой задачи сформулированы достаточные условия, обеспечивающие существование ее решения, исследована структура оптимального управления, получены уравнения, описывающие интенсивности импульсных составляющих и коэффициенты перед фазовыми переменными, которые определяют вид оптимального управления. Другие постановки вырожденных линейно-квадратичных задач для систем с запаздыванием рассматривались в [3–5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00304.

- [1] Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
- [2] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [3] Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с запаздыванием по времени // АиТ. 1997. № 7. С. 43–54.
- [4] Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. О порядке сингулярности импульсного оптимального управления в вырожденной линейно-квадратичной задаче оптимизации с последствием // АиТ. 2009. № 4. С. 31–40.
- [5] Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н. Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последствием // АиТ. 2013. № 11. С. 39–48.

Анализ стохастической возбудимости в модели нейрона Хиндмарш – Розе

Е. С. Слепухина¹, Л. Б. Ряшко¹

Основными типами нейронной активности являются состояние покоя, тонические (периодические) и пачечные (бёрстовые) колебания. Последние представляют собой чередование периодических спайков, объединенных в группу (пачку), и участка покоя.

Модель Хиндмарш – Розе была предложена в [1] для описания пачечной активности. Сначала была представлена двумерная система, в которой данный вид активности невозможен. Для моделирования пачечных колебаний было введено дополнительное третье уравнение.

В докладе проводится анализ воздействия случайных возмущений на двумерную модель Хиндмарш – Розе. Исходная детерминированная система отличается сильной нелинейностью, вследствие которой она демонстрирует весьма разнообразные и трудно поддающиеся анализу динамические режимы. Вместе с тем, случайные возмущения существенно влияют на механизмы возбуждения в нейронных системах. Даже небольшие стохастические флуктуации могут привести к значительному качественному изменению нелинейной динамики таких систем.

В системе Хиндмарш – Розе под действием случайных возмущений могут произойти индуцированные шумом переходы между сосуществующими предельными циклами и равновесиями. Под влиянием стохастических флуктуаций равновесные или периодические режимы трансформируются в пачечные: система демонстрирует чередование малых колебаний около равновесия с осцилляциями больших амплитуд.

Основой анализа стохастической возбудимости в модели нейрона является техника функций стохастической чувствительности и метод доверительных областей [2].

- [1] *Hindmarsh J.L., Rose R.M.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // *Proc. R. Soc.*

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

London, Ser. B. 1984. V. 221, no. 1222. P. 87–102.

- [2] *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. 2004. V. 66, no. 1. P. 55–67.

Адаптивная стабилизация минимально-фазового объекта с липшицевой неопределенностью и ограниченным внешним возмущением

В. Ф. Соколов¹

Рассматривается задача стабилизации системы

$$y_{t+1} = a(q^{-1})y_t + b(q^{-1})u_t + f(y_t) + w_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где вещественные числа y_t, u_t, w_t обозначают соответственно выход системы, управление и внешнее возмущение в момент t ,

$$a(q^{-1})y_t = a_0y_t + \dots + a_ny_{t-n}, \quad b(q^{-1})u_t = b_0u_t + \dots + b_mu_{t-m}$$

представляют собой полиномы от оператора сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$). Априорная информация о неизвестных коэффициентах полиномов задаётся включением $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) \in \Xi$ с известным ограниченным множеством Ξ . Неизвестная вещественная функция f описывает липшицеву неопределенность в системе,

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbf{R},$$

а неизвестная вещественная последовательность w — ограниченное внешнее возмущение: $|w_t| \leq W$ для всех t .

Требуется построить причинную обратную связь, т. е. управление вида

$$u_t = U_t(y_0^t, u_0^{t-1}),$$

где $x_0^t = (x_0, \dots, x_t)$, гарантирующую устойчивость замкнутой системы управления для как можно более широкого класса неопределенностей f .

¹Отдел математики, Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар

В работе [1] установлено, что для простейшей динамической системы (1) с полиномами $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = 1$ значение постоянной Липшица $L = 3/2 + \sqrt{2}$ является критическим. Если $L \geq 3/2 + \sqrt{2}$, то для любой заданной причинной обратной связи и любого ограниченного возмущения w существует неопределенность f , при которой замкнутая система неустойчива ($\lim_{t \rightarrow \infty} |y_t| = \infty$). Для системы с $L < 3/2 + \sqrt{2}$ в [1] была построена обратная связь с бесконечной памятью, основанная на онлайн оценивании липшицевой неопределенности f , обеспечивающая асимптотически оптимальное отслеживание ограниченного задающего сигнала. В работах [2,3] синтезирована адаптивная обратная связь с конечной памятью, гарантирующая субоптимальное отслеживание ограниченного задающего сигнала для системы более общего вида с неизвестным постоянным полиномом $a(\lambda) = a_0$.

Заметим, что в рамках ℓ_1 -теории робастного управления рассматриваются неопределенности, удовлетворяющие ограничению $|f(y_0^t)| \leq L \max_{0 \leq k \leq t-1} |y_k|$, и критическое значение коэффициента усиления L для системы (1) равно 1.

В работе [4] построена причинная обратная связь с бесконечной памятью, обеспечивающая адаптивную стабилизацию системы (1) из априорного класса Ξ минимально-фазовых систем (корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне единичного круга комплексной плоскости) при известной верхней границе $L_{\max} < 3/2 + \sqrt{2}$ постоянной Липшица L и известной верхней границе W возмущения w . В настоящей работе синтезируется адаптивная обратная связь с конечной памятью, гарантирующая стабилизацию для этого же класса систем (1) при неизвестной верхней границе W .

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 12-П-1-1013.

- [1] Xie L. L., Guo L. How much uncertainty can be dealt with by feedback? // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. V. 45. P. 2203–2217.
- [2] Sokolov V. F. Adaptive suboptimal tracking for the first-order plant with Lipschitz uncertainty // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. P. 607–612.
- [3] Соколов В.Ф. Адаптивное субоптимальное слежение для объекта первого порядка с липшицевой неопределенностью // АиТ. 2003. № 3. С. 124–136.

- [4] *Huang C, Guo L.* On feedback capability for a class of semiparametric uncertain systems // *Automatica*. 2012. V. 48. P. 873–878.

Численное исследование управляемого гиперболического уравнения первого порядка с запаздыванием и сдвигом по координатам

С. И. Солодушкин¹, А. А. Сагоян¹

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = v. \quad (1)$$

Здесь $x \in [0; X]$ и $t \in [0; \theta]$ — пространственная и временная независимые переменные; $u(x, t)$ — искомая функция; v — управление, которое строится по принципу обратной связи $v = f(x, t, u(x, t), u_t(\alpha x, \cdot))$; $u_t(\alpha x, \cdot) = \{u(\alpha x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t , включающая также сдвиг по фазовой переменной, $\alpha \in (0, 1)$ — константа, определяющая величину сдвига, $a(x) > a_0 > 0$ — достаточно гладкая функция.

Заданы начальные условия $u(t, x) = \varphi(x, t)$, $x \in [0; X]$, $t \in [-\tau; 0]$, и граничные условия $u(0, t) = g(t)$, $t \in [0; \theta]$. Предполагаем, что функционал f , функции φ и g таковы, что задача имеет единственное решение.

Будем следовать технике, разработанной в [1, 2]. Пусть N и M — число точек разбиения отрезка $[0; X]$ и $[0; \theta]$ соответственно. Рассмотрим равномерную сетку $\{t_j, x_i\}_{j=0}^M \{i=0\}^N$, где $t_j = j\Delta$, $j = 0, \dots, M$, и $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. Приближение решения $u(x, t)$ в узлах (x_i, t_j) обозначим u_j^i .

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство разностных схем, $j = 0, \dots, M - 1$,

$$\frac{u_{j+1}^1 - u_j^1}{\Delta} + a \left(s \frac{-4u_{j+1}^0 - 2h/a(f_{j+1}^0 - \dot{g}_{j+1}) + 4u_{j+1}^1}{2h} \right)$$

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

$$\begin{aligned}
& + (1-s) \frac{-4u_j^0 - 2h/a(f_j^0 - \dot{g}_j) + 4u_j^1}{2h} \Big) = f_j^1, \\
& \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} + a \left(s \frac{u_{j+1}^{i-2} - 4u_{j+1}^{i-1} + 3u_{j+1}^i}{2h} \right. \\
& \left. + (1-s) \frac{u_j^{i-2} - 4u_j^{i-1} + 3u_j^i}{2h} \right) = f_j^i, \quad i = 2, \dots, N. \quad (2)
\end{aligned}$$

Здесь $\dot{g}_j = dg(t)/dt|_{t=j\Delta}$, $f_j^i = f(x_i, t_j, u_j^i, w_j^i(\cdot))$, $w_j^i(\cdot)$ — результат интерполяции дискретной предыстории, порядок которой согласован с порядком метода. Для нахождения $w(x, t)$ при $x \in [x_1, x_N]$ применяется двумерная интерполяция многочленами Лагранжа с тремя узлами по x и двумя по t , для $x \in [x_0, x_1]$ — двумерная интерполяция многочленами типа Эрмита с кратным узлом x_0 и двумя узлами по t .

Теорема. Пусть точное решение $u(x, t)$ трижды непрерывно дифференцируемо по x , дважды непрерывно дифференцируемо по t , первая производная решения по x непрерывно дифференцируема по t , выполнены условия устойчивости $s \geq 0.5$, применяется соответствующая интерполяция дискретной предыстории. Тогда метод (2) сходится, причем порядок сходимости $h^2 + \Delta$, т. е. существует константа C , такая что $\|u(x, t) - u_j^i\| \leq C(h^2 + \Delta)$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$.

Разностный метод (2) допускает хорошее распараллеливание, а именно, для вычисления u_{j+1}^i достаточно знать u_j^k , $k \leq i$. Таким образом, вычислив решения на j -м временном слое в трех первых узлах, можно начинать счет на $(j+1)$ -м слое.

В докладе будут представлены результаты численных экспериментов, проведенных на суперкомпьютере ИММ УрО РАН «Уран».

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 13-01-00089, 14-01-00065 и Программы развития УрФУ (постановление 211 правительства Российской Федерации № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

- [1] Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 178–189.

- [2] Солодушкин С.И. Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последствием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 10. С. 77–82.

Вариационное условие оптимальности с позиционными управлениями для линейной по состоянию задачи импульсного управления

М. В. Старицын¹, С. П. Сорокин¹

Рассматривается следующая линейная по фазовой переменной задача (P) оптимального импульсного управления:

$$I = \langle c, x(1) \rangle \rightarrow \min;$$

$$dx = [A(t, u)x + a(t, u)] dt + [B(t, u)x + b(t, u)] \vartheta(dt), \quad x(-0) = x_0, \quad (1)$$

$$|\vartheta|([0, T]) \leq M. \quad (2)$$

Здесь присутствуют обычные управления u — борелевские функции со значениями в заданном компакте $U \subset R^r$, и импульсные управления ϑ в смысле [1]. Набор ϑ включает скалярную борелевскую меру μ , скалярную неотрицательную меру ν , имеющую смысл полной вариации импульсного управления, а также семейство борелевских функций — так называемых присоединенных управлений, отвечающих за представление обобщенного воздействия μ в моменты приложения импульса (фактически, характеризующих способ аппроксимации разрывного решения системы (1) решениями Каратеодори, соответствующими обычным управлениям, аппроксимирующим μ). Ввиду использования импульсного управления, дифференциальное уравнение с мерами (1), описывающее динамику состояния $x(t) \in R^n$, следует трактовать в более общем смысле [1], чем обычно. Условие (2) есть ограничение на полный ресурс управляющего воздействия, где $M > 0$ и $|\vartheta| \triangleq \nu$.

Для невыпуклой задачи (P) сформулировано необходимое условие глобальной оптимальности вариационного типа, оперирующее

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

позиционными управлениями (аналог условия из [2] для классических задач). Условие получено с помощью эквивалентного преобразования [3] задачи (P) к классической задаче с терминальным ограничением. Несмотря на то что на данный момент этот результат не расшифрован в терминах исходной задачи, он носит конструктивный характер и может быть положен в основу нелокальных вычислительных алгоритмов решения задачи (P) .

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты №№ 14-01-00699, 14-01-31254, 13-08-00441) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-5007.2014.9).

- [1] *Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F.* On constrained impulsive control problems // J. Math. Sci. 2010. V. 165, no. 6. P. 654–688.
- [2] *Дыхта В.А.* Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона – Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // АиТ. 2014. № 5. С. 31–49.
- [3] *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.

Теория и методы решения невыпуклых задач оптимального управления

А. С. Стрекаловский¹

Над стандартной управляемой системой

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad t \in T =]t_0, t_1[, \quad x(t_0) = x_0, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} &= \{ u(\cdot) \in L_\infty^r(T) \mid u(t) \in U \text{ п.в. на } T \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

рассматривается задача оптимального управления

$$J_0(u) \downarrow \min_u, \quad u \in \mathcal{U}, \quad J_i(u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\mathcal{P})$$

с функционалами Больца

$$J_i(u) = F_{i1}(x(t_1, u)) + \int_T F_i(x(t, u), u(t), t) dt, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}. \quad (2)$$

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

В (2) функции $F_{i1}(x)$ и $F_i(x, u, t)$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} F_{i1}(x) &= g_{i1}(x) - h_{i1}(x), \\ F_i(x, u, t) &= g_i(x, u, t) - h_i(x, t), \quad t \in T, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где функции $g_{i1}(x)$, $h_{i1}(x)$ выпуклые на \mathbb{R}^n , а функции $g_i(x, u, t)$, $h_i(x, t)$ выпуклы по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, терминальная и подинтегральная функции $F_{i1}(x)$ и $F_i(x, u, t)$ функционала $J_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m$, являются функциями А.Д. Александрова (д.с. функциями) по переменной $x \in \mathbb{R}^n$.

Для невыпуклых задач типа (P) предлагаются два типа условий глобальной оптимальности (УГО), связанных с принципом максимума Понтрягина [1, 2]. К тому же эти УГО являются необходимыми и достаточными при некотором достаточно естественном и неограниченном предположении и обладают конструктивным (алгоритмическим) свойством [3], позволяющим улучшать управления, не являющиеся глобально оптимальными в невыпуклых задачах оптимального управления типа (P), например, стационарные и локально оптимальные управления.

На основе разработанных УГО построены методы локального и глобального поисков и исследована их сходимость [4]. Проведено тестирование методов, показавшее сравнительную эффективность разработанного подхода на широком поле тестовых примеров большой размерности.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 13-01-92201-Монг_а.

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Спрочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
- [3] Strekalovsky A.S. Global optimality conditions for optimal control problems with functions of A.D. Alexandrov // JOTA. 2013. V. 159, no. 6. P. 297–321.
- [4] Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. Глобальный поиск в одной невыпуклой задаче оптимального управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. Т. 52, № 6. С. 52–67.

Метод простой итерации и устойчивость положений равновесия нелинейных градиентных механических систем

В. В. Стружанов¹, Н. В. Бурмашева¹

Исследуется устойчивость равновесия автономной градиентной динамической системы. Силы, действующие на нее, определяются градиентом потенциальной функции $W(x_i, y_j)$, где параметры x_i есть обобщенные координаты системы (параметры состояния), а величины y_j — обобщенные силы (параметры управления). Характеристики всех возможных точек равновесия — это критические точки функции W , которые представляют собой решения в общем случае нелинейной системы уравнений $W_{,x_i} = 0$ (запятой обозначаются частные производные) [1]. Данная система есть отображение f пространства параметров состояния в пространство параметров управления. В силу нелинейности отображения могут существовать точки, в которых матрица Якоби отображения f вырождается [2]. Следовательно, теряется однозначность обратного отображения, и система уравнений равновесия имеет несколько решений, в том числе неустойчивых.

Пусть система находится в некотором положении равновесия. Для того чтобы определить устойчивость равновесия, возмутим его, незначительно увеличив параметры управления. Уравнения возмущенного равновесия преобразуются к операторному уравнению $\bar{z} = A\bar{z} + \bar{b}$, решение которого ищется методом простой итерации. Если приближения сходятся, то вблизи исходного положения равновесия существует новое положение равновесия. Следовательно, возмущенное равновесие устойчиво. В противном случае исходное равновесие неустойчиво.

Сходимость метода простой итерации связана с величиной константы Липшица q [3]. Когда константа q меньше единицы, то реализуется принцип сжимающих отображений (метод сходится). Величина константы q определяется производной по Фреше оператора A . Доказывается, что константа Липшица становится равной единице тогда, когда вырождается матрица Гессе потенциальной функции W .

В качестве примера проведено исследование устойчивости поло-

¹Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

жений равновесия механической системы, осуществляющей квазистатическое изометрическое трехосное растяжение единичного куба из разупрочняющегося материала, свойства которого определяются выпуло-вогнутым потенциалом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-08-00186) и молодежного гранта УрО РАН (проект № 14-1-НП-298).

- [1] *Гильмор Р.* Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Кн. 1. М.: Мир, 1984.
- [2] *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
- [3] *Красносельский М.А.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных

Н. Н. Субботина¹, Т. Б. Токманцев¹

Рассматривается управляемая система

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, управление $u \in \mathbb{R}^n$ стеснено ограничением

$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- < a_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

Входными данными обратной задачи является история замеров фазовой переменной — непрерывная функция $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

причем известно, что идеальная реализовавшаяся (базовая) траектория $x_*(t)$ содержится в полосе достоверности замеров

$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n : \|x - y(t)\| \leq \delta\}, \quad (3)$$

где параметр погрешности измерений $\delta > 0$, а символ $\|z\|$ означает евклидову норму конечномерного вектора z .

Обратная задача динамики состоит в построении такого управления, которое порождает траекторию системы (1), (2), максимально приближенную к базовой траектории $x_*(\cdot)$, и имеет минимальную норму в L_2 [2].

Вводится вспомогательная задача оптимального позиционного управления [1] системой (1), (2) на минимум функционала невязки при фиксированном значении δ :

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T \left[-\frac{\|x(t) - y(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \|u(t)\|^2 \right] dt. \quad (4)$$

Здесь $\alpha > 0$ — малый регуляризирующий параметр, $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ — траектория системы (1), вышедшая из точки $x(t_0) = x_0$ под действием измеримого управления $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow U$.

Показано, что если в задаче (1)–(4) выполняются условия подлинейного роста по переменной x для компонент вектор-функции $f(\cdot)$ и матрицы-функции $G(\cdot)$, а также условие существования непрерывных частных производных этих компонент, то решение $(x_\delta^\alpha(\cdot), u_\delta^\alpha(\cdot))$ задачи (1)–(4) (при согласованном стремлении α и δ к нулю) сходится: $\|x_\delta^\alpha(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \rightarrow 0$, $\|u_\delta^\alpha(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0$, причем $x_*(\cdot) = x(t_0, x_0, u_*(\cdot))$, а $u_*(\cdot)$ имеет минимальную норму в L_2 [3, 4].

Обсуждаются возможности решения обратной задачи с помощью описанного метода в случае известной информации о части координат базовой траектории. Предложена процедура пополнения информации, при которой базовая траектория и порождающее ее управление с минимальной нормой в L_2 могут быть аппроксимированы решениями вспомогательной задачи оптимального управления (1)–(4).

Приведены результаты симуляции для линейных и нелинейных модельных примеров.

Исследуются свойства функционала невязки (4), обеспечивающие устойчивость решения по отношению к ограничению δ погрешности замеров.

Обсуждаются возможности развития метода для задач большой размерности с помощью параллельных вычислений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00168) и Президиума РАН (программы № 12-П-1-1012, 12-П-1-1002).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974.
- [2] Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [3] Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г. Метод характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.
- [4] Subbotina N.N., Tokmantsev T.B. The method of characteristics in inverse problems of dynamics // Universal Journal of Control and Automation, 1, 79–85. doi: 10.13189/ujca.2013.010303.

Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем

В. И. Сумин¹, А. В. Чернов¹

В [1] предложена достаточно общая форма описания управляемых начально-краевых задач (УНКЗ) с помощью вольтерровых функционально-операторных уравнений (ВФОУ) вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi), \quad (1)$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ и $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$ — оператор, вольтерров на некоторой системе T подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФОУ (1) (и подобным им) с достаточно богатыми системами T естественным образом (например, обращением главной части) приводятся самые разнообразные УНКЗ для нелинейных эво-

¹Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

люционных уравнений (параболических, гиперболических, интегродифференциальных, с запаздываниями и др.) [2–7]. При переходе к описанию УНКЗ с помощью ВФОУ удается, видимо, достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить те или иные результаты в удобной для приложений форме — с другой. Такой переход адекватен многим проблемам оптимизации. В частности, он позволил: получить конструктивные общие условия сохранения глобальной разрешимости УНКЗ при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений (в этом случае управлением в (1) служит и оператор A) [1–4]; показать, что для распределенных задач характерно сильное вырождение особых управлений, когда вместе с *необходимыми условиями оптимальности* (НУО) первого порядка (например, принципом максимума) вырождаются и НУО второго порядка, и предложить новый общий способ вывода НУО особых управлений [8]; решить [3] ряд поставленных в [9] задач получения «сингулярных НУО».

Переход к ВФОУ удобен при обосновании численных методов оптимизации [5], при изучении управляемости [6], дифференциальных игр и во многих других вопросах [7]. В докладе дается обзор результатов теории оптимизации, полученных методом ВФОУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и гранта (соглашение от 27.08.13 № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

- [1] Сумин В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.
- [2] Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
- [3] Сумин В.И. К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I;III // Вестник ННГУ. Матем. моделирование и оптим. управление. 1999. Вып. 2(21). С. 145–155; 2002. Вып. 1(25). С. 164–174.

- [4] Лисаченко И.В., Сумин В.И. Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Дифференц. ур-ния. 2011. Т. 47, № 6. С. 858–870.
- [5] Чернов А.В. О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, № 12. С. 2029–2043.
- [6] Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52, № 8. С. 1400–1414.
- [7] Чернов А.В. О выпуклости множеств глобальной разрешимости управляемых начально-краевых задач // Дифференц. ур-ния. 2012. Т. 48, № 4. С. 577–586.
- [8] Сумин В.И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320, № 2. С. 295–299.
- [9] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.

Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении распределенными системами

М. И. Сумин¹

Различные проявления некорректности в задачах оптимизации и, в частности, в задачах оптимального управления, хорошо известны. Они возникают уже в «самых простых» по виду оптимизационных задачах и находят выражение в фактах несуществования классических решений как прямых, так и двойственных задач, неустойчивости этих решений при возмущении исходных данных (см., например, [1, 2]). Как следствие, последняя влечет и «неустойчивость» классических условий оптимальности, заключающуюся в выделении ими сколь угодно далеких «возмущенных» оптимальных элементов

¹Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

от их «невозмущенных» аналогов при сколь угодно малых возмущениях исходных данных задач. Сказанное выше в полной мере относится как к самим задачам оптимального управления распределенными системами с функциональными и операторными ограничениями, так и к классическим для них условиям оптимальности — принципу Лагранжа и принципу максимума Понтрягина.

В докладе обсуждается, как можно преодолевать проблемы некорректности в задачах оптимального управления распределенными системами на пути применения методов теории двойственности, регуляризации и одновременного перехода к рассмотрению понятия минимизирующей последовательности допустимых элементов в качестве основного понятия оптимизационной теории.

В качестве базовой рассматривается параметрическая задача оптимального управления, в том числе и граничного, для параболического дивергентного уравнения

$$f(\pi) \rightarrow \min, \quad h_1(\pi) = q, \quad h_2(\pi) \leq s, \quad (1)$$

$$g_1(\pi)(x, t) = p(x, t), \quad g_2(\pi)(x, t) \leq r(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad \pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D},$$

где $q \in R^k$, $s \in R^m$, $p, r \in L_2(Q)$ — параметры задачи, $f : \mathcal{D} \rightarrow R^1$ — функционал качества, $h_1 : \mathcal{D} \rightarrow R^k$, $h_2 : \mathcal{D} \rightarrow R^m$ — векторные функционалы, $g_1(\pi)(x, t) \equiv \varphi_1(x, t, z[\pi](x, t))$, $g_2(\pi)(x, t) \equiv \varphi_2(x, t, z[\pi](x, t))$, $\varphi_1, \varphi_2 : Q \times R^1 \rightarrow R^1$ — непрерывно дифференцируемые по z при всех $(x, t) \in Q$ функции, $Q \subset \overline{Q}_T$, $Q = \text{cl } \overset{\circ}{Q}$, $\mathcal{D} \equiv \{\pi \in L_\infty(Q_T) \times L_\infty(S_T) : u(x, t) \in U \text{ п.в. на } Q_T, w(x, t) \in W \text{ п.в. на } S_T\}$, $U, W \subset R^1$ — компакты, $z[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ — решение третьей начально-краевой задачи

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x, t) z_{x_j}) + a(x, t) z + u(x, t) = 0,$$

$$z(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x, t) z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T,$$

в которой $a \in L_p(Q_T)$, $\sigma \in L_r(S_T)$, $v_0 \in C(\overline{\Omega})$ — заданные функции, $p, r > 2$ — достаточно большие показатели.

Центральное внимание уделяется обсуждению устойчивых по отношению к ошибкам исходных данных секвенциальных недифференциального принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина

как в выпуклом, так и в нелинейном вариантах задачи (1), представляющих собою одновременно регуляризирующие алгоритмы ее решения. Отмечается их тесная связь с дифференциальными свойствами соответствующих полунепрерывных снизу функций значений задачи (1), а также с классическими принципами максимума Понтрягина в обоих вариантах задачи. Анализ и доказательство указанных результатов основаны на соответствующих вариантах метода двойственной регуляризации [1, 3]. В частных случаях задачи (1) аналогичные результаты были получены в [2, 4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00199-а.

- [1] *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
- [2] *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54, № 1. С. 25–49.
- [3] *Сумин М.И.* Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47, № 5. С. 796–816.
- [4] *Сумин М.И.* Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 231–240.

**Об одной некорректной задаче прогнозирования
для линейной автономной системы
с запаздыванием**

П. Г. Сурков¹

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-r), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r > 0$, A и B — постоянные матрицы $n \times n$, $\det B \neq 0$. Выбирается начальный момент $t_0 = 0$, фиксируется $m \in \mathbb{N}$ и задается функция $\varphi \in C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, область определения которой переносится на отрезок $[(m-1)r, mr]$. Требуется найти функцию $x_\delta \in C$ такую, что для решения $x(\cdot)$ системы (1) выполнены соотношения

$$x(\theta, x_\delta) = x_\delta(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \quad \|x_m - \varphi\| \leq \delta.$$

Здесь $x_m(\theta) = x(\theta + mr, x_\delta)$, δ — допустимая погрешность.

Данная постановка представляет собой обратную задачу нахождения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием в сторону возрастания времени. Такой подход использовался в работах [1–4]. Следуя методике работы [2], решения $x(\cdot, x_\delta)$ системы (1) на положительной полуоси можно находить с помощью пошаговой процедуры, которая в функциональном пространстве состояний C описывается формулами

$$x_{k+1} = Ux_k, \quad k \geq 0, \quad x_0 = x_\delta, \quad x_k(\cdot) = x(\cdot + kr),$$

где $U: C \rightarrow C$ — линейный вполне непрерывный оператор, определяемый соотношением

$$(Ux)(\theta) = \exp(A(r+\theta))x(0) + \int_{-r}^{\theta} \exp(A(\theta-s))Bx(s)ds, \quad \theta \in [-r, 0].$$

В результате при $k = m$ пошаговая процедура приводит к уравнению вида $U^m x = \varphi$. Для нахождения его решения используем метод

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

регуляризации А.Н. Тихонова [5] со стабилизирующим функционалом

$$\Omega[x] = x^{\top}(0)x(0) + \int_{-r}^0 x^{\top}(s)x(s) ds.$$

Систему уравнений для минимизации сглаживающего функционала удалось свести к сингулярной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. При решении полученной краевой задачи были применены асимптотические методы, которые позволили найти для регуляризованного решения x_{δ} асимптотические формулы, определяющие аналитические зависимости x_{δ} от допустимой погрешности.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1019), а также при поддержке РФФИ (13-01-00094).

- [1] Долгий Ю.Ф., Путилина Е.Н. Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.
- [2] Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. / фак. ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2007. Вып. 2. С. 71–99.
- [3] Baker C.T.H., Parmuzin E.I. An inverse problem for delay differential equations — analysis via integral equations // University of Chester, Department of Mathematics, Applied Mathematics Group, Research Report 2006:5. P. 1–21.
- [4] Tadumadze T. An inverse problem for some classes of linear functional differential equations // Appl. Comput. Math. 2009. Vol. 8, no. 2. P. 239–250.
- [5] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Модель развития ресурсозависимой экономики

А. М. Тарасьев¹, А. А. Усова¹

Исследуются решения гамильтоновой системы в модели экономического роста ресурсозависимой экономики, построенные вблизи стационарной точки. Система получена путем применения принципа максимума Понтрягина [2] к задаче оптимального управления на неограниченном промежутке времени [1], которая состоит в максимизации интегрального индекса потребления $\int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt$, дисконтированного ($\rho, \rho > 0$) на бесконечном времени вдоль траекторий динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{b}{\alpha} x_1(t) - \frac{1}{M_0} x_2(t), & x_1(0) &= x_1^0 \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) \left(\frac{b-\alpha\beta u(t)}{\alpha(1-\alpha)} - \mu + v(t)x_3(t) \right), & x_2(0) &= x_2^0 \\ \dot{x}_3(t) &= x_3(t) \frac{b-\alpha\beta u(t)}{1-\alpha}, & x_3(0) &= x_3^0, \end{aligned} \quad (1)$$

когда управления удовлетворяют ограничениям $(u, v) \in [0, \bar{u}] \times [0, \bar{v}]$.

Задача управления базируется на модели экономического роста [4], учитывающей потребности экономики региона в исчерпываемых природных ресурсах, потребление которых описывается функцией $m(t)$, а также объем основных фондов $k(t)$.

Условие ограниченности ресурсов записывается в виде неравенства $\int_0^{+\infty} m(t) dt \leq M_0$. Суммарный объем потребления определяется функцией $M(t) = \int_0^t m(s) ds$, продуктивность обозначена в модели символом $z(t) = y(t)/m(t)$, где величина $y(t)$ задает изменение выпуска в зависимости от капитала $k(t)$ и текущего уровня потребления ресурсов $m(t)$ при помощи производственной функции Кобба–Дугласа $y(t) = ae^{bt}m^\alpha(t)k^{1-\alpha}(t)$ ($a > 0, b \geq 0, \alpha \in [0, 1]$).

Так как модель ориентирована на дематериализацию экономики, предполагается, что вложения в технологический сектор в объеме $u(t)$ в момент времени t обеспечат относительный рост продуктивности ресурсов $\dot{z}(t)/z(t) = \beta u(t)$, ($\beta > 0$). Изменение основного капитала $k(t)$ описывается при помощи модели Солоу, учитывающей уровень амортизации μ основных фондов $\dot{k}(t) = v(t)y(t) - \mu k(t)$.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

В модель добавлен механизм ценообразования $p(t)$, предполагающий гиперболический рост цен при обратной пропорциональности между запасами ресурсов и их стоимостью $p(t)/p_0 = M_0/(M_0 - M(t))$. В замкнутой экономической системе уровень потребления $c(t)$ есть разница между выпуском $y(t)$ и расходами на инвестиции $u(t), v(t)$ и закупку материалов $p(t)m(t)$. Величина $c(t)$ вычисляется по формуле $c(t) \approx y(t)(1 - u(t) - p(t)m(t)/y(t))(1 - v(t))$. Для исследования модели введены величины $x_1 = e^{bt/\alpha}(1 - M(t)/M_0)$, $x_2 = e^{bt/\alpha}m(t)$, $x_3 = y(t)/k(t)$, динамика которых подчиняется системе (1).

Качественный анализ гамильтоновой системы, возникающей вследствие применения принципа максимума Понтрягина к задаче оптимального управления, показал, что она обладает единственной стационарной точкой только в том случае, когда параметры модели удовлетворяют ограничениям $b/\alpha < \rho < \beta - b/\alpha$.

Численные результаты исследования выявили седловой характер положения равновесия, что позволяет построить нелинейный регулятор [3], стабилизирующий систему в окрестности положения равновесия, и найти стабилизированные решения вблизи стационарного уровня.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00486а), проектов УрО РАН (12-П-1-1012, 12-П-6-1038), Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

- [1] *Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V.* The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Pleiades Publishing, 2007, Vol. 257.
- [2] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
- [3] Тарасьев А.М., Усова А.А. Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста // Тр. Матем. инст. им. В.А.Стеклова, 2010, Т. 271. С. 278–298.
- [4] *Tarashev A., Zhu B.* Optimal proportions in growth trends of resource productivity // Proceedings of the 15th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization” CAO’12, 2012.

Формализация задачи управления марковской цепью в условиях неполной информации

Г. А. Тимофеева¹, Н. А. Тимофеев¹

Рассматриваются вопросы математической формализации управляющих воздействий и соответствующих задач оптимального управления в условиях неполной информации для вектора вероятностей состояний марковской цепи. Задачи такого рода возникают, в частности, в финансовом анализе при исследовании проблемы управления риском и доходностью кредитного портфеля [1]. Изменение структуры кредитного портфеля описывается при помощи дискретной марковской модели с учетом неполноты информации о переходных вероятностях [2].

Предполагается, что кредитный портфель разбит на группы, состояние кредита определяется принадлежностью той или иной группе кредитов в зависимости от наличия и сроков задолженности по выплатам. Моделирование динамики структуры портфеля (вектора вероятностей состояний) основано на описании изменения состояния отдельно взятого, «случайного» кредита как марковской цепи с дискретным временем. Прогнозирование структуры портфеля в этих условиях формализуется как задача оценивания фазового состояния линейной динамической системы [2]

$$x(t+1) = P^\top x(t), \dots, \quad t = 0, \dots, N, \quad (1)$$

с известным значением распределения $x(0)$ долей в начальный момент времени и неточно заданной матрицей P . Через P^\top обозначена транспонированная матрица.

Неполнота информации может трактоваться, с одной стороны, как неопределенность, связанная с неточностью оценок матрицы переходных вероятностей (миграционной матрицы) P , полученной на основе статистических данных. С другой стороны, неопределенность коэффициентов матрицы связана с неопределенностью экономической ситуации в будущих периодах, от которой зависит своевременность выплат по кредитным договорам. При таком подходе получаем игровую постановку задачи управления кредитным портфелем,

¹Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

где роль второго игрока выполняет ситуация v на финансовых рынках (спад, стабилизация, подъем), которая формализуется, например, в виде $v \in V = [-1, 1]$.

Управляющие воздействия, направленные на изменение структуры портфеля со стороны менеджмента банка ограничены тремя процессами: организацией приема заявок $\{u_0, u_1\}$, организацией взыскания на ранних сроках (досудебное взыскание) — u_2 и организацией взыскания на поздних сроках (воздействие на группу проблемных кредитов) — u_3 . В управлении процессом приема заявок можно выделить две составляющие: u_0 — привлечение новых клиентов за счет рекламы, увеличения числа офисов и улучшения обслуживания; u_1 — улучшение процедуры отбора клиентов.

Управляемую модель динамики структуры кредитного портфеля возьмём в виде

$$x(t+1) = P^T(u, v)x(t), \quad v \in V, \quad u \in U, \quad t = 0, \dots, N. \quad (2)$$

Зависимость коэффициентов матрицы миграций P от управляющих воздействий u и ситуации на рынке v выявляется в ходе исследования свойств модели. Множество $U \in \mathbb{R}^4$ описывает ограничения (финансовые и другие) на значения управляющих воздействий; можно использовать как независимые, так и связанные ограничения.

Таким образом, получили математическую формализацию задачи управления кредитным портфелем в условиях неполной информации. Задача может быть решена в рамках теории управления и оценивания в условиях неполной информации или с использованием игрового подхода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00120а

- [1] Никонов О.И., Тимофеев Н.А. Потоки платежей кредитного портфеля в условиях неполной статистической информации // Вестник УрФУ. Сер. Экономика и управление. 2013. № 2. С. 106–111.
- [2] Тимофеева Г.А., Тимофеев Н.А. Прогнозирование составляющих кредитного портфеля на основе модели марковской цепи // АиТ. 2012. № 4. С. 47–65.

Компактность в пространстве многозначных отображений с замкнутыми неограниченными значениями и ее приложения

А. А. Толстоногов¹

Рассмотрено пространство всех непустых, замкнутых множеств из конечномерного пространства. На этом пространстве введена топология, сходимость последовательности в которой совпадает со сходимостью последовательности множеств в смысле топологического предела по Куратовскому. Установлены необходимые и достаточные условия компактности множеств в этом пространстве. Исходя из этого пространства, рассмотрено пространство непрерывных многозначных отображений, определенных на локально компактном пространстве со счетной базой, значениями которых являются элементы из указанного выше пространства непустых, замкнутых множеств. Пространство многозначных отображений наделено топологией равномерной сходимости на компактах. Доказаны необходимые и достаточные условия компактности множеств в этом пространстве, которые являются аналогами классической теоремы Арцела – Асколи. Полученные результаты используются для изучения управляемых процессов выметания, в которых в качестве допустимых управлений рассматриваются многозначные отображения с непустыми, замкнутыми неограниченными значениями.

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Условия устойчивости связанной линейной системы

В. Н. Тхай¹

Ставится задача об условиях устойчивости связанной линейной системы при допустимом изменении связи. Рассматривается слабая связь; слабость определяется малым параметром ε . При $\varepsilon = 0$ имеем не связанную линейную систему с постоянными коэффициентами. Допускаются связи, приводящие к периодической линейной системе.

Характеристическое уравнение связанной системы зависит от параметра ε , поэтому по теореме о непрерывной зависимости положения корней характеристического полинома на комплексной плоскости от его коэффициентов ненулевые характеристические показатели (ХП) подсистем, чуть-чуть меняясь вместе с параметром ε , остаются ненулевыми. Следовательно, в случае ненулевых корней характеристического уравнения (КХУ) несвязанной системы поставленная задача допускает очевидное решение.

Рассмотрим случай, когда несвязанная система распадается на m подсистем, каждая из которых имеет пару нулевых КХУ в жордановой клетке при прочих ненулевых КХУ. Тогда без ограничения общности исследуемая система записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon[A(t)x + A^*(t)y], \\ \dot{y} &= x + \varepsilon[B(t)x + B^*(t)y], \quad x, y \in R^m.\end{aligned}\tag{1}$$

Обозначим через $\bar{A}, \bar{A}^*, \bar{B}, \bar{B}^*$ матрицы, составленные из средних значений на периоде элементов матриц $A(t), A^*(t), B(t), B^*(t)$, задающих связь. Тогда поставленная задача решается выделением в пространстве, состоящем из элементов матриц $\bar{A}, \bar{A}^*, \bar{B}, \bar{B}^*$, областей устойчивости и неустойчивости.

Справедливо утверждение.

Теорема. *Характеристические показатели линейной связанной системы (1) даются формулами*

$$\lambda^s = \alpha_1^s \varepsilon^{1/2} + \alpha_2^s \varepsilon + o(\varepsilon), \quad s = 1, \dots, m.$$

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

Если в системе (1) коэффициенты таковы, что все числа α_1^s, α_2^s удовлетворяют неравенствам

$$(\alpha_1^s)^2 \leq 0, \quad \alpha_2^s < 0; \quad s = 1, \dots, m,$$

то нулевое решение асимптотически устойчиво.

Если

$$(\alpha_1^s)^2 \leq 0, \quad \alpha_2^s > 0$$

или $(\alpha_1^s)^2 > 0$ для одного или несколько номеров s , то решение неустойчиво.

Замечание 1. Вычисление коэффициентов α_1, α_2 через элементы матриц $\bar{A}, \bar{A}^*, \bar{B}, \bar{B}^*$ приведено в работах [1] (частный случай одной подсистемы), [2] (общий случай одной подсистемы), [3] (случай двух подсистем), [4] (случай произвольного числа подсистем).

Замечание 2. Задача для системы (1) возникает, в частности, в основном режиме колебаний модели, содержащей связанные подсистемы [3, 4], и соответствующих приложениях.

- [1] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
- [2] Тхай В.Н. Колебания и устойчивость в квазиавтономной системе. I. Обыкновенная точка однопараметрического семейства периодических движений // АиТ. 2006. № 9. С. 90–98.
- [3] Тхай В.Н. Модель, содержащая связанные подсистемы // АиТ. 2013. № 6. С. 32–41.
- [4] Барабанов И.Н., Турешбаев А.Т., Тхай В.Н. Модель, содержащая связанные подсистемы. Основной режим колебаний // АиТ. 2014 (в печати).

Стабилизация колебаний в модели, содержащей связанные подсистемы

В. Н. Тхай¹, И. Н. Барабанов¹

Рассматривается модель, содержащая связанные подсистемы (МССП) и описываемая системой дифференциальных уравнений с малым параметром ε , такая что при $\varepsilon = 0$ система распадается на независимые подсистемы [1]. Математическая модель подсистемы — система автономных дифференциальных уравнений произвольного порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}^s &= X^s(x^s) + \varepsilon \tilde{X}^s(\varepsilon, x^1, \dots, x^m, t), \\ x^s &\in R^{m_s}, \quad s = 1, \dots, m, \quad \Sigma m_s = n.\end{aligned}$$

Предполагается, что каждая из подсистем допускает семейство колебаний, в котором период T зависит от одного числового параметра h [2]. Предполагается также, что $dT/dh \neq 0$ для каждой подсистемы в рассматриваемой точке семейства колебаний (так называемая обыкновенная точка, основной режим МССП).

Условия существования периодического решения МССП при $\varepsilon \neq 0$ формулируются в терминах разрешимости специальной системы алгебраических уравнений (амплитудных уравнений), при этом существование простого решения системы амплитудных уравнений является достаточным условием существования изолированного периодического решения МССП, таких решений всегда четное число.

Для МССП может быть поставлена задача стабилизации колебаний двух видов: 1) стабилизировать колебания в системе независимых подсистем путем введения малых связывающих периодических управлений; 2) стабилизировать колебания в МССП при $\varepsilon \neq 0$, существование которых обеспечивается приведенными выше условиями.

Обе задачи стабилизации решаются с помощью установления условий асимптотической устойчивости в малом для периодических решений МССП. В работе приводятся эти условия устойчивости и рассматривается пример МССП, состоящий из трех подсистем второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00347, № 13-01-00376) и Программы 14 ОЭММПУ РАН.

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

- [1] *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы // *АиТ.* 2013. № 6. С. 32–41.
- [2] *Тхай В.Н.* Закон о зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра // *ПММ.* 2011. Т. 75, Вып. 3. С. 430–434.

Моделирование решений дифференциальных игр в одном классе невыпуклых множеств с гладкой границей

А. А. Успенский¹, А. В. Ушаков¹

Поведение конфликтно-управляемой системы на отрезке времени $[t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$ ($0 \leq t_0 < \vartheta < \infty$) описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1)$$

Здесь x — двумерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 . На правую часть системы (1) наложены условия, обеспечивающие существование и единственность решения.

Рассматривается игровая задача о сближении решения системы (1) с компактной целью в позиционной постановке [1]. Основным элементом конструкции, разрешающей эту задачу в классическом смысле, является максимальный стабильный мост $W^0 \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$. Построение мостов в аналитическом виде затруднено из-за свойственной им негладкости границ. Численное построение аппроксимаций мостов представляет сложную вычислительную проблему, поскольку требует разработки и реализации алгоритмически затратных процедур [2].

В этой связи представляется целесообразным использовать для решения задачи о сближении различные классы множеств с изначально предписанными свойствами. Такие множества, естественно, в общем случае не являются ни максимальными стабильными мостами, ни их аппроксимациями, более того, они не обладают ключевым

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

свойством стабильности. Речь идет о множествах, имеющих ненулевой дефект стабильности [3]. Их привлечение для построения решения игры мотивировано теоретически обоснованной оценкой промаха движений конфликтно-управляемой системы, формируемых позиционной стратегией первого игрока при любых допустимых управляющих воздействиях второго игрока [4,5]. Эта оценка зависит от дефекта стабильности множества и определяет размер окрестности цели, в которую гарантированно попадает движение системы (1).

В ряде случаев оправдано построение не самого стабильного множества W^0 , а другого множества $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$, обладающего свойствами, удобными, например, для формирования управляющих воздействий первого игрока. К указанным свойствам относится гладкость по пространственным переменным границы ∂W множества W .

Авторами предложены и реализованы алгоритмы конструирования невыпуклых трехмерных множеств в пространстве позиций игры, у которых границы сечений по t строятся гладким сопряжением дуг окружностей. Также разработаны и доведены до реализаций алгоритмы вычисления дефекта стабильности таких множеств и алгоритмы вычисления радиуса окрестности целевого множества, в которую гарантированно попадают решения системы (1).

Результаты численного моделирования решений дифференциальных игр приводятся на примерах известных дифференциальных игр.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00486_а и 13-01-96055).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // ПММ. Т. 67, вып. 5, 2003. С. 771–783.
- [3] Ушаков В.Н., Латушкин Я.А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 178–194.
- [4] Ушаков В.Н., Малёв А.Г. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.

- [5] Ушаков В.Н., Успенский А.А. Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова, 2010, Т. 271, С. 299–318.

Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца

В. И. Ухоботов¹, И. В. Измestьев¹

Линейную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания T с помощью линейной замены переменных [1, С. 160] можно привести к виду, когда в правой части новых уравнений стоят суммы управлений u первого и v второго игроков. В докладе рассматривается случай, когда вектограммы управлений являются шарами, радиусы которых зависят от времени. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad t \leq T; \quad z \in \mathbb{R}^n; \quad u, v \in O. \quad (1)$$

Здесь $O = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leq 1\}$, $\|z\|$ — норма вектора $z \in \mathbb{R}^n$; $a(t) \geq 0$ и $b(t) \geq 0$ — заданные функции. Для таких игр в работе [2] в случае произвольного выпуклого замкнутого терминального множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ построен альтернированный интеграл [3] $W(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t \leq T$, который является максимальным стабильным мостом, ведущим в момент времени T на цель Z [1].

В работе приводится вид альтернированного интеграла $W(t) = S(f_1(t), f_2(t))$ для случая, когда терминальное множество Z имеет вид кольца $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 \leq \|z\| \leq \varepsilon_2\}$ при $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Функции $f_i(t)$ вычислены в явном виде.

Эти результаты используются при построении максимального стабильного моста, когда на выбор управления первого игрока накладывается интегральное ограничение того или иного вида. В част-

¹Челябинский государственный университет

ности, для игры с импульсным управлением первого игрока

$$dz = -a(t)du + b(t)vdt, \quad \int_{t_0}^T \|du(r)\| \leq \mu_0, \quad v \in O,$$

максимальный стабильный мост имеет следующий вид:

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : z \in S(r_1(t, \mu), r_2(t, \mu)), \mu \geq B(t)\},$$

где функции $r_i(t, \mu)$, $B(t)$ вычисляются в явном виде. Предложен алгоритм построения оптимальных управлений игроков по данному стабильному мосту.

В качестве примера рассмотрена модификация игры «изотропные ракеты» [4], в которой первый игрок обладает импульсным управлением. Его цель — в заданный момент времени подойти к противнику на расстояние не больше одного заданного значения, но не меньше другого. Цель второго игрока противоположна. Проведено компьютерное моделирование найденных оптимальных управлений.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Ухоботов В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204.
- [3] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
- [4] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

Наборы дифференциальных включений и унификация наборов

В. Н. Ушаков¹, С. А. Брыкалов¹, Г. В. Паршиков¹

Рассматриваются наборы дифференциальных включений (α -наборы) на $[t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < \infty$):

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{A} \text{ — некоторое множество.} \quad (1)$$

Отображения $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, удовлетворяют следующим условиям.

А. $F_\alpha(t, x)$ — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$.

В. Для любой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(F_\alpha(t_*, x_*), F_\alpha(t^*, x^*)) \leq \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \quad (2)$$

$$(t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } \Omega, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

С. Для любой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ при некотором $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$

$$d(F_\alpha(t, x_*), F_\alpha(t, x^*)) \leq L \|x_* - x^*\|, \quad (3)$$

$$(t, x_*) \text{ и } (t, x^*) \text{ из } \Omega, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Д. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\max_{f \in F_\alpha(t, x)} \|f\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (4) \quad (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

Е. При любых $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{R}^n$ величина $\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} h_{F_\alpha(t, x)}(l)$ достигается на некотором $\alpha_* \in \mathcal{A}$.

Здесь $d(F_*, F^*)$ — хаусдорфово расстояние между компактами F_* и F^* из \mathbb{R}^n , $h_{F_*}(l) = \max_{f \in F_*} \langle l, f \rangle$, $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение векторов l и f .

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Доклад примыкает к исследованиям Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [1–3] в теории позиционных дифференциальных игр и теории минимаксных решений уравнений Гамильтона – Якоби. Изучаются две задачи, относящиеся к сближению с заданным компактом $M \subset \mathbb{R}^n$ движений $x(t)$ дифференциальных включений (1):

1. Выделить множество $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ всех (t_*, x_*) , из которых для каждого д. в. (1) существует движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$, приходящее в момент ϑ на M .

2. Среди всех $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, слабо инвариантных относительно α -набора (1) и удовлетворяющих условию $W(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\vartheta, x) \in W\} \subset M$, выделить максимальное множество W^c .

Для проведения теоретических исследований и эффективных приближенных вычислений множеств W и W^c в задачах 1 и 2 вводится квазигамильтониан α -набора, и α -набор подменяется унификационным набором дифференциальных включений, выраженных через квазигамильтониан [4].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (14-01-00486_а, 13-01-96055).

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.
- [3] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991.
- [4] Ушаков В.Н., Тарасьев А.М., Успенский А.А. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.

Оценки множеств достижимости нелинейной динамической системы с неопределенностью

Т. Ф. Филиппова¹

Рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости управляемой динамической системы, т. е. множеств состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Задачи, связанные с точным построением или приближенным оцениванием множеств достижимости управляемых систем, являются одними из фундаментальных проблем в теории управления и теории дифференциальных игр [1, 2], их решение может быть использовано также в исследовании сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.). Отметим, что форма и структура множеств достижимости динамических систем может быть довольно сложной. В этих случаях представляет интерес приближение множеств достижимости областями определенной канонической формы. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие канонические множества.

В последние годы разработана полная теория построения оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем, основанная на технике эллипсоидального исчисления [3, 4]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. В работах [5, 6] техника эллипсоидального исчисления была использована для решения задач оценивания трубок траекторий некоторых нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. При этом предполагалось, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управле-

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

ний стеснены эллипсоидальными ограничениями.

В данной работе техника эллипсоидального исчисления развивается для решения задач оценивания трубок траекторий нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным и нелинейностью квадратичного типа, предложены методы построения невыпуклых многозначных оценок множеств достижимости нелинейных динамических систем в виде конечного объединения эллипсоидальнозначных сечений соответствующих траекторных трубок вспомогательных дифференциальных включений. Предлагаются итерационные алгоритмы внешнего оценивания траекторных трубок и множеств достижимости. Представлены результаты компьютерного моделирования.

- [1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [3] Kurzanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [4] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
- [5] Filippova T.F. Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Supplement 2011. Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. V. 1. Springfield: American Institute of Mathematical Sciences, 2011. P. 410–419.
- [6] Filippova T.F. Approximation techniques in impulsive control problems for the tubes of solutions of uncertain differential systems // Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory: Contributions from AMAT 2012 (Editors: George A. Anastassiou and Oktay Duman), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2013. V. 41. P. 385–396.

Предельные дифференциальные включения и устойчивость неавтономных систем

И. А. Финогенко¹

Исследуется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (1)$$

где $F : R^{1+n} \rightarrow R^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Для него вводится многозначное отображение по формуле

$$F'(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \bigcup_{k \geq n} F(t + t_k, x),$$

которое называется предельным, и рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, x). \quad (2)$$

Если $x(t)$ — ограниченное решение включения (1), определенное на некотором промежутке $(\alpha, +\infty)$, и $t_k \rightarrow +\infty$, $t_k \geq \alpha$, то функции $y_k(t) = x(t + t_k)$ являются решениями включений

$$\dot{y}_k(t) \in F(t + t_k, y_k(t)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0.$$

Тогда предельная для последовательности функций $y_k(t)$ функция $y(t)$ — решение дифференциального включения (2) и её значения принадлежат ω -предельному множеству решения $x(t)$ включения (1).

В данной работе в терминах предельного дифференциального включения (2) установлены свойства типа инвариантности ω -предельных множеств решений включения (1) и с использованием функций Ляпунова $V(t, x)$ со знакопостоянными производными установлен аналог принципа инвариантности Ла-Салля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00287-а.

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Теоремы тауберова типа для конфликтно-управляемых систем

Д. В. Хлопин¹

Пусть даны множество Ω , функция качества $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, семейство \mathbb{K} движений $z : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$. Пусть отображение $t \mapsto g(z(t))$ для каждого $z \in \mathbb{K}$ измеримо, введем его среднее на $[0, T]$ и среднее с дисконтом λ :

$$av_T(z) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T g(z(t))dt, \quad bw_\lambda(z) \triangleq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(z(t))dt \quad \forall \lambda, T > 0.$$

Как показано Феллером (для последовательностей — ещё Харди),

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} av_T(z) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} bw_\lambda(z) \quad \forall z \in \mathbb{K}$$

при условии, что существует хотя бы один из этих пределов.

Теперь всякому множеству $P \subset \mathbb{K}$ можно сопоставить значения

$$AV_T[P] \triangleq \inf_{z \in P} av_T(z), \quad BW_\lambda[P] \triangleq \inf_{z \in P} bw_\lambda(z).$$

Предел для BW_λ введен в [5]. При $P(x) \triangleq \{z \in \mathbb{K} \mid z(0) = x\}$ такие пределы исследовались в [3, 6, 9]. Ссылки для дискретной постановки см. в [10]. Для стратегий U (подмножеств, замкнутых относительно «склейки» движений) в [8] доказано, что

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} AV_T[U \cap P(x)] = \lim_{\lambda \rightarrow +0} BW_\lambda[U \cap P(x)],$$

если хотя бы один из пределов существует и равномерен по $x \in \Omega$. Данный результат, в частности, содержит тауберову теорему для задач управления.

В антагонистических дифференциальных играх при выполнении условия седловой точки в маленькой игре имеет место [1, 7] равенство верхних и нижних цен. В частности, для всех $\lambda > 0$, $T > 0$, $x \in \Omega$

$$AV_T(x) \triangleq \sup_{U \in \mathbb{U}} \inf_{z \in U \cap P(x)} av_T(z) = \inf_{V \in \mathbb{V}} \sup_{z \in V \cap P(x)} av_T(z),$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

$$BW_\lambda(x) \triangleq \sup_{U \in \mathbb{U}} \inf_{z \in U \cap P(x)} bw_\lambda(z) = \inf_{V \in \mathbb{V}} \sup_{z \in V \cap P(x)} bw_\lambda(z),$$

где элементы замкнутых относительно «склейки» семейств $\mathbb{U}, \mathbb{V} \subseteq \mathbb{K}$ множеств из \mathbb{K} порождены всевозможными неупреждающими квази-стратегиями соответствующего игрока.

Анонсируется, что если есть равенство равномерных по $x \in \Omega$ пределов цен у av_T или у bw_λ , то оба эти предела равны и равномерны по $x \in \Omega$:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} AV_T(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} BW_\lambda(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

В [2, 4, 6] установлены подобные результаты для дифференциальных игр в эргодическом случае; состояние проблемы для игр см. в [11].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1019).

- [1] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. Наука, 1981.
- [2] *Alvarez O., Bardi M.* Ergodicity, stabilization, and singular perturbations for Bellman–Isaacs equations // *Mem. Am. Math. Soc.* 2009. Vol. 204.
- [3] *Arisawa M., Lions P.L.* On ergodic stochastic control // *Com. in Partial Differential Equations.* 1998. Vol. 23, no. 11–12, pp. 2187–2217.
- [4] *Bardi M.* On differential games with long-time-average cost // *Advances in Dynamic Games and Their Applications*, 2009. Vol. 10, pp. 3–18.
- [5] *Blackwell D.* Discrete dynamic programming // *Ann. Math. Statist.* 1962. Vol. 33, no. 2, pp. 719–726.
- [6] *Cardaliaguet P.* Ergodicity of Hamilton–Jacobi equations with a non coercive non convex Hamiltonian in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ // *Ann. l’Inst. Henri Poincaré(C) Non Linear Anal.* 2010. Vol. 27, no. 3, pp. 837–856.
- [7] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. Springer, 1988.
- [8] *Oliu-Barton M., Vigeral G.* A uniform Tauberian theorem in optimal control // *Advances in Dynamic Games.* 2013. Vol. 12, pp. 199–215.

- [9] *Quincampoix M., Renault J.* On the existence of a limit value in some non expansive optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 2011. Vol. 49, no. 5, pp. 2118–2132.
- [10] *Renault J.* Uniform value in dynamic programming // J. Eur. Math. Soc. 2011. Vol. 13, pp. 309–330.
- [11] *Sorin, S.* Zero-sum repeated games: recent advances and new links with differential games // Dynamic Games and Applications. 2011. Vol. 1, no. 1, pp. 172–207.

Расширения абстрактных задач о достижимости

А. Г. Ченцов¹

В работах Н.Н. Красовского широко использовались обобщенные задачи управления (см. [1, 2]). Некоторые методы, допускающие идейные аналогии с упомянутыми подходами, излагаются в докладе.

Рассматриваются расширения абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). В качестве обобщенных элементов (ОЭ) используются ультрафильтры (y/ϕ) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) и конечно-аддитивные (к.-а.) меры, а в качестве асимптотических аналогов областей достижимости — множества притяжения (МП) в топологическом пространстве. Для представления основного МП используется схема, предусматривающая реализацию данного МП в виде непрерывного образа вспомогательного МП в пространстве ОЭ.

Исследуется случай, когда y/ϕ определяются на алгебре подмножеств замкнутого промежутка вещественной прямой и используются затем либо непосредственно в качестве ОЭ, либо для построения ОЭ в классе к.-а. мер на основе отождествления с к.-а. $(0,1)$ -мерами. В последнем случае налагается условие аппроксимируемости к.-а. мер нужного типа неопределенными интегралами обычных управлений. Используемый вариант ОАХ соответствует случаю управления в классе импульсов исчезающе малой продолжительности.

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

В [3] для целей представления МП использовалась схема расширения абстрактной задачи о достижимости на основе компактификации Стоуна-Чеха [4, гл. 3], широко применяемой в общей топологии. Основное затруднение связано с неконструктивностью в части представления свободных [4, с. 271] у/ф, которые ответственны за нетривиальные асимптотические эффекты. В [5–8] и в ряде других работ исследовалась конструкция, в рамках которой использовались у/ф того или иного ИП с алгеброй или полуалгеброй множеств; в частности, в качестве пространства ОЭ использовались компакты Стоуна. Исчерпывающее описание одного такого компакта было получено в [10], и применено затем при построении аналогичных компактов в виде подпространств гомеоморфов тихоновских произведений (см. [7, 8]).

Вышеупомянутые конструкции предполагается изложить в докладе во взаимосвязи с общими процедурами расширения топологических пространств (см. [4]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-537; № 13-01-90414).

- [1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [2] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [3] Ченцов А.Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна-Чеха // Современная математика и ее приложения. Академия Наук Грузии, Институт кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
- [4] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [5] Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удм. ун-та. Математика, механика, компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
- [6] Ченцов А.Г. Ярусные отображения и преобразования на основе фильтров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314.
- [7] Ченцов А.Г. К вопросу о представлении ультрафильтров и их применении в конструкциях расширений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 289–308.

- [8] Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств и их применение в конструкциях расширений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 285–304.
- [9] Ченцов А.Г. Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Диф. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1047–1064.
- [10] Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.

О тотальном сохранении разрешимости управляемой задачи Дирихле для эллиптического уравнения

А. В. Чернов^{1,2}

Термин «*тотальное сохранение разрешимости*» (ТСР), означающий глобальную разрешимость управляемой системы для всех допустимых управлений, был введен в [1] (см. также [2]). Там же доказан *мажорантный признак* ТСР для эволюционных управляемых систем, представимых в виде вольтеррова функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна. В [3] предложен подход к доказательству ТСР, основанный на обобщении теоремы Минти–Браудера и применимый, в частности, к существенно нелинейным неэволюционным уравнениям, в том числе, эллиптического типа. Отметим, что в работах [1, 2] доказывалось не только ТСР, но и равномерная поточечная оценка решений, тогда как в [3] речь шла лишь о равномерной оценке решений по норме соответствующего пространства. Далее сформулируем мажорантный признак ТСР для управляемых полулинейных эллиптических уравнений.

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, область $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и выпукла; $2 < q < \frac{2n}{n-2}$ — заданное число. Как известно,

¹Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

²Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е.Алексеева

$W_2^1(\Pi) \subset L_q(\Pi)$ (ограниченно и компактно). Через $L_\infty^+(\Pi)$ будем обозначать класс всех неотрицательных функций из $L_\infty(\Pi)$; \mathbb{R}_+^n — множество всех векторов из \mathbb{R}^n с неотрицательными компонентами. Далее, пусть \mathcal{D} — заданное выпуклое множество измеримых управляющих функций $u \in L_r^s(\Pi)$, поточечно равномерно ограниченных по модулю некоторой функцией из $L_r^+(\Pi)$, $s \in \mathbb{N}$, $r > 2$. Для числа $\gamma > 0$ обозначим $\mathcal{A}(\gamma)$ класс всех матричных функций $A = A(\cdot) = \{a_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n \times n}(\Pi)$, удовлетворяющих условию $A(t)\xi \cdot \xi \geq \gamma|\xi|^2$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п. в. $t \in \Pi$ (здесь « \cdot » означает скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^n). Предположим, что $\varphi(t, \xi) : \Pi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\xi \in \mathbb{R}$ и неубывающая при $\xi \geq 0$, такая что $\varphi(\cdot, x(\cdot)) \in L_2(\Pi)$ для всех $x \in L_q(\Pi)$. Определим класс $\mathbb{F}(\varphi)$ всех функций $f(t, \xi, v) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $(\xi, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$ и удовлетворяющих условию $|f(t, \xi, u(t))| \leq \varphi(t, |\xi|)$ для п. в. $t \in \Pi$, $\xi \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}$.

При

$$A \in \mathcal{A}(\gamma), \quad b \in L_\infty^+(\Pi), \quad f \in \mathbb{F}(\varphi), \quad \mathcal{L}[x] \equiv -\operatorname{div}(A\nabla x) + bx$$

рассмотрим задачу Дирихле для управляемого полулинейного эллиптического уравнения второго порядка типа диффузии-реакции:

$$\mathcal{L}[x](t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \Pi, \quad u \in \mathcal{D}; \quad x|_{\partial\Pi} = 0. \quad (1)$$

Решение задачи (1) понимаем в обобщенном смысле, а именно, как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$ интегральному тождеству $B[x, \omega] = \mathcal{F}_u[x, \omega]$, где

$$B[x, \omega] \equiv \int_{\Pi} [A\nabla x \cdot \nabla \omega + bx\omega] dt, \quad \mathcal{F}_u[x, \omega] \equiv \int_{\Pi} f(t, x(t), u(t)) \omega(t) dt.$$

Теорема. Пусть мажорантная для (1) задача

$$\mathcal{L}[x](t) = \varphi(t, x(t)), \quad t \in \Pi; \quad x|_{\partial\Pi} = 0,$$

имеет обобщенное решение $x = \bar{x} \in H_0^1(\Pi)$. Тогда при любом $u \in \mathcal{D}$ задача (1) имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение $x = x_u \in H_0^1(\Pi)$, такое что $|x_u| \leq \bar{x}$, $\|x_u\|_{W_2^1} \leq \nu$, где число $\nu \geq 0$ не зависит от u .

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и гранта (соглашение от 27.08.13 № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

- [1] Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
- [2] Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
- [3] Чернов А.В. Об одном обобщении метода монотонных операторов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 535–544.

О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения

А. А. Чикрий¹

Рассматривается конфликтно-управляемый процесс с цилиндрическим терминальным множеством. Предполагается, что в описании траектории процесса начальные данные отделены от управляющих воздействий. Для такой игровой задачи развита техника разрешающих функций с использованием свойств многозначных отображений и обратных функционалов Минковского, позволившая в итоге получить условия завершения игры за некоторое гарантированное время в классе квази- и стробоскопических стратегий. При этом, если ранее применялись скалярные разрешающие функции, то в данном случае используются матричные, позволяющие не только притягивать множество к началу координат в конусе, на него натянутом, но и осуществлять поворот множества на любой угол, что существенно расширяет возможности метода.

¹Институт кибернетики НАН Украины, Киев

Наряду с предыдущей методикой к исследованию упомянутых конфликтно-управляемых процессов применяется техника, использующая идеи правила экстремального прицеливания Н.Н. Красовского. Получены условия окончания игры не позже, чем за время первого поглощения, используя технику многозначных отображений и аппарат опорных функций.

Дано сравнение гарантированных времен развитых подходов, а также установлена их связь с первым прямым методом Л.С. Понтрягина.

Разработанная методика покрывает в единой схеме процессы, которые описываются обыкновенными дифференциальными, интегральными, интегродифференциальными, дифференциально-разностными уравнениями, уравнениями с дробными производными и импульсные системы.

Результаты иллюстрируются на модельных примерах.

О применении метода характеристик для построения обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями

Л. Г. Шагалова¹

Рассматривается полученная в [1] для модели молекулярной эволюции Кроу – Кимуры задача Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями:

$$\partial u / \partial t + H(x, \partial u / \partial x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [-1; 1], \quad (1)$$

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1]. \quad (3)$$

В [2] на основе минимаксного [3] (и/или вязкостного [4, 5]) подхода введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи (1)–(3)

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$. Момент $T > 0$ определяется из условия продолжимости на отрезок $[0, T]$ выпущенных с начального многообразия решений характеристической системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p),\end{aligned}\tag{4}$$

где $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$, $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$.

Метод построения непрерывного обобщенного решения задачи (1)–(3) состоит в непрерывном продолжении заданного начального условия (3) на границу фазовых ограничений и сведении начальной задачи Коши к задаче Дирихле, вязкостное решение которой существует, единственно и может быть построено с помощью характеристик (4).

Поскольку начальное условие (3) можно продолжить на границу фазовых ограничений не единственным образом, обобщенное решение задачи (1)–(3) неединственно.

Исследуется характеристическая система (4), изучаются различные возможные непрерывные продолжения начальных условий на границу фазовых ограничений и соответствующие этим продолжениям обобщенные непрерывные решения задачи (1)–(3). Проведено численное моделирование.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00168.

- [1] *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2008. Vol. 78, no. 4. P. 041908–6.
- [2] *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
- [3] *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991.
- [4] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.

- [5] *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.* Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 318, no. 2. P. 643–683.

Обратные задачи в моделях распределения ресурсов

А. А. Шананин¹

Обратные задачи, связанные с идентификацией моделей производства Хаутеккера–Йохансена, могут быть сформулированы как проблемы инъективности, характеристики образа и формул обращения для интегрального оператора прибыли

$$\Pi(p, p_0) = \int_{R_+^n} (p_0 - px)_+ \mu(dx), \quad (1)$$

где $\mu(\cdot)$ — неотрицательная мера на R_+^n . Исследование этих задач основано на изучении преобразования Радона по неполным данным и обобщении теорем Бернштейна о вполне монотонных функциях и сепаратной аналитичности.

Одной из тенденций, существенно влияющей на экономическое положение России в настоящее время, является процесс глобализации и интеграция России в мировое экономическое пространство. За последние десятилетия процесс глобализации в мировом масштабе привёл к существенным изменениям эластичности замещения товаров. В связи с этим возникает ряд новых проблем, которые требуют модификации базовых моделей экономической теории и исследования обратных задач, необходимых для обработки экономической статистики. Необходимость отражения процесса конкуренции отечественных товаров и их импортных аналогов требует модификации не только модельного аппарата, но и исследования соответствующих обратных задач. Например, традиционные отечественные методики

¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный

базируются на развитой в условиях плановой экономики технологии анализа межотраслевого баланса. Однако в результате процесса импортозамещения доля отечественных товаров в производственных затратах обрабатывающей промышленности сильно изменяется в зависимости от экономической конъюнктуры, как результат — для обрабатывающей промышленности гипотеза о постоянстве затрат не выполняется. В условиях, когда ЦБ РФ поддерживает стабильный курс рубля по отношению к иностранной валюте, импортные товары вытесняют отечественные из-за более высокого уровня инфляции на внутреннем российском рынке по сравнению с мировым. Когда же нараставшие финансовые трудности приводят к девальвации рубля, начинается обратный процесс замещения импортных товаров отечественными. Поэтому при описании агентов необходимо моделировать их поведение, в частности, описывать процесс выбора между отечественными и импортными товарами-ресурсами в рамках процесса производства. Для этого можно использовать модифицированную модель Хаутеккера – Йохансена, в которой учитывается замещение импортных и отечественных товаров на микроуровне, и исследовать обобщение оператора (1), имеющее вид

$$\Pi(p, p_0) = \int_{R_+^n} (p_0 - q(p_1 x_1, p_2 x_2, \dots, p_n x_n))_+ \mu(dx),$$

где $q(p)$ — положительно однородная первой степени, вогнутая, непрерывная на R_+^n функция, принимающая положительные значения на $\text{int} R_+^n$.

Доступной информацией для идентификации обобщённой модели Хаутеккера – Йохансена являются временные ряды объёмов производства $\{y^t | t = 1, \dots, T\}$, цен на выпускаемую продукцию $\{p_0^t | t = 1, \dots, T\}$ и производственные факторы $\{p_i^t | t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n\}$. Задача идентификации может быть поставлена как следующая проблема моментов: найти неотрицательную меру $\mu(\cdot)$, такую что

$$\int_{R_+^n} \theta(p_0 - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \dots - p_n x_n) \mu(dx) = y^t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2)$$

Здесь $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Проблема моментов (2) оказывается связанной с такими комбинаторными структурами как плактический моноид, тайлинги, вайринги, диаграммы Юнга.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-07-00075).

- [1] *Henkin G.M., Shananin A.A.* Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions // Trans. of Math. Monographs. 1990. Vol. 81, pp. 189–223.

Формирование гарантирующих стратегий уклонения с памятью в играх одного убегающего и нескольких преследователей

И. И. Шевченко^{1,2}

В докладе анализируется противодействие на плоскости убегающего E и группы преследователей $P_{j_1, \dots, j_n} = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$, $n > 0$. Пусть $z_E, z_{P_{j_l}}$ — векторы состояния игроков, $z = (z_E, z_{j_1}, \dots, z_{j_n})$ — вектор состояния всей системы, Z — множество допустимых состояний (игровое пространство). Определим расстояние ρ_{j_1, \dots, j_n} от E до группы P_{j_1, \dots, j_n} равным минимальному из евклидовых расстояний от E до всех преследователей из P_{j_1, \dots, j_n} :

$$\rho_{j_1, \dots, j_n}(z) = \min(\rho_{j_1}(z), \dots, \rho_{j_n}(z)),$$

где $\rho_{j_l}(z)$ — евклидово расстояние между E и P_{j_l} в соответствующем состоянии $z \in Z$, $l = 1, \dots, n$. Группа P_{j_1, \dots, j_n} осуществляет r -поимку E в состоянии z , если $\rho_{j_1, \dots, j_n}(z) \leq r$, где $r \geq 0$ задано.

Предполагается, что все игроки обладают безынерционными движениями и в начальный момент игры E окружен преследователями из группы P_{j_1, \dots, j_n} , т. е. находится внутри выпуклой оболочки множества точек, в которых располагаются преследователи. Игрок E превосходит по скорости всех преследователей и стремится безопасно (избежав r -поимки) вырваться из окружения, применяя некоторую стратегию уклонения с памятью. Для этого E достаточно пересечь безопасно отрезок, соединяющий положения двух определённых преследователей, и в дальнейшем оставаться на безопасном расстоянии

¹ТИНРО-Центр, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

от группы вне выпуклой оболочки множества точек, в которых находятся преследователи.

Первой базовой является задача оценки минимального расстояния до заданного преследователя P_a , $a \in \{j_1, \dots, j_n\}$, которое гарантируется E при прямолинейном движении. Вторая базовая задача состоит в формировании стратегии уклонения и определении минимального гарантированного расстояния до группы из двух заданных преследователей P_b и P_c , $b, c \in \{j_1, \dots, j_n\}, b \neq c$, при маневрировании, в процессе которого убегающий пересекает линию, соединяющую текущие позиции преследователей. В отличие, например, от [1] применяются стратегии уклонения с памятью, для того чтобы при выборе управления по предыстории игрок E имел возможность учитывать минимальное расстояние до группы, а при расчетах показателей качества используются траектории, которые являются пределами ломаных Эйлера при стремлении к нулю диаметра разбиения временной оси [2].

Выделение предысторий, для которых при фиксированной стратегии уклонения и заданной предыстории E гарантируется безопасный выход из окружения группой P_{j_1, \dots, j_n} , $n \geq 3$, может осуществляться на основе решений этих двух базовых задач с учетом альтернативного характера соответствующих игр [3].

Работа выполнена в рамках программы исследований игр преследования/уклонения со многими участниками.

- [1] *Hagedorn P., Breakwell J.V.* A differential game with two pursuers and one evader // *ЖОТА*. 1976. V. 18, no. 1, pp. 15–29.
- [2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [3] *Шевченко И.И.* Гарантированное сближение с дальним из убегающих // *АиТ*. 2008. № 5. С. 101–119.

Численное исследование устойчивости обобщенного течения Колмогорова

Р. И. Шевченко^{1,2}

Рассматривается система дифференциальных уравнений плоско-
го движения несжимаемой вязкой жидкости

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \nu \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^\top$ — скорость течения, $\mathbf{F} = (F_x, F_y)^\top$ —
объемная сила, ρ — постоянная плотность, p — давление, ν — коэф-
фициент вязкости.

Исследуется устойчивость обобщенного течения Колмогорова
 $\mathbf{v} = (u(y), \delta)^\top$ [1, 2], существующего при постоянном давлении p и
 2π -периодической объемной силе $\mathbf{F} = (f(y), 0)^\top$. Функция u является
решением дифференциального уравнения

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} - \delta \frac{du}{dy} + f(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Функция тока Ψ малых возмущений течения Колмогорова удо-
влетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = -\delta \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + u(y)'' \frac{\partial \Psi}{\partial x} - u(y) \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + \nu \Delta^2 \Psi,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Ограничимся рассмотрением периодических по x и y воз-
мущений этого течения [1], полагая $\Psi(t, x, y) = e^{i(\sigma t + \alpha x)} \varphi(y)$,

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

²Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург

где φ — 2π -периодическое решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\nu[\varphi^{(4)} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi] = i(\sigma + \alpha u(y))(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - i\alpha u''(y) + \delta \frac{d}{dy}[\varphi'' - \alpha^2\varphi]$$

с краевыми условиями

$$\varphi^{(k)}(-\pi) = \varphi^{(k)}(\pi), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Предлагаемый численный метод исследования последней спектральной задачи позволяет строить кривые нейтральной устойчивости.

- [1] Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25, вып. 6. С. 1140–1143.
- [2] Афендикова А.Л., Варин В.П. Вырожденная бифуркация рождения цикла в многопараметрических задачах гидродинамики // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 215–221.

Применение гарантированного подхода при параметрической идентификации модели динамической системы с хаотическими решениями

А. С. Шелудько¹, В. И. Ширяев¹

Рассматривается задача оценивания параметра λ модели динамической системы, заданной одномерным хаотическим отображением

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), \tag{1}$$

по единственной зашумленной реализации измерений

$$y_k = x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \tag{2}$$

¹Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск

Применение гарантированного подхода [1] предполагает рекуррентное нахождение множественных оценок (информационных множеств) Λ_k и X_k для параметра λ и переменной состояния x_k соответственно. При этом не требуется выдвигать предположений о модели ошибок измерений v_1, \dots, v_N . Информация об ошибках представляется только в виде множественных оценок V_1, \dots, V_N :

$$v_1 \in V_1, \dots, v_N \in V_N.$$

Исходными данными для алгоритма являются также априорные множественные оценки Λ_0 и X_0 для параметра λ и начального условия x_0 :

$$\lambda \in \Lambda_0, x_0 \in X_0.$$

Информационное множество X_k на шаге k определяется следующим образом (см., например, [2]):

$$X_k = X_{k/k-1} \cap Y_k. \quad (3)$$

Здесь $X_{k/k-1}$ — множество прогнозов; Y_k — множество, совместное с измерением y_k . Для построения множества прогнозов используются множества Λ_{k-1} и X_{k-1} , полученные на предыдущем шаге:

$$X_{k/k-1} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} S(X_{k-1}, \lambda),$$

$$S(X_{k-1}, \lambda) = \{x \mid x = f(t, \lambda), t \in X_{k-1}\},$$

где $S(X_{k-1}, \lambda)$ — множество прогнозов, построенное для конкретного значения параметра λ . Множество, совместное с измерением y_k , определяется исходя из множественной оценки V_k ошибки v_k :

$$Y_k = \{x \mid y_k - x \in V_k\}.$$

Если в результате выполнения операции пересечения (3) получаем $X_k \neq X_{k/k-1}$, то для некоторых значений параметра $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ может оказаться, что

$$S(X_{k-1}, \lambda) \cap X_k = \emptyset.$$

В этом случае за счет исключения таких значений уточняется множественная оценка параметра:

$$\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda_{k-1} \mid S(X_{k-1}, \lambda) \cap X_k \neq \emptyset\}.$$

Численные эксперименты показали, что если на некотором шаге k реализующаяся ошибка v_k оказывается близкой к одной из границ множества V_k , то на этом шаге возможно уточнение множественной оценки Λ_k параметра λ . Таким образом, эффективность алгоритма зависит от того, насколько множественные оценки V_1, \dots, V_N адекватны реально реализующимся ошибкам измерений. Выбор множественных оценок для ошибок можно организовать с помощью параллельной обработки измерений с разными исходными данными.

Описанный алгоритм может быть использован для предварительной обработки измерений (2) с целью уточнения множества поиска параметра λ при идентификации модели (1) с помощью МНК [3].

- [1] Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *АиТ*. 1991. № 4. С. 3–26.
- [2] Шелудько А.С., Ширяев В.И. Алгоритм минимаксной фильтрации для одномерного хаотического процесса // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. № 5. С. 8–12.
- [3] Смирнов Д.А., Власкин В.С., Пономаренко В.И. Метод оценки параметров одномерных отображений по хаотическим временным рядам // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31. № 3. С. 18–26.

Задача двухуровневого минимаксного программного управления процессом сближения для дискретной динамической системы

А. Ф. Шориков¹

На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T} = \{0, 1, \dots, T\}$ ($T > 0$) рассматривается дискретная динамическая система, состоящая из 3-х объектов. Динамика объекта I — основного, управляемого доминирующим игроком P (игроком-преследователем), — описывается векторным дискретным рекур-

¹Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

рентным уравнением вида

$$y(t+1) = f(t, y(t), u(t), u^{(1)}(t)), \quad y(0) = y_0; \quad (1)$$

динамика объекта I_1 — вспомогательного, управляемого подчиненным игроком S , задаётся уравнением

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)u^{(1)}(t), \quad x(0) = x_0; \quad (2)$$

динамика объекта II , управляемого игроком-уклоняющимся E , — уравнением вида

$$z(t+1) = \bar{A}(t)z(t) + \bar{B}(t)v(t), \quad z(0) = z_0. \quad (3)$$

Здесь $t \in \overline{0, T-1}$; $y \in \mathbb{R}^r$, $x \in \mathbb{R}^{r_1}$ и $z \in \mathbb{R}^s$ — фазовые векторы объектов I , I_1 и II соответственно ($r, r_1, s \in \mathbb{N}$, где \mathbb{N} — множество натуральных чисел); $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $u^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ и $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — векторы управляющих воздействий игроков P , S и E , стесненные ограничениями

$$u(t) \in U_1, \quad u^{(1)}(t) \in U_1^{(1)}(u(t)), \quad v(t) \in V_1; \quad (4)$$

вектор-функция $f : \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p_1} \rightarrow \mathbb{R}^r$ для каждого $t \in \overline{0, T-1}$ непрерывна по совокупности переменных $(y, u, u^{(1)})$, и для любого момента $t \in \overline{0, T-1}$, любого выпуклого компакта $Y \subset \mathbb{R}^r$ и любого вектора $u \in \mathbb{R}^p$ множество

$$f(t, Y, u, U_1^{(1)}) = \left\{ \hat{y} \in \mathbb{R}^r : \hat{y} = f(t, y, u, u^{(1)}), \quad y \in Y, \quad u^{(1)} \in U_1^{(1)}(u) \right\}$$

является выпуклым компактом; матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $\bar{A}(t)$ и $\bar{B}(t)$ имеют размерности $(r_1 \times r_1)$, $(r_1 \times p)$, $(r_1 \times p_1)$, $(s \times s)$ и $(s \times q)$ соответственно. Для всех моментов времени $t \in \overline{0, T}$ фазовые векторы $y(t)$, $x(t)$ и $z(t)$ стеснены заданными ограничениями

$$y(t) \in Y_1, \quad x(t) \in X_1, \quad z(t) \in Z_1. \quad (5)$$

При этом множество U_1 состоит из конечного числа элементов, а множества $U_1^{(1)}(u)$, V_1 , Y_1 , X_1 и Z_1 являются выпуклыми многогранниками в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

В динамической системе (1)–(5) выделяются два уровня управления — основной и второстепенный. Описываются информационное

обеспечение игроков и критерии качества рассматриваемых процессов: сближения объекта I с объектом II и сближения объекта I_1 с заданным состоянием в финальный момент времени.

На основе работ [1–3] предлагается математическая формализация многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного терминального управления процессом сближения с неполной информацией и приводится общая схема ее решения. Полученные в работе результаты могут быть использованы при создании многоуровневых систем управления для сложных механических, экономических и других динамических процессов, функционирующих в условиях дефицита информации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00043-а.

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [3] Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

Об исследовании качественных свойств нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений

А. А. Щеглова¹

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$F(t, x(t), \frac{d}{dt}x(t), u(t)) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \quad (1)$$

где $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — искомая функция; $u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^l$ — управление; $F(t, x, y, u) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $D = I \times X \times \mathbb{R}^n \times U$; $U \subseteq \mathbb{R}^l$ и $X \subseteq \mathbb{R}^n$ —

¹Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

окрестности точек $u = 0$ и $x = 0$ соответственно. Предполагается, что

$$\det \frac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y} \equiv 0.$$

Системы такого рода называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

По своим свойствам ДАУ существенно отличаются от систем ОДУ, разрешенных относительно производной (в нормальной форме). В общем случае решение ДАУ зависит от производных входных данных вплоть до порядка, совпадающего с размерностью системы. Отсутствует непрерывная зависимость решений от входных данных, а пространство решений может оказаться бесконечномерным. Неоднородная система может быть несовместна на интервале своего задания. Структура пучка матриц Якоби, описывающих систему, не инвариантна относительно преобразований, использующих замену переменных. Система первого приближения не наследует качественные свойства нелинейных ДАУ. Эта специфика обуславливает не только необходимость поиска принципиально новых теоретических подходов, но и переосмысления многих базовых понятий классической теории ОДУ, таких как устойчивость, управляемость, наблюдаемость и т. п.

В работе выделены классы ДАУ (1), допускающие исследование качественных свойств по первому приближению [1]. Такие системы обладают структурной формой, называемой эквивалентной,

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = f_0(t, x_2(t), u(t)), \quad x_1(t) = f_1(t, x_2(t), u(t)), \quad t \in I, \quad (2)$$

где $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Qx(t)$, Q — матрица перестановок строк.

Существование этой структурной формы доказано в условиях, близких к необходимым для регулярного поведения решений. При ее построении не используется замена переменных, вследствие чего сохраняются свойства устойчивости. Рассматриваемая система ДАУ и ее структурная форма эквивалентны в смысле решений, а операции линеаризации и перехода к системе (2) перестановочны. В линейном случае метод преобразования к эквивалентной форме носит конструктивный характер, дает удобный способ нахождения многообразия решений и автоматически решает задачу о согласовании начальных данных.

В предположениях, обеспечивающих существование формы (2), получены условия сильной управляемости [1], устойчивости [2] и стабилизируемости [3] для ДАУ вида (1) произвольно высокого индекса неразрешенности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-00287; Программы Президиума РАН, проект № 17.1.

- [1] *Щеглова А.А.* Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // *АиТ*. 2008. № 10. С. 57–80.
- [2] *Щеглова А.А., Петренко П.С.* Правильные системы дифференциально-алгебраических уравнений // *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*. 2013. № 4. С. 107–127.
- [3] *Shcheglova A.A., Petrenko P.S.* Stabilizability of solutions to linear and nonlinear differential-algebraic equations // *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 196, no. 4. P. 596–615.

Industry 4.0: Challenges and opportunities for optimization-based control

F. Allgöwer^{1,2}

With the vision of the Smart Factory of the future, the manufacturing industries are currently undergoing a fundamental new orientation on the basis of the Cyber-Physical Systems and Internet of Things and Services paradigms. All parts along the manufacturing chain are nowadays equipped with embedded computing, communication and networking capabilities and are expected to interact in an optimal way towards the goal of an energy and resource efficient, save and reliable production process. Through decentralized optimal decision-making and an appropriate communication among the networked individual parts, the whole production process of the future is expected to operate optimally.

In this presentation, an introduction to the goals and principles of Industry 4.0 is given and its challenges and opportunities for the field

¹University of Stuttgart, Germany

²German Research Foundation, Bonn, Germany

of automatic control are discussed. In particular, we will investigate the potential impact of the field of optimization-based control in the fourth industrial revolution and will present two promising approaches, namely, economic model predictive control and distributed, cooperative optimization and control.

Economic model predictive control (MPC) is a control technique, which is based on the repeated online solution of an optimal control problem. Contrary to classical MPC, the employed cost function can be some general performance measure, possibly connected to the economics of the considered process. This also allows one to consider control objectives different from the classical ones of stabilization or tracking, which makes economic MPC well suited as a tool to achieve the goals of Industry 4.0. In this talk, we examine conditions to classify the optimal operational regime for a system, and propose economic MPC schemes, which allow for closed-loop average performance guarantees and satisfaction of (standard pointwise-in-time as well as averaged) constraints.

For the visions of Industry 4.0 to become reality, tools and methods are required to handle control and decision problems in a distributed and networked fashion. Relating to ideas such as the Internet of Things, distributed optimization algorithms that work within asynchronous communication networks are becoming more and more relevant. In this talk, we present a broad framework for distributed optimization in asynchronous peer-to-peer networks. Our framework is based on polyhedral approximations and lends itself into a variety of distributed algorithms for solving specific decision problem that are relevant in the context of Industry 4.0. We show how from the general framework, algorithms can be derived to solve, *e.g.*, assignment problems or robust optimization problems. Furthermore, we show that the general optimization framework leads naturally to a distributed model predictive control scheme that is based on the exchange of predicted systems trajectories.

**Maximum principle
for infinite-horizon optimal control problems
under weak regularity assumptions**

S. M. Aseev^{1,2}, V. M. Veliov³

Let G be a nonempty open convex subset of R^n and U be an arbitrary nonempty set in R^m . Let $f : [0, \infty) \times G \times U \mapsto R^n$ and $f^0 : [0, \infty) \times G \times U \mapsto R^1$. We assume that for almost every $t \in [0, \infty)$ the derivatives $f_x(t, x, u)$ and $f_x^0(t, x, u)$ exist for all $(x, u) \in G \times U$ and the functions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$, and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are measurable in t for every $(x, u) \in G \times U$ and continuous in (x, u) for almost every $t \in [0, \infty)$.

Consider the following optimal control problem (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U. \quad (1)$$

A pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ is an *admissible pair* in problem (P) if $u : [0, \infty) \mapsto U$ is a measurable (in Lebesgue sense) function, $x : [0, \infty) \mapsto G$ is the corresponding trajectory, and the function $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ is locally integrable on $[0, \infty)$. An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is *locally weakly overtaking optimal* (LWOO) if there exists $\delta > 0$ such that for any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ satisfying conditions $\{t \geq 0 : u(t) \neq u_*(t)\} \leq \delta$ and for arbitrary $\varepsilon > 0$, $T > 0$ there is $T' > T$ such that

$$\int_0^{T'} f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt \geq \int_0^{T'} f^0(t, x(t), u(t)) dt - \varepsilon.$$

Assumption (A1). *There are a continuous function $\alpha : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ and a locally integrable function $\varphi : [0, \infty) \mapsto R^1$ such that the following inequality takes place on $[0, \infty)$:*

$$\sup_{\{x : \|x - x_*(t)\| \leq \alpha(t)\}} \left\{ \|f_x(t, x, u_*(t))\| + \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| \right\} \stackrel{a.e.}{\leq} \varphi(t).$$

¹Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

²International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

³Vienna University of Technology, Vienna, Austria

Assumption (A2). *There exist a number $\gamma > 0$ and a nonnegative integrable function $\lambda : [0, \infty) \mapsto R^1$ such that for every $\zeta \in G$ with $\|\zeta - x_0\| < \gamma$, equation (1) with $u(\cdot) = u_*(\cdot)$ and initial condition $x(0) = \zeta$ (instead of $x(0) = x_0$) has a solution $x(\zeta; \cdot)$ on $[0, \infty)$ in G and*

$$\max_{\theta \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \stackrel{a.e.}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t).$$

Define the normal form Hamilton-Pontryagin function $\mathcal{H} : [0, \infty) \times G \times U \times R^n \mapsto R^1$ for problem (P) in the usual way:

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi) = f^0(t, x, u) + \langle f(t, x, u), \psi \rangle,$$

$$t \in [0, \infty), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \psi \in R^n.$$

The proof of the next result resembles the one in [1].

Theorem. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be a LWOO admissible pair. Assume that assumptions (A1) and (A2) are satisfied. Then the vector function $\psi(\cdot)$ defined by*

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

is (locally) absolutely continuous and

(i) $\psi(\cdot)$ is a solution to the adjoint system

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

(ii) the maximum condition takes place

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \stackrel{a.e.}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)).$$

Here, $Z_(\cdot)$ is the fundamental matrix solution (normalized at $t = 0$) of the adjoint equation $\dot{z}(t) = -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* z(t)$.*

The first author was supported in part by the Russian Foundation for Basic Researches under grant No. 13-01-12446-ofi-m2. The second author was supported by the Austrian Science Foundation (FWF) under grant P 26640-N25.1.

- [1] *Aseev S.M., Veliov V.M.* Needle variations in infinite-horizon optimal control. Research Report 2012-04, ORCOS, Vienna University of Technology, 2012. To appear in Contemporary Mathematics, 2014.

Application of Krasovskii's unification method to simulation of acoustic waves in anisotropic media

N. D. Botkin¹, V. L. Turova²

This paper proposes a method for modelling the propagation of acoustic waves in anisotropic media. Motivation of this investigation is related to the development of acoustic sensors, whose operating principle is based on generating and detecting acoustic waves of very high frequency in piezoelectric crystals.

For anisotropic media, the WKB approximation yields eikonal equations of the form

$$S_t - |\nabla S|c\left(x, \frac{\nabla S}{|\nabla S|}\right) = 0,$$

where S is the phase function, and $c(x, n)$ is the wave phase velocity anisotropically depending on the direction n . Thus, the Hamiltonian

$$H(x, p) = -c(x, p/|p|) |p|, \quad p \in R^d, d = 2 \text{ or } 3, \quad (1)$$

is generally neither concave nor convex in the impulse variable p . Therefore, the well-known Fermat principle of wave propagation fails in this case. Moreover, the propagation occurs in such a way, as if an antagonistic opponent aims to slow down motion of the wave fronts. Thus, application of differential games to the analysis of wave propagation seems to be appropriate. The problem consists in constructing a differential game whose Hamiltonian coincides with that given by formula (1). This can be done using the unification method by N.N. Krasovskii (see, e.g. [1]). Namely, the dynamics of the required differential game is given by the equations

$$\dot{x} = H(x, p)p + q, \quad x, p, q \in R^d, \quad |p| = 1, \quad |q| = \lambda, \quad \langle p, q \rangle \geq 0, \quad (2)$$

¹Center for Mathematics, Technical University of Munich, Garching, Germany

²Clinic 'Rechts der Isar', Technical University of Munich, Munich, Germany

where q and p are, respectively, minimizing and maximizing players operating on the objective functional

$$\gamma(x(\cdot)) = \min_{\tau \in [t, 0]} \sigma(x(\tau)), \quad (3)$$

where σ is the signed distance to a set M representing the wave excitation source. The parameter λ in (2) is a constant, which is larger than the Lipschitz constant of the function H in p .

Proposition (Krasovskii's unification principle). The following equality holds:

$$H_{(2)}(x, s) := \max_{|p|=1} \min_{\substack{|q|=\lambda, \\ \langle p, q \rangle \geq 0}} \langle H(x, p)p + q, s \rangle = H(x, s),$$

and, therefore, (2) is the required differential game.

In view of the Proposition, the authors apply their algorithms for solving Hamilton–Jacobi equations arising from differential games (see [2] and [3]) to problem (2) and (3).

Using this approach, algorithms for modelling the propagation of bulk and surface acoustic waves in anisotropic monocrystals and multi-layered structures typical for surface acoustic wave sensors are developed. With these algorithms, the propagation fronts can be found very precisely even in the case of very complicated geometry of the wave excitation source. Numerical results are presented for the case of non-convex slowness surfaces for bulk and surface waves.

- [1] *Krasovskii N.N.* On the problem of the unification of differential games // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1976. Vol. 226, no. 6, pp. 1260–1263.
- [2] *Botkin N.D., Hoffmann K.-H., Turova V.L.* Stable numerical schemes for solving Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2011. Vol. 33, no. 2, pp. 992–1007.
- [3] *Botkin N.D., Hoffmann K.-H., Mayer N., Turova V.L.* Approximation schemes for solving disturbed control problems with non-terminal time and state constraints // *Analysis*. 2011. Vol. 31, pp. 355–379.

On conditions for solvability of the periodic problem for the second order functional differential equations under uncertainty

E. I. Bravyi¹

Consider the periodic boundary value problem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \lambda(Tx)(t) + f(t), & \text{for almost all } t \in [a, b], \\ x(a) = x(b), \quad \dot{x}(a) = \dot{x}(b), \end{cases} \quad (1)$$

where λ is a real number, $T : \mathbf{C}[a, b] \rightarrow \mathbf{L}[a, b]$ is a linear bounded operator, $f \in \mathbf{L}[a, b]$, a solution $x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ has an absolutely continuous derivative.

Suppose we investigate this problem under uncertainty: we know only some sign properties of the operator T and a result of action of T on some function, for example, we know $T\mathbf{1}$. For such family of operators, we will find necessary and sufficient conditions for problems (1) to have solutions for all functional differential equations with such functional operators. Thus, unimprovable sufficient conditions for the unique solvability of the periodic boundary value problem will be obtained. Conditions for the solvability with only integral restrictions on functional operators can be found in works by I. Kiguradze, R. Hakl, A. Lomtatidze, S. Mukhigulashvili, A. Ronto, J. Sremr and others [1–4]. Here, we determine the best constants for point-wise restrictions.

Let a function $p \in \mathbf{L}[a, b]$ be given. Define the piecewise linear functions

$$q_{t_1, t_2}(t) \equiv \begin{cases} \frac{(t-a)(t_2-t_1)}{b-a}, & t \in [a, t_1], \\ t_2 - t - \frac{(b-t)(t_2-t_1)}{b-a}, & t \in [t_1, t_2], \\ -\frac{(b-t)(t_2-t_1)}{b-a}, & t \in [t_2, b], \end{cases}$$

$$q_{t_1, t_2, p}(t) \equiv q_{t_1, t_2}(t) - \int_a^b p(s)q_{t_1, t_2}(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

For every $z : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, denote $z^+(t) \equiv (z(t) + |z(t)|)/2$, $z^-(t) \equiv (z(t) - |z(t)|)/2$.

¹Perm National Research Polytechnic University, Russia

Theorem. Let $T\mathbf{1} = p$, $\int_a^b p(t) dt = 1$, the functionals $x \mapsto (Tx)(t)$ be monotone for almost all $t \in [a, b]$, and

$$\lambda \neq 0, \quad |\lambda| < \frac{1}{\max_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \int_a^b (p^+(t)q_{t_1, t_2, p}^+(t) + p^-(t)q_{t_1, t_2, p}^-(t)) dt}. \quad (2)$$

Then periodic problem (1) has a unique solution.

Note, that the function p may change its sign and the constant in the right-hand side of (2) is exact.

Corollary. Let $r \in \mathbf{L}[a, b]$ with $R \equiv \int_a^b r(t) ds > 0$ be given. The periodic problem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = r(t)x(h(t)) + f(t) & \text{for almost all } t \in [a, b], \\ x(a) = x(b), \quad \dot{x}(a) = \dot{x}(b), \end{cases}$$

has a unique solution for every measurable function $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$ if and only if

$$\max_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \int_a^b \left(r^+(t)q_{t_1, t_2, R/R}^+(t) + r^-(t)q_{t_1, t_2, R/R}^-(t) \right) dt < 1.$$

The best constants in the solvability conditions (2) for some functions p can be calculated in the explicit form.

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 14-01-0033814.

- [1] *Hakl R., Lomtatidze A., Sremr J.* Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations. Folia Facult. Scien. Natur. Univ. Masaryk., Brno, 2002.
- [2] *Kiguradze I., Lomtatidze A.* Periodic solutions of nonautonomous ordinary differential equations // Monatshefte für Mathematik. 2010. Vol. 159, no. 3, pp. 235–252.
- [3] *Hakl R., Lomtatidze A., Sremr J.* On a periodic-type boundary value problem for first-order nonlinear functional differential equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2002. Vol. 51, no. 3, pp. 425–447.
- [4] *Mukhigulashvili S., Partsvania N., Puza B.* On a periodic problem for higher-order differential equations with a deviating argument // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2011. Vol. 74, no. 10, pp. 3232–3241.

Locomotion control and optimization for multibody systems

F. Chernousko¹

Locomotion of multibody systems in different media can be achieved by means of special periodic changes of the systems configuration. Certain types of such systems imitate locomotion of animals and insects: snake-like, fish-like, frog-like, worm-like, *etc.* Other systems that have no immediate analogs among living creatures are systems controlled by internal moving masses. In the paper, dynamics, control, and optimization of locomotion for multibody systems of several types are analyzed.

Snake-like systems consist of several links connected consecutively by cylindrical joints. Their locomotion along a horizontal plane occurs in the presence of the dry friction acting between the system and the plane. The friction force obeys the well-known Coulomb's law. The motion is controlled by torques produced by actuators installed at the joints of the snake-like system. Locomotion of the two-link and three-link systems is a periodic motion consisting of slow and fast phases. Controllability of such systems is proved: they can be transferred from a given initial position and configuration to the prescribed terminal ones. The average speed of locomotion is evaluated. Optimal system parameters are found that correspond to the maximum average speed. Optimization of energy losses is also considered.

Quasi-static motions of multibody systems along a horizontal plane occur if the velocities and accelerations are negligible. These motions are, in fact, chains of equilibrium positions. Quasi-static wave-like locomotion of snake-like systems having more than four links is described. Also, quasi-static motions of a system consisting of three masses on a plane are analyzed. Controllability conditions for this system are established.

Fish-like and frog-like systems moving in a fluid are considered in the presence of resistance forces directed against the velocity of a moving point and proportional to the squared velocity. The system consists of the main body and several (from 1 to 4) links attached to it and to each other by cylindrical joints. These links that imitate tails, legs, or fins move periodically with respect to the main body. It is shown that, under certain assumptions, the progressive motion of the system is possible, and

¹A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

its average speed is estimated. The optimal control problem is solved, in which the speed is maximized with respect to the relative motions of the links. The obtained motions correlate well with the observations of swimming animals.

Boat-like systems consist of a main body and two bodies (oars) that move back and forth periodically and symmetrically with respect to the main body. The conditions are found that ensure the progressive locomotion of the system.

Bodies containing moving internal masses are considered under various assumptions about the external resistance forces: dry friction, linear and quadratic resistance, both isotropic and anisotropic, and depending on the body velocity. Such systems devoid of any external protruding parts: wheels, legs, screws, *etc.*, and can move progressively in various media. Control of locomotion is implemented by periodic motions of the internal masses w.r.t. the body. Various relative motions are considered, and optimal ones are found that correspond to the maximum average locomotion speed.

The ideas described above are implemented in certain mobile robots.

The work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 14-11-00298.

Stationary state of exploited population with hierarchical intraspecific competition

A. A. Davydov^{1,2}, Amer Fadhel Nassar¹

We consider model of exploitation of size-structured population with taking into account the intraspecific competition. The population dynamic is described by the equation

$$\frac{\partial x(t, l)}{\partial t} + \frac{\partial (g(l, E(t, l))x(t, l))}{\partial l} = -(\mu(l, E(t, l)) + u(l))x(t, l),$$

where $x(t, l)$ is the density of individuals of size l at the instant t ; g and μ are growth and death rates, respectively, and u stays for an exploita-

¹Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Russia

²International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

tion intensity. The equation is nonlinear because the function E , which characterizes the intraspecific competition, depends on x . We assume that the population has hierarchical intraspecific competition, namely, the individuals of a bigger size have influence on the smaller ones but not viceversa. For $u = 0$, the equation of population dynamics is similar to one in [1, 2].

We take the intraspecific competition in the form

$$E(t, l) = \int_l^L \chi(l)x(t, l)dl,$$

where χ is a nonnegative positive integrable function on the interval $[0, L]$, $L > 0$, which is the interval of sizes where the population is managed and exploited.

The inflow of new individuals is defined by boundary condition

$$x(t, 0) = \int_0^L r(l, E(t, l))x^\beta(t, l)dl + p(t),$$

where r characterizes the birth rate and is a non-negative continuous function, and $\beta \in (0, 1)$ reflects the nonlinear dependence of reproduction ability of individuals. The density p is defined by the industrial renewal of the population.

The model considered is essentially different from ones studied in papers [3] and [4] because here the competition is hierarchical. The assumptions on the other functions g , μ , and r are natural and the same as in [3, 4]. For example, for any given l , the growth and birth rates g and r are non-increasing functions on the level E of competition, and the mortality rate μ is non-decreasing.

We prove that for a given nonnegative piecewise continuous or measurable exploitation intensity, the population dynamics has nontrivial stationary solution.

The work was supported by Russian Foundation for Basic Researches, project no. 13-01-12446.

- [1] *Calsina A., Saldana J.* Asymptotic behaviour of a model of hierarchically structured population dynamics // J. Math. Biol. 1997. Vol. 35, pp. 967–987.
- [2] *Murphy L.F.* A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics. // J. Theor. Biol. 1983. Vol. 104, pp. 493–506.

- [3] *Davydov A.A., Platov A.S.* Optimal Stationary Solution in Forest Management Model by Accounting Intra-Species Competition // Moscow Math. Journal. 2012. Vol. 12, no. 2, pp. 269–273.
- [4] *Panesh A.A., Platov A.S.* Optimization of size-structured population with interacting species // Journal of Mathematical Sciences. January 2013, Vol. 188, no. 3, pp. 293–298.

Some inverse function theorems

A. L. Dontchev^{1,2}

The classical inverse/implicit function theorems revolves around solving an equation in terms of a parameter and tell us when the solution mapping associated with this equation is a differentiable function with respect to the parameter. It turns out that if we put aside differentiability and focus on Lipschitz continuity only, we can still derive estimates of the solution changes resulting from approximations of the model. More elaborate results may be obtained by employing various concepts of generalized differentiability. As an illustration, I will present an unconventional implicit function theorem for an optimal control problem.

Algorithm library in the software package OPTCON-MD for reachable set approximation of a nonlinear system

E. A. Finkelstein¹, A. Yu. Gornov¹

Construction of approximations for reachable sets (RS) of control-

¹Mathematical Reviews (AMS), USA

²University of Michigan, USA

¹Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

lable dynamic system allows one to obtain solution or good initial estimate for a set of optimal control problems with various terminal functionals and also allows one to investigate the nonlocal behavior of the system. RS plays an important role in creation of applied mathematical models and can be useful in feedback controls search. RS visualization contributes to building new hypotheses both by experts in the subject area, and by researchers of dynamical systems. Also, it is an important stage of testing the optimal control algorithms. For linear systems, many approaches and methods are proposed, numerous RS approximation algorithms are developed, and the main technological problems are solved [1–3]. But it seems reasonable to continue efforts to build new approximation algorithms for RS of nonlinear systems that allow improving reliability of the estimates.

In this paper, we propose a number of methods to obtain external and internal estimates for RS, as well as, approximations of their boundaries. The most reliable method giving an internal evaluation is the method of stochastic approximation, which consists in forming a cloud of reachable points by multiple integration of the system with randomly generated acceptable control. This approach permits us to solve the problem with continuous, pulse and constant controls, and problems with hysteresis [4].

Another class of algorithms was developed that gives internal RS estimates as a set of accessible points. These algorithms fill the RS volume in a quasi-uniform way. This is in contrast to the stochastic approximation method that gives a cloud of points uniformly approximating the RS even with a small number of points. The proposed algorithms require multiple solution of auxiliary optimization problems for adding points to the approximating set. The first approximation is received by stochastic or quasi-uniform method in the form of a sufficiently compact and well-defined set. Then we can conclude on the possible use of algorithms for constructing the RS boundaries.

For this purpose, the fastest our algorithm is one that approximates the RS of a dynamic system linear in control on small time intervals. This algorithm uses also the property of the bang-bang control satisfying the maximum principle. Another more universal method is one maximizing the area bounded by a piecewise-linear curve, all whose vertices are reachable points. When constructing the next approximation algorithm, we take into account the specifics of the problem (the boundary of reachable set is a two-dimensional curve), reject the “random selection” of starting points for the adjoint system, and construct a deterministic algorithm by choosing the starting points from a unit sphere. This raises

monotonicity of approximating the RS boundary points. Nevertheless, the construction of the set boundary is not possible in some cases. In such situations, other technologies can be applied to the RS approximations. For example, ones based on applications of simple geometric objects, such as ellipses, parallelepipeds, balls, and so on. We propose an algorithm for the RS approximation by union of ellipses or spheres. The algorithm is based on solution of the minimization problem, which result is a covering including all points of the RS found by the stochastic approximation. Moreover, the covering has a minimum area for a given amount of objects.

The performed experiments confirmed the practicable computational efficiency of the proposed approaches and allowed us to estimate the scope of the implemented algorithms.

The work was partly supported by Russian Foundation for Basic Researches, project no. 14-01-31296 and Interdisciplinary Integration Project SB RAS no. 81.

- [1] *Tolstonogov A.A.* The differential inclusions in a Banach space. Nauka, Novosibirsk, 1986 (In Russian).
- [2] *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems. Dynamics and Control. 1992. 2(2), 87–111.
- [3] *Chernousko F.L.* State Estimation for Dynamic Systems. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [4] *Gornov A.Yu.* Computational technologies for solving optimal control problems. Nauka, Novosibirsk, 2009 (In Russian).

Some difficulties in numerical solution of optimization problems with billions of variables

A. Yu. Gornov¹, A. S. Anikin¹, A. N. Andrianov²

Optimization problems of large and very large dimensions (“Huge Scale optimization problems”) occur naturally in a wide range of sci-

¹Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

²Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

entific fields: images recognition, machine learning, big data analysis, optimization of atomic and molecular clusters, analysis of genomic chains, analysis of telecommunication networks, and many others. Yu.E. Nesterov recently proposed [1] the following classification of optimization problems by number of optimized variables:

- “Small” problems — up to 100 variables,
- “Medium” problems — from 10^3 to 10^4 variables,
- “Large” problems — from 10^5 to 10^7 variables,
- “Huge” problems — more than 10^8 variables.

Nowadays, we see steady progress of modern computer technologies, especially in parallel and hybrid architectures, and its availability expansion to wide users. This progress gives optimism in investigation of solving optimization problems with discussed dimensions. In our opinion, the “bottleneck” in this scientific topics is in weakness of algorithms and optimization computational technologies. It can be argued that “social inquiry” and technical opportunities stipulate and cause such problems and there statements. The next steps should be done by mathematicians.

Vigorous research of discussed problem was performed in a number of scientific organizations both in Russia and abroad. Serious progress on huge problems was achieved in Belgium, the team of Yu.E. Nesterov. There are other groups: P. Richtarik group in UK, A.I. Nemirovsky in USA, and A.V. Gasnikov in MIPT (PreMoLab) in Russia. The number of scientific publications on this topic is growing rapidly.

The report discusses the proposed algorithms for solving test and applied multidimensional optimization problems. The possibility of modifying the method proposed for about half a century ago by B.T. Polyak in [2] is investigated. With using algorithms based on this approach, it became possible to solve a number of separable convex optimization problems with dimension up to 10^{11} . With the use of previously implemented techniques [3], authors developed specialized computational technologies for Keating potential optimization problems with more than 10^7 variables [4]. Also, a number of Morse potential optimization problems where solved for atomic-molecular clusters with world-record sizes [5]. The results of numerical experiments were obtained using both personal computers and high-performance computing systems.

The work was partly supported by Russian Foundation for Basic Researches, project no. 13-01-00470 and Interdisciplinary Integration Project of SB RAS no. 83.

- [1] *Nesterov Yu.E.* Introduction of a convex optimization. Moscow: MCNMO, 2010 (in Russian).
- [2] *Polayk B.T.* Minimization of nonsmooth functionals // Journal of Computational Mathematics and Computational Physics. 1969. Vol. 9, no. 3 pp. 509–521 (in Russian).
- [3] *Gornov A.Yu.* Computational technologies of solving optimal control problems. Novosibirsk: Nauka, 2009 (in Russian).
- [4] *Anikin A.S., Gornov A.Yu.* An implementation of Newton's method for Keating's potential optimization problems // J. Studia Informatica Universalis. 2011. Vol. 9, no. 3, pp. 11–20.
- [5] *Anikin A., Gornov A., Andrianov A.* Computational technologies for Morse potential optimization // Abstracts of IV International conference "Optimization and applications" (OPTIMA-2013), 22–28 September 2013, Petrovac, Montenegro. CC RAS, 2013, pp. 22–23.

On properties of trajectories set of control system described by an affine integral equation

N. Huseyin¹, A. Huseyin¹, Kh. G. Guseinov¹

Control systems with limited control resources arise in various problems of theory and applications. In general, control systems with integral constraint on the controls naturally arise as control problems with bounded L_p norms on the controls, as control problems with prescribed bounded total energy and finances, and control problems with design uncertainties. Also, they arise in many problems of contemporary physics and mechanics. The theory of linear and nonlinear integral equations plays an important role in mathematics and its applications.

Control system described by a Volterra integral equation

$$x(t) = g(t, x(t)) + \lambda \int_{t_0}^t [K_1(t, s, x(s)) + K_2(t, s, x(s)) u(s)] ds \quad (1)$$

¹Anadolu University, Mathematics Department, Eskisehir, Turkey

is considered; where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control vector, $\lambda \in \mathbb{R}$, and $t \in [t_0, \theta]$.

Let $p > 1$ and $\mu > 0$ be given numbers. The function $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ such that $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu$ is said to be an admissible control function. The set of all admissible control functions is denoted by symbol $U_{p,\mu}$.

Let $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$. A continuous function $x(\cdot) : [t_0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying integral equation (1) for every $t \in [t_0, \theta]$ is said to be a trajectory of system (1) generated by the admissible control function $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$. The set of trajectories generated by all admissible control functions $u(\cdot) \in U_{p,\mu}$ is denoted by $\mathbf{X}_{p,\mu}$. The set $\mathbf{X}_{p,\mu}$ is called the set of trajectories of system (1).

Various properties of the set $\mathbf{X}_{p,\mu}$ of trajectories are studied.

Stability of autoresonance under persistent perturbation by white noise

L. Kalyakin¹

Mathematical models of capturing in resonance are reduced to some systems of ordinary differential equations by two-scale method. In this way, the problem of stability of such resonance phenomena is reduced to stability of equilibrium position of a nonlinear nonautonomous system. Specific of autoresonance models is a local Lyapunov stability with respect to deterministic perturbation. It is well known that there is not any Lyapunov type stability with respect to white noise in such systems. However, the autoresonance is stable in physical sense. But what does it mean in mathematics? This question is discoursed for the general system of ordinary differential equations.

¹Institute of Mathematics with Computer Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

On method for investigation of some class stabilization problems with incomplete state information

A. Ya. Krasinskiy^{2,3}, E. M. Krasinskaya⁴

The stability problems of steady motions for mechanical systems with geometrical constraints are considered in redundant [1] coordinates. The stabilization method giving asymptotic (conditional [2]) stability under incomplete state information is devised by using approach of [3].

The coefficients of stabilizing control and asymptotical estimate system are defined as a decision of the corresponding linear-quadratic problem by application procedure from [4]. The stability in closed loop nonlinear system is adjusted on the basis of critical cases theory [2, 5] and a theorem from [6].

Stability (up to non-asymptotic one) for stationary motions is obtained by reduction to necessary theorem on the basis of permanently operated perturbation [5, p. 316].

The effectiveness of the suggested approach is demonstrated by investigation of stabilization problems for two types of equilibrium in Education Control System GBB 1005 [7]. The software product [8] is used for numerical investigation.

- [1] *Shul'gin M.F.* O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh analiticheskoi dinamiki i ikh integrirovanii [On some differential equations of analytical dynamics and their integration]. Tashkent, SASU Publ., 1958. 183 p. (Trudy Sredneaziatskogo gosudarstvennogo universiteta im. V.I. Lenina [Proceedings of the Lenin Central Asian state University]; is. 144).
- [2] *Lyapunov A.M.* Sobranie sochinenii. T. 2 [The works. Vol. 2]. Moscow; Leningrad, AS USSR Publ., 1956.
- [3] *Krasovskiy N.N.* Problemy stabilizatsii upravlyaemykh dvizheniy [Problems of stabilization of controlled motions]. In book: Malkin I.G. Teoriya ustoychivosti dvizheniya [The Theory of Stability of Motion]. Moscow, Nauka, 1966, pp. 475–514.

²Moscow State University of Food Production, Russia

³Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia

⁴Bauman Moscow State Technical University, Russia

- [4] *Repin Yu.M., Tretyakov V.E.* Reshenie zadachi ob analiticheskom konstruirovanii regulyatorov na elektronnykh modeliruyuschikh ustanovkakh [On the solving of the problem of analytic construction regulators on the electronic modeling device. *Automatics and telemechanics*. 1963. 24, no. 6] *Avtomatika i telemekhanika*.
- [5] *Malkin I.G.* Teoriya ustoychivosti dvizheniya [The Theory of Stability of Motion]. Moscow, Nauka, 1966.
- [6] *Krasinskaya E.M., Krasinskiy A.Ya.* Ob ustoychivosti i stabilizatsii ravnovesiya mekhanicheskikh system s izbytochnymi koordinatami (Stability and stabilization of equilibrium state of mechanical systems with redundant coordinates) *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana (Science and Education of the Bauman MSTU)*, 2013, no. 3. DOI: 10.7463/0313.0541146
- [7] *Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M.* Modelirovanie dinamiki stenda GBB 1005 Ball and Beam kak upravlyaemoy mekhanicheskoy sistemy s izbytochnoy koordinatoy (Modelling of the dynamics of gbb 1005 ball and beam educational control system as a controlled mechanical system with a redundant coordinate) *Nauka i Obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana (Science and Education of the Bauman MSTU)*, 2014, no. 1. DOI: 10.7463/0114.0646446
- [8] *Krasinskiy A.Ya., Iofe V.V., Kayumova D.R., Khalikov A.A.* Programmnoe sostavlenie uravnenii dvizheniia i issledovanie stabilizatsii mekhanicheskikh dvizhenii [Software compilation of equations of motion and study of the mechanical motions stabilization]. State registration certificate of computer program, no. 2011615362 RF, 2011.

An optimization model linking electricity prices, CO₂ prices, and REDD+ options

A. A. Krasovskii¹, N. V. Khabarov¹, W. H. Reuter¹,
M. Obersteiner¹

The research is focused on development of financial instruments in the framework of reducing emissions from deforestation and forest degradation (REDD+) program [1]. The proposed microeconomic model deals with interaction of the forest owner, electricity producer, and electricity consumer. The decision-making process of the electricity producer consists of the following steps: (i) choosing power plant load factors to minimize the cost given the hourly electricity demand profile and installed technological capacities; (ii) choosing electricity price to maximize the profit based on the demand function indicating consumer's sensitivity to electricity price; (iii) modeling under CO₂ price uncertainty; (iv) hedging by means of buying the REDD-based CO₂ offset options.

1. The profit maximization problem

The electricity producer uses N technologies varying in costs and emission factors. Let us introduce notations: $a_i, i = 1, \dots, N$ are installed capacities, v_i are variable costs, $d_j, j = 1, \dots, 24$ is hourly average demand, x_{ij} are load factors (controls), $Q = \sum_{i=1}^N a_i \sum_{j=1}^{24} x_{ij}$ is aggregate production, $P^e = D^{-1}(Q)$ is inverse demand function, P^e is electricity price, ε_i are emission factors, p^c is CO₂ price.

For every CO₂ price the optimization problem is the following:

$$D^{-1}\left(\sum_{i=1}^N a_i \sum_{j=1}^{24} x_{ij}\right) \sum_{i=1}^N a_i \sum_{j=1}^{24} x_{ij} - \sum_{i=1}^N (v_i + p^c \varepsilon_i) a_i \sum_{j=1}^{24} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (1)$$

subject to constraints

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^N a_i x_{ij} \geq d_j^0 \frac{Q(x_{ij})}{Q^0}, \quad (2)$$

where d_j^0, Q^0 are the initial hourly and aggregate demands (at zero CO₂

¹International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

price), *i.e.*, hourly profile changes proportionally to the aggregate demand.

2. The “fair” prices of REDD+ options

Let the future CO₂ price be an uncertain variable following discrete probability distribution $\{p_l^c, w_l\}, l = 1, \dots, M, \sum_{l=1}^M w_l = 1$, where $w_l \in [0, 1]$ stands for probability. A problem is divided into two stages: at the first stage forest owner and electricity producer negotiate an amount E^0 of REDD+ certificates and their price. At the second stage they face a realization of uncertain CO₂ price and calculate their expected pay-offs. At each realization of the CO₂ price the electricity producer can use REDD+ options in the amount not exceeding the previously contracted amount E^0 , the rest must be returned to the forest owner at a negotiated price $p_\delta = \delta p^c, 0 \leq \delta \leq 1$. The forest owner and electricity producer have perfect information and face the same CO₂ price distribution. Problem (1)–(2) is modified in order to solve optimization problems with options.

Definition. For the given discount δ and amount of options E^0 , the “fair” prices of the electricity producer p_G and forest owner p_F are defined as follows:

$$p_G(E^0, \delta) = \frac{\bar{\Pi}_R(E^0, \delta) - \bar{\Pi}}{E^0}, p_F(E^0, \delta) = \bar{p}^c(1 - (1 - \delta)\frac{\bar{E}_t(E^0, \delta)}{E^0}), \quad (3)$$

where $\bar{\Pi}_R, \bar{\Pi}$ are maximum expected profits with and without REDD+, \bar{E}_t is expected optimal amount of emissions returned to the forest owner, \bar{p}^c is the mean CO₂ price. For a fixed δ , the supply and demand curves for REDD+ options are constructed by varying the amount E^0 .

Lemma. *For every $0 \leq \delta < 1$, there exists an amount \hat{E}^0 up to which the “fair” prices coincide $p_F = p_G = \bar{p}^c$. This amount equals the minimum optimal quantity of emissions generated by the electricity producer in the presence of CO₂ prices, at the maximum expected CO₂ price.*

We present numerical results for a model with three technologies: coal, gas, and combined cycle. The results show the impacts of CO₂ prices and REDD+ options on emissions and electricity prices.

The work was supported by the project “Options Market and Risk-Reduction Tools for REDD+” funded by the Norwegian Agency for Development Cooperation under agreement number QZA-0464 QZA-13/0074.

- [1] *Lubowski R.N., Rose S.K.* The Potential for REDD+: Key Economic Modeling Insights and Issues // Review of Environmental Economics and Policy. 2013. Vol. 7, no. 1, pp. 67–90.

Coupled ODEs control system with unbounded hysteresis region

P. Krejčí¹, S. A. Timoshin²

We consider the control system

$$\dot{w}(t) + \partial I_{K(v(t))}(w(t)) \ni g(w(t), v(t))u^1(t), \quad (1)$$

$$\dot{v}(t) + c(w(t), v(t))\dot{w}(t) = h(w(t), v(t))u^2(t), \quad (2)$$

$$v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

with the control constraint

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t)) \in U(t, v(t), w(t)) \quad \text{a.e. on } [0, T], \quad (4)$$

where $T > 0$ is a fixed final time, $K(v) = [f(v) - d(v), f(v) + d(v)]$ is a possibly degenerate interval in \mathbb{R} , $\partial I_{K(v)}$ is the subdifferential of its indicator function, $(w_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ are given initial conditions such that $w_0 \in K(v_0)$. The given functions c, g, h, f, d and the multivalued mapping U with closed bounded values in \mathbb{R}^2 satisfy some rather general assumptions.

Note that the evolution equation (1) simulates the so-called generalized play operator generated by the curves $w = f(v) - d(v)$ and $w = f(v) + d(v)$, see [1–3] for details. In the case when these curves are described by two non-decreasing Lipschitz continuous functions coinciding out of a fixed interval, a system similar to (1)–(4) was considered in [4], where some of its properties were studied. Unlike this and other papers on existence and uniqueness results for system (1)–(3) (see, *e.g.*, [5]), the hysteresis region $K(u)$, $u \in \mathbb{R}$, is considered, in general, to be unbounded.

Along with the constraint (4), we also consider the following alternative constraints:

$$u(t) \in \text{co} U(t, v(t), w(t)) \quad \text{a.e. on } [0, T] \quad (5)$$

¹Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praha

²Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

and

$$u(t) \in \text{ext co } U(t, v(t), w(t)) \quad \text{a.e. on } [0, T], \quad (6)$$

where “co” denotes the convex hull of a set, and “ext” is the collection of all extreme points of a set.

We show that for a given control u the problem (1)–(3) has a solution and we address some typical questions of the control theory establishing certain properties of the solution and relationships between the solution sets of our system (1)–(3) subjected to different control constraints (4)–(6). In particular, we prove the compactness of the solution set of (1)–(3) with the convexified constraint (5). In addition, we show the possibility of approximating solutions of the convexified problem by solutions of the original problem (the so-called relaxation) and that of confining the control to the extreme points of the control set (the bang-bang principle).

The work was supported by Russian Foundation for Basic Researches, project no. 13-01-00287.

- [1] *Krasnosel'skii M. A., Pokrovskii A. V.* Systems with Hysteresis. Nauka, Moscow, 1983. (English edition: Springer, 1989.)
- [2] *Krejčí P.* Hysteresis, Convexity and Dissipation in Hyperbolic Equations. Gakuto Int. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. 8, Gakkōtoshō, Tokyo, 1996.
- [3] *Visintin A.* Differential Models of Hysteresis. Springer, Berlin - Heidelberg, 1994.
- [4] *Timoshin S.A., Tolstonogov A.A.* Existence and properties of solutions of a control system with hysteresis effect // Nonlin. Anal. TMA. 2011. Vol. 74, no. 13, pp. 4433–4447.
- [5] *Kenmochi N., Minchev E., Okazaki T.* Ordinary differential systems describing hysteresis effects and numerical simulations // Abstr. Appl. Anal. 2002. Vol. 7, pp. 563–583.

Al'brecht's method for optimal stabilization and its extensions

A. J. Krener¹

A primary problem in control is to find a feedback law that stabilizes a plant around an operating point. The usual approach is to recast this as an infinite horizon optimal control problem because, if they could be found, the optimal feedback stabilizes the plant and the optimal cost is a Lyapunov function that verifies this. In continuous time, the optimal cost and optimal feedback satisfy the Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB) PDEs and, in discrete time, they satisfy the Dynamic Programming functional equations. Both set of equations are notoriously difficult to solve in any realistic dimensions because of Bellman's "curse of dimensionality".

In 1961 E.G. Al'brecht published a paper entitled "On the Optimal Stabilization of Nonlinear Systems", which showed that in many cases the HJB PDEs could be solved degree by degree starting with the quadratic terms of the optimal cost and the linear terms of the optimal feedback. To my knowledge, this is the only method that can solve a large class of HJB equations over a broad domain in reasonable dimensions. Al'brecht's method can be generalized to discrete time and/or finite horizon problems. But it is a local method, and series methods are can diverge badly when pushed too far.

More recently, Model Predictive Control (MPC) methods have been used to stabilize plants, particularly those with slow dynamics. MPC avoids the curse of dimensionality by on-line computation of the optimal control action given the current state of the plant. The plant dynamics needs to be slow enough to provide the computation can be done on-line. We will use Al'brect's method and its extensions to partially overcome this difficulty to make the MPC to be used for faster processes.

¹University of California, Davis, USA

Dynamic reconstruction of a macroeconomic model

E. A. Krupennikov^{1,2}

The following macroeconomic dynamic model is considered:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{\partial G(p, q)}{\partial p} u_1(t) = G_p(p, q) u_1(t), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial G(p, q)}{\partial q} u_2(t) = G_q(p, q) u_2(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}\tag{1}$$

Here, p is the product, q is the cost, $G(p, q)$ is the macroeconomic potential (the profit), which can be described as

$$G(p, q) = pq(a_0 + a_1 p + a_2 q)\tag{2}$$

with the piece-wise constant parameters a_0, a_1, a_2 ; u_1 and u_2 are the controls under the following constraints: $|u_1| \leq U_1, |u_2| \leq U_2$. This model was introduced by E.G. Al'brecht [1].

The statistic data $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$ is known, and incorrectness (errors) of the data can be estimated with parameter $\beta > 0$.

To reconstruct the controls $u_1(t)$ and $u_2(t)$ generating trajectories $p(t), q(t)$ of system (1), which are closest to data $\bar{p}(t)$ and $\bar{q}(t)$, we introduced the optimal control problem for system (1) with a pay-off functional

$$\begin{aligned}I(p_0, q_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) &= \\ &= \int_0^T [k((p(t) - \bar{p}(t))^2 + (q(t) - \bar{q}(t))^2) + \frac{\alpha}{2}(u_1^2(t) + u_2^2(t))] dt \rightarrow \min, \\ k &= -0.5, \quad \alpha > 0.\end{aligned}\tag{3}$$

To solve the optimal control problem (1)–(3), we apply the Pontryagin's principle of maximum in the terms of solutions of the characteristic system

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{s_1(t)}{\alpha} G_p^2(p(t), q(t)),$$

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ekaterinburg, Russia

²Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

$$\begin{aligned}
\frac{dq(t)}{dt} &= -\frac{s_2(t)}{\alpha} G_q^2(p(t), q(t)), \\
\frac{ds_1(t)}{dt} &= \frac{s_1^2(t)}{\alpha} G_{pp}(p(t), q(t)) G_p(p(t), q(t)) + \\
&+ \frac{s_2^2(t)}{\alpha} G_{pq}(p(t), q(t)) G_q(p(t), q(t)) - k(p(t) - \bar{p}(t)), \\
\frac{ds_2(t)}{dt} &= \frac{s_1^2(t)}{\alpha} G_{pq}(p(t), q(t)) G_p(p(t), q(t)) + \\
&+ \frac{s_2^2(t)}{\alpha} G_{qq}(p(t), q(t)) G_q(p(t), q(t)) - k(q(t) - \bar{q}(t)), \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{4}$$

We study properties of the characteristics $p(t)$, $q(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$. We have got that, when $k < 0$ in functional (3), the characteristic system (4) becomes stable, while $k > 0$ makes it stiff, in spite of the fact that $k > 0$ is more natural. It has been proved that for $k < 0$ the obtained characteristic $p(t)$ can be expressed as $p(t) = \bar{p}(t) + \hat{p}(t) + \check{p}(t)$, where $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \max_{t \in [0, T]} |\hat{p}(t)| \rightarrow 0$ and $\lim_{\beta \rightarrow 0} \max_{t \in [0, T]} |\check{p}(t)| \rightarrow 0$, while $\hat{p}(t)$ is an oscillation function, which amplitude decreases and frequency increases along with decrease of the parameter α . It is important to mention that in the case of $k > 0$, the function $\hat{p}(t)$ would be exponential making the characteristic system stiff. Other characteristics $q(t)$, $u_1(t)$, and $u_2(t)$ have the same structure.

The theoretical results are justified by numerical resolving of the characteristic system (4).

The obtained results can be useful for solving other stiff problems of dynamic reconstruction.

The work was supported by RFBR, project no. 14-01-00168.

- [1] *Al'brecht E.G.* Methods of building and identification of mathematical macroeconomic processes. Electronic magazine "Researched in Russia", 5. 2002, p. 54–86. URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/005.pdf> (in Russian).
- [2] *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G.* Mathematical theory of optimal processes. Moscow, 1962.
- [3] *Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.* Optimal Control Theory Applications to Dynamic Reconstruction Problems // 15th IFAC Workshop, ID 10.3182/20120913-4-IT-4027.00050.

Non-anticipatory control strategies: from differential games to incomplete state information

A. V. Kryazhimskiy¹

Non-anticipatory control strategies (quasi-strategies) act as a powerful tool in the theory of antagonistic closed-loop differential games. Being equivalent to closed-loop control strategies in terms of the quality of the game trajectories, and being in nature close to open-loop controls, the non-anticipatory control strategies provide a natural “semi-open-loop-control language” for assessing the solvability of game-theoretic problems of guaranteeing control. We discuss how the idea of non-anticipatory control can work in the context of problems of guaranteeing control under incomplete state information. In particular, we show that for linear control systems, non-anticipatory control procedures can be viewed as purely open-loop control strategies applied to appropriately defined extended systems.

This work was supported by the Russian Science Foundation, project 14-11-00539.

Downscaling heterogeneous household outcomes in dynamic CGE models

N. B. Melnikov¹

B. C. O'Neill², B. J. van Ruijven²

M. G. Dalton³

A number of integrated assessment models (IAMs) have been used to estimate these effects on the global and national scale in connection

¹Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia

¹Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia

²National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, USA

³National Oceanic and Atmospheric Administration, Seattle, WA, USA

with climate change analysis and related policy discussions [1]. The use of dynamic IAMs allows consideration of both changes in population size and changes in household behavior due to compositional changes in the population as a result of aging, urbanization, and other trends. Some IAMs have at their core a computable general equilibrium (CGE) model of the global economy, and one approach to incorporating compositional change has been to develop an appropriate aggregation method that allows for the representation of changing demographic composition in a multi-sector CGE model with a single representative household [2].

Less attention has been given to distinguishing outcomes among different household groups. Most applications of downscaling methods (*i.e.*, microsimulation) in the literature use static CGE models and analyze short-term poverty impacts of policy changes. Hence, these models do not take into account the structural changes in population, which is an important aspect for long-term projections.

We have developed a hierarchy of microsimulation methods for dynamic CGE models. The methods are recursive and forward looking partial equilibrium approaches that downscale aggregate household outcomes from an economic growth model with a single representative household to multiple household types. This approach combines general equilibrium effects, which are essential for policy analysis, with detailed household survey data and long-term population projections for various household types. Performance of the proposed methods is compared vs. a general equilibrium model with heterogeneous household groups. The latter is more accurate but also more computationally demanding.

The results show that all three downscaling methods give a good approximation to household income, savings, and consumption in the CGE model. The recursive-dynamics methods capture the effects of rural/urban heterogeneity and some of the age heterogeneity. The forward looking method takes the age structure into account in the savings decisions and, hence, gives better agreement with results of the general equilibrium model with multiple household groups. However, the results of the forward looking downscaling method depend on the ability to choose the discount parameter in the finite-period model.

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Researches (grant no. 11-01-00795) and the Russian Ministry of Education and Science (program no. 1.1016.2011).

- [1] *Krey V., O'Neill B.C., van Ruijven B., Chaturvedi V., Daioglou V., Eom J., Jiang L., Nagai Y., Pachauri S., Ren X.* Urban and rural

energy use and carbon dioxide emissions in Asia // Energy economics. 2012. Vol. 34, pp. S272–S283.

- [2] *Melnikov N.B., O'Neill B.C., Dalton M.G.* Accounting for the household heterogeneity in dynamic general equilibrium models // Energy economics. 2012. Vol. 34, pp. 1475–1483.

Mathematical control models in problems of beam dynamics optimization

D. A. Ovsyannikov¹

Mathematical methods of modelling and optimization are extensively used in many fields of science and technology. Development of specialized software for various applications is of more and more importance. A special class of problems attracting attention of numerous researches includes the problems associated with the beam dynamics optimization in accelerator [1–3]. There are not any general methods for optimization of accelerating and focusing structures. However, as the demand to output beam parameters are progressively increasing, it is needed to develop a new approaches and methods to solve these problems. In the paper, various mathematical control models describing beam dynamics are presented. Especially, we consider the problems related to charged particles interaction. In this case, we investigate the controlled dynamic process described by a system of integro-differential equations. The optimization methods are developed for various functionals concerned with the quality of beam [1–3]. They are used for solution of various beam dynamics problems in accelerator physics. Let us consider the problem of beam control of interacting particles, which dynamics is described by integro-differential equations. We can assume that evolution of particle beam is described by equations

$$dx/dt = f(t, x, u), \quad (1)$$

$$f(t, x, u) = f_1(t, x, u) + \int_{M_{t,u}} f_2(t, x, y_t) \rho(t, y_t) dy_t, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} f(t, x, u) + \rho \operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0, \quad (3)$$
$$x(0) = x_0 \in M_0, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x).$$

Here, t is the time; x is n -vector of phase coordinates; $u = u(t) \in D$ is r -dimensional control vector-function; D is the set of admissible control functions; $\rho = \rho(t, x)$ is the particle distribution density in the phase space; f_1 is n -dimensional vector-function determined by external electromagnetic fields; f_2 is n -dimensional vector-function associated with

¹Saint Petersburg State University, Russia

the particle interactions; the set $M_{t,u}$ is the cross-section of the trajectories set. It is obtained by time shift of the initial set M_0 through solutions of equation (1) with given control $u = u(t)$. The set M_0 is a given one in the phase space, which describes the set of initial states for a charged particle beam at the initial instant. The function $\rho_0(x)$ is a given function describing the particle distribution density at the instant $t = 0$. Equations (1)–(3) can be considered as the Vlasov equations. We meet with these equations if interaction between particles is taken into account. Let us introduce a functional

$$I(u) = \int_0^T \int_{M_{t,u}} \varphi(t, x_t, \rho(t, x_t), u) dx_t dt + \\ + \int_{M_{T,u}} g(x_T, \rho_T(T, x_T)) dx_T \rightarrow \min_{u \in D}, \quad (4)$$

characterizing dynamics of the process. Here φ and g are given nonnegative functions, T is fixed. In the paper, we consider the minimization problem of functional (4) and another kind of functionals describing beam dynamics in accelerators.

The author acknowledge Saint-Petersburg State University for a research grant 9.38.673.2013.

- [1] *Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D.A., Balabanov M.Yu., Chung S.-L.* On the beam dynamics optimization problem // International Journal of Modern Physics. 2009. A 24, pp. 941–951.
- [2] *Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D. A., Durkin A. P., Chung S.-L.* Optimization of matching section of an accelerator with a spatially uniform quadrupole focusing // Technical Physics. 2009. Vol. 54, no. 11, pp. 1663–1666.
- [3] *Ovsyannikov D.A., Ovsyannikov A.D., Svistunov Yu.A., Durkin A.P., Vorogushin M.F.* Beam dynamics optimization: models, methods and applications // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 2006. A 558, pp. 11–19.

A maximum principle for an infinite horizon optimal control problem

F. L. Pereira¹

This presentation concerns a maximum principle for infinite horizon optimal control problems that feature both endpoints state constraints and a cost functional that depends on the state variable at infinity, besides the usual pointwise control constraints. Moreover, the optimization is carried over trajectories that converge asymptotically to an equilibrium. Contrary to the more usual infinite horizon optimal control problems the cost functional does not exhibit a discount factor. Our conditions involve a novel type of transversality conditions at the final time which allows for a better trade-off between nondegeneracy and the strictness of the assumptions.

The simplest structure of the time-optimal feedback control for single-DOF systems

S. A. Reshmin²

We consider a nonlinear controlled sclerononomous mechanical system with the Lagrangian $L = \frac{1}{2}J(\varphi)\dot{\varphi}^2 - f(\varphi)$. Here, φ is a generalized coordinate, $J(\varphi) > 0$ is a given inertial characteristic of the system, and $f(\varphi) = \int_0^\varphi \varepsilon(\sigma)d\sigma$ is a potential energy, where $\varepsilon(\cdot)$ is a given nonlinear continuously differentiable function of the coordinate. Without loss of generality, we assume $|\varepsilon(\varphi)| \leq 1$.

Dynamics of the system is described by the Lagrange's equation

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = J(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + \varepsilon(\varphi) = ku. \quad (1)$$

Here, $k > 1$ is a positive gain factor in front of a scalar control $u(t)$. We

¹University of Porto, Portugal

²A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

will call $u(t)$ an admissible control if it satisfies two conditions

- 1) $u(t)$ is a piecewise continuous function of time;
- 2) for all $t \in [0, +\infty)$, we have $|u(t)| \leq 1$.

The initial state $\{\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0\}$ of system (1) at the instant $t = 0$ is arbitrary, and the terminal state at some instant $t = T$ is prescribed: $\{\varphi(T) = \varphi_T, \dot{\varphi}(T) = 0\}$, where φ_T is a fixed value. Without loss of generality, we assume $\varphi_T = 0$. In this case, $\varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0$. The instant T when the system hits the terminal set is not fixed and depends on the control $u(t)$. Pontryagin's maximum principle implies that the time-optimal control takes the value $u(t) = \pm 1$. There are no singular controls [1].

In the special case $J(\varphi) \equiv \text{const}$ and periodic $\varepsilon(\varphi)$, solution of the time-optimal control problem was well investigated [2]. For large k , optimal trajectories with two control switchings can exist in the phase plane. We consider more general Lagrangian systems with $J(\varphi) \neq \text{const}$ ($J(\varphi)$ and $\varepsilon(\varphi)$ are not necessarily periodic). As a result, we suggest a simple criterion (tool) for quick checking the absence of the trajectories with two switchings in the phase plane. In this case, the time-optimal feedback control has the simplest structure: the number of switchings is not greater than one for any initial conditions.

We analyze the auxiliary trajectory, which originates at a certain point $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, arrives at the point $(0, 0)$, and has two switchings of the control at points $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ and $(\varphi_3, \dot{\varphi}_3)$. The points $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ and $(\varphi_3, \dot{\varphi}_3)$ lie on different sides of the abscissa axis. So, the trajectory intersects the abscissa axis at a point $(\varphi_2, 0)$ at some instant between the first and second switching of the control. The point $(\varphi_3, \dot{\varphi}_3)$ lies on the trajectory with a constant control $u = 1$ leading to the point $(0, 0)$. In this case,

$$\varphi_3(\varphi_2) = \frac{\varphi_2}{2} + \frac{f(\varphi_2)}{2k}, \quad \varphi_2 > 0, \quad \varphi_1 < \varphi_2. \quad (2)$$

The time of motion along our trajectory depends on three parameters: $T(\varphi_2, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$. Assuming, without loss of generality, that $\dot{\varphi}_0 > 0$, we obtain a specific expression for this function and an expression for its derivative

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= \tau(\varphi_1, \varphi_2) = \\ &= \lim_{\tilde{\varphi}_2 \rightarrow \varphi_2} \left\{ \frac{2}{F_2(\tilde{\varphi}_2, \varphi_2)} - I(\varphi_1, \tilde{\varphi}_2, \varphi_2) - I(\varphi_3, \tilde{\varphi}_2, \varphi_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$I(\varphi_1, \tilde{\varphi}_2, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\tilde{\varphi}_2} \frac{[k + \varepsilon(\varphi_2)]d\varphi}{J(\varphi)F_2^3(\varphi, \varphi_2)}.$$

Here, we introduce the notation F_2 for the function specifying the absolute values of the velocity $\dot{\varphi}$ of the system for the segment of the trajectory with a constant control between the points $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ and $(\varphi_2, 0)$

$$F_2(\varphi, \varphi_2) = \sqrt{-2[k(\varphi - \varphi_2) + f(\varphi) - f(\varphi_2)]/J(\varphi)}, \quad \varphi \leq \varphi_2. \quad (4)$$

If $\partial T/\partial \varphi_2 > 0$, then the considered auxiliary trajectory is not optimal. Also, it cannot coincide with the final part of any trajectory with two or more switchings. Expression (3) allows one estimate numerically the sign of the function τ for concrete values of k and concrete functions $J(\varphi)$ and $\varepsilon(\varphi)$. The corresponding examples are presented.

This work was supported by the Presidential Program for the State Support of Leading Scientific Schools (project no. NSh-2710.2014.1) and the Russian Foundation for Basic Researches (project nos. 14-01-00476 and 14-08-00606).

- [1] *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. New York: Wiley, 1967.
- [2] *Garcia Almuzara J.L., Flügge-Lotz I.* Minimum time control of a nonlinear system // J. Differen. Equations. 1968. Vol. 4, no. 1. P. 12–39.

Constructing steady states for the 2D compressible Euler equations

O. S. Rozanova¹

In connection with the study of atmospheric structures that can be transferred without significant changes with a weak external hydrodynamic field [1], we consider the problem of constructing the divergence-free solutions to the stationary equations for the compressible gas on a rotating plane

$$\nabla \pi_0 \cdot \nabla_{\perp} \Phi = 0, \quad (1)$$

$$(\nabla_{\perp} \Phi \cdot \nabla) \nabla_{\perp} \Phi + lL \nabla_{\perp} \Phi + c_0 \nabla \pi_0 = 0. \quad (2)$$

Here, $\pi_0(x_1, x_2)$ is a re-normalized pressure, $\Psi(x_1, x_2)$ is the stream function (the velocity $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ satisfies $\mathbf{u} = \nabla_{\perp} \Phi := (\Phi_{x_2}, -\Phi_{x_1})$). Further, $c_0 > 0$ is a constant, l is the Coriolis parameter (l is a constant in the simplest setting), $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Solution to system (1), (2) can be reduced to finding the solution for the couple of equations

$$|\nabla \Phi|^2 = G(\Phi), \quad \Delta \Phi = R(\Phi) \quad (3)$$

with a differentiable function G and an integrable function R . The first equation (3) in its turn can be reduced to the standard eikonal equation $|\nabla \xi|^2 = 1$. Starting from the theory of generalized solutions to the eikonal equation due to S.N. Kruzhkov, we give a definition to a generalized solution to problem (1), (2) and construct a great variety of such solutions explicitly both in bounded and unbounded domains. We discuss various patterns that can be obtained in this way and show that they have meteorologic analogues.

The work was supported by Russian Foundation for Basic Researches, project No. 12-01-00308.

- [1] *Rozanova O.S., Yu J-L., Hu C-K.* On the position of vortex in a two-dimensional model of atmosphere // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2012. Vol. 13, pp. 1941–1954.

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

Relaxation and Dynamic Estimation in a Hybrid System

I. F. Sivergina¹

This study is concerned with dynamic estimation in a hybrid system consisting of a neural network governed by a diffusion-aggregation process, for which the existence of a global solution is obtained based on the theory of [1]. A prototype for our system is the mathematical model of a diffusion-aggregation process for the production of β -amyloid ($A\beta$) in the early stages of Alzheimer's disease [2] and a neural network associated with it. A key feature of this system is uncertainty, which may affect, in particular, the dimension of the system. In order to estimate the system state, we consider an extended (relaxed) system, obtained via introducing the notion of position. For this system, a variational principle is formulated that leads to a value function, for which using dynamic programming techniques [3,4], the corresponding Hamilton–Jacobi–Bellman equations are obtained. An approximate solution to the observation problem is provided based on the value function.

- [1] *Rothe F.* Global solutions of reaction-diffusion systems. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [2] *Achdou Y., Franch B., Marcello N., Tesi M. C.* A qualitative model for aggregation and diffusion of β -amyloid in Alzheimer's disease // *J. Math. Biol.* 2013. V. 76, no. 6–7. P. 1369–1392.
- [3] *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Optimization of output feedback control under set-membership uncertainty // *JOTA.* 2011. V. 151. P. 11–32.
- [4] *Kurzhanski A.B., Tochilin P. A.* On the problem of the synthesis of controls under uncertainty from the data of finite-time observers // *Differ. Uravn.* 2011. V. 47, no. 11. P. 1599–1607.

¹American Mathematical Society, Ann Arbor, MI, USA

Dynamic optimization challenges in networked vehicle systems

J. B. Sousa¹

The dynamic optimization challenges arising in networked vehicle systems are discussed in the framework of coupled physical and computational dynamics. The challenges are discussed with reference to classical control problems of optimization, invariance and attainability for systems governed by the laws of physics and computation. Directions for future research are discussed with special emphasis on the aspects of coupled dynamics and dynamic structure that seem to be missing in the literature.

Mathematical model of hyperthermia effect produced by magnetic particles

A. Yu. Zubarev², A. F. Abu-Bakr^{2,3}

Magnetic hyperthermia is a perspective method of tumor (cancer) therapy [1,2]. The main idea of this method is in injection into the organism of magnetic nanoparticles, which can attach to the tumor cells. Oscillating magnetic field heats the particles and, therefore, the cells. When the local temperature achieves 42–45 degrees, the tumor cells die.

The careful choice of the particle size, concentration, as well amplitude and frequency of the magnetic field is necessary for the successful and effective organization and control of the hyperthermia therapy. In its turn, it requires development of mathematical models of the particle dynamics under oscillating magnetic field. The known mathematical models deal with single particles, which interact only with the applied

¹University of Porto, Portugal

²Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

³Menoufiya University, Shebin El-Koom, Egypt

field. However in practical situations, the interparticle interaction can significantly affect the heat production in the system of the particles.

We present results of mathematical modelling of the heat production in a suspension of the nano-sized ferromagnetic particles. Magnetic interaction between these particles is estimated in the pair approximation, where interaction only between two particles is taken into account.

Mathematically, this model presents a system of nonlinear differential equations for remagnetization of two interacting particles. For maximal simplification of calculations, we suppose that the spatial positions of these particles are fixed, as it takes place when the particles are attached to the cell membranes.

The energy of the dipole-dipole interaction between the particles takes the form

$$U = \frac{-\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})(\vec{m}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r^3} \right). \quad (1)$$

Here, \vec{r} is the radius-vector, linking centers of the particles, \vec{m}_1 and \vec{m}_2 are magnetic moments of the particles, μ_0 is the vacuum permeability. We suppose that they are identical and the following equality $|m_1| = |m_2| = m$ holds.

In the framework of the model equations, the particle dynamics can be presented as

$$6\eta\delta V \frac{d\theta_i}{dt} = -\mu_0 H^0 m \sin\theta_i - \frac{\partial U}{\partial \theta_i}. \quad (2)$$

Here, θ_i is deviation of the vector of magnetic moment \vec{m}_i from the applied magnetic field, $H^0 = H_0 \cos(\omega t)$ be the field strength, V is the volume of the particle, η is the viscosity, δ is the particle shape factor. The intensity of power production can be calculated as follows:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 H_0 \omega \varphi}{\pi^2 T c} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^T m \cos\theta_i(t) \sin(\omega t) dt d\theta_{01} d\theta_{02}. \quad (3)$$

Here, $c = c_p \varphi + c_f(1 - \varphi)$ and c_p and c_f are the specific heat capacity (per unit volume) of the particle material and the carrier fluid respectively, φ is the particle volume concentration, θ_{01} and θ_{02} are the initial magnitude of the angle θ_i (initial condition for equation (2)).

Nonlinear differential equations have been solved numerically. Intensity of the power production $\langle P \rangle$ in suspension of the particles has

been calculated. Figure 1 demonstrates results of calculation of $\langle P \rangle$ for two interacting particles in the contact and for single particle, as well.

The results of the mathematical modelling of the heat production by interacting magnetic particles demonstrate that this interaction leads to quite significant increase of the heat production. The relative positions of the particles affect the value of the heat production. This allows one to control and optimize the hyperthermia effect changing concentration and mutual position of the particles.

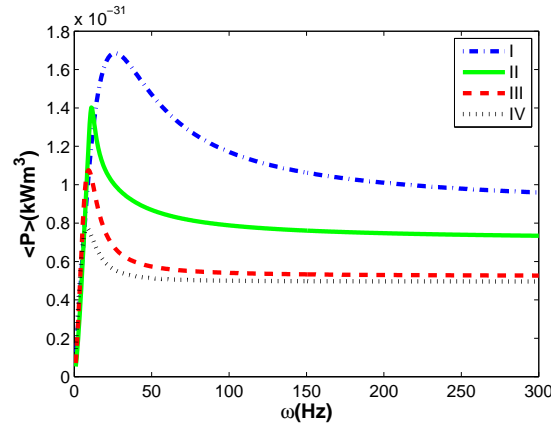


Figure. 1: Intensity of the power production vs. the field frequency ω of the magnetic field when the distance between centers of two magnetic particles is equal to the particle diameter in the following cases: I) the particles are situated perpendicular to the field; II) the particles are situated at the direction $\pi/4$ with respect to the field; IV) the particles are situated along the field and III) result for a single particle

- [1] Wang B. Rheology and magnetolysis of tumor cells. PhD dissertation, Universite de Nice-Sophia Antipolis-UFR Sciences, France. 2012 (under G. Bossis).
- [2] Haase C., Nowak U. Role of dipole-dipole interactions for hyperthermia heating of magnetic nanoparticle ensembles // Physical Review B. 2012. Vol. 85, pp. 045435.

Список авторов

Abu-Bakr A. F.	260	Timoshin S. A.	245
Allgöwer F.	224	Turova V. L.	228
Andrianov A. N.	237	Veliov V. M.	226
Anikin A. S.	237	Zubarev A. Yu.	260
Aseev S. M.	226	Аввакумов С. Н.	106
Botkin N. D.	228	Авербух Ю. В.	27
Bravyi E. I.	230	Агеев А. Л.	29
Chernousko F.	232	Азамов А. А.	31
Dalton M. G.	250	Ананьев Б. И.	32
Davydov A. A.	233	Ананьевский И. М.	34
Dontchev A. L.	235	Андреев А. С.	35
Finkelstein E. A.	235	Антонова Т. В.	29
Gornov A. Yu.	235, 237	Банников А. С.	37
Guseinov Kh. G.	239	Банщикова И. Н.	152
Huseyin A.	239	Барабанов И. Н.	194
Huseyin N.	239	Башкирцева И. А.	38, 40
Khabarov N. V.	243	Бедин Д. А.	42
Krasinskaya E. M.	241	Благодатских А. И.	44
Krasinskiy A. Ya.	241	Близорукова М. С.	46
Krasovskii A. A.	243	Бочаров Г. А.	118
Krejčí P.	245	Брыкалов С. А.	199
Krener A. J.	247	Бурмашева Н. В.	177
Krupennikov E. A.	248	Васильев С. Н.	47
Kryazhimskiy A. V.	250	Виноградова М. Н.	141
Melnikov N. B.	250	Воронов В. А.	49
Nassar A. F.	233	Воротников В. И.	50
O'Neill B. C.	250	Габасов Р.	104
Obersteiner M.	243	Гасников А. В.	52
Ovsyannikov D. A.	253	Глушенкова В. В.	118
Pereira F. L.	255	Гомоюнов М. И.	54
Reshmin S. A.	255	Горнов А. Ю.	55
Reuter W. H.	243	Гороховик В. В.	57
Rozanova O. S.	258	Гребенщиков Б. Г.	59
Ruijven B. J. van.	250	Гусев М. И.	61
Sivergina I. F.	259	Данилин А. Р.	63
Sousa J. B.	260	Данилов Л. И.	64

Двуреченский П. Е.	52, 66	Кудашова Е. А.	35
Дмитрук Н. М.	68, 104	Кудрявцев К. Н.	123
Долгий Ю. Ф.	70	Кукушкина Е. В.	125
Дружинин А. Э.	47	Кумков С. С.	83, 127
Дряженков А. А.	153	Куржанский А. Б.	129
Думшева Т. Д.	72	Курликовский Д. В.	29
Дыхта В. А.	74, 76	Лавринович Л. И.	96
Егоров А. И.	78	Лебедев П. Д.	129
Еграшкина Ж. Е.	80	Лемперт А. А.	100
Екатеринчук Е. Д.	40, 82	Ложников А. Б.	59, 72
Жаринов А. Н.	83	Лукоянов Н. Ю.	54, 131
Жуковский В. И.	85	Лутманов С. В.	133
Жуковский Е. С.	87	Максимов В. И.	134
Зайцев В. А.	89	Мартышенко Ю. Г.	50
Зароднюк Т. С.	55	Матвийчук А. Р.	92
Зеликин М. И.	91	Никольский М. С.	135
Зимовец А. А.	92	Орлов М. В.	106
Знаменская Л. Н.	78	Осипов Ю. С.	91
Иванов А. Г.	42	Павленко В. Н.	137
Иванов Г. Е.	66	Панасенко Е. А.	139
Измestьев И. В.	197	Паршиков Г. В.	199
Ильин Е. Д.	94	Пацко В. С.	127
Казаков А. Л.	100, 129	Перегудова О. А.	35
Калинин А. И.	96	Петров Н. Н.	141
Калитин Б. С.	98	Петросян Л. А.	143
Кандоба И. Н.	72	Пименов В. Г.	145
Каюмов Р. И.	102	Плаксин А. Р.	131
Ким А. В.	118	Погодаев Н. И.	147
Кириллова Ф. М.	104	Подивилова Е. О.	148
Киселёв Ю. Н.	106	Половинкин Е. С.	150
Клейменов А. Ф.	108	Поносов А. В.	87
Козьмин И. Н.	72	Попова С. Н.	152
Колпакова Е. А.	109	Потапов М. М.	153
Корнев Д. В.	111	Починский В. И.	72
Короткий А. И.	113	Родин А. С.	155
Костоусов В. Б.	72	Родина Л. И.	157
Костоусова Е. К.	72, 115	Розенберг В. Л.	159
Красовский А. Н.	118	Рязанова Т. В.	40
Красовский Н. А.	119	Ряшко Л. Б.	82, 161, 169
Кругликов С. В.	121	Сагоян А. А.	172

Саматов Б. Т.	162	Шагалова Л. Г.	211
Самсонюк О. Н.	76	Шананин А. А.	213
Сафронов М. А.	118	Шевченко И. И.	215
Седова Н. О.	80	Шевченко Р. И.	217
Серков Д. А.	165	Шелудько А. С.	218
Сесекин А. Н.	167	Ширяев В. И.	94, 148, 218
Слепухина Е. С.	169	Шориков А. Ф.	220
Соколов В. Ф.	170	Щеглова А. А.	222
Соловьева Н. А.	141		
Солодушкин С. И.	172		
Сорокин С. П.	174		
Стабулит И. С.	123		
Старицын М. В.	174		
Стародубцева Ю. В.	113		
Стрекаловский А. С.	175		
Стружанов В. В.	177		
Субботина Н. Н.	178		
Сумин В. И.	180		
Сумин М. И.	182		
Сурков П. Г.	185		
Тарасьев А. М.	119, 187		
Тимофеев Н. А.	189		
Тимофеева Г. А.	189		
Токманцев Т. Б.	178		
Толстоногов А. А.	191		
Тонков Е. Л.	139		
Трофимович М. А.	57		
Тхай В. Н.	192, 194		
Усова А. А.	187		
Успенский А. А.	195		
Ухоботов В. И.	197		
Ушаков А. В.	195		
Ушаков В. Н.	199		
Федотов А. А.	42		
Филиппова Т. Ф.	201		
Финогенко И. А.	203		
Хлопин Д. В.	204		
Ченцов А. Г.	206		
Чернов А. В.	180, 208		
Чикрий А. А.	210		

List of authors

Abu-Bakr A. F.	260	Druzhinin A. E.	47
Ageev A. L.	29	Dryazhenkov A. A.	153
Allgöwer F.	224	Dumsheva T. D.	72
Ananyevskiy I. M.	34	Dvurechensky P. E.	52, 66
Ananyev B. I.	32	Dykhta V. A.	74, 76
Andreev A. S.	35	Egorov A. I.	78
Andrianov A. N.	237	Egrashkina J. E.	80
Anikin A. S.	237	Ekaterinchuk E. D.	40, 82
Antonova T. V.	29	Fedotov A. A.	42
Aseev S. M.	226	Filippova T. F.	201
Averboukh Yu.	27	Finkelstein E. A.	235
Avvakumov S. N.	106	Finogenko I. A.	203
Azamov A. A.	31	Gabasov R.	104
Bannikov A. S.	37	Gasnikov A. V.	52
Banshchikova I. N.	152	Glushenkova V. V.	118
Barabanov I. N.,	194	Gomoyunov M. I.	54
Bashkirtseva I. A.	38, 40	Gornov A. Yu.	55, 235, 237
Bedin D. A.	42	Gorokhovik V. V.	57
Blagodatskikh A. I.	44	Grebenschikov B. G.	59
Blizorukova M. S.	46	Guseinov Kh. G.	239
Bocharov G. A.	118	Gusev M. I.	61
Botkin N. D.	228	Huseyin A.	239
Bravyi E. I.	230	Huseyin N.	239
Brykalov S. A.	199	Ilin E. D.	94
Burmasheva N. V.	177	Ivanov A. G.	42
Chentsov A. G.	206	Ivanov G. E.	66
Chernousko F.	232	Izmestev I. V.	197
Chernov A. V.	180, 208	Kalinin A. I.	96
Chikrii A. A.	210	Kalitin B. S.	98
Dalton M. G.	250	Kalyakin L.	240
Danilin A. R.	63	Kandoba I. N.	72
Danilov L. I.	64	Kayumov R. I.	102
Davydov A. A.	233	Kazakov A. L.	100, 129
Dmitruk N. M.	68, 104	Khabarov N. V.	243
Dolgii Yu. F.	70	Khlopin D. V.	204
Dontchev A. L.	235	Kim A. V.	118

Kirillova F. M.	104	Osipov Yu. S.	91
Kiselev Yu. N.	106	Ovsyannikov D. A.	253
Kleimenov A. F.	108	Panasenko E. A.	139
Kolpakova E. A.	109	Parshikov G. V.	199
Kornev D. V.	111	Patsko V. S.	127
Korotkii A. I.	113	Pavlenko V. N.	137
Koustousova E. K.	72, 115	Peregudova O. A.	35
Koustousov V. B.	72	Pereira F. L.	255
Koz'min I. V.	72	Petrosyan L. A.	143
Krasinskaya E. M.	241	Petrov N. N.	141
Krasinskiy A. Ya.	241	Pimenov V. G.	145
Krasovskii A. A.	243	Plaksin A. R.	131
Krasovskii A. N.	118	Podivilova E. O.	148
Krasovskiy N. A.	119	Pogodaev N. I.	147
Krejčí P.	245	Polovinkin E. S.	150
Krener A. J.	247	Ponosov A. V.	87
Kruglikov S. V.	121	Popova S. N.	152
Krupennikov E. A.	248	Potapov M. M.	153
Kryazhimskiy A. V.	250	Potchinskii V. I.	72
Kudashova E. A.	35	Reshmin S. A.	255
Kudryavtcev K. N.	123	Reuter W. H.	243
Kukushkina E. V.	125	Rodina L. I.	157
Kumkov S. S.	83, 127	Rodin A. S.	155
Kurlikovskii D. V.	29	Rozanova O. S.	258
Kurzhanski A. B.	129	Rozenberg V. L.	159
Lavrinovich L. I.	96	Ruijven B. J. van.	250
Lebedev P. D.	129	Ryashko L. B.	82, 161, 169
Lempert A. A.	100	Ryazanova T. V.	40
Lozhnikov A. B.	59, 72	Safronov M. A.	118
Lukoyanov N. Yu.	54, 131	Sagoyan A. A.	172
Lutmanov S. V.	133	Samatov B. T.	162
Maksimov V. I.	134	Samsonyuk O. N.	76
Martyshenko Yu. G.	50	Sedova N. O.	80
Matviychuk A. R.	92	Serkov D. A.	165
Melnikov N. B.	250	Sesekin A. N.	167
Nassar A. F.	233	Shagalova L. G.	211
Nikolskii M. S.	135	Shananin A. A.	213
O'Neill B. C.	250	Shcheglova A. A.	222
Obersteiner M.	243	Sheludko A. S.	218
Orlov M. V.	106	Shevchenko I. I.	215

Shevchenko R. I.	217	Zarodnyuk T. S.	55
Shiryaev V. I.	94, 148, 218	Zelikin M. I.	91
Shorikov A. F.	220	Zharinov A. N.	83
Sivergina I. F.	259	Zhukovskiy E. S.	87
Slepukhina E. S.	169	Zhukovskiy V. I.	85
Sokolov V. F.	170	Zimovets A. A.	92
Solodushkin S. I.	172	Znamenskaya L. N.	78
Solovyeva N. A.	141	Zubarev A. Yu.	260
Sorokin S. P.	174		
Sousa J. B.	260		
Stabulit I. S.	123		
Staritsyn M. V.	174		
Starodubtseva Yu. V.	113		
Strekalovsky A. S.	175		
Struzhanov V. V.	177		
Subbotina N. N.	178		
Sumin M. I.	182		
Sumin V. I.	180		
Surkov P. G.	185		
Tarasyev A. M.	119, 187		
Timofeeva G. A.	189		
Timofeev N. A.	189		
Timoshin S. A.	245		
Tkhai V. N.	192, 194		
Tokmantsev T. B.	178		
Tolstonogov A. A.	191		
Tonkov E. L.	139		
Trafimovich M. A.	57		
Turova V. L.	228		
Ukhobotov V. I.	197		
Ushakov A. V.	195		
Ushakov V. N.	199		
Usova A. A.	187		
Uspenskii A. A.	195		
Vasilyev S. N.	47		
Veliov V. M.	226		
Vinogradova M. N.	141		
Voronov V. A.	49		
Vorotnikov V. I.	50		
Zaitsev V. A.	89		

Научное издание

ДИНАМИКА СИСТЕМ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Тезисы докладов Международной конференции, посвященной
90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики УрО РАН

Ответственный за выпуск *А. Г. Иванов*

Подписано в печать 25.08.2014. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 17. Тираж 170 экз. Заказ 5155.

ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук.
620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина».
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 19.

Отпечатано ООО «Издательство УМЦ УПИ».
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, д. 35а, оф. 2.